

33.5
SZABO, A.
1965

DER MATHEMATISCHE BEGRIFF δύναμις UND DAS SOG. 'GEOMETRISCHE MITTEL'

UEBERSICHT:

Einleitung	215
I. Der mathematische Gebrauch des Wortes δύναμις	216
II. Die «Theaitetos»-Stelle (147 D - 148 B)	219
III. Der Ursprung der Ausdrucksweise δύνασθαι	232
IV. Flächenumgestaltung und τετραγωνισμός	240
V. τετραγωνισμός und 'geometrisches Mittel'	247
Schlussbemerkung	252

Der Name für den Begriff der mathematischen *Potenz* — d.h. also: der Name für das ein- oder mehrmalige Multiplizieren einer Zahl (oder einer Grösse) mit sich selbst — ist in allen europäischen Sprachen eine missverstandene Lehnübersetzung. Denn italienisch *potenza*, deutsch *Potenz*, französisch *puissance*, englisch *power*, holländisch *macht* u.a.m. gehen ja doch alle — über lateinisch *potentia* hindurch — auf griechisch δύναμις zurück. Und man liest in der Tat in den Lexika, δύναμις hiesse: «*Vermögen, Kraft, Macht* usw.». Kein Zweifel, man hat eben diese Wortbedeutung zugrunde gelegt, als man versuchte, unseren Terminus in die einzelnen europäischen Sprachen zu übersetzen.

Aber es ist auf der anderen Seite offenbar doch unmöglich, dass das Wort δύναμις in seinem ursprünglichen mathematischen Gebrauch gerade *diesen* Sinn gehabt hätte. Es wäre ja unerklärlich, wieso man eigentlich einen solchen sonderbaren Namen («*Kraft*» oder «*Macht*») einer Art Multiplikation hätte geben können. Natürlich hatte dieses Wort in seinem älteren mathematischen Gebrauch einen völlig anderen Sinn, nur man hat eben — wie mir scheint — diesen alten mathematischen Sinn, seitdem er schon im Altertum vergessen wurde, noch nicht wiederentdeckt.

Ich glaube nun, dass es sich lohnen wird, den Ursprung dieses Terminus genauer zu beleuchten, da er — meiner Ansicht nach —

auch ein interessantes Kapitel der frühgriechischen Mathematikgeschichte in ein neues Licht zu stellen vermag.

In dem folgenden will ich zunächst von jener Sammlung der Belegstellen für das Wort $\deltaύναμις$ ausgehen, die man am bequemsten in den Büchern von TH. L. HEATH nachschlagen kann (1).

I.

Vor allem wollen wir einfach den Sinn, die Wortbedeutung unseres Terminus an den Belegstellen überblicken — ohne dabei gleich auch nach der Herkunft der Namensgebung zu fragen.

Uebersieht man nun die wichtigsten Belegstellen für unseren Terminus in der mathematischen Literatur, so fallen sogleich zwei Tatsachen auf.

1. Der mathematische Gebrauch des Wortes $\deltaύναμις$ lässt sich mindestens von PLATON ab über die ganze Antike hindurch für jedes Zeitalter der griechischen Wissenschaft belegen. In den späten Jahrhunderten tauchen sogar, bei DIOPHANTOS von Alexandrien (2), plötzlich auch solche neuen mathematischen Termini auf, die aus unserem Wort ($\deltaύναμις$) gebildet wurden, und die es früher gar nicht gab, wie z. B.: $\deltaύναμοδύναμις$, $\deltaύναμόκυβος$ usw. (3).

2. Die andere Beobachtung betrifft die Wortbedeutung selber. Es ist nämlich auffallend, dass das Wort $\deltaύναμις$ in den mathematischen Texten des Altertums immer nur die « zweite Potenz » (= *Quadrat*) und nie eine höhere bezeichnet (4). Massgebend war dieser mathe-

(1) TH. L. HEATH, « Archimedes » (1. ed. 1897; 2. ed. with Supplement 1912; Dover Publication). — « The Thirteen Books of Euclid's Elements I., II., III. » (1. ed. 1908; 2. ed. 1926; Dover Publication). — A History of Greek Mathematics I-II, Oxford 1921.

(2) Sieh über ihn B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel-Stuttgart 1956, 457 ff.

(3) TH. L. HEATH, A History... II 457-458.

(4) Bei EUKLID beginnt die 2. Definition im X. Buch der « Elemente »: $\epsilonὐθεῖαι δυνάμει σύμμετροι εἶναι, ὅταν κτλ.$ = « Strecken sind *quadrati* commensurabel, wenn etc. » (C. THÄER). — J. L. HEIBERG versuchte die zitierten Worte lateinisch folgendermassen zu übersetzen: « Rectae *potentia* commensurabiles sunt, ubi etc. » Irreführend ist hier das lateinische Wort: *potentia*. Mit Recht bemerkte gerade gegen derartige Uebersetzungen TH. L. HEATH: « *Commensurable in square* is in the Greek $\deltaυνάμει σύμμετρος$. In earlier translations (e. g. Williamson's) $\deltaυνάμει$ has been translated '*in power*', but as the particular *power* represented by $\deltaύναμις$ in Greek geometry is *square*, I have thought it best to use the latter word throughout » (The Thirteen Books... III 11).

mathematische Sinn des Wortes (« zweite Potenz ») auch dann noch, als man jene neuen, eben erwähnten Termini gebildet hatte, denen wir bei DIOPHANTOS begegnen. Denn schliesslich heisst ja bei DIOPHANTOS $\deltaύναμοδύναμις$ « die vierte Potenz einer unbekannten Grösse » ($x^4 = x^2 \cdot x^2$). Die Verdoppelung selber zeigt, dass der ursprüngliche Terminus, $\deltaύναμις$, nur als « zweite Potenz » verstanden werden konnte. Nach demselben Prinzip gebildet ist auch der andere zitierte Terminus: $\deltaύναμόκυβος$ = « fünfte Potenz einer unbekannten Grösse » (x^5 , d.h. also « zweite Potenz » mal « dritte Potenz », $\deltaύναμις$ mal $\kappaύβος$). Denkt man nun an diese immer beibehaltene Bedeutung des griechischen mathematischen Terminus — $\deltaύναμις$ = « zweite Potenz » — so muss man einsehen, dass der Begriff $\deltaύναμις$ mit unserem Begriff « Potenz » eigentlich auch gar nicht identisch ist. Es scheint eher, dass damals, als dieses griechische Wort der Mathematik mit lateinisch *potentia*, oder mit den modernen Varianten desselben lateinischen Wortes, wiedergegeben wurde, gleich auch der Begriff, der dahinter steckte, eine solche wesentliche Erweiterung erfuhr, wofür es aus der Antike gar kein Beispiel gibt (5).

Nachdem wir nun die erste wichtige Tatsache über die Bedeutung unseres Wortes festgestellt hatten — dass nämlich $\deltaύναμις$ immer nur die « zweite Potenz » und nie eine höhere bezeichnen kann — wollen wir auch jene Nuancen-Unterschiede der Wortbedeutung nicht aus dem Auge verlieren, die sich z.B. auch bei PLATON beobachten lassen — besonders wenn man einige Stellen untereinander vergleicht.

Man begegnet z.B. einer der unsrigen sehr nahen Gebrauchsart dieses Wortes in dem « Staat » (6). Es werden an der betreffenden Stelle die Lustgefühle, die einerseits der König und andererseits der Tyrann haben kann, zahlenmässig miteinander verglichen, und in diesem Zusammenhang gebraucht PLATON die Ausdrücke $\kappaατὰ δύναμιν$ und $\kappaατὰ τρίτην αὐξήν$. Die Interpretation der Stelle ist überhaupt nicht problematisch. Wie man mit Recht bemerken konnte, heisst hier $\kappaατὰ δύναμιν$ « nach der zweiten Potenz », und $\kappaατὰ τρίτην αὐξήν$ = « nach der dritten Potenz » (7). Interessant ist diese Stelle für uns nur deswegen, weil man aus dem Textzusammenhang auch jene Zahlen entnehmen kann, die mit den beiden eben zitierten

(5) Es wäre interessant zu wissen, bei wem und wo zuerst die mathematische *potentia*, nicht mehr bloss eine wörtliche Wiedergabe der griechischen $\deltaύναμις$ ist. Dasselbst muss sie nämlich auch schon eine höhere (dritte, vierte usw.) Potenz bezeichnen können. — Mir ist die gesuchte Stelle zur Zeit noch nicht bekannt.

(6) Resp. 587 D.

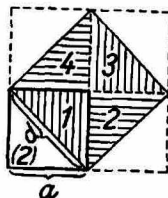
(7) Vgl. dazu die Interpretation von TH. L. HEATH, A History... I 297.

Ausdrücken angedeutet werden; es sind 81 und 729. PLATON bezeichnet also an dieser Stelle mit dem Wort $\deltaύναμις$ die zweite Potenz einer Zahl ($9^2 = 81$), eine *Quadratzahl*, dasselbe, was nach der bekannten Euklidischen Terminologie $\tauετράγωνος ἀριθμός$ heisst (8).

Nicht genau denselben Sinn hat das Wort $\deltaύναμις$ an einer anderen Stelle im Dialog «Politikos» (9). Hier liest man nämlich den Ausdruck: $\eta\ διάμετρος\ \eta\ δυνάμει\ δίπους$, wörtlich übersetzt: «die Diagonale, die mit ihrer zweiten Potenz ($\deltaυνάμει$) zwei Fuss (im Quadrat) ist.» Es handelt sich offenbar um die Diagonale (d) des Quadrats mit Seite a , wenn $a = 1$ Fuss (in Länge) ist; denn in diesem Fall ist: «die Diagonale mit ihrer zweiten Potenz» ($\eta\ διάμετρος\ δυνάμει$), also nach unserer Bezeichnungsart:

$$d^2 = 2 \text{ Fuss.}$$

Nun heisst das Wort $\deltaύναμις$ — nach unserer Denkweise — auch in diesem letzteren Fall: «zweite Potenz einer Zahl», und zwar: «die zweite Potenz der Zahl $\sqrt{2}$ ». Aber nicht so ist es im Sinne der griechischen Mathematik! Nach der Euklidischen Definition (*Elem. VII. def. 2*) ist nämlich $\sqrt{2}$ gar keine Zahl. Es gibt überhaupt — nach griechischer Denkweise — gar keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert 2 ergeben würde. Darum ist es auch irreführend, wenn man in unserem vorliegenden Fall $\deltaύναμις$ als «zweite Potenz» übersetzt. Denn überlege man sich nur: warum heisst es wohl, dass «die Diagonale mit ihrer zweiten Potenz ($\deltaυνάμει$) 2 Fuss (im Quadrat) ausmacht, wenn die Seite des Quadrats $a = 1$ Fuss (in Länge) ist»? — Offenbar darum, weil das Quadrat auf der Diagonale (d^2) gerade das Doppelte der Quadratfläche a^2 ist (10).



Will man also an unserer Stelle den Terminus $\deltaύναμις$ so übersetzen, dass man nicht nur einfach den mathematischen Sinn der Worte wiedergibt, sondern so, dass man dabei auch noch der grie-

(8) *Elem. VII. def. 19.*

(9) *Politikos 266 B 3.*

(10) Vgl. dazu PLATON, «Menon» 82 B-85 D, und meinen Aufsatz: «Deiknymi, als math. Terminus für beweisen, *Maia* X 1958 106-131.

chischen Denkweise gerecht werde, dann gebraucht man anstatt des Ausdruckes «zweite Potenz» eher einfach nur das Wort «*Quadrat*». Das ist eben der genauere Wortsinn; $\eta\ διάμετρος\ \eta\ δυνάμει\ δίπους$ heisst: «die Diagonale, die mit dem *Quadrat* (auf ihr) zwei Fuss ist». — Dieser ursprünglichere mathematische Sinn des Terminus $\deltaύναμις = \text{«Quadrat»}$ (11) — passt natürlich sehr wohl auch in unsere erstere Platon-Stelle (*Resp. 587 D*) hinein. Denn dort war ja gerade darüber die Rede, dass man die Zahl 9 «nach dem *Quadrat*» ($= \kappaατὰ\ δύνανιν$) nimmt, und so bekommt man die Quadratzahl ($= \tauετράγωνος ἀριθμός$) 81. — Auf der anderen Seite versteht man auch leicht wieso ein Ausdruck für «*Quadrat*» ($\deltaύναμις$) auch zu einer technischen Bezeichnung für «zweite Potenz» werden konnte. Auch heute ist noch oft das Wort «Quadrat» bloss ein synonyme Ausdruck für «zweite Potenz» — im Einklang damit, dass unsere Mathematik schon in viel höherem Masse «algebraisch» orientiert ist, als die Wissenschaft der Griechen war.

II.

Nachdem wir nun wissen, dass der ursprünglichere mathematische Sinn des Terminus $\deltaύναμις$ einfach nur «*Quadrat*» hiess, dürften wir jetzt wohl auch schon nach der Herkunft dieser Namengebung fragen. — Aber es sei doch erlaubt — bevor ich auf den eben erwähnten Punkt hinübergehe — bloss um einer gewissen «Vollständigkeit» willen, hier noch die Interpretation einer solchen Platon-Stelle einzufügen, die teils unsere bisherigen Feststellungen, betreffs der Wortbedeutung von $\deltaύναμις$, erhärtet, und teils auch mindestens einige Fehler der früheren Erklärungen zurechtstellt.

Es handelt sich um eine interessante und oft zitierte Stelle aus dem Dialog «Theaitetos», wo unser Terminus $\deltaύναμις$ auch mehrmals nacheinander benutzt wird (12). Will man nun diese — was unser Wort betrifft — sehr aufschlussreiche Stelle richtig verstehen, so muss man sich von dem Textzusammenhang an folgendes erinnern.

SOKRATES führt in diesem Dialog ein Gespräch mit dem jungen THEAITETOS in Anwesenheit des Lehrers von dem letzteren, des Mathematikers THEODOROS. Es wird das Problem der Wissenschaft, oder einfach nur: dasjenige des *Wissens* erörtert. «Was ist Wissen?»

(11) Richtig schreibt also TH. L. HEATH (*Archimedes* p. CLXI): « $\deltaύναμις$ expresses a square (literally a power) etc.»

(12) «Theaitetos» 147 D-148 B.

— τί σοι δοκεῖ εἶναι ἐπιστήμη (146 C 3) —, auf diese Frage sollte THEAITETOS antworten. Aber der Junge erteilt auf die Frage des SOKRATES zunächst eine unzulängliche, um nicht zu sagen: eine *törichte* Antwort. Anstatt dessen nämlich, dass er eine Definition des Wissens versuchte, antwortet er mit einer naiven Aufzählung, etwa folgendermassen: Wissen ist alles das, was man von THEODOROS lernen kann (Geometrie, Astronomie, Musik, Rechenkunst etc.); ausserdem Wissen ist auch das Können des Schumachers und dasjenige der übrigen Handwerker usw. usw. (146 C-D). — Natürlich ist nun SOKRATES mit dieser Antwort nicht zufrieden, und er macht auch den Jungen auf seinen Fehler aufmerksam. Er hätte ja nicht nach einer Aufzählung der verschiedenen Arten des Wissens gefragt, sondern die Frage hiess: was ist Wissen überhaupt, also was ist es auch in seinen verschiedensten Arten? Auch mit einem Beispiel illustriert er dann noch den eben begangenen Fehler des Jungen. Die Antwort des THEAITETOS auf die vorgelegte Frage war ebenso *lächerlich* (147 B 10-11), als wenn man auf die Frage: «Was ist Lehm?» — mit einer Aufzählung der verschiedenen Lehmarten der einzelnen Handwerker antworten würde. Die richtige Antwort hiesse dagegen: Lehm ist eine Mischung von Erde und Wasser. Erst nach dieser Erklärung versteht überhaupt THEAITETOS den Sinn der vorigen Frage. Ja, jetzt wusste er schon, wo SOKRATES mit seiner Frage hinaus wollte. Etwas ähnliches ist ja ihm, THEAITETOS, und seinem eben anwesenden Freund, dem anderen (jungen) SOKRATES auch nach einer Mathematik-Stunde des THEODOROS ergangen. Darauf lässt nun der Führer des Dialoges, der ältere SOKRATES, als guter Pädagoge, selbstverständlich den Jungen erzählen, was seine «mathematische Erfahrung» war, ob diese in der Tat etwas mit der jetzigen Frage zu tun hätte. Erst daraus würde man nämlich doch ersehen können, ob der Junge die Frage (diesmal) wirklich verstanden hätte (13). Das ist nun der Rahmen (jener) «mathematischen Stelle» im Dialog «Theaitetos», die wir in dem folgenden auch eingehender besprechen müssen. Der junge THEAITETOS schildert nämlich seine «mathematische Erfahrung» folgendermassen:

«Dieser THEODOROS hat vor uns etwas über *Quadrate* illustriert

(13) Verfehlt und irreführend ist also die folgende Schilderung, der man bei Historikern der Mathematik häufig begegnet: «PLATON gibt im Dialog auch ein Beispiel einer *mathematischen Untersuchung des jungen THEAITETOS* (?). Das Beispiel ist ziemlich *an den Haaren herbeigezogen* (?): Es sollte als Einleitung zu einer philosophischen Diskussion dienen, *passt aber nicht recht dazu* (?); usw. usw. ».

(περὶ δυνάμεων τι ἦντιν ... ἔγραφε, 147 D 2 ff.), über dasjenige, dessen Fläche drei Quadratfuss, und über dasjenige, dessen Fläche fünf Quadratfuss ist (τῆς τε τριπόδος περὶ καὶ πεντέποδος), indem er zeigte, dass diese der Länge nach zu dem einfüssigen nicht kommensurabel sind (ἀποφαίνων, ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδίαίᾳ); und so nahm er jedes Quadrat, das eine nach dem anderen vor, bis zu dem siebzehnfüssigen. Bei diesem hörte er dann auf ». Wir wollen bei diesem Satz für einen Augenblick stehenbleiben, denn ich muss ja meine Uebersetzung — mindestens in einigen Punkten — doch begründen.

Ich habe in dem ersten Satz das Wort δύναμις selbstverständlich mit «*Quadrat*» übersetzt, weil meiner Ansicht nach diese Uebersetzung *die einzig mögliche und richtige ist*. Aber nicht so wird derselbe Satz von den meisten Historikern der Mathematik übersetzt. Sie glauben nämlich: THEODOROS hätte seinen Schülern doch nicht bloss etwas über «*Quadrate*» sondern über «*Quadratseiten*» gelehrt, und darum hiesse in unserem Satz δύναμις auch nicht «*Quadrat*», sondern «*Quadratseite*». Nun werde ich gleich zeigen, wie unhaltbar diese Auffassung ist. Das Wort δύναμις kann an unserer Stelle *unmöglich* den Sinn «*Quadratseite*» haben. Aber es wird sich vielleicht lohnen, vor dieser Beweisführung früher noch daran zu erinnern, wer eigentlich an diesem konsequent begangenen Uebersetzungsfehler der namhaftesten Historiker der Mathematik schuld ist?

Meines Wissens verfiel zu allererst P. TANNERY (i. J. 1876) auf den *falschen* Gedanken, dass das Wort δύναμις in dem Dialog «Theaitetos» den Sinn «*Quadratwurzel*» hätte (14). Acht Jahre später (1884) hat zwar TANNERY in einer anderen Arbeit (15) die Irrtümlichkeit seiner früheren Ansicht schon eingesehen, und er schlug diesmal eine andere «*Lösung*» vor: man sollte an der betreffenden Stelle des «Theaitetos» das Wort δύναμις überall in δυνάμενη verwandeln. Aber mit diesem neueren Irrtum hatte er schon weniger Glück; die Historiker sind ihm nicht gefolgt (16). Nur seinem früheren Irrtum — den er auch später (1889) umsonst abschwören wollte (17) — war

(14) «Le nombre nuptial dans Platon», Revue philosophique 1876, I 170-188 = Mémoires Scientifique (J. L. HEIBERG - H. G. ZEUTHEN, Toulouse-Paris 1912) I 12-38. Die beiläufige Bemerkung, auf die ich oben hinwies, steht in Mém. Scient. I 33, 2.

(15) «Sur la langue mathématique de Platon», Annales de la Faculté des lettres de Bordeaux 1884, I 95-105 - Mém. Scient. II 91-104.

(16) Vgl. z. B. B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 234: «es ist nicht nötig, mit TANNERY das Wort δύναμις durch δυνάμενη (Erzeugende) zu ersetzen».

(17) Es wird sich lohnen, aus der Arbeit von TANNERY (aus d. J. 1889, «L'hypothèse géométrique du Ménon de Platon», Archiv f. Gesch. d. Phi-

bei den besten Vertretern unserer Wissenschaft ein langes und zähes Nachleben gesichert (18).

Nun sei es hier vor allem kurz erklärt, warum an unserer Stelle δύναμις nicht «Quadratseite» heissen kann. Ich habe dafür zwei gewichtige Argumente.

1. Ich kenne aus der mathematischen Literatur der Griechen gar keinen einzigen Beleg dafür, dass das Wort δύναμις auch jemals den Sinn «Quadratseite» haben könnte. Soviel ich weiss, hat dieses Wort, als mathematischer Terminus, immer und ausschliesslich nur den Sinn: «Quadrat» (19). Natürlich ist der «andere» Sinn dieses Terminus — «zweite Potenz» — nur eine Modernisierung, sozusagen eine «Algebraisierung» — meistens: unsererseits.

2. Auch grammatikalisch und inhaltlich kann unser Wort an der betreffenden Stelle (Theait. 147 D 3) nicht den Sinn «Quadratseite» haben. Denn versuche man nur die Uebersetzung des fraglichen Ausdruckes mit «Quadratseite», und sofort wird dadurch die ganze Stelle sinnlos. Die problematischen Satzteile heissen nämlich griechisch: περὶ δυνάμεων ... Θεόδωρος ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πῆρι καὶ πεντέποδος ... Die Frage heisst nun, wie das Wort in Pluralis Genitivus (δυνάμεων) zu übersetzen sei: ob «Quadrat», oder «Quadratseite»? — Aber es wird nicht überflüssig, schon im voraus — bevor man übersetzte — festzulegen, dass dieses problematische Wort in Plur. Gen. auch zwei Appositionen hat; denn τρίποδος und πεντέποδος sind ja eben deswegen singulare Genitive, weil sie Appositionen zu dem vorausgeschickten Plur. Gen. (δυνάμεων) sind. Uebersetzt man also den Plur. Gen. mit «Quadratseite», so muss man auch die singularen

losophie II 509-514 - Mém. Scient. II 400-406) die folgenden Worte zu zitieren: «Je citais même, comme exemple topique, le passage de Théétète, où δύναμις est employé dans le sens de *racine carrée*, tandis que dans la République... le même mot signifie au contraire *carré*. Mais depuis, la poursuite de mes études sur les variations qu'a pu subir la langue mathématique des Grecs, m'a conduit à des conclusions tout à fait opposées et je n'hésite plus désormais etc.».

(18) Vgl. z. B. TH. L. HEATH, The Thirteen Books... II 288; A History... I 209 n. 2; oder auch B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 234, 272 u. a. m.

(19) Also wohlgemerkt: irrtümlich sind alle modernen Erklärungen, die irgendeinen anderen Sinn als «Quadrat» diesem mathematischen Terminus zuzuschreiben versuchen, wie etwa «Quadratseite», «Quadratwurzel» oder ähnliches; man vgl. zu dieser Behauptung von mir die Indizes (s. v.) in den Werken von TH. L. HEATH, und auch den Index (svv. δύναμις, δύνασθαι) von F. RUDIO, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates, Leipzig 1907.

Genitive, die Appositionen, auf «Quadratseiten» beziehen. Aber was besagt in diesem Fall der ganze Satz? — Etwa Folgendes: «THEODOROS hat vor uns etwas über Quadratseiten illustriert, über die drei- und über die fünffüssige Quadratseite, dass nämlich diese der Länge nach zu der einfüssigen Quadratseite nicht kommensurabel sind». Aber das ist ja der reinste Unsinn! Warum sollten, um Gottes willen, die drei und fünf Fuss langen Quadratseiten zu der einfüssigen — d.h. also zu der 1 Fuss langen Quadratseite — inkommensurabel sein, wenn es heisst, dass sie drei bzw. fünf Fuss lang sind? Und doch ist eine andere Uebersetzung, als die eben versuchte — falls man δύναμις als «Quadratseite» versteht —, grammatikalisch gar nicht möglich (20). Denn heisst es über eine Quadratseite, dass sie «dreifüssig» (τρίπους) ist, so kann dies selbstverständlich nur bedeuten, dass sie drei Fuss lang ist. Sagt man aber nicht über eine Quadratseite sondern über ein Quadrat, dass es dreifüssig ist, so bedeutet hier dasselbe Wort (τρίπους) etwas anderes — kein Längenmass mehr sondern ein Flächenmass —, dass nämlich die Fläche des Quadrates drei Quadratfuss gross ist (wobei die Länge der Seiten natürlich unbestimmt, ja zahlenmässig unbestimmbar, inkommensurabel bleibt). Man sieht also, dass die Uebersetzung des Wortes δύναμις mit «Quadratseite» den Sinn der Stelle gefährdet, ja sogar — im Falle einer konsequenten Uebersetzung — zu einem unerklärbaren Unsinn führt. Aber tadellos wird der Sinn unserer Stelle — sowohl grammatikalisch, wie auch inhaltlich —, wenn man das Wort δύναμις in seinem auch sonst üblichen mathematischen Sinne («Quadrat») nimmt, d.h. also, wenn man meiner am Anfang vorgeschlagenen Uebersetzung beipflichtet.

Ich möchte, anlässlich des eben behandelten griechischen Satzes, nur nebenbei noch zwei Tatsachen erwähnen:

1. I. BURNET hat aus dem Text das Verbum ἀποφαίνων gestrichen,

(20) Es ist geradezu haarsträubend, wie nachlässig und salopp man gewöhnlich unsere Stelle übersetzt! Auch die einfachsten Regeln jeder konsequenten Grammatik werden z. B. in der folgenden Verdolmetschung missachtet: «THEODORUS was proving to us a certain thing about square roots (δυνάμεις), I mean (the square roots, i. e. sides) of three square feet and of five square feet, namely that these roots are not commensurable in length with the foot-length etc.» (TH. L. HEATH, A History... I 203). — Natürlich kann man mit einer solchen Inkonsistenz jenen Unsinn vertuschen, zu dem die konsequente Uebersetzung — falls man δύναμις als «square sides» (oder «roots») versteht — notwendigerweise hätte führen müssen.

bloss weil es in *einem* unserer Manuskripte in der Tat fehlt (21). (Alle übrigen Manuskripte — also mindestens 6 an der Zahl — scheinen dasselbe Wort dennoch zu haben!) Der wahre Grund für das Streichen war eher wohl nur, dass der Herausgeber sich über den mathematischen Inhalt der Stelle nicht völlig im klaren war. Allerdings wurde durch das Streichen der Sinn des Textes verstümmelt.

2. Sehr willkommen kam jedoch dieser verstümmelte Text dem Historiker TH. L. HEATH (22) aus dem folgenden Grunde. TH. L. HEATH wollte — ursprünglich in einem anderen Zusammenhang, und einem Irrtum von J. L. HEIBERG folgend (23) — nachweisen, dass an einer mathematisch interessanten Aristoteles-Stelle (24) das Verbum γράφειν den Sinn «beweisen» hätte. Für diese angebliche Wortbedeutung glaubte er in dem verstümmelten Platon-Text einen Beleg zu finden. Denn es war ja doch die «communis opinio» über unsere Stelle (Theait. 147 D), dass hier von irgendwelchen «Beweisen» des THEODOROS die Rede sei. Aber durch welches griechische Wort sollte der «Beweis» angedeutet sein? Streicht man mit BURNET ἀποφαίνων aus dem Text, so bleibt nur noch ein Verbum in dem Satz, das vielleicht etwas mit «Beweis» zu tun haben könnte: ἔγραφε. Darum ist TH. L. HEATH dem Streichungsvorschlag von I. BURNET so bereitwillig gefolgt! — Aber natürlich ist diese Deutung des Wortes durch TH. L. HEATH ebenso unrichtig, wie auch seine andere Behauptung: γράφειν oder γράφεσθαι hiesse bei ARCHIMEDES manchmal «beweisen».

Nun habe ich die beiden eben erwähnten Fehler, sowohl denjenigen von BURNET, wie auch den anderen von HEATH, in meiner obigen Uebersetzung stillschweigend beseitigt.

Wichtiger jedoch als diese Einzelheiten wird es für uns sein, den mathematischen Inhalt der behandelten Theaitetos-Stelle in ein möglichst scharfes Licht zu stellen. Darum fassen wir noch einmal zusammen: was wohl THEODOROS im Sinne der oben verdeutschten Sätze gelehrt haben mag?

Es scheint vor allem, dass er sich mit solchen Quadraten beschäftigte, deren Flächenmasse sich *in ganzzahligen Quadratfüssen* ausdrücken lassen. Als Beispiele werden die Quadrate mit den Flächen von drei und fünf Quadratfüssen genannt. — Es wird zwar im Text selbst gar nichts darüber gesagt, aber es wird vielleicht doch nicht

(21) Bibl. Oxoniensis, Platonis Opera recogn. I. BURNET, Tom. I. 1899 p. 147 D (Theaitet.) App. crit.

(22) A History... I 203 n. 2.

(23) J. L. HEIBERG, Mathematisches bei Aristoteles, Abhandlungen zur Gesch. d. math. Wissenschaften, 18. Heft, Leipzig 1904, 22; vgl. TH. L. HEATH, The Thirteen Books... II 120; derselbe: Mathematics in Aristotle, Oxford 1949 p. 80.

(24) Topik Θ 3,158 b 29 ff. — Mein kritischer Aufsatz über die bisherige Behandlung dieser Aristoteles-Stelle in der Fachliteratur konnte aus technischen Gründen, leider, noch nicht veröffentlicht werden.

überflüssig, daran zu erinnern, dass man solche Quadratflächen am einfachsten wohl mit der Hilfe des sog. pythagoreischen Lehrsatzes gewinnt (25). Sind z.B. die beiden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks 1 und 2 Fuss lang, so ist die Flächensumme jener Quadrate, die man auf die beiden Katheten errichtet, jener dritten Quadratfläche gleich, die man mit der Hypotenuse konstruieren kann: $1^2 + 2^2 = 5$. Auf diese oder auf eine ähnliche Weise kann man — mit Anwendung des Pythagoreischen Lehrsatzes — Quadrate konstruieren, deren Flächenmasse beliebige ganzzahlige Quadratfüsse sind.

Nun sind aber die Vierecke mit ganzzahligen Quadratfuss-Flächen in einer gewissen Hinsicht sehr interessant. Nehmen wir z.B. das Quadrat mit drei oder mit fünf Fuss Quadratfläche. Natürlich sind diese ihrem Flächenmass nach drei — bzw. fünfmal so gross, wie das Quadrat, dessen Flächenmass 1 Quadratfuss ist. Ihr Flächenmass lässt sich also mit einer ganzen Zahl angeben. Aber zu gleicher Zeit sind die *Seiten* derselben beiden Quadrate inkommensurabel zu der Seite des einfüssigen Quadrats, d. h. also: es gibt nach griechischer Denkweise gar keine Zahl für die Länge der Seiten dieser Quadrate, deren Flächenmass doch mit je einer ganzen Zahl ausgedrückt werden konnte.

Hat man nun diese merkwürdige Tatsache in einigen Fällen erkannt, so heisst die nächste Frage: ob es wohl auch in anderen Fällen so ist? Sind auch die Seiten anderer Quadrate — deren Flächenmasse ganzzahlig sind — ebenso inkommensurabel? — Man wird also auch andere ähnlichen Quadrate — auf die vorige Frage hin ins Auge fassen. Es heisst in der Tat in unserem Text: THEODOROS hätte «jedes Quadrat — man versteht darunter diesmal natürlich: jedes Quadrat mit ganzzahligem Flächenmass —, das eine nach dem anderen, bis zu dem siebzehnfüssigen vorgenommen». Hätte nun THEODOROS nur diejenigen Quadrate mit ganzzahligen Flächen prüfen wollen, deren Seiten inkommensurabel zu der Längeneinheit sind, so hätte er aus der siebzehnfachen Reihe seiner Demonstration selbstverständlich einige Fälle ausser acht lassen müssen. Denn es gibt ja unter den geprüften Quadraten auch solche, deren Seiten doch kommensurabel zu der Seite des Einheitsquadrats sind, z.B. das Quadrat mit der Fläche von 16 oder 9 Quadratfüssen. In der Tat könnte die Tatsache, dass auch THEAITETOS nur das Quadrat mit 3 und mit 5 füssigen Quadratflächen als Beispiele erwähnt — und

(25) Vgl. auch TH. L. HEATH, A History... I 203 n. 2.

stillschweigend über das dazwischenliegende 4 flüssige Quadrat hinweggeht — als ein Hinweis darauf aufgefasst werden: auch THEODOROS hätte nicht nur diesen sondern auch die ähnlichen Fälle (9 und 16) fortgelassen. — Beachtet man jedoch auch die Fortsetzung dessen, was THEAITETOS bei PLATON erzählt, so wird man doch vermuten müssen, dass THEODOROS auch die Fälle der kommensurablen Quadrate nicht fortliess. Im Gegenteil, er wird in seiner Demonstration bei diesen Fällen — 4, 9 und 16 — mit Nachdruck darauf hingewiesen haben, dass in diesen die Seiten — abweichend von den übrigen geprüften Quadraten — kommensurabel sind.

Bevor ich nun unseren Platon-Text weiter paraphrasierte, muss ich hier in kurzen Worten noch daran erinnern, wie die « mathematische Theaitetos-Stelle » von den meisten Historikern der griechischen Wissenschaft verstanden wird.

Es war noch i. J. 1884 ein folgenschwerer Irrtum der nächste Satz von P. TANNERY: « On ne peut guère douter que dans tout ce passage PLATON ne fasse allusion à deux traités, l'un déjà ancien, de THÉODORE de Cyrène, l'autre probablement assez récent de son ami THÉÉTÈTE. Il raconte la naissance d'une des idées fondamentales de ce dernier traité, et s'il fait concourir à la naissance de cette idée un jeune camarade de THÉÉTÈTE, du nom de SOCRATE, il est assez probable que c'est lui-même qu'il désigne ainsi » (26). Mit diesen Worten begann die *moderne Variante* einer mathematischen « Theaitetos-Legende » (27), die ich hier allerdings nur in einigen Punkten berühren möchte.

Man glaubt also, indem man dem eben angeführten Tannery-Zitat folgt, dass PLATON an unserer Stelle im wesentlichen wohl über zwei Dinge berichte:

1. THEODOROS hätte die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... bis $\sqrt{17}$ im einzelnen nacheinander bewiesen, ohne dass er eine *allgemeine* Definition oder einen *allgemeinen* Satz über die Irrationalitäten hätte aufstellen und beweisen können (28). (Es wird zwar bei PLATON

(26) Siehe oben Anm. 15. - Mém. Scient. II 93.

(27) K. REIDEMEISTER schrieb einmal (« Das exakte Denken der Griechen », Hamburg 1949, 24): « ... ich kann mich des Verdachts nicht erwehren, dass THEAITET der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den THEAITET des Platonischen Dialogs kristallisiert hat. » — Je mehr ich die voreuklidische Mathematik der Griechen kennenlerne, umso berechtigter scheint mir dieser Zweifel.

(28) TH. L. HEATH, A History... I 203: « It does not appear, however, that he had reached any definition of a surd in general or proved any general proposition about all surds etc. ».

nicht berichtet, wie THEODOROS den Beweis geführt hatte, aber man kann auch darüber sehr geistreiche Vermutungen aufstellen, wie seine Beweise aufeinander folgten, und warum THEODOROS gerade bei dem 17. Quadrat aufgehört hatte (29).

2. Die Lehre des THEODOROS sei durch THEAITETOS vervollkommen worden. Ja, man glaubt sogar auch jenen Satz des THEAITETOS aus dem PLATON-Text heraushören zu dürfen, in dem seine Vervollkommenung der Theodoros-Lehre kulminierte; dieser soll heissen: « Strecken, die ein Quadrat erzeugen, dessen Flächeninhalt wohl eine ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist, haben kein gemeinsames Mass mit der Längeneinheit » (30). Ist dann einmal dieser « Satz des THEAITETOS » wiederhergestellt, so ist es in dem folgenden schon ziemlich leicht, sich auf EUKLID, Elem. X. 9, bzw. auf jenes Scholion zu berufen (31), das über den letzteren Satz behauptet: τὸ θεώρημα τοῦτο θεαίτητέον ἐστὶν εὐρημα. — Nun will ich mich in diesem Zusammenhang mit der letzteren Frage — d.h. also mit der Frage der Glaubwürdigkeit des eben zitierten Scholions, oder anders formuliert: mit dem historischen Problem, ob es einen bedeutenden Mathematiker des platonischen Kreises, namens THEAITETOS, wirklich gegeben hatte, oder ob der « Mathematiker THEAITETOS » nicht *bloss eine neuplatonische Legende des späteren Altertums* ist — einstweilen gar nicht beschäftigen. Ich beschränke mich hier einzig und allein auf die Interpretation der sog. « mathematischen Stelle » in PLATONS Dialog « Theaitetos ». Denn diese ist in der Tat gründlich missverstanden worden. Ich bemerke zu den obigen zwei Punkten Folgendes:

a) Ich glaube zwar gern, dass THEODOROS die Inkommensurabilität der meisten von ihm geprüften Quadratseiten (von 3 bis 17) in der Tat auch *beweisen* konnte. Denkt man daran, dass die griechischen Mathematiker schon zur Zeit des HIPPOKRATES von Chios alles sorgfältig bewiesen hatten, was überhaupt zu beweisen war, so wird man sich darüber gar nicht wundern, dass wohl auch THEODOROS seine mathematischen Behauptungen jedesmal mit Beweis begleitete. — Aber bei PLATON ist doch nicht von den *Beweisen* des THEODOROS die Rede. Nicht nur die Beweise selbst bleiben hier unerwähnt, sondern auch kein Wort deutet auf sie hin. Die beiden Verba in dem Platonischen Text: ἀποφαίνων und ἔγραψε haben mit

(29) Vgl. J. H. ANDERHUB, Joco-Seria, Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes (Ausgabe der Kalle-Werke, Wiesbaden 1941) und B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 235.

(30) B. L. v. d. WAERDEN op. cit. 273.

(31) Euclides, Elementa ed. J. L. HEIBERG, Lipsiae 1888, V. p. 450.

« Beweis » bestimmt nichts zu tun (32). Der griechische Terminus-technicus für mathematischen « Beweis » war ja das Zeitwort *δείκνυμι*, das hier gar nicht vorkommt! Stellt man also in der Interpretation dennoch die *Beweise* des THEODOROS in den Vordergrund, so verdreht man dadurch unwillkürlich den Sinn jenes Platon-Textes, der die Frage der *Beweise* eigentlich gar nicht berührt hatte.

b) Noch weniger kann davon die Rede sein, dass THEAITETOS — also wohlgemerkt: jene Dialog-Gestalt bei PLATON, die diesen Namen führt — die Lehre des THEODOROS vervollkommenet oder weitergeführt hätte. Nein, er hat diese Lehre einfach nur *verstanden*. — Denn beachte man nur, wie der junge THEAITETOS seinen Bericht bei PLATON fortsetzt. Im Anschluss daran, dass er erzählte: THEODOROS hätte bei dem Quadrat mit der siebzehnfüssigen Fläche aufgehört, sagt er weiter:

« Wir dachten nun an Folgendes (*ἡμῖν οὖν εἰσῆλθε τι τοιοῦτον*). Nachdem es scheinbar unendlich viele Quadrate gibt (*ἐπειδὴ ἀπειροὶ τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐπαίνοντο*), man sollte versuchen, diese in eins zusammenzufassen (*πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἓν*), womit wir alle Quadrate *benennen* könnten » (*ὅτι πάσας τὰς προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις*).

THEAITETOS und sein Freund wissen also, dass es wohl unendlich viele solche Quadrate gibt, von denen THEODOROS nur *einige* vorgeführt hatte. Denn THEODOROS nahm ja eigentlich die *Zahlen* von 3 bis 17 vor, und einer jeden Zahl ordnete er *je ein Quadrat*, mit der Fläche von ebensovielen Quadratfüßen wie die betreffende Zahl selber, bei. Nachdem nun die Reihe der Zahlen unendlich ist, wird auch die Reihe der ihnen auf die vorige Weise beigeordneten Quadrate unendlich sein. THEAITETOS und sein Freund wollen nun diese unendlich vielen Quadrate (mit ganzzahligen Flächenfüßen) zusammenfassend benennen. (Es wird dabei stillschweigend als etwas selbstverständliches angenommen, dass die den Zahlen beigeordneten unendlich vielen Quadrate wohl alle dieselben — zweierlei — Eigenschaften haben würden, die THEODOROS an dem Quadraten von 3 bis 17 gezeigt hatte). Die Schüler des THEODOROS suchen also

(32) Es sei mir erlaubt, in diesem Zusammenhang *nicht* ausführlicher zu begründen, warum ich die beiden Verba folgendermassen übersetzte: « Th. hat vor uns etwas über Quadrate *illustriert*, ... *indem er zeigte* etc. » — Es liesse sich natürlich auch näher begründen, warum *nur* eine solche Uebersetzung die richtige sein kann. Da jedoch diese Beweisführung historisch augenblicklich irrelevant ist, unterdrücke ich hier lieber den bloss philologischen Exkurs.

eigentlich nur eine passende *Benennung*, einen *Namen* dafür, was sie eben gelernt hatten. Aber in der Wirklichkeit werden sie natürlich nicht *einen* einzigen, sondern auf einmal *zwei* Namen finden müssen — wie man es aus dem folgenden ersieht —, nachdem ja auch THEODOROS *zweierlei* Quadrate von 3 bis 17 ihnen vorgeführt hatte.

Aber wie hängt diese ganze Erzählung des THEAITETOS mit der vorigen Frage des SOKRATES zusammen? — Nun offenbar folgendermassen:

Auf die Frage des SOKRATES (« Was ist Wissen? ») hat THEAITETOS zunächst mit einer *Aufzählung* der einzelnen Arten des Wissens geantwortet. Aber SOKRATES war mit der Antwort nicht zufrieden, er wollte nicht eine *Aufzählung* der einzelnen Arten des Wissens hören, sondern er bat um eine *zusammenfassende Schilderung* dessen, was Wissen überhaupt sei. (Auch auf die Frage — « Was ist Lehm? » — dürfte man nicht mit einer *Aufzählung* der einzelnen Lehmarten der Handwerker antworten, sondern man sollte *zusammenfassend* den Lehm schildern). — Ähnlich geschah es — bis zu einem gewissen Grade — auch bei THEODOROS. THEODOROS zeigte nämlich seinen Schülern die Quadrate mit ganzzahligem Flächenmass — von dem 3 quadratfüssigen bis zu dem 17 quadratfüssigen —, wobei er sie auf eine merkwürdige Eigenschaft dieser Quadrate (inkommensurable bzw. kommensurable Seiten) aufmerksam machte. Diese Demonstration war eine Art *Aufzählung*. Und nach der Aufzählung mussten die Schüler *mit der zusammenfassenden Benennung* der kennengelernten Quadrate dokumentieren, dass sie die Lehre des Meisters verstanden hatten.

Es stimmt zwar, dass man nach den Worten des THEAITETOS bei PLATON zunächst den Eindruck bekommt, als handelte es sich hier mindestens um ein Körnchen *eigener Initiative* der Schüler des THEODOROS (*ἡμῖν οὖν εἰσῆλθε...*). Als hätten diese jungen Leute mit der zwiefachen Benennung der kennengelernten Quadratseiten die Lehre des THEODOROS irgendwie doch *ergänzt*. Aber im Grunde hängt die Benennung doch so eng damit zusammen, was THEODOROS illustriert hatte, dass man nicht versteht: wie hätte überhaupt THEODOROS *ohne* jene Unterscheidung, die in den « nachgeholten » Benennungen des THEAITETOS zum Ausdruck kommt, seine Lehre auch nur für sich selbst formulieren können (33)?

(33) Es ist übrigens interessant, dass auch P. TANNERY selber — obwohl er unsere Stelle von Grund auf missverstanden, und so mit seinem Irrtum die *moderne Variante* der Theaitetos-Legende angeregt hatte — mindestens

THEAITETOS setzt nun seine Erzählung folgendermassen fort:

« Wir haben alle Zahlen in zwei Arten geteilt. Diejenigen, die man als Produkte aus zwei gleichen Faktoren auffassen kann, nannten wir — indem wir sie mit der Quadratfigur verglichen — *quadratisch und gleichseitig*... Diejenigen Zahlen dagegen, die zwischen den eben genannten liegen — wie z.B. die 3, die 5, und alle Zahlen, die sich nicht in gleiche sondern nur in ungleiche Faktoren zerlegen lassen — verglichen wir mit der Rechtecksfigur und wir nannten sie: *ungleichseitige (oblonge) Zahlen* ».

Mit dieser zwiefachen Benennung der Zahlen wird dann die zwiefache Benennung der Seiten der ihnen beigeordneten Quadrate parallelisiert. Wie es anschliessend heisst:

« Diejenigen Strecken nun ($\delta\sigma\alpha\iota \mu\acute{\epsilon}\nu \gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha\iota\ldots$), die beim Quadrieren eine gleichseitige ebene Zahl hervorbringen, bezeichneten wir mit dem Wort $\mu\eta\chi\omicron\varsigma$ ('Länge'), diejenigen Strecken aber, die je eine ungleichseitige Zahl hervorbringen (34), bezeichneten wir als $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ (= 'Quadrates'!), nachdem diese letzteren Strecken ihrer Länge nach ($\mu\acute{\iota}\chi\epsilon\iota$) mit den vorigen nicht kommensurabel sind, aber doch sind sie kommensurabel mit den vorigen Strecken nach jenen Flächen, die sie beim Quadrieren hervorbringen (35) ».

Damit ist meine Paraphrase des Platon-Textes eigentlich auch schon fertig. (Jene hinzugefügte Bemerkung des THEAITETOS, wonach er und sein Freund eine ähnliche Benennung auch bei den Rauminhalten ($\sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\acute{\alpha}$) versucht hätten, ist für uns in diesem Zusammenhang belanglos). Ich muss die vorige Paraphrase nur noch in einem einzigen Punkt näher begründen.

Wie man es aus dem obigen Text ersieht, benutzt THEAITETOS

eine schwache Seite seiner Theorie spürte. Denn er musste sich doch fragen: woraus eigentlich die Leistung des (platonischen) THEAITETOS bestanden haben mag? In diesem Zusammenhang schrieb er die folgenden Worte: «le singulier, à nos yeux, est que cette généralisation, qui n'offrait aucune difficulté sérieuse, n'ait pas été faite par THÉODORE de Cyrène, que celui-ci se soit borné à montrer, sur un grand nombre de cas particuliers, comment se traitait la question de la commensurabilité ou de l'incommensurabilité d'une racine. L'histoire des mathématiques offre d'autres exemples analogues, mais celui-là est incontestablement le plus saillant etc.» (Mém. Scient. II 96).

(34) PLATONS Ausdrucksweise: «die Strecken, die je eine ungleichseitige Zahl hervorbringen...» — ist zweifellos sehr knapp, ja, beinahe ungenau, aber sie wird doch keinen denkenden Menschen irreführen! Offenbar kann nämlich dieser Satz nur folgendes meinen: die letzteren Strecken bringen beim Quadrieren solche Quadrate hervor, deren Flächen den sogenannten *ungleichseitigen Zahlen* entsprechen.

(35) Den griechischen Text siehe: Theaitetos 148 A 6-9.

das Wort $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ auch als Bezeichnung für eine Art von *Quadratseiten*. Die Seiten derjenigen Quadrate nämlich, deren Flächenmasse 4, 9, 16, 25, 36, ... Quadratfüsse sind, werden mit dem Wort $\mu\eta\chi\omicron\varsigma$ ('Länge') bezeichnet, während die Seiten der anderen Art Quadrate, deren Flächeninhalt wohl eine ganze Zahl aber keine Quadratzahl ist, mit dem Wort $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ bezeichnet werden. — Nun haben die Historiker der Mathematik aus dieser Tatsache den Schluss gezogen, dass das Wort $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ mindestens in diesem Zusammenhang den Sinn «*Quadratseite*» haben müsste (36). — Zu meinem grössten Bedauern muss ich auch diesmal auf das entschiedenste widersprechen! Denn man soll nur etwas aufmerksamer den griechischen Text beachten, und sofort wird man einsehen müssen, dass das Wort $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ seiner Bedeutung nach auch in dem vorliegenden Fall *nicht* «*Quadratseite*» heisst, sondern ganz eindeutig den Sinn «*Quadrat*» hat.

Denn überlege man sich nur: Warum bekommen wohl die eine Art Quadratseiten von THEAITETOS den Namen $\mu\eta\chi\omicron\varsigma$ ('Länge')? — Nun offenbar darum, weil diese auch *der Länge nach* ($\mu\acute{\iota}\chi\epsilon\iota$) kommensurabel sind. Sehr richtig hat man in diesem Zusammenhang darauf hingewiesen, dass der Ausdruck $\mu\acute{\iota}\chi\epsilon\iota$ $\acute{\sigma}\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$, «*der Länge nach kommensurabel*» auch bei EUKLID im X. Buch der «*Elemente*» benutzt wird (37). Das Wort $\mu\eta\chi\omicron\varsigma$ ist also in unserem Platon-Text sozusagen nur eine «*Kurzform*» für den Ausdruck $\mu\acute{\iota}\chi\epsilon\iota$ $\acute{\sigma}\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$. — Aber dasselbe gilt selbstverständlich auch für den anderen Ausdruck: $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$. Die Seiten der anderen Art Quadrate bekommen deswegen diesen Namen — wie dies auch bei PLATON vollkommen eindeutig erklärt wird —, weil diese Strecken der Länge nach ($\mu\acute{\iota}\chi\epsilon\iota$) zwar inkommensurabel sind, aber sie dennoch kommensurabel nach jenen *Quadraten* ($\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$) sind, die man mit ihnen konstruiert, die man also auf sie errichtet. Ebenso wie $\mu\acute{\iota}\chi\epsilon\iota$ $\acute{\sigma}\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$, «*der Länge nach kommensurabel*», ist ja auch $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ $\acute{\sigma}\upsilon\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$ («*quadriert kommensurabel*», C. THAER; d.h. also: «*kommensurabel nach jenem Quadrat, das man auf sie errichtet*») ein ganz gewöhnlicher Ausdruck im X. Buch der Euklidischen «*Elemente*» (38). Das Wort $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ bedeutet also an unserer Platon-Stelle keineswegs soviel wie «*Quadratseite*», und auch nicht etwa: «*irrationale Quadratwurzel*», sondern es ist

(36) TH. L. HEATH, A History... I 209 n. 2: «... the $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota\varsigma$ of THEAITETUS's definition is undoubtedly the square root of a non-square number, a surd». — Ähnlich auch bei B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 234.

(37) B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 234.

(38) Vgl. oben Anm. 4.

einfach nur eine « Kurzform » für den Ausdruck: $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota\ \sigma\acute{o}\mu\mu\epsilon\tau\omicron\varsigma$ = « kommensurabel nach jenem Quadrat, das man auf sie errichtet ». — Der Sinn des Wortes $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ heisst also auch an der eben behandelten Stelle im Dialog « Theaitetos » völlig eindeutig: « *Quadrat* ».

III.

Nun hoffe ich in den beiden vorigen Kapiteln mindestens an Hand einiger Beispiele gezeigt zu haben, dass der mathematische Terminus $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ immer « *Quadrat* » heisst. Ich musste in diesem Zusammenhang die « Theaitetos »-Stelle nur deswegen so ausführlich behandeln, weil ich die Ansicht, wonach unser Terminus auch « *Quadratseite* » oder « *Quadratwurzel* » heissen könnte, widerlegen wollte. Man hat nämlich für diese angebliche Wortbedeutung ($\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ = « *Quadratseite* », « *Quadratwurzel* ») bisher immer nur die « Theaitetos »-Stelle namhaft gemacht. Wäre also diese Stelle einmal von P. TANNERY nicht missverstanden worden, so wäre es wohl auch nie jemandem eingefallen, dass das Wort $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ in der Mathematik auch jemals etwas anderes als « *Quadrat* » heissen könnte.

Es fragt sich nun, warum wohl das « *Quadrat* », das « *Viereck* », wofür in der griechischen Geometrie sonst $\tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\upsilon\omicron\upsilon\varsigma$ der Terminus war, auch als $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ bezeichnet werden konnte? Was ist der Ursprung von diesem auffallenden zweiten Terminus für dasselbe Ding (« *Viereck* »)? — Soviel ich weiss, hat man diese Frage bisher noch nicht beantworten können. Es gab zwar auch zwei verschiedene Versuche, den mathematischen Ausdruck $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ irgendwie zu erklären, aber diese können doch unmöglich zutreffend sein. Diese Erklärungsversuche, die ich hier nur nebenbei registriere, stammen beide von P. TANNERY.

I. Den einen Versuch von P. TANNERY — den Ursprung des mathematischen Terminus $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ irgendwie zu erklären — liest man in derselben, oben schon zitierten Arbeit (39), in der er seinen früheren Irrtum (nämlich den Irrtum, dass das Wort $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ in dem Dialog « Theaitetos » der Name der « *Quadratwurzel* » wäre) schon aufgab. In seinem Versuch nun, den Sinn des mathematischen Ausdruckes $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ verständlich zu machen, ging er von der Tatsache aus, dass in der griechischen Fachsprache der Mathematik nicht nur das Hauptwort $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ sondern auch das Verbum $\delta\upsilon\upsilon\alpha\sigma\theta\alpha\iota$, ja auch

das Partizip des letzteren: $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ gebräuchlich sind. Mit Rücksicht auf diese Tatsachen schrieb er Folgendes:

« Soit un carré dont l'aire soit déterminée, de *trois pieds* par exemple, le côté de ce carré est, dans la langue mathématique classique, la $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ (la ligne qui peut) cette aire de trois pieds. *Pouvoir une aire* ($\delta\upsilon\upsilon\alpha\sigma\theta\alpha\iota\ \tau\iota\ \chi\omega\rho\acute{\iota}\omicron\upsilon$) c'est, de même, pour une ligne droite limitée, être telle que le carré construit sur elle ait précisément cette aire » (40).

Nun hat TANNERY insofern allerdings Recht, dass die Seite eines solchen Quadrats, dessen Flächenmass genau angegeben ist, griechisch in der Tat als $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$ bezeichnet werden kann. — Auch den mathematischen Sinn des Ausdruckes $\delta\upsilon\upsilon\alpha\sigma\theta\alpha\iota\ \tau\iota\ \chi\omega\rho\acute{\iota}\omicron\upsilon$ beschreibt er im grossen und ganzen richtig. — Aber ich muss doch gestehen, dass ich seine rätselhaften Worte: « *la ligne qui peut* » und « *pouvoir une aire* » lange Zeit hindurch gar nicht begreifen konnte. Ja, ich war schon nahe daran, zu bezweifeln, dass diese Worte überhaupt einen vernünftigen Sinn haben könnten. Beinahe zufällig entdeckte ich nur eine solche Auslegung der Worte von TANNERY, die dann auch für mich verständlich war. (Ob dabei diese Auslegung dem « Sinn » des französischen Originals *gerecht* ist, mag ruhig dahingestellt bleiben, nachdem sie ja doch mindestens sinnvoll ist).

Denn B. L. v. d. WAERDEN nahm in seinem Buch auch zu dem eben angeführten Aufsatz von P. TANNERY ablehnend Stellung (41). Dasselbst scheint er beiläufig auch jene französischen Worte zu erklären, die für mich so rätselhaft waren, und zwar folgendermassen: « *la ligne qui peut* » (für $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\acute{\epsilon}\nu\eta$) wird als « *Erzeugende* », und das Wort $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$ selbst als « *erzeugende Kraft* » verdeutscht. — Nun versteht man auf den ersten Anblick auch diese Erklärung nicht leicht. Aber sofort wird einem alles klar und verständlich, wenn man daran denkt, dass hier eigentlich *nicht* der griechische Ausdruck, sondern seine lateinische — und wohl auch Tannery'sche — Entsprechung ausgelegt wurde. Denn wohl hatte im Lateinischen *potentia* (als Gegensatz zu *impotentia*) — auch schon in der klassischen Zeit —, wenn auch nicht in der Mathematik, so doch mindestens in der Gemeinsprache, den Sinn: « *Zeugungskraft, erzeugende Kraft* ». Aber nie hatten einen solchen Sinn in dem Griechischen des Altertums das Verbum $\delta\upsilon\upsilon\alpha\sigma\theta\alpha\iota$ und das Hauptwort $\delta\upsilon\upsilon\alpha\mu\epsilon\iota$. — Diese erste, allerdings phantasievolle Erklärung von TANNERY sieht also eher nur als ein Scherz aus.

(40) Mém. Scient. II 93.

(41) Op. cit. 234.

(39) Siehe oben Anm. 15.

2. Der zweite Versuch von TANNERY für die Erklärung des mathematischen Ausdruckes $\deltaύναμις$ ist scheinbar nie regelrecht entwickelt eher nur gelegentlich angedeutet worden. Und doch blieb auch dieser nicht ohne Einfluss auf die spätere Forschung. — Der grösste Fehler dieses letzteren Versuches liegt, meiner Ansicht nach, in seiner *Inkonsequenz*. Denn es ist ja oben schon angedeutet worden, dass TANNERY mindestens seit dem Jahre 1884 wusste: $\deltaύναμις$ kann nicht «Quadratwurzel» heissen (42). Und doch versuchte er später (i. J. 1902) eine solche Worterklärung, deren Voraussetzung war: $\deltaύναμις$ hiesse griechisch: «Quadratwurzel» (43). In dieser späteren Arbeit schilderte nämlich TANNERY das Näherungsverfahren der Griechen, womit diese die Quadratwurzel einer Nicht-Quadratzahl errechneten; in diesem Zusammenhang schloss er seine Worte mit der folgenden Bemerkung:

«... en exprimant de plus en plus près la valeur de cette moyenne, si l'on ne peut la construire que géométriquement, si elle n'existe qu'en *puissance*, non en *acte*, pour employer le langage des Grecs» (44).

Uns interessieren aus diesem Zitat augenblicklich nur die beiden hervorgehobenen Worte. Man soll nämlich diese — nach dem ausdrücklichen Hinweis von P. TANNERY — ins Griechische zurückübersetzen, um die Andeutung überhaupt verstehen zu können. Also: *puissance* = $\deltaύναμις$, und *acte* = $\acute{\epsilon}\nu\epsilon\rho\gamma\epsilon\iota\alpha$, $\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon\lambda\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota\alpha$. Das heisst also mit anderen Worten: nach P. TANNERY hiesse die «*irrationalen Quadratwurzel einer Zahl*» deswegen $\deltaύναμις$, weil man eine solche geometrisch zwar wohl konstruieren könnte, aber als «*acte*» ($\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon\lambda\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota\alpha$) sie doch nicht existierte. — Nun *erstens*: ich bezweifle, dass diese Vermutung von P. TANNERY mit der Denkweise der frühgriechischen Mathematik überhaupt etwas zu tun hätte; und *zweitens*: verfehlt ist der Gedanke aus dem doppelten Grunde: a.) weil $\deltaύναμις$ im Griechischen *nie* «*irrationalen Quadratwurzel*» hiess; b.) weil der Ursprung des mathematischen Ausdruckes $\deltaύναμις$ mit dem aristotelisierenden Gegensatz von $\deltaύναμις$ und $\acute{\epsilon}\nu\tau\epsilon\lambda\acute{\epsilon}\chi\epsilon\iota\alpha$ gar nichts zu tun hat.

Aber wie gesagt, blieb auch dieser Versuch von TANNERY nicht ohne Einfluss auf die spätere Forschung. (Sowohl die grossartigen

(42) Siehe oben Anm. 15 und 17.

(43) «Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure», Bibliotheca mathematica, 3. Folge t. III 102, 161-175 - Mém. Scient. III 68-89.

(44) Mém. Scient. III 82.

Anregungen, wie auch sämtliche Irrtümer von ihm scheinen in der Geschichte der antiken Wissenschaft unsterblich zu sein!). Wohl nur darum schrieb z. B. TH. L. HEATH: «In geometrical language it is the dative singular $\deltaύναμει$: which is mostly used; thus a straight line is said to be *potentially equal*, $\deltaύναμει$ ἴσα, to a certain rectangle where the meaning is that *the square on the straight line is equal to the rectangle etc.*» (45). — In diesem Zitat scheint mir der Ausdruck «*potentially equal*» nur ein schwaches und etwas verzerrtes Echo des eben erwähnten irrümlichen Gedankens von P. TANNERY zu sein. (Lässt man übrigens eben diese beiden überflüssigen, ja eigentlich auch *sinnlosen* Worte weg, so hat TH. L. HEATH mit dem angeführten Zitat vollkommen Recht!).

* * *

Nun erklärt sich der Ursprung des mathematischen Ausdruckes $\deltaύναμις$ — meiner Ansicht nach — auf einem ganz anderen Wege, und zwar folgendermassen:

Man soll vor allem *nicht* von dem mathematischen Gebrauch des Hauptwortes $\deltaύναμις$ selber, sondern von demjenigen des Verbums $\deltaύνασθαι$ ausgehen. Ist nämlich einmal die Bedeutungsentwicklung dieses Zeitwortes erklärt worden, so versteht man spielend leicht auch die Bedeutungsentwicklung des parallelen Hauptwortes. Mir scheint dabei, dass die wichtigsten Belegstellen für den mathematischen Gebrauch des Verbums $\deltaύνασθαι$ ausgezeichnet zusammengestellt sind, in den folgenden Werken:

F. RUDIO : Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates, Leipzig 1907 (Index s. v.).

TH. L. HEATH: «Archimedes» p. CLXI, und von demselben Verfasser: «A History of Greek Mathematics» (Index s. v.).

Bei F. RUDIO wird z. B. unser Verbum folgendermassen erklärt: «In der mathematischen Sprache bedeutet $\deltaύνασθαι$ *gelten, wert sein, ausmachen, betragen*, und gemeint ist wieder: *im Quadrate*. Ich musste an dieser Worterklärung nur soviel ändern, dass ich dabei den wichtigsten Ausdruck mit Nachdruck hervorhob: «*im Qua-*

(45) «Archimedes» p. CLXI.

drate wert sein». Ebenso heisst es auch bei TH. L. HEATH: «δύνασθαι, to be equivalent 'in square' to ... etc.».

Von den vielerlei Beispielen, die für diesen Wortsinn in den genannten Werken angeführt werden, möchte ich diesmal nur eines hervorheben, namentlich die Wendung: *ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ*... TH. L. HEATH schreibt darüber in seinem Archimedes-Buch an der eben zitierten Stelle Folgendes: «The verb δύνασθαι (with or without ἴσον) has the sense of *being* δυνάμει ἴσα, and, when δύνασθαι is used alone, it is followed by the accusative: thus *the square (on a straight line) is equal to the rectangle contained by...* is: (εὐθεία) ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ...».

Ich glaube nun, dass diese letzteren Sätze von TH. L. HEATH die Tatsachen sehr genau und treffend beschreiben. Gleich werden sie uns auch auf die Spur leiten, woher der rätselhafte mathematische Ausdruck δύνασθαι stammen mag. Wir wollen nur die eben angeführten griechischen Worte, die TH. L. HEATH vollkommen richtig übersetzte, auch in deutscher Paraphrase wiederholen. Sie stellen nämlich eine in der griechischen Geometrie ziemlich häufige Redewendung dar, und sie heissen: «eine gegebene Strecke (εὐθεία) *ist* (wenn man sie quadriert), *gleichwertig* (ἴσον δύναται) dem folgenden Rechteck... (τῷ περιεχομένῳ)». Demnach hat also das Zeitwort δύνασθαι als mathematischer Terminus in der untersuchten Redewendung den Sinn: «*in quadrierter Form gleichwertig sein*», oder: «*in Quadrat den gleichen Wert haben, wie...*».

Wir wollen jetzt — einstweilen nur als Arbeitshypothese — annehmen, dass gerade die eben verdeutschte Redewendung *die älteste mathematische Gebrauchsform des Zeitwortes δύνασθαι war*. Und wir fragen — der Arbeitshypothese gemäss: welcher Zusammenhang wohl zu diesem interessanten Gebrauch unseres Zeitwortes geführt haben mag? — Der gesuchte Zusammenhang war offenbar der folgende: irgendein Rechteck wurde in Quadrat umgewandelt (umgerechnet) und über die Seite des (gefundenen) Quadrates sagte man, dass sie dem vorigen Rechteck *in Quadrat gleichwertig ist* (ἴσον δύναται). Aber wie kam das Verbum δύνασθαι zu dieser merkwürdigen Bedeutung? Schliesslich heisst ja δύναμαι gewöhnlich nur: «*können, vermögen, stark sein*» usw. Oder hat dasselbe Zeitwort in irgendeiner Sphäre doch auch eine solche Bedeutung, aus der sich der eben untersuchte mathematische Sinn sehr leicht entwickeln konnte?

Die mathematische Bedeutungsentwicklung des Zeitwortes δύνασθαι erklärt sich aus einigen solchen Wendungen der griechischen Umgangssprache, die ich in dem folgenden eingehender untersuche.

Man liest z. B. einmal bei XENOPHON den folgenden Satz (46): ὁ σίγλος δύναται ἑπτὰ ὀβολοὺς καὶ ἡμιωβέλιον Ἀττικῶς, das heisst also deutsch: «der σίγλος (eine asiatische Münze, das hebräische *Seckel*) *macht aus, gilt, oder: hat den Wert* (δύναται) von siebenundeinhalb attischen Obolen». — Genau dieselbe stilistische Wendung kehrt auch in dem folgenden Satz bei DEMOSTHENES wieder (47): ὁ Κυζικηνὸς ἐδύνάτο ἐκεῖ καὶ δραχμίδας, das heisst also: «der Stater von Kyzikos *hatte dort den Wert* von 28 Drachmen». — Und so könnte man noch zahlreiche Beispiele für diesen Gebrauch des Wortes δύνασθαι aus der Umgangssprache der klassischen Zeit zitieren. Aber uns genügen auch schon diese beiden Fälle in sich.

Wie man sieht, hatte das Verbum δύναμαι in der *Finanzsprache* der Alten einen speziellen Sinn. Rechnete man nämlich eine Geldart in eine andere um, so gebrauchte man unser Zeitwort (δύνασθαι) zur Bezeichnung des *Wertes*. — Dieser spezielle Gebrauch jenes Wortes, das ursprünglich nur «*stark sein*» hiess, ist gar nicht überraschend, wenn man bedenkt, dass ähnliche stilistische Wendungen auch heute noch gebräuchlich sind. Denn auch heute sprechen wir noch von *Valuten* (*valuta* aus dem lat. *valeo* «*stark sein*»); auch heute hört man noch die Frage: «Wie *stark* ist der Dollar, oder der Rubel? — und auch heute redet man noch von *festen Währungen* etc.

Aber nicht nur das Verbum, auch das Hauptwort δύναμις hatte in der Finanzsprache der Griechen einen ähnlichen speziellen Sinn. Man liest z. B. bei PLUTARCH über LYKURGOS (48): δύναμιν ὀλίγην τῷ νομίσματι ἔδωκε, das heisst also: «er liess das Geld nur einen *kleinen Wert* (δύναμιν ὀλίγην) gelten». — Aber ich will die Beispiele nicht weiter häufen.

Es wird für uns viel wichtiger, festzustellen, dass dieser spezielle Sinn des Zeit- und Hauptwortes keineswegs bloss auf die Finanzsprache beschränkt blieb (49). Bezeichnenderweise entstammt ja auch mein ältester Beleg für einen ähnlichen Sinn des Verbums δύνασθαι gar nicht aus dem Bereiche der Geldumrechnung. Bei HE-

(46) Anab. I, 5, 6.

(47) Dem. 34, 23.

(48) Plut., Lyc. 9; vgl. Solon 15.

(49) Offenbar aus der Finanzsprache entlehnt sind die Wörter δύνασθαι und δύναμις auch als Termini der Grammatik. So heisst z. B. das Verbum δύνανθαι, von Wörtern gesagt: «*bedeuten*»: τί δύναται ἢδε ἡ λέξις (vgl. das Pape-Wörterbuch s. v.). Als Terminus der antiken *Phonetik* heisst das Wort δύναμις «*Lautwert*»; z. B. PLATON, «*Kratylos*» 424 B-C: στοιχείων δυνάμεις = «*die Lautwerte der Buchstaben*». Auf diesen letzteren Terminus hat mich JÁNOS BALÁZS freundlichst aufmerksam gemacht.

RODOT liest man nämlich (50): *τριηκόσαι ἀνδρῶν γενεαὶ δυνέσται μύρια ἕτεα* = «dreihundert Menschenalter *haben den Wert* von zehntausend Jahren». Aber offenbar folgt diese Umrechnung der Generationen auf Jahre dem Vorbild des Geldumrechnens, nur darum konnte auch hier dasselbe Verbum gebraucht werden, das bei jenen anderen Operationen zur Bezeichnung des Wertes diente.

Ich vermute nun, dass sich auch der mathematische Sinn — sowohl des Zeitwortes *δύνασθαι*, wie auch des Hauptwortes *δύναμις* — aus jenen Bedeutungen entwickelt hatte, die dieselben Ausdrücke in der Finanzsprache besaßen. Denn es handelte sich auch in der Mathematik — mindestens in denjenigen Fällen, aus denen, der vorigen Arbeitshypothese gemäss, die Entwicklung unseres Ausdruckes ihren Anfang nehmen musste — um eine Art *Umrechnung*. Ich zitierte ja oben die Redewendung, wonach man irgendein *Rechteck* in ein *Quadrat* umwandelt, und über die Seite des gefundenen Quadrates feststellt, dass sie dem vorigen Rechteck «*in Quadrat gleichwertig ist*» (*ἴσον δύναται*).

Aber es besteht doch auch ein sehr wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Gebrauchsarten — das heisst also: zwischen dem, wie dieselben Ausdrücke in der Finanzsprache einerseits, und wie sie in der mathematischen Sprache andererseits benutzt werden. Eben diesen Unterschied der Gebrauchsarten müssen wir jetzt näher ins Auge fassen. — Nach den obigen Beispielen hat nämlich das Zeitwort *δύνασθαι* in der Finanzsprache nur den Sinn: «*gelten, ausmachen, den Wert haben von...*». Dementsprechend heisst auch das Hauptwort *δύναμις* in dem finanziellen Bereich bloss soviel, wie «*Wert*». — Dagegen haben dieselben beiden Worte in dem mathematischen Gebrauch einen genau umrissenen speziellen Sinn. Denn *δύνασθαι* heisst hier: «*im Quadrat wert sein*»; und *δύναμις* ist in der Geometrie: «*der Quadratwert*», oder das «*Quadrat*» selber. — Wie erklärt sich nun diese Spezialisierung der Wortbedeutung in der Geometrie, wenn dieselben aus der Finanzsprache entlehnten Ausdrücke in ihrem ursprünglicheren Anwendungsbereich gar nicht spezialisiert waren? — Ich denke es mir folgendermassen:

Die verschiedenen Geldarten wurden bei den Griechen je nach ökonomischen und politischen Gebietseinheiten selbstverständlich immer anders umgerechnet. Das heisst also: in Attika hat man sowohl das asiatische Seckel, den kyzikenischen Stater, wie auch alle

(50) Her. II 142.

fremden Geldsorten in attische Münzen umgerechnet. Aber genau so verfuhr man auch in den übrigen griechischen Städten; auch dort hat man alle fremden Münzen, und darunter auch die attischen selber, in die eigenen umgerechnet. — Es gab also gar keine solche einheitliche Geldart, in die man alle übrigen Geldarten gewöhnlich umgerechnet hätte, um eben in dieser einzigen den Wert der übrigen zu bestimmen. Darum konnte sich auch die Bedeutung der Ausdrücke *δύνασθαι* und *δύναμις* in der Finanzsprache *nicht* spezialisieren. Denn es änderte sich ja von Fall zu Fall jene Geldart, in der man den Wert der übrigen bestimmte.

Aber ganz anders war es — mindestens meiner Vermutung nach — in der Geometrie. Wollte man nämlich in der Geometrie irgendeine Fläche berechnen, d. h. also den Wert einer Fläche bestimmen, so hat man diese Fläche vor allem in ein *Quadrat* umgestaltet. *Das Quadrat war jene einheitliche Flächenform, in der die Werte aller anderen Flächenformen bestimmt werden mussten*. Darum bekam das Zeitwort *δύνασθαι* — das in der Finanzsprache bloss den Sinn: «*den Wert haben von...*» besass — in dem geometrischen Gebrauch die spezielle Bedeutung: «*in Quadrat den Wert haben*».

Man kann also mit der Bedeutungsentwicklung des Ausdruckes *δύνασθαι* in der Tat auch die Bedeutungsentwicklung des mathematischen Terminus *δύναμις* leicht erklären. Dies letzteres Wort hatte in der Finanzsprache ursprünglich den Sinn: «*der Wert*». Diese Bedeutung hat sich dann in der Geometrie auf «*Quadratwert*» spezialisiert, und darum konnte man mit der Zeit auch das «*Viereck*» selbst, das sonst *τετράγωνον* hiess, als *δύναμις* bezeichnen. Und da man nun die Quadratfläche so berechnet, dass man die Seite mit sich selbst multipliziert, wurde *δύναμις* später auch die «*Multiplikation einer Zahl (Grösse) mit sich selbst*». Diese letztere Bedeutung war schon ganz nahe bei unserem Begriff «*Potenz*». Zu jener Zeit aber, als man den Terminus *δύναμις* mit dem lateinischen Wort «*potentia*» übersetzte, war die wirkliche Bedeutungsentwicklung des ursprünglichen griechischen mathematischen Begriffes (*δύναμις* = «*Quadratwert*») nicht mehr gegenwärtig.

Es darf zu dieser zusammenfassenden Schilderung der Bedeutungsentwicklung ergänzend vielleicht noch erwähnt werden, dass man in dem dargestellten Zusammenhang auch den Sinn des Terminus *δυναμένη* leicht erklären kann: *εὐθεία δυναμένη* ist jene Strecke, die den gesuchten Quadratwert für ein Rechteck — also: das Quadrat, das dem untersuchten Rechteck gleichwertig ist —

ergibt. Man vgl. dazu bei EUKLID, Elem. X. in Def. 4: αἱ δυνάμεναι ... εἰ μὲν τετράγωνα εἴη, αὐταὶ αἱ πλευραὶ, εἰ δὲ ἑτέρα τινα εὐθύγραμμα, αἱ ἴσα αὐτοῖς τετράγωνα ἀναγράφουσαι. Mit dem Wort δυνάμεναι werden also in dieser Definition die *Seiten* der Quadrate bezeichnet; wenn es aber nicht von Quadraten, sondern von irgendwelchen anderen geradlinigen Figuren die Rede ist, so bezeichnet man mit demselben Wort die Seiten der den betreffenden geradlinigen Figuren gleichwertigen Quadrate.

IV.

Wie mir scheint, ist die obige Worterklärung nur noch in *einem* Punkte nicht hinreichend genug begründet. Denn ich ging ja — scheinbar völlig willkürlich — von der Arbeitshypothese aus, dass gerade diejenige Gebrauchsart des Zeitwortes δύνασθαι in der Mathematik die älteste sei, die in einem ganz speziellen Fall zur Anwendung kam. Dieser Spezialfall soll derjenige sein, in dem es sich um die Umwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat handelte, um das Flächenmass des Rechtecks in Quadrat ausdrücken zu können. — Es fragt sich nun: womit könnte man die vorige Arbeitshypothese wahrscheinlich machen? — Aber bevor wir die Antwort auf diese letztere Frage versuchten, möchte ich zunächst noch an zwei Beispielen auch jene andere mathematische Gebrauchsart des Zeitwortes δύνασθαι illustrieren, die meiner Vermutung nach die spätere, die schon abgeleitete ist.

Das eine Beispiel möge diejenige sprachliche Abfassung des pythagoreischen Lehrsatzes sein, die man bei ATHENAIOS liest (51). Es heisst nämlich hier: τριγώνου ὀρθογωνίου ἢ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτείνουσα ἴσον δύναται ταῖς περιεχούσαις. Das heisst also: Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks *hat in Quadrat den gleichen Wert* (ἴσον δύναται), wie die Katheten zusammen (d. h. also eigentlich genauer: wie die *Quadrate* der Katheten zusammen). — Es handelt sich also hier — wie man sieht — gar nicht um eine Flächenumgestaltung, wobei man mit dem Zeitwort δύνασθαι den «*Quadratwert*» der geprüften Fläche bezeichnen würde. Ja, auch die Bedeutung unseres Terminus ist hier schon so weit entfernt von jener anderen Bedeutung, die — mindestens meiner Erklärung nach — die ältere aber schon mathematische Bedeutung sein musste, dass auch der Sinn des Wortes in den Wörterbüchern — gerade unter Berufung auf die

(51) Ath. X 418 f.

eben zitierte Stelle — folgendermassen angegeben wird: δύνασθαι hiesse in der Mathematik «*ein Quadrat ergeben*», von Linien oder Zahlen gesagt (52).

Eine der vorigen sehr ähnliche Gebrauchsart des Zeitwortes δύνασθαι begegnet auch in dem bekannten Bericht des SIMPLICIUS über die Mönchenquadrierung des HIPPOKRATES von Chios, wo es einmal heisst (53): ἡ διάμετρος τετραπλάσιον δύναται τῆς τοῦ ἑξαγωνίου (πλευρᾶς). Die sprachliche Abfassung des Satzes ist hier beinahe noch bündiger, als sie in dem Falle des pythagoreischen Lehrsatzes bei ATHENAIOS war. Denn das eben angeführte griechische Zitat hiesse ja wörtlich übersetzt: «*Der Durchmesser hat den vierfachen Quadratwert der Sechseckseite*». Wir können heutzutage eine solche Formulierung beinahe nur deswegen richtig verstehen, weil wir wissen, dass $(2r)^2 = 4r^2$ ist. Also die sinngemässe Uebersetzung des zuletzt zitierten Satzes hiesse doch: «*Das Quadrat, das man auf den Durchmesser eines Kreises erhebt, ist viermal so gross, wie jenes andere Quadrat, das man auf die eine Seite des in denselben Kreis eingeschriebenen regelmässigen Sechsecks erhebt*».

Es zeigen also die eben behandelten beiden Fälle, dass das Zeitwort δύνασθαι gar nicht *nur* in jener mathematischen Redewendung gebräuchlich war, von der ich in dem vorigen Kapitel die Bedeutungsentwicklung des Terminus ableiten konnte. Ja, stellte man eine Statistik über die Häufigkeit der Fälle zusammen, in denen unser Terminus benutzt wird, so würde man wahrscheinlich viel weniger solche Vorkommnisse finden, in denen das Zeitwort δύνασθαι den umgerechneten Quadratwert eines Rechtecks bezeichnet, und viel höher wäre die Anzahl jener anderen Fälle, in denen der Gebrauch desselben Verbums schon den zuletzt genannten beiden Beispielen bei ATHENAIOS und SIMPLICIUS ähnlich ist. — Aber mit welchem Recht darf man dann dennoch behaupten, dass gerade die selteneren Fälle die ältere Form der Gebrauchsart darstellen? Womit könnte man den Gedanken wahrscheinlich machen, dass der mathematische Terminus δύνασθαι eigentlich dennoch von jener Praxis herrührt, die daraus bestand, dass man immer wieder *Rechtecke in Quadrate umwandelte um ihr Flächenmass in Quadrat ausdrücken zu können*? — Ich glaube, diese Vermutung wird durch die folgende Euklid-Analyse erhärtet.

(52) Vgl. z. B. W. Pape, Griechisch-Deutsches Wörterbuch, Erster Band. Braunschweig, 1849. S. 577 s. v.

(53) F. RUDIO, op. cit. 70, 15.

Am Ende des II. Buches der «Elemente» liest man den folgenden Satz:

II.14: «*Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten*» (54) ($\tau\acute{o}\ \delta\omicron\theta\acute{\epsilon}\nu\tau\iota\ \epsilon\upsilon\theta\upsilon\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu\phi\ \acute{\iota}\sigma\omicron\nu\ \tau\epsilon\tau\rho\acute{\alpha}\gamma\omega\nu\ \sigma\upsilon\sigma\tau\acute{\eta}\sigma\alpha\sigma\theta\alpha\iota$). Es ist in dieser Form eine *rein theoretische Konstruktionsaufgabe*, die man mit demselben Recht auch umgekehrt aufstellen könnte. Denn es ist ja von theoretischem Gesichtspunkt aus einerlei, welche man von den beiden Möglichkeiten wählt: 1) «gegeben ist eine beliebige geradlinige Figur, und man konstruiere ein Quadrat, das ihr gleich ist», oder: 2) «gegeben ist ein Quadrat, und man konstruiere eine beliebige geradlinige Figur, die dem vorigen Quadrat gleich ist». Aber wie kommt es dann, dass bei EUKLID doch nur die Variante 1), und nirgends die Variante 2), behandelt wird? — Ich glaube, der sehr einfache Grund hierfür ist die Tatsache, dass die «rein theoretische Konstruktionsaufgabe» in ihrem Ursprung doch auf etwas *Praktisches* zurückgeht. Denn es kam in der Praxis so gut wie nie vor, dass man ein Quadrat in eine andere ihm flächengleiche geradlinige Figur hätte umgestalten müssen. Der praktische Zweck dieser Flächenumgestaltungen war ja meistens doch die Berechnung des Flächenmasses, und bei dem Quadrat ist das Flächenmass mit der Seite schon gegeben. — Aber umso häufiger kam in der Praxis der andere Fall vor, dass man nämlich das Flächenmass einer beliebigen geradlinigen Figur berechnen musste. In diesem Fall hatte man gewöhnlich ein Quadrat zu errichten, das der betreffenden geradlinigen Figur gleich ist. — Ich glaube also, dass unser Satz (*Elem. II.14*) eigentlich eine in theoretische Form umkleidete Flächenberechnungsaufgabe ist. Hätte EUKLID nicht um jeden Preis eine Art «rein abstrakte Theorie» erstrebt, so hätte er unseren Satz auch folgendermassen formulieren können: «*Wie berechnet man den Quadratwert einer beliebigen geradlinigen Figur (= Fläche)?*».

Noch lehrreicher ist für uns die Lösung der in Satz *Elem. II.14* gestellten Aufgabe. Denn das gesuchte Quadrat, das der gegebenen geradlinigen Figur gleich ist, wird hier in zwei Schritten konstruiert. Zuerst errichtet man ein flächengleiches rechtwinkliges Parallelogramm, also ein Rechteck ($\sigma\upsilon\nu\epsilon\sigma\tau\acute{\alpha}\tau\omega\ \gamma\acute{\alpha}\rho\ \tau\acute{o}\ \epsilon\upsilon\theta\upsilon\gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu\phi\ \acute{\iota}\sigma\omicron\nu\ \pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda\omicron\gamma\rho\alpha\mu\mu\omicron\nu\ \delta\rho\theta\omicron\gamma\acute{\omega}\nu\iota\omicron\nu$), und dann wird das Rechteck selbst in ein Quadrat umgestaltet. Man erreicht also die gesuchte Quadrat-Form

(54) Der deutsche Text der Zitate aus EUKLIDS «Elementen» immer nach C. THAER, Die Elemente von Euklid, I-V (Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften 235, 236, 240, 241, 243), Leipzig 1933-1937.

in der Tat über das flächengleiche Rechteck hindurch. Das muss selbstverständlich bei jeder Flächenberechnung einer beliebigen geradlinigen Figur so gemacht worden sein: zuerst wurde die betreffende geradlinige Figur in ein Rechteck umgerechnet, und dann bekam man das Flächenmass (= den Quadratwert) des Rechtecks durch eine weitere Umwandlung in ein Quadrat. — Deswegen glaube ich also, dass die älteste mathematische Gebrauchsart des Zeitwortes δύνασθαι mit jener stereotypen Wendung verbunden war, die ich oben (S. 236) folgendermassen paraphrasierte: «eine gegebene Strecke ($\epsilon\upsilon\theta\epsilon\iota\alpha$) ist (wenn man sie quadriert), gleichwertig ($\acute{\iota}\sigma\omicron\nu\ \delta\upsilon\nu\alpha\tau\alpha\iota$) dem folgenden Rechteck ($\tau\acute{o}\ \pi\epsilon\rho\iota\epsilon\chi\omicron\mu\acute{\epsilon}\nu\omega$) ...».

* * *

Es wird sich lohnen, in einem kurzen Ueberblick auch noch jene wichtigsten Sätze zusammenzustellen, die bei EUKLID den eben behandelten Satz (II.14) vorbereiten. — Vor allem muss hier der Satz *Elem. I.45* erwähnt werden, der in dem ersten Schritt der Lösung unserer Aufgabe auch unmittelbar benutzt wird: wie man nämlich ein flächengleiches Rechteck konstruiert. In EUKLIDS Formulierung heisst dieser Satz:

I.45: «*Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten*». — Man sieht also, EUKLID erstrebt nicht nur eine Art «abstrakte Theorie», sondern immer auch den höchsten erreichbaren Grad der Allgemeingültigkeit. Darum redet er nicht einfach von einem Rechteck, sondern lieber von einem «Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel»; das Rechteck, das für die Flächenberechnungsprobleme als mittlerer Schritt einzig und allein in Betracht kommt, wird nur als Spezialfall miteinbegriffen.

In der Lösung des zuletzt zitierten Satzes (I.45) werden die ihm unmittelbar vorangehenden Sätze: I.42 und I.44 benutzt. Diese heissen:

I.42: «*Ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten*».

I.44: «*An eine gegebene Strecke ein einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen*».

Natürlich werden auch diese beiden Sätze ihrerseits auf noch einfachere und ihnen verwandte vorangehende Sätze gebaut. Wollte ich nun alle diejenigen Theoreme und Aufgaben aufzählen, die mehr

oder weniger als Antezedenzen des Satzes *II.14* gelten dürften, so könnte ich beinahe das ganze erste Buch der «Elemente» namhaft machen. Denn schliesslich besteht ja doch gerade daraus EUKLIDS «systematischer Aufbau der Geometrie»: jede These wird auf ihr vorangehende Thesen gebaut. Nun will ich jedoch gar nicht in diesem Sinne einen sog. «vollständigen Stammbaum» unseres Satzes (*II.14*) zusammenstellen. Ich berufe mich anstatt dessen nur auf solche früheren Sätze bei EUKLID, in denen die Probleme schon deutlich auf das Problem unseres Satzes nach vorne hinweisen. Solche Sätze sind nun — im Anschluss an die vorhin genannten — noch die folgenden:

I.41: «Wenn ein Parallelogramm mit einem Dreieck dieselbe Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen liegt, ist das Parallelogramm doppelt so gross, wie das Dreieck».

I.38: «Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich».

I.37: «Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind einander gleich».

I.36: «Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich».

I.35: «Auf derselben Grundlinie zwischen denselben Parallelen gelegene Parallelogramme sind einander gleich».

Ueberblickt man nun jene neun Euklidischen Sätze, die in diesem Kapitel zitiert wurden (I.35, 36, 37, 38, 41, 42, 44, 45 und *II.14*), so sieht man sofort, dass diese alle ohne Ausnahme das Problem der *Flächengleichheit* bzw. dasselbe der *Flächenumgestaltung* behandeln. Natürlich könnte man den Kreis dieser Sätze auch noch erweitern. Nicht bloss die aufgezählten neun Theoreme beschäftigen sich mit Flächengleichheit und Flächenumgestaltung. Es gibt bei EUKLID in dem I. und II. Buch der «Elemente» auch andere verwandte Thesen, die man ebenfalls noch in den vorigen Kreis der Sätze einbeziehen könnte. Aber ich wollte von diesen jetzt nur diejenigen namhaft machen, die sozusagen unmittelbar mit jenem Satz, *Elem. II.14*, zusammenhängen, von dem wir ausgegangen waren. — Es fragt sich nun: *welche Rolle und Bedeutung unter den übrigen Sätzen der Flächengleichheit und Flächenumgestaltung unserem Satz, Elem. II.14, zukommt?*

TH. L. HEATH erklärte in seinem Kommentar den Satz *II.14* für eine Art «nachträgliche Ergänzung», sozusagen für ein «Supplement». Nachdem nämlich alle übrigen Aufgaben der Flächenumgestaltung in verschiedenen vorangehenden Sätzen schon gelöst waren,

hätte EUKLID — nach der Erklärung von TH. L. HEATH — in diesem Satz (*II.14*) die Lösung einer noch übrigbleibenden Aufgabe — nämlich die Lösung dessen, wie man eine beliebige geradlinige Figur in ein Rechteck, und dieses in ein flächengleiches Quadrat umwandelt — sozusagen «nachgeholt» (55).

Ich glaube nun, dass diese Erklärung bis zu einem gewissen Grade doch irreführend ist. Denn es handelt sich ja im Falle des Satzes *II.14* keineswegs bloss um eine «nachträgliche Ergänzung», also nicht um eine Art «Supplement». Im Gegenteil! Dieser Satz (*II.14*) ist gerade *die Vollendung und die Krönung* einer ganzen Serie der ihm vorangehenden Sätze. Das heisst: alle Sätze der Flächengleichheit und Flächenumgestaltung hatten ihren Sinn — mindestens in der Praxis — eigentlich nur im Hinblick auf unseren Satz (*II.14*), also darin, dass sie diesen Satz vorbereitet hatten. — Für diese letztere Behauptung von mir spricht die folgende Ueberlegung.

Man kann jene Gruppe der Sätze, von denen ich oben neun auch zitiert habe, als die «Lehre von der Flächengleichheit und Flächenumgestaltung» charakterisieren. Der Name «*Flächenumgestaltung*» (*transformation of areas*, HEATH) ist jedoch nur eine moderne Umschreibung, die aus der Euklidischen Behandlung dieser Sätze nachträglich abstrahiert wurde. Ich glaube aber, dass jene ursprüngliche antike Bezeichnung, die man für dieselben Sätze in den vor-euklidischen Zeiten benutzt haben mag, viel konkreter war; sie hiess nämlich wohl: *τετραγωνισμός*. Natürlich passt dieser Name vor allem eben auf denjenigen Satz (*Eucl. Elem. II.14*), in dem ich gerade die Vollendung und die Krönung der ganzen «Lehre von der Flächengleichheit und Flächenumgestaltung» erblicken möchte.

Es braucht hier wohl nicht betont zu werden, eine wie grosse Rolle die beiden Termini *τετραγωνίζειν* und *τετραγωνισμός* schon in der griechischen Mathematik des 5. vorchristlichen Jahrhunderts gespielt hatten. Wie bekannt, war ja die «Quadratur des Kreises» (griechisch: *ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου*) ein sehr populäres wissenschaftliches Problem schon gegen das Ende des 5. Jahrhunderts (56). Ich muss in diesem Zusammenhang eher nur eine andere Seite der Frage mit Nachdruck hervorheben. Man versteht nämlich unter *τετραγωνισμός* gewöhnlich nur den *τετραγωνισμὸς κύκλου*, d. h. also die *quadratura circuli*, nachdem gerade dieses Problem wegen seiner

(55) «The Thirteen Books... I 410: «As... are supplementary to... so II 14 completes the theory of transformation of areas so far as it can be carried out without use of proportions... The problem still remaining unsolved etc.»

(56) Vgl. z. B. B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 214 ff.

Unlösbarkeit so berühmt geworden ist. Aber die beiden Ausdrücke τετραγωνίζειν und τετραγωνισμός haben an und für sich mit dem Kreis selbstverständlich gar nichts zu tun. Ja, es war anfänglich überhaupt auch nicht der Kreis jene Figur, die man «viereckig machen», «quadrieren» wollte. Auch die Aristoteles-Stelle (*De anima* II. 2, 413 a 19), die ich in dem nächsten Kapitel ausführlicher besprechen werde, ist ein klarer Beweis dafür, dass man den τετραγωνισμός auch auf beliebige geradlinige Figuren, besonders auf Rechtecke bezog. Man verwandelte nämlich alle geometrische Figuren (alle Flächen) in Quadrate — d. h. man machte sie viereckig (τετραγωνίζειν) —, weil man ihren «Quadratwert» (δύναμις) bestimmen, also ihr Flächenmass berechnen wollte. Und nachdem man schon sehr gut wusste, wie, auf welche Weise sich alle geradlinigen Figuren in Quadrate umgestalten lassen (vgl. *Elem.* II. 14), erst dann fragte man sich: ob sich nicht auch der Kreis in ein Quadrat umwandeln liesse, denn man wollte auch bei dem Kreis den «Quadratwert» wissen (57), d. h. man wollte auch sein Flächenmass berechnen.

Ich vermute also, dass jene Sätze der Flächengleichheit und Flächenumgestaltung, die in den beiden ersten Büchern der Euklidischen «Elemente» in rein theoretischer Form erscheinen, eigentlich auf die praktische Aufgabe des τετραγωνισμός zurückgehen. Ursprünglich hat man diese Sätze bei der Flächenberechnung, d. h. bei dem Bestimmen des Quadratwertes (δύναμις) der verschiedenen Flächenfiguren benutzt. Als «*Terminus ante quem*» für diese Sätze bei EUKLID gelten also jene aus dem 5. Jahrhundert bekannten

(57) Es sei hier nur nebenbei noch Folgendes erwähnt: ich hoffe oben gezeigt zu haben, dass der geometrische Terminus für den «Quadratwert» (δύναμις) aus der Finanzsprache entlehnt wurde. Nun ist es wohl kein Zufall, dass in dem Bericht des SIMPLICIUS über die Kreisquadratur des ANTIPHON auch noch ein anderer sehr bezeichnender Ausdruck der Finanzsprache gebraucht wird: δαπανᾷν. Der «Wert des Kreises in Quadrat» (= sein Flächenmass) wird durch die eingeschriebenen Polygone «verausgabt», «verbraucht» (vgl. dazu F. RUDIO, op. cit. Index s. v.). Man sagt nämlich das Verbum δαπανᾷν in der Umgangssprache von «Geld ausgeben». — Dagegen ist der moderne Ausdruck, den man in diesem Zusammenhang bei so gut wie allen Historikern (z. B. auch in O. BECKERS ausgezeichnetem Büchlein: «Das mathematische Denken der Antike», Göttingen 1957 S. 93) wiederfindet: «*Exhaustion*». Nun ist aber dieser letztere Ausdruck, leider, irreführend. Denn man sagt ja das lateinische Verbum *exhaustire* vor allem von «Flüssigkeiten, bes. Wasser schöpfen, ausschöpfen». Gewiss, heisst auch das griechische Zeitwort δαπανᾷν «erschöpfen», aber nie von Flüssigkeit und Wasser, immer nur von Geldausgaben gesagt!

Versuche, die sich schon das Quadrieren des Kreises zum Ziel gesetzt hatten (also ANTIPHON, HIPPOKRATES von Chios u. a. m.).

* * *

Am Ende dieses Kapitels möchte ich nachträglich noch auf eine interessante Tatsache aufmerksam machen. — Die Ausdrücke τετραγωνίζειν und τετραγωνισμός kommen nämlich in den Euklidischen «Elementen» überhaupt nirgends vor. Aber dasselbe gilt — mindestens bis zu einem gewissen Grade — auch für die Ausdrücke δύνασθαι, δύναμις und δυναμένη. Denn diese letzteren werden zwar in dem X. Buch der «Elemente», aber eben ausschliesslich nur in dem X. Buch und sonst nirgends in den «Elementen», benutzt. — Nun kann man die Tatsache — dass nämlich das X. Buch der «Elemente», was die Termini δύνασθαι, δύναμις und δυναμένη betrifft, eine Ausnahme bildet — sehr leicht folgendermassen erklären. Dieses Buch behandelt die sog. «Theorie der Irrationalitäten», und diese Theorie ist von den verhältnismässig neuen Begriffen: δυνάμει σύμμετρος bzw. δυνάμει ἀσύμμετρος (quadriert kommensurabel oder quadriert inkommensurabel) untrennbar. Auf der anderen Seite kann man jedoch diese Begriffe in dem Griechischen anders auch gar nicht ausdrücken. Der neue Begriff des «quadriert kommensurablen bzw. quadriert inkommensurablen» hat also — meiner Ansicht nach — auch den Gebrauch der sonst verpönten Ausdrücke δύνασθαι, δύναμις und δυναμένη nach sich gezogen.

Ich vermute nämlich, dass die eben aufgezählten Ausdrücke (τετραγωνίζειν, τετραγωνισμός, δύνασθαι, δύναμις, δυναμένη) alle von EUKLID bewusst und mit Absicht vermieden wurden. Denn diese alle waren ja doch Termini der praktischen, sozusagen der angewandten Geometrie (58). Und selbstverständlich wollte jener EUKLID, der eine Art «rein abstrakte Theorie» erstrebt hatte, die Ausdrücke der angewandten Wissenschaft möglichst vermeiden.

V.

Die vorangestellten Betrachtungen haben einen kurzen Einblick in jene voreuklidische Geometrie ermöglicht, deren Problem das «Quadrieren» (τετραγωνίζειν) und das Berechnen des «Quadratwertes», d. h. also das Berechnen der δύναμις war. Denselben

(58) Man vgl. zu der antiken Bewertung der «reinen» und der «angewandten» Wissenschaft unter vielen anderen z. B. PLATON, Resp. VII 525 C ff.

Einblick können wir jetzt mindestens in einer Richtung noch vertiefen.

Es ist nämlich schon längst bemerkt worden, dass jene Konstruktion, die in dem zweiten Schritt der Lösung der Euklidischen Aufgabe II.14 benutzt wird, auch noch ein zweites Mal in EUKLID'S «Elementen» vorkommt.

Wie ich oben darauf schon hingewiesen hatte, wird der Satz II.14 («*ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten*») in zwei Schritten gelöst; zuerst wird ein der gegebenen Figur gleiches Rechteck konstruiert, und dann — in dem zweiten Schritt der Lösung — verwandelt man das Rechteck in ein flächengleiches Quadrat. — Es handelt sich nun jetzt um jene Konstruktion, deren man sich in dem zweiten Schritt bedient, als das Rechteck in Quadrat zu verwandeln ist. Dieselbe Konstruktion nämlich, mit der man hier diese Aufgabe löst, kehrt bei EUKLID in dem VI. Buch der «Elemente» (VI.13) als Lösung der folgenden Aufgabe wieder: «*Zu zwei gegebenen Strecken die Mittlere Proportionale zu finden*» (δύο δοθεισών εὐθειῶν μέσην ἀνάλογον προσεῖν). Ein Unterschied liegt nur in der Beweisführung, d. h. also in der Begründung der Richtigkeit der Konstruktion vor. Im VI. Buch wird der Satz mit Hilfe der Proportionenlehre bewiesen, während dieselbe Proportionenlehre in dem II. Buch noch konsequent vermieden wird.

Es fragt sich nun, welcher wohl von den beiden Beweisen für dieselbe Konstruktion der ältere sei? — Erleichtert wird das Beantworten dieser Frage dadurch, dass eine beiläufige Bemerkung des ARISTOTELES, die in seinen Werken auch zweimal wiederkehrt (59), sich gerade mit unserem Satz (II.14) zu beschäftigen scheint. — Nun hat J. L. HEIBERG, der die hierbezügliche Aristoteles-Stelle behandelte, die Frage — zweifellos richtig — folgendermassen gelöst (60): offenbar kennt ARISTOTELES den Satz *Eucl. II.14* noch mit jener Beweisführung, die wir jetzt als Beweisführung des Satzes *Eucl. VI.13* lesen. Dieser muss also der ursprünglichere Beweis sein, während jener andere, den man bei EUKLID anlässlich des Satzes II.14 kennenlernt, erst eine nachträgliche Aenderung ist. Es scheint nämlich, dass EUKLID — oder jener Vorgänger von ihm, der die Sätze im II. Buch der «Elemente» in ihrer gegenwärtigen Reihenfolge zusammengestellt hatte — den Gebrauch der Proportionenlehre bei diesen Sätzen

(59) De anima II. 2,413 a 19 und Metaph. 996 b 21.

(60) J. L. HEIBERG, Mathematisches bei Aristoteles (vgl. oben Anm. 23) S. 20; vgl. TH. L. HEATH, The Thirteen Books... I 410.

noch vermeiden wollte. Darum konstruierte er einen neuen Beweis für den alten Satz II.14.

Da ich glaube, dass die betreffende Aristoteles-Stelle für uns — auch über die eben zusammengefasste Feststellung von J. L. HEIBERG hinausgehend — sehr aufschlussreich wird, will ich sie hier etwas eingehender behandeln.

ARISTOTELES behauptet nämlich an der fraglichen Stelle (61), dass das Definieren in zwei verschiedenen Formen möglich wäre. Entweder würde man den Begriff, der zu definieren ist, einfach nur seinem Sinne nach beschreiben, oder man könnte — indem man definiert — gleich auch das Wesentlichste an dem zu definierenden Begriff namhaft machen. Sein Beispiel für diese zwiefache Art des Definierens wird: wie man den Begriff «*Quadrieren*» erklärt. Die hierbezüglichen Worte heissen in genauer Paraphrase:

«Gewöhnlich sind die Definitionen Schlussätzen ähnlich, z. B.: was ist das Quadrieren (ὅλον τί ἐστὶν ὁ τετραγωνισμός) — Das Gleichsein eines rechtwinkligen gleichseitigen (Vierecks) einem Rechteck (τὸ ἴσον ἑτερομήκει· ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοπλευρον) (62). Eine solche Definition ist ein Schlussatz. — Wer aber behauptet: *Quadrieren* sei das Auffinden der Mittleren Proportionale, derjenige macht auch den Grund der Sache namhaft» (ὁ δὲ λέγων, ὅτι ἐστὶν ὁ τετραγωνισμός μέσης εὐρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἴτιον).

Zu vergleichen ist mit dieser Stelle auch noch das Folgende aus der Metaphysik (I 996 b 21): «Da es nämlich ein Wissen von einem und demselben Gegenstand in mehrfacher Bedeutung gibt, so schreiben wir demjenigen ein Wissen in höherem Sinne zu, der erkennt, was der Gegenstand ist... z. B. was ist das *Quadrieren*: dass es nämlich das Auffinden der Mittleren Proportionale bedeutet» (ὅλον τί ἐστὶ τὸ τετραγωνίζειν ὅτι μέσης εὐρεσις).

(61) Siehe oben Anm. 59. — Man vgl. zu der folgenden Paraphrase auch «Aristoteles: Ueber die Seele» übers. v. W. THEILER, Akademie-Verlag. Berlin, 1959. S. 26 und 109.

(62) Man versteht aus dem Wortlaut des Textes natürlich ohne jeden Zweifel, wie der Verfasser den τετραγωνισμός (= das Quadrieren) verstand. Quadrieren ist nämlich — nach seinen Worten —, wenn man ein Rechteck (ἑτερόμηκες) in ein ihm flächengleiches Quadrat (ὀρθογώνιον ἰσοπλευρον) umwandelt. Genau so wird diese Aufgabe auch bei EUKLID (Elem. II. 14) gelöst. Dagegen, dass hier zum Teil andere Termini als bei EUKLID benutzt werden, hätte man noch kaum etwas einzuwenden. Aber umso störender wirkt die nachlässige, ja beinahe unsaubere Formulierung des zitierten Satzes selber. Derjenige, der so formuliert, hatte sehr wenig Sinn für das Mathematische, ja überhaupt für die Form selber!

Man erfährt also aus den eben angeführten Worten des ARISTOTELES die folgenden drei wichtigen Tatsachen:

1. Unter « *Quadrieren* » (τετραγωνίζειν) verstand man gewöhnlich gar nicht das « *Quadrieren des Kreises* », sondern — wie ich es auch schon in dem vorigen Kapitel betont hatte — einfach auch das « *Viereckig-Machen von geradlinigen Figuren* ».

2. Man hat das Quadrieren der geradlinigen Figuren *immer über die Rechteckform hindurch erreicht*. Das heisst: alle geradlinigen Figuren wurden beim Quadrieren zunächst in ein flächengleiches Rechteck umgeändert, und erst danach hat man das Rechteck selbst quadriert. Natürlich konnten wir diese Tatsache oben auch schon aus dem Euklid-Text (*Elem. II.14*) erschliessen; aber der vorige Schluss wird jetzt durch das ausdrückliche Zeugnis des ARISTOTELES nur noch mehr erhärtet. Nur deswegen konnte man die beiden Begriffe, « *Quadrieren* » und « *Auffinden der Mittleren Proportionale* », so eng miteinander verbinden, weil bei dem Quadrieren notwendigerweise immer auch von einem Rechteck die Rede war. Keine andere Flächenfigur, nur das Rechteck, wird dadurch quadriert, dass man die *Mittlere Proportionale der beiden Seiten sucht*.

3. Man bediente sich bei dem Quadrieren des Rechtecks offenbar jenes Satzes, den man in dem VI. Buch der Euklidischen « *Elemente* » in der folgenden Form wiederfindet:

VI.17: « *Stehen drei Strecken in Proportion, so ist das Rechteck aus den äusseren dem Quadrat über der mittleren gleich* » (ἐὰν τρεῖς εὐθεῖαι ἀνάλογον ὦσιν, τὸ ὑπὸ τῶν ἀκρῶν περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς μέσης τετραγώνῳ).

Nach dem Zeugnis des ARISTOTELES wurde also ein Rechteck mit den Seiten a und b auf dem Wege quadriert, dass man die Mittlere Proportionale (x) der beiden Seiten suchte. Denn wenn $a : x = x : b$, dann gilt im Sinne des zuletzt zitierten Satzes (*Elem. VI.17*) die Gleichung: $x^2 = ab$. — Nun heisst die « *Mittlere Proportionale* » bei EUKLID: ἡ μέση ἀνάλογον (63). Aber der oben zitierte Aristoteles-Text bedient sich anstatt dieses Namens (μέση ἀνάλογον) einer einfacheren Ausdrucksweise; das « *Auffinden der Mittleren Proportionale* » heisst nämlich bei ARISTOTELES: μέσης εὕρεσις. Der aufmerksame Leser wird durch diesen letzteren Ausdruck — μέση — an die antike Mittellehre erinnert.

(63) Leider, kann ich hier auf das sprachliche Erklären dieses wichtigen Ausdruckes nicht eingehen. Ich verweise einstweilen nur auf meinen vorbereitenden Aufsatz: « *Analogia* » in Acta Ant. Acad. Scient. Hung. X. 1962 237-245.

Man weiss, dass das Altertum nicht weniger als *elf* verschiedene Mittel gekannt hatte (64); aber wirklich alt waren von diesen eigentlich nur jene drei Mittel, die auch schon für die Pythagoreer des 5. vorchristlichen Jahrhunderts bezeugt sind. Unsere älteste Quelle über die Mittellehre der Pythagoreer ist ein Fragment des ARCHYTAS, das in dem Kommentar des PORPHYRIOS (zu der Harmonielehre des PTOLEMAIOS) erhalten blieb (65). Der erste Satz dieses Fragmentes heisst:

« Es gibt drei Mittel in der Musik (μέσαι δὲ ἐν τῇ τριῇ μουσικῇ), einmal das *arithmetische*, zweitens das *geometrische*, und drittens das entgegengesetzte, das auch als das *harmonische* bezeichnet wird ».

Nun meint ARISTOTELES in unserem vorigen Text von den drei Mitteln des ARCHYTAS offenbar das *geometrische*. — Aber woher haben die beiden ersten Mittel, die auch heute noch oft in derselben Form wie bei ARCHYTAS erwähnt werden, ihre merkwürdigen Namen: « *arithmetisches Mittel* » und « *geometrisches Mittel* »? — Ich glaube, man kann diese Namen sehr leicht erklären, wenn man an Folgendes denkt:

1. Das sog. *arithmetische Mittel* ist — sowohl nach der Schilderung des ARCHYTAS, wie auch im Sinne der auch heute noch üblichen Praxis, dieses Mittel zu finden — gar nichts anderes als: die Mitte zwischen zwei Zahlen. Der griechische Name: μέση ἀριθμητική wird also wohl einfach nur « *Mitte zweier Zahlen* », d. h. also « *Mitte zweier ἀριθμοί* » heissen.

2. Anders erkläre ich den Ursprung der Benennung μέση γεωμετρική. Man hat nämlich diese Art Mittel — nach dem vorigen Bericht des ARISTOTELES — bei dem *Quadrieren*, also bei der *Flächenberechnung* benutzt. Ja, so wichtig war die Rolle von dieser Art Mittel in dem Quadrieren, dass nach ARISTOTELES das Wesentlichste des Quadrierens gerade in dem Auffinden der Mitte (μέσης εὕρεσις) bestand. Aber welche Form der *Flächenberechnung* mag wohl die älteste gewesen sein? — Nun diese älteste Form war bei den Griechen zweifellos das *Feldmessen*, die ionische γεωμετρία selbst — in dem ursprünglichen Sinne dieses Wortes. Das « *geometrische Mittel* » mag also seinen Namen wohl daher haben, dass diese Art Mittel besonders bei dem *Feldmessen*, in der γεωμετρία benutzt wurde. — Der zweifellos alte Name: « *geometrisches Mittel* » scheint also aus derselben Zeit

(64) PAUL-HENRI MICHEL, De Pythagore à Euclide, Paris 1950 365-411 (Les médiétés); vgl. dazu auch K. REIDEMEISTER, op. cit. 24 ff.

(65) PORPH. in Ptol. harm. p. 92 (DÜRING) - H. DIELS-W. KRANZ, Fragmente der Vorsokratiker I^o Archytas B fr. 2.

zu stammen, wie das verwandte τετραγωνίζειν und δύναμις, also aus der Zeit der noch *vorpythagoreischen* γεωμετρία. Später, zur Zeit des Pythagoreers ARCHYTAS, rechnete man natürlich auch schon das «geometrische Mittel» zu den *musikalischen Mitteln*.

* * *

Am Ende dieser Arbeit möchte ich hier noch Folgendes mit Nachdruck hervorheben. Ich habe oben den wichtigen Euklidischen Satz, *Elem. II.14*, als den Satz des τετραγωνισμός erklärt. Er wurde — nach dem Zeugnis des ARISTOTELES — ursprünglich mit der Hilfe des *geometrischen Mittels* gelöst, und man benutzte ihn — meiner Vermutung nach — zu der Bestimmung des *Quadratwertes* beliebiger geradliniger Flächenfiguren. — Nun soll aber derselbe Satz — nach manchen modernen Erklärungen (66) — die Lösung der quadratischen Gleichung $x^2 = ab$ behandeln. — Man wird selbstverständlich nicht bestreiten können, dass das algebraische Äquivalent unseres Satzes in der Tat die eben zitierte Gleichung ist. Aber ich finde, dass der Hinweis auf die algebraische Form in diesem Fall dennoch irreführend ist. Denn sowohl EUKLIDS Satz (*Elem. II.14*), wie auch die oben behandelten Begriffe: δύναμις, τετραγωνισμός und μέση γεωμετρική — sind ja doch *rein geometrischen Ursprungs*.

ÁRPÁD SZABÓ

(66) Vgl. oben Anm. 54 (Bd. I. S. 86) und TH. L. HEATH, *The Thirteen Books...* I 410.

IN STUDI IN ONORE DI
GENNARO PERROTTA