

IN: MATHEMATISCHE
BEITRÄGE ZUM KULTUR
LEBEN DER VÖLKER

3354 paf
CANTOR, M.
1863
p 83 - 94

VI. Die Geometrie des Pythagoras.

Ich habe mir für diesen Abschnitt der Untersuchungen die Aufgabe gestellt, in der Mathematik des Pythagoras solche Elemente aufzuschliessen, welche seine Anwesenheit in Egypten und Babylon bestätigen. Freilich wird dadurch dieses Kapitel und auch das nächstfolgende einen selbst mehr mathematischen Charakter annehmen, als das ganze übrige Buch. Meine Leser werden bereits gemerkt haben, dass dieses eben meine nicht mit der Gabel zu vertreibende Natur ist, die immer wiederkehrt. Ich entschuldige mich desshalb auch nicht mehr, sondern rathe lieber jedem abgesagten Feinde der Mathematik, diese beiden Kapitel nicht weiter zu verfolgen, als sie ihm verständlich sind. Das Spätere hängt nicht absolut von deren Detailkenntniss ab, sondern nur von dem im Anfangssatze dieses Kapitels schon ausgesprochenen Hauptresultate, dass Pythagoras Reisen nach Egypten und Babylon machte. Darauf allein kommt es für meine besonderen Zwecke an, und so könnte ohne Schaden für meine Folgerungen Alles, was im vorigen Kapitel in eingehenderer Weise von den Schicksalen des Pythagoras berichtet wurde, ein blosser Roman sein, wenn nur sein Aufenthalt an den erwähnten Orten wahr ist.

Ich glaube indessen auch an jene Einzelheiten. Ich bin mit Röth durchaus einverstanden, dass wenn auch Porphyre „der Göttliche“ und Jamblich „der Bewundernswürdige“ höchst mittelmässige Geister waren, die einen sehr ungünstigen Begriff von der neuplatonischen Schule geben, der sie um das Jahr 300 n. Ch. Geb. vorstanden, trotzdem oder vielleicht sogar wegen ihrer Unbedeutendheit die Zusammenstellung aus alten Schriftstellern, welche sie als Lebensbeschreibung des Pythagoras und als Abhandlung über das pythagoräische Leben herausgaben, eine getreue Compilation ist mit

VI. Die Geometrie des Pythagoras.

Ich habe mir für diesen Abschnitt der Untersuchungen die Aufgabe gestellt, in der Mathematik des Pythagoras solche Elemente aufzuschliessen, welche seine Anwesenheit in Egypten und Babylon bestätigen. Freilich wird dadurch dieses Kapitel und auch das nächstfolgende einen selbst mehr mathematischen Charakter annehmen, als das ganze übrige Buch. Meine Leser werden bereits gemerkt haben, dass dieses eben meine nicht mit der Gabel zu vertreibende Natur ist, die immer wiederkehrt. Ich entschuldige mich desshalb auch nicht mehr, sondern rathe lieber jedem abgesagten Feinde der Mathematik, diese beiden Kapitel nicht weiter zu verfolgen, als sie ihm verständlich sind. Das Spätere hängt nicht absolut von deren Detailkenntniss ab, sondern nur von dem im Anfangssatze dieses Kapitels schon ausgesprochenen Hauptresultate, dass Pythagoras Reisen nach Egypten und Babylon machte. Darauf allein kommt es für meine besonderen Zwecke an, und so könnte ohne Schaden für meine Folgerungen Alles, was im vorigen Kapitel in eingehenderer Weise von den Schicksalen des Pythagoras berichtet wurde, ein blosser Roman sein, wenn nur sein Aufenthalt an den erwähnten Orten wahr ist.

Ich glaube indessen auch an jene Einzelheiten. Ich bin mit Röth durchaus einverstanden, dass wenn auch Porphyry „der Göttliche“ und Jamblich „der Bewundernswürdige“ höchst mittelmässige Geister waren, die einen sehr ungünstigen Begriff von der neuplatonischen Schule geben, der sie um das Jahr 300 n. Ch. Geb. vorstanden, trotzdem oder vielleicht sogar wegen ihrer Unbedeutendheit die Zusammenstellung aus alten Schriftstellern, welche sie als Lebensbeschreibung des Pythagoras und als Abhandlung über das pythagorische Leben herausgaben, eine getreue Compilation ist mit

wenig oder gar keiner eigenen Zuthat. Ich bin ferner der Ansicht, dass die Stücke, welche ausdrücklich von beiden Schriftellern dem Aristoxenos und Dikäarch zugeschrieben werden, ohne allen Zweifel denselben auch angehören, dass aber diese berühmtesten Schüler des Aristoteles, deren Werke von Cicero und dem ganzen Alterthume als klassische geschätzt werden, die kaum 150 Jahre nach dem Tode des Pythagoras lebten, die selbst Freunde und Zeitgenossen von Pythagoräern waren, dass sie, sage ich, als glaubwürdige Zeugen uns gelten müssen. Aus ihren Aussagen aber hat Röth zumeist geschöpft und das dort Gefundene durch Bewältigung einer Menge von Literatur zu prüfen gewusst, vor welcher auch der blosse Nacharbeiter fast zurückschreckt. Dass dabei ein Lebensbild voll innerer Wahrheit entstand, wird der Leser vielleicht noch besser aus meinem kurzen Auszuge ansehen als aus dem Originalwerke, in welchem manche Zwischenbetrachtung den einheitlichen Ueberblick stört, Manches auch wohl nicht deutlich genug hervorgehoben ist, wie z. B. die Einwirkung der jedesmaligen politischen Verhältnisse. Ich wiederhole also, dass ich in der Röth'schen Wiederherstellung der Lebensbeschreibung des Pythagoras ein Stück positiver Kritik erblicke, dem ich kaum ein zweites an die Seite zu stellen wage, und von dessen Richtigkeit ich mich um so mehr überzeugt habe, je genauer ich mich hineinarbeitete. Ich füge hinzu, dass ich es als einen Akt der Pietät gegen den Verstorbenen, und wenn auch mehr als früher, doch immer noch nicht genug Gewürdigten betrachte, zum weiteren Bekanntwerden seiner Riesenleistung nach Kräften beizutragen. Ich erfülle damit nur eine schwache Pflicht der Dankbarkeit gegen einen Mann, dessen Aufmunterung es ganz besonders war, welche mich in die historisch-mathematischen Forschungskreise hinüberwies. Dieses zu meiner Vertheidigung Solchen gegenüber, welche das vorige Kapitel etwa mit einem Kopfschütteln gelesen haben, und noch immer der Meinung sind, Schwachköpfe wie Jamblich und Porphyry könnten nimmermehr als Quelle dienen, auch wo sie blosse Abschreiber sind. Ich bedaure auf deren Beistimmung verzichten zu müssen, werde jedoch auch in diesen Kapiteln nicht umhin können, ausser wo meine eigenen Untersuchungen mich Anderes lehrten, mich durchaus an Röth's Darstellung anzulehnen, und mit ihm so spät und wie man behauptet unzuverlässige Gewährsmänner wie Jamblich und Porphyry, neben diesen auch noch Nicomachus, Theon

von Smyrna und sogar Proclus zu benutzen. Vielleicht wird es mir verziehen, weil ich auch Plato gleichzeitig berücksichtige, den Röth wohl mit Unrecht einigermaassen vernachlässigte, wo es um wirkliche Mathematik und nicht um Zahlensymbolik sich handelte.

Noch viel lieber hätte ich mich allerdings an solche Schriftsteller gehalten, welche im Alterthume über Geschichte der Mathematik schrieben. Manches werthvolle Material muss vor Allen in den Schriften des Theophrastus von Lesbos¹⁴⁴⁾ enthalten gewesen sein, unter denen sich eine Geschichte der Astronomie in 6 Büchern, eine Geschichte der Geometrie in 4 Büchern, eine Geschichte der Arithmetik in 1 Buche befand. Was wäre von diesem berühmten Schul- und Zeitgenossen des Dikäarch und Aristoxenos nicht zu erwarten? Aber leider sind alle diese Werke spurlos verschwunden. Nur die Titel hat Diogenes Laertius uns aufbewahrt. Und auch von dem zweiten berühmten Geschichtsschreiber der Mathematik, von Eudemus von Rhodus, wissen wir nur, dass er eine Geschichte der Astronomie und der Geometrie verfasst hat. Es bleibt also keine Wahl. Man muss auf jede historische Betrachtung dieser griechischen Vorzeit verzichten, oder sich mit den Quellen begnügen, die ich nannte.

Von den fremden Elementen, welche durch Pythagoras der europäischen Mathematik überkamen, nenne ich zuerst die egyptisch-geometrische Methode. Die älteste griechische Geometrie, welche uns erhalten ist, ist die des Euclid, eines von Ptolemäus lagi gegen das Jahr 300 v. Ch. Geb. nach Alexandrien berufenen Mathematikers. Die Elemente nannte der mit Recht berühmte Verfasser seine Schrift, und es scheint, dass er damit nur einen Titel benutzte, der schon längst für derartige Werke in Gebrauch war, für Werke also, welche in bestimmter Form mit Satz und Beweis, Aufgabe und Auflösung die mathematischen Grundlehren verbreiteten, welche zur Verständniss anderer Wissenschaften nothwendig waren. Diese Definition¹⁴⁵⁾ giebt uns wenigstens Proclus, der gelehrte wenn auch nicht allzugeistreiche Erklärer des Euclid, der von 412 bis 485 lebte,¹⁴⁶⁾ und ebenderselbe erzählt auch von Elementenschreibern vor Euclid. Als ältesten nennt er¹⁴⁷⁾ Hippokrates von Chios, dann Leon, ferner Theudios von Magnesia und Hermotimos von Kolophon. Hippokrates von Chios aber lebte um 450 v. Ch. Geb., also in der unmittelbarsten Nachbarschaft der Lebenszeit des Pythagoras, und war sowie die drei anderen oben Ge-

nannten Pythagoräer,¹⁴⁸⁾ während Euclid selbst als Platoniker bezeichnet wird.¹⁴⁹⁾ Damit allein wäre freilich der Ursprung der euclidischen Darstellungsweise noch nicht nachgewiesen, wenn nicht über die Unterrichtsmethode des Pythagoras und deren Heimath damit Uebereinstimmendes bekannt wäre. Pythagoras begann die wissenschaftliche Erziehung seiner Schüler regelmässig damit, dass er sie zu Anfang viel auswendig lernen liess. Das war so Gebrauch in Egypten, wo er selbst in ganz ähnlicher Weise unterrichtet worden war,¹⁵⁰⁾ wo auch noch zu Herodots Zeiten das Gedächtniss mehr als sonst irgendwo geübt ward.¹⁵¹⁾ Der erste Gegenstand, welcher gelernt werden musste, war Mathematik.¹⁵²⁾ Und diese selbe erste Stelle im ganzen Lehrplan behielt die Mathematik in allen griechischen Schulen bei.¹⁵³⁾ Um also Gedächtnissstoff zu sein musste sie nothwendiger Weise in einer prägnanten, scharfen Form auftreten; in einer Form, die dem Gedächtnisse selbst zu Hülfe kam durch logische Aufeinanderfolge, wie durch Symmetrie der Darstellung; kurz in einer Form, die wirklich dem Geiste auch des Knaben eingeprägt und von ihm behalten werden kann. Und welche Form der Mathematik entspricht diesen Anforderungen so sehr wie die der sogenannten Elemente? Wenn also schon diese mehr äusseren Gründe uns dazu führen, eine den euclidischen Elementen nicht unähnliche Geometrie des Pythagoras und seiner Schule anzunehmen, so ist die aus dem Inhalte derselben sich ergebende Wahrscheinlichkeit nicht geringer. Arimnestos, der Sohn selbst des Pythagoras, war Lehrer des Demokrit¹⁵⁴⁾ und brachte denselben so weit, dass er sich rühmen konnte, dass ihn im Construiren von Figuren sowie in der Beweisführung Niemand übertroffen habe, nicht einmal jene egyptischen Priester, die man Harpedonapt¹⁵⁵⁾ nenne. Das zeigt doch wohl klar und deutlich, dass die Egyptianer grade die Constructionen und Beweisführungen besonders pfl egten, und dass dasselbe den Hauptinhalt der Elemente des Euclid bildet, ist bekannt genug. Endlich ist es schon an sich naturgemässer, wie Röth sehr richtig bemerkt hat,¹⁵⁶⁾ dass eine solche ausgebildete, künstliche Form, wie die demonstrative Methode des Euclid sie bietet, das allmälige Ergebniss einer durch Generationen hindurch fortgepfl anzten Wissenschaft, nicht aber die persönliche Schöpfung eines Einzelnen ist. Und wie die euclidische Methode sich bis auf unsere Tage vererbt hat, wie Niemand ansteht, die Lehrbücher der elementaren synthetischen Geometrie bis zum Anfange unseres

Jahrhunderts als abhängig von jenen vor mehr als 2000 Jahren niedergeschriebenen Elementen zuzugestehen, so dürfen wir gewiss ohne zu grosse Kühnheit noch weitere zwei Jahrhunderte hinaufgreifen und die euclidische Methode ihrem Vaterlande Egypten zurückgeben. Steht doch auch damit die mehrerwähnte Stelle aus der Astronomie des Theon von Smyrna ²¹) im Einklang.

Ich benutze diese Gelegenheit, um über Theon von Smyrna selbst und seine Schriften einige auch später noch zu benutzende Notizen zusammenzustellen. Er lebte wohl am Anfange des 2. Jahrhunderts n. Ch. Geb. als älterer Zeitgenosse des bekannten Astronomen Ptolemäus. Die Schriften Theons bildeten ein einziges Werk, welches aber in fünf Bücher zerfiel. Seinen ausgesprochenen Zweck hatte es darin, die zur Verständniss Platos und der Platoniker nöthigen Vorkenntnisse mitzutheilen. Schon in dieser Beziehung ist es also von überaus grosser geschichtlicher Bedeutung, indem es gewissermaassen in die damals moderne Sprache übersetzt, was dem Plato schon bekannt gewesen sein muss. Die fünf Bücher behandeln der Reihe nach: die Arithmetik mit Inbegriff der musikalischen Zahlenverhältnisse, die Geometrie, die Stereometrie, die Astronomie und die Musik der Welten. ¹⁵¹) Leider ging der grössere Theil dieses reichen Inhaltes uns verloren und nur das erste und vierte Buch blieb erhalten. Jenes, die Arithmetik nebst der Intervallenlehre, gab Boulliau bereits 1644 mit lateinischer Uebersetzung heraus, dann später nochmals, aber was die neuen Anmerkungen und besonders die Weglassungen betrifft jedenfalls sehr überflüssiger Weise, ein Holländer De Gelder 1827. Für die Veröffentlichung der Astronomie ist die Wissenschaft Th. H. Martin (von Rennes) zu Dank verpflichtet, der 1849 eine ausgezeichnete Bearbeitung derselben lieferte und zugleich die überraschende Nachricht mittheilte, dass diese Schrift schon früher unbewusstermassen bekannt war. Chalcidius, ein Philosoph der platonischen Schule aus dem 4. oder 6. Jahrhundert, beging nämlich die Frechheit, das ganze Buch der Astronomie des Theon von Smyrna mit wenigen entstellenden Veränderungen seinem Commentare zum Timäus des Plato einzuverleiben, und da er zugleich die Klugheit so weit trieb nirgends auch nur den Namen des Theon zu nennen, so blieb der Betrug unentdeckt, bis Martin ihn entdeckte.

In dieser Astronomie sagt also Theon, ²²) wie ich nochmals in Erinnerung bringen will, dass Chaldäer und Egypter Methoden

besaßen, um die Beyegung der Planeten vorher zu bestimmen. Die Ersteren hätten sich dazu der Rechnung, die Zweiten der Zeichnung bedient, Beide aber hätten darin gefehlt, dass sie keine physikalischen Betrachtungsweisen damit verbanden. Diesen Gesichtspunkt hätten dann die griechischen Astronomen hervorgehoben, indem sie von den Anderen die Principien und die Beobachtungskunst erhielten. Also auch hier werden, und das ist es, worin ich die Uebereinstimmung mit dem Früheren sehe, die Egypter als mit geometrischen Constructionen besonders vertraut geschildert. Wenn ich nun endlich noch auf eine Stelle des Proclus¹⁵⁸⁾ verweise, in der gesagt ist, dass bei den Egyptern die Geometrie erfunden worden sei, weil die Nilüberschwemmungen häufig neue Grenzbestimmungen nöthig machten, so wird dieselbe jetzt um so leichter dahin zu erklären sein, dass Proclus, wenn er die Erfindung der Geometrie an einen bestimmten Ort und zwar nach Egypten verlegt, damit die damals gebräuchliche Methode der Geometrie gemeint haben muss.

Die Methode wissenschaftlicher Behandlung gleicht aber in mancher Beziehung einer Sprache. Es ist nicht gut denkbar, dass dieselbe erhalten bleiben soll, und Alles untergeht, was in ihr geschrieben war. Die Sprache haftet nur an schriftstellerischen Producten in derselben, die mathematische Methode nur an einzelnen Sätzen. Es wird daher im höchsten Grade wahrscheinlich, dass unter den Sätzen, welche Euclid uns aufbewahrt hat, solche waren, an denen er nicht bloss die nach ihm benannte Methode fortpflanzte, sondern selbst kennen lernte; mit anderen Worten Sätze, die schon durch Pythagoras und seinen griechischen Vorgänger Thales gelehrt wurden, Sätze, die noch früher in derselben Form in Egypten bekannt waren. Den ersten Theil dieser Hypothese können wir zur Wahrheit erheben. Wir sind namentlich durch Proclus, aber auch durch Diogenes Laertius und schon durch Plato in den Stand gesetzt, einzelne Theoreme der Geometrie als thaletisch und pythagorisch nachzuweisen. Für den zweiten Theil meiner Hypothese kann ich allerdings keinen weiteren Grund mittheilen, als den schon angeführten aus der Geschichte der Entwicklung aller Wissenschaften mit innerer Nothwendigkeit sich ergebenden. Nur möchte ich, um nicht missverstanden zu werden, eine Bemerkung hinzufügen. Ich bin nämlich weit entfernt, mit dem eben Gesagten behaupten zu wollen, Thales und Pythagoras hätten nur die

Sätze gelehrt, welche ihnen zugeschrieben werden. Im Gegentheil glaube ich darin nur einige der neuen Erfindungen zu sehen, mit welchen beide offenbar die Wissenschaft bereichert haben. Das Grosse und Ganze ihrer Lehren ist vielmehr unter jenen weitaus zahlreicheren Sätzen zu suchen, die von einem Elementarschriftsteller zum andern sich vererbten, ohne dass man deren Erfinder angegeben sieht, einfach aus dem Grunde weil man ihn nicht anzugeben weiss, ebensowenig wie man den Erfinder der Addition, der Multiplication zu nennen vermag. Und unter diesen anonymen Sätzen sind sicher auch uregyptische enthalten, deren nähere Bezeichnung vorläufig freilich zu den Unmöglichkeiten gehört, sofern man sich nicht mit Wahrscheinlichkeitsschlüssen begnügen will.

Proclus meldet uns also von Thales,¹⁵⁹⁾ wie zum Theil schon im vorigen Kapitel berichtet wurde, er habe zuerst den Beweis geliefert, dass der Kreis durch jeden Durchmesser in zwei gleiche Theile getheilt wird, dass die beiden Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks einander gleich sind, dass Scheitelwinkel einander gleich sind und dass Congruenz zweier Dreiecke stattfindet, wenn eine Seite und zwei Winkel des einen den ähnlichliegenden Stücken des andern einzeln gleich sind. Bei Erwähnung des zweiten dieser Sätze bemerkt aber Proclus ausdrücklich, der Satz sei nur einer von den vielen, welche der Erfindungsgabe des Thales zu verdanken seien. Diogenes Laertius geht noch etwas mehr auf die Quelle zurück. An einem Orte theilt er uns mit, dass Thales in Egypten die Höhe der Pyramiden aus ihrem Schatten gemessen habe.¹⁶⁰⁾ Er setzt zwar hinzu, die Messung sei so erfolgt, dass Thales den Moment erfasst habe, in welchem die Höhe der Pyramide der Schattenlänge gleich war, doch ist damit die Methode keineswegs gesichert. Möglicherweise war neben der Pyramide ein Stab von vorher gemessener, also bekannter Höhe befestigt, an dessen Schatten man den erwünschten Moment gewissermassen ablesen konnte, wenn nämlich Schattenlänge und Stablänge identisch waren. Dann musste vermöge der Aehnlichkeit der Dreiecke auch die Schattenlänge der Pyramide als Maass ihrer Höhe gelten können. An einem anderen Orte meldet uns dann Diogenes Laertius von einem Satze egyptischen Ursprunges, welchen Thales nur mitgebracht habe,¹⁶¹⁾ von dem Satze, dass der Peripheriewinkel, der auf einem Halbkreise aufstehe, ein rechter sei.

Von Pythagoras selbst giebt Proclus nur zwei Sätze

an, ¹⁶²) beide freilich des Mannes würdig. Der Eine umfasst eigentlich eine ganze Theorie, indem, nach Eudemos, Pythagoras es gewesen sei, der die Anlegung von gegebenen Flächenräumen erfand, der also, um den bestimmten Fall anzugeben, bei welchem diese Mittheilung erfolgt, zuerst über einer gegebenen Linie mit gegebenem Winkel ein Parallelogramm beschrieb, welches einem gleichfalls gegebenen Dreiecke gleich war. Der andere Lehrsatz ist die speciell als Satz des Pythagoras bekannte Grundwahrheit, dass das Quadrat der Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreiecke der Summe der Quadrate der beiden Katheten gleich ist. Mit diesem Theoreme, welches einer ganz anderen mathematischen Richtung angehört, habe ich mich im folgenden Kapitel noch ausführlich zu beschäftigen.

Es sei hier noch hinzugefügt, was Proclus als Eigenthum der nächsten Schüler des Pythagoras anführt. Den Oenopides von Chios, welcher um 470 v. Ch. Geb., also unmittelbar nach dem Tode des Pythagoras, dessen Lehren studirte und nachbildete, ¹⁶³) nennt Proclus als den Erfinder der Aufgaben, von einem gegebenen Punkte ausserhalb einer graden Linie eine Senkrechte auf dieselbe zu fallen, und an eine grade Linie in einem gegebenen Punkte eine Linie unter gegebenem Winkel anzulegen. Der Schule des Pythagoras im Allgemeinen ¹⁶⁴) schreibt Eudemos den Satz zu, dass die drei Winkel eines jeden Dreiecks zwei Rechte betragen, und fügt bei, die Erfinder hätten sich jenes Beweises bedient, bei welchem durch die Spitze des Dreiecks eine Hülfslinie der Grundlinie parallel gezogen wird, die beiden Winkel an der Grundlinie also durch ihre Wechselwinkel ersetzt werden. Endlich an verschiedenen Stellen ¹⁶⁵) erwähnt Proclus des Satzes als pythagorisch, dass die Winkel um einen Punkt vier Rechte bilden, und dass die Ebene durch Dreiecke gewisser Art erfüllt gedacht werden kann.

Proclus weist damit auf dieselbe Theorie hin, welche Plato in seinem Timäus angedeutet hat, und welche erst durch Martin's Erklärung ¹⁶⁶) zu einer vollständig verständlichen geworden ist. Es würde mich zu weit von meinem eigentlichen Zwecke seitab führen, wollte ich die ganze Stelle hier einer erneuten Erörterung unterziehen, welche zudem kaum ein anderes Resultat liefern würde als das von Martin gefundene. Ich begnüge mich daher mit einem kurzen Berichte. Plato, dessen Lebenszeit (430—347) bekanntlich kaum näher zu der des Pythagoras liegt, als es mit den beidersei-

tigen Lehren in vielen Beziehungen sich verhält,¹⁶⁷⁾ lässt in dem Timäus überschriebenen Dialoge den Timäus von Locri, einen eifrigen Pythagoräer, auffordern, Auseinandersetzungen zum Besten zu geben über die Entstehung der Welt, über Gott und über die Natur des Menschen. Timäus erfüllt diesen Wunsch, und liefert uns somit in zusammenhängender Rede die Ansichten seiner Schule über den angeregten Gegenstand. So kommt er denn auch zu den vier Elementen: Feuer, Wasser, Luft, Erde, deren Gestalt er auseinandersetzt und damit in ähnlich gewagten Hypothesen sich bewegt, wie es mitunter auch noch anderen Atomistikern zu ergehen pflegt, wenn sie die Aneinanderlagerungen der chemischen Elemente versinnlichen wollen. So wenig Interesse diese Hypothesen an sich für den Mathematiker haben, so wichtig sind sie durch einen weiteren Schluss, den man aus ihnen ziehen kann. Die gewählten Gestalten beweisen uns nämlich, dass die Schule des Pythagoras sich mit den fünf regulären Körpern beschäftigt hat. Denn die Gestalt, in welcher Timäus das Feuer auftreten lässt, ist der Tetraeder, die Luft besteht aus Octaedern, das Wasser aus Icosaedern, die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Zusammensetzung möglich war, so benutzte Gott diese, also das Pentagonododekaeder zum Umriss des Weltganzen. Andere regelmässige Körper als diese fünf giebt es aber in der That nicht, und dass Timäus, das heisst also Plato, der ihm die Worte in den Mund legt, von dieser Unmöglichkeit überzeugt ist, das ist grade das Bedeutsame für uns; das beweist, dass auch die Lehre von der Kugel bis zu einem ziemlich hohen Grade ausgebildet gewesen sein muss, in welche ja die regelmässigen Körper beschrieben gedacht werden können. Es dürfte sogar wahrscheinlich sein, dass die Sphärik, die Lehre von der Kugel, vorausging, welche selbst von den ägyptischen astronomischen Methoden untrennbar ist, und dass erst aus der Sphärik jener eben besprochene Theil der Lehre von durch Ebenen begrenzten Körpern sich entwickelte, und einen Grad der Vollkommenheit in der Schule erreichte, für welchen Röth noch weitere gewichtige Gründe gesammelt hat,¹⁶⁸⁾ Gewährsstellen aus einer ganzen Anzahl der Schule nahe stehender Schriftsteller.

Bevor indessen Timäus die fünf regulären Körper in der angegebenen Weise physikalisch verwerthet, verfolgt er sie erst in ihrer Entstehung, und hier treten uns wieder Sätze entgegen, die mathematisch geschichtlichen Werth für uns besitzen, dieselben Sätze,

von denen Proclus als pythagorisches Eigenthum uns erzählt. Die fünf Körper, bemerkt Timäus, besässen als Körper sämtlich Tiefe und seien von allen Seiten von ebenen Flächen eingeschlossen. Diese Flächen selbst setzten sich immer aus Dreiecken zusammen, und zwar gebe es zwei Gattungen rechtwinkliger Dreiecke, aus welchen alle hier nöthigen Figuren hervorgehen. Das eine sei das gleichschenklige rechtwinklige Dreieck. Daraus bildet sich das Quadrat, sei es nun, dass man zwei derselben mit der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite aneinander setzt, sei es nun, dass man vier derselben benutzt, die man so legt, dass die vier rechten Winkel einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben. Keine der anderen Figuren hingegen geht aus dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke hervor. Zu ihrer Bildung ist vielmehr das zweite noch näher zu beschreibende rechtwinklige Dreieck erforderlich, aus welchem umgekehrt wieder das Quadrat nicht entstanden gedacht werden kann. Dieses zweite rechtwinklige Dreieck ist dasjenige, dessen beide spitze Winkel $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$ des rechten Winkels betragen, bei welchem also die Hypotenuse doppelt so gross ist, wie die kleinste Kathete, und das Quadrat der grösseren Kathete dreimal so gross, wie das der kleineren. Zwei solche Dreiecke mit der grösseren Kathete aneinandergelegt, so dass die kleineren Katheten eine grade Linie bilden, geben das gleichseitige Dreieck. Auch aus 6 solchen Elementardreiecken lässt sich ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn man sie alle so zusammenfügt, dass sämtliche Winkel von der Grösse von $\frac{2}{3}$ Rechten in einem gemeinsamen Scheitelpunkte zusammenstossen, der alsdann der Mittelpunkt der Figur ist. Das Interesse dieser Theorie, welche offenbar pythagorisch ist, wie neben den ausdrücklichen Verweisungen schon der vielfache Gebrauch des rechtwinkligen Dreiecks beweisen würde, besteht nun weniger in den angegebenen Sätzen selbst, als vielmehr darin, dass wir sehen, wie die pythagorische Schule das mathematische Experiment liebte. Ganz klar wird diese meine Bemerkung dem Leser erst im folgenden Kapitel werden können, aber hier schon wird er darauf aufmerksam gemacht werden können, dass offenbar die Flächenzusammensetzung aus solchen Elementarfiguren versucht wurde, und dass man die Fälle, in welchen eine Zusammensetzung gelang, besonders notirte. Fast noch interessanter für die Geschichte der Mathematik ist ein missglückter Versuch in derselben Richtung geworden, dem ich wohl zuerst hier seinen rich-

tigen Platz im Zusammenhange der pythagorischen Lehren anweise. Die Zusammensetzung der Seitenfläche des fünften Körpers, also des Fünfeckes, lehrt Plato nämlich nicht. Mit gutem Grunde, es liess sich eben aus den beiden angewandten Elementardreiecken nicht bilden. Aber versucht hat man seine Darstellung aus Dreiecken in der pythagorischen Schule. Man hat Hilfslinien aller Art gezogen, und kam so zum Sternfünfeck. Diese Figur, welche bekanntlich aus den Eckpunkten des regelmässigen Fünfecks sich ableitet, wenn man je mit Ueberspringung einer Ecke sämtliche Punkte in fortlaufendem Zuge mit einander verbindet, dieselbe Figur, welche auch unter dem Namen fünfspitziger Stern, Pentalpha, Drudenfuss bekannt ist, spielte unter den Pythagoräern eine hervorragende Rolle. Sie galt als Erkennungszeichen¹⁶⁹⁾ und wurde als solches den Briefen als Ueberschrift beigegeben, vielleicht nach Kircher's Behauptung¹⁷⁰⁾ mit Bezeichnung der einzelnen Spitzen durch Buchstaben. Jedenfalls wurde das Zeichen später so ausgesprochen, dass es die Bedeutung eines Gesundheitswunsches hatte. Dass dazu der bei den Römern gebräuchliche Anfang der Briefe „Wenn Du wohl bist, freut es mich, ich bin wohl“ ein interessantes Analogon darbietet, darf hier wohl hervorgehoben werden. Aber eine noch viel neuere Anwendung erzählt Kästner¹⁷¹⁾: „in den 80er Jahren des letzten Jahrhunderts hätten nämlich bei einem Geburtsfeste der russischen Kaiserin die dasigen Aerzte an einer fünfeckigen Tafel, als einem Symbole der Gesundheit gespeist.“

Bei der schon hervorgehobenen Ausnahmestellung dieses und des nächsten Kapitels darf ich mir wohl auch eine von dem übrigen Buche etwas abweichende Form gestatten, und so möchte ich zum Schlusse das bisher über die Geometrie des Pythagoras, mit Ausschluss des nach ihm benannten Satzes, und deren Ursprung Gesagte nochmals kurz zusammenfassen. Die folgenden Thesen liefern etwa ein übersichtliches Bild davon.

1) Die geometrische Methode überhaupt ist egyptischen Ursprunges.

2) Die Egypter benutzten die Geometrie praktisch theils zur Geodäsie, theils zur Astronomie.

3) Die erstere Anwendung machte es nothwendig, besonders solche Sätze zu erfinden, welche die Gestalt der Figuren von deren Flächeninhalt abhängig machten, also hier abzunehmen, dort

zuzusetzen lehrten, mit einem Worte Sätze über die Verwandlung der Figuren.

4) Damit eng verbunden als theoretisch vorhergehend waren Winkelsätze über Parallellinien, war die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreiecke, war endlich die ganze geometrische Proportionenlehre.

5) Von der astronomischen Anwendung der Geometrie aus erklärt sich die Kenntniss der Sphärik.

6) Von ihr aus kam man zu den fünf regelmässigen Körpern.

7) Die regelmässigen Körper führten rückwärts wieder zum Gebiete der ebenen Geometrie zurück, und zwar zu den regelmässigen Vielecken.

8) Die jetzt damit in Verbindung gesetzte Lehre von der Verwandlung der Figuren führte zu dem geometrischen Experimente, die regelmässigen Vielecke aus gewissen gleichen Elementen zusammenzusetzen, und dieselben Experimente gaben den Anlass zur Entdeckung der Sternvielecke.
