

3356 Pp

CANTOR, M.

1863

P. 98-110

MATHEMATISCHE BEITRÄGE

ZUM KULTURENLEBEN DER
VÖLKER

VII. Die Arithmetik des Pythagoras.

Ich komme nun zum zweiten Haupttheil der Mathematik, zur Arithmetik im weitesten Sinne des Wortes, in welchem sie sowohl das eigentliche Rechnen, als die Zahlentheorie umfasst. Die Griechen zwar bezeichneten nur den letzteren Theil als Arithmetik, für die ersteren Methoden besaßen sie den Namen der Logistik. Ich habe schon früher die Wiege dieser Kenntnisse nach Babylon verlegt. Ich will die Hauptstellen, die dafür sprechen, hier nochmals anführen. Porphyrius¹⁷²⁾ giebt freilich Phönicien als Heimathland der Rechenkunst an. Allein einmal ist es wohl möglich, ja sogar wahrscheinlich, dass auch bei diesem Handelsvolke die Rechenkunst eine weit vorgeschrittene war, und dass Pythagoras bei seinem Aufenthalte in Sidon schon die ersten Anfänge derselben kennen lernte. Dann aber war der phönikisch-babylonische Verkehr ein so reger, dass Uebertragung von dem einen Lande nach dem anderen fast nothwendig war. Auch Proclus schreibt vielleicht mit Beziehung auf die Stelle des Porphyrius den Phönikern dieselbe Erfindung zu.¹⁷³⁾ Theon hingegen verlegt den Ursprung der vorhandenen Methoden der Astronomie nach Babylon,²⁴⁾ und obenhin verweisen die Quellen für bestimmte Sätze. Allerdings sind deren weniger angegeben als Sätze der Geometrie. Diese mutheten den plastischen Sinn der Griechen mehr an und fanden schon deshalb weitere Ausbildung, wiewohl auch noch weitere Gründe dazu mitwirkten, von denen nachher die Rede sein soll.

Ich habe früher darauf hingewiesen, wie das Rechnen eine kaufmännisch-praktische Erfindung sei, welche erst in zweiter Linie zur Theorie sich erhob. Dasselbe berichtet Aristoxenus.¹⁷⁵⁾ „Die Zahlenlehre, sagt er, scheint Pythagoras an

VII. Die Arithmetik des Pythagoras.

Ich komme nun zum zweiten Haupttheil der Mathematik, zur Arithmetik im weitesten Sinne des Wortes, in welchem sie sowohl das eigentliche Rechnen als die Zahlentheorie umfasst. Die Griechen zwar bezeichneten nur den letzteren Theil als Arithmetik, für die ersteren Methoden besaßen sie den Namen der Logistik. Ich habe schon früher die Wiege dieser Kenntnisse nach Babylon verlegt. Ich will die Hauptstellen, die dafür sprechen, hier nochmals anführen. Porphyrius¹⁷²⁾ giebt freilich Phönikien als Heimathland der Rechenkunst an. Allein einmal ist es wohl möglich, ja sogar wahrscheinlich, dass auch bei diesem Handelsvolke die Rechenkunst eine weit vorgeschrittene war, und dass Pythagoras bei seinem Aufenthalte in Sidon schon die ersten Anfänge derselben kennen lernte. Dann aber war der phönikisch-babylonische Verkehr ein so reger, dass Uebertragung von dem einen Lande nach dem anderen fast nothwendig war. Auch Proclus schreibt vielleicht mit Beziehung auf die Stelle des Porphyrius den Phönikern dieselbe Erfindung zu.¹⁷³⁾ Theon hingegen verlegt den Ursprung der vorhandenen Methoden der Astronomie nach Babylon,²³⁾ und ebendahin verweisen die Quellen für bestimmte Sätze. Allerdings sind deren weniger angegeben als Sätze der Geometrie. Diese mutheten den plastischen Sinn der Griechen mehr an und fanden schon deshalb weitere Ausbildung, wiewohl auch noch weitere Gründe dazu mitwirkten, von denen nachher die Rede sein soll.

Ich habe früher darauf hingewiesen, wie das Rechnen eine kaufmännisch-praktische Erfindung sei, welche erst in zweiter Linie zur Theorie sich erhob. Dasselbe berichtet Aristoxenus.¹⁷⁴⁾ „Die Zahlenlehre, sagt er, scheint Pythagoras am

meisten werth gehalten und hauptsächlich dadurch weiter gefördert zu haben, dass er sie aus dem kaufmännischen Geschäftsbedürfnisse herauszog, und alle Dinge unter der Form der Zahl betrachtete.“ So kam man, wie ich gleichfalls schon andeutete, von der arithmetischen und geometrischen Proportion, welche das tägliche Bedürfniss sicherlich schon frühe bekannt gemacht hatte, auch zur harmonischen Proportion, deren Interesse ein rein theoretisches ist. Pythagoras lernte sie bei den Babyloniern kennen, ⁵¹⁾ und brachte sie von dort mit nach Hause. Wir können aber wohl mit Bestimmtheit annehmen, dass dieses Kennenlernen nur von der für Pythagoras neuen Form gilt, in welche die wissenschaftliche Proportionenlehre der Babylonier gekleidet war. Den Gegenstand kannte er zum grossen Theil schon aus Egypten her, wie ich im vorigen Kapitel zu zeigen suchte. Was lag da näher, als dass er nun auch das dem Inhalte nach Neue in die gewohnte geometrische Betrachtungsweise übersetzte? Bei der Proportionenlehre war eine solche Uebersetzung verhältnissmässig am leichtesten, wie denn auch Theon von Smyrna uns ein Beispiel ¹⁷⁴⁾ in der Aufsuchung des geometrischen Mittels aufbewahrt hat. Aber auch die sonstigen arithmetischen Sätze liessen sich in gleicher Weise versinnlichen, und so bildete sich zum didaktischen Gebrauche jene überaus eigenthümliche geometrisch aufgefasste Arithmetik, wie sie in den Elementen des Euclid, also auch wohl in den ihm vorhergehenden Elementenbüchern vorhanden ist. Hierin liegt der zweite Grund, warum bei den Griechen die Geometrie weiter entwickelt war als die Arithmetik. Sie enthielt diese letztere mit. Man erkannte als bewiesen in der Regel nur das an, was sich auch zeichnen liess, dessen Construction bereits dem Auge die Wahrheit des zu Bestätigenden klar machte. Das war freilich viel bequemer und zugleich viel fasslicher. Das erforderte nicht einen solchen Grad von Abstraction, wie wenn man die Zahlen ohne sinnliche Grundlage mit einander in Verbindung bringen wollte. Zu dieser letzteren Höhe vermochten sich denn auch nur wenige ausnahmsweise befähigte Geister zu erheben, und deren Werke sind es, welche in den arithmetischen Schriften der beiden Zeitgenossen Nicomachus und Theon von Smyrna, und vor Allen des letzten und grössten Analytikers Diophant aus der Mitte des 4. Jahrhunderts uns erhalten sind. Nicomachus muss sogar, und auch das wurde schon erwähnt, als Quelle statt des Pythagoras dienen, ⁵²⁾ weil er die Zahlenlehre, wie

sie Pythagoras zuerst darstellte, später nur weiter ausführte. Manche arithmetischen Schriften mögen verloren gegangen sein, so besonders eine Schrift des Archimed, im Ganzen haben aber wohl nur wenige Schriftsteller dieser Richtung existirt, wie ich soeben erläuterte. Ich weiss nicht, ob ich als Unterstützung dieser Ansicht anführen darf, dass, wie am Anfange des vorigen Kapitels angegeben wurde, Theophrastus von Lesbos der Geschichte der Geometrie 4 Bücher widmete, während er die Geschichte der Arithmetik in nur einem Buche behandelte.

Ich befürchte kaum, dass man meinen Ausführungen über Ursprung und Inhalt der Arithmetik entgegenhalten werde, dass auch die Egyptianer rechneten, wie Plato ¹⁷⁴) und Herodot ²¹) beurkunden, und zwar wenn wir dem Ersteren glauben seit undenklicher Zeit. Denn der Gott Theuth habe zuerst die Zahl und das Rechnen erfunden sowie die Mess- und Sternkunde, das Brett- und Würfelspiel, ja auch die Buchstaben. Das blosses Rechnen ist noch lange keine wissenschaftliche Arithmetik und nur dieser möchte ich die innerasiatische Herkunft wahren.

In ihr selbst sind zwei Richtungen nicht zu verkennen, eine algebraische, wenn ich mich so ausdrücken darf, und eine zahlentheoretische. Jene ging darauf hinaus, unbekannte Grössen zu berechnen. Sie war der zunächst aus der Praxis hervorgegangene Zweig, und ihre schönste Blüthe sehen wir sie bei einem unmittelbaren Schüler des Pythagoras, bei Thymaridas ¹⁷⁵) treiben. Durch eigenthümlichen, nicht recht deutlichen Zufall nennt auch Jamblichus diese Methode eine Blüthe, ein Epanthem. Der Wortlaut der Auseinandersetzung ist folgender: „Wenn gegebene und unbekannte Grössen sich in eine gegebene theilen (d. h. zusammengenommen dieser gleich sind) und eine von ihnen mit jeder andern zu einer Summe verbunden wird, so wird die Summe aller dieser Paare nach Subtraction der ursprünglichen Summe bei drei Zahlen der zu den übrigen addirten ganz zuerkannt (gleich gesetzt), bei vierten deren Hälfte, bei fünfen deren Drittel, bei sechsen deren Viertel u. s. f.“ In moderner Sprache und den Zeichen der Algebra besteht also das Epanthem des Thymaridas in folgender Regel: Kennt man die Summe S von n Grössen $x + y_1 + y_2 + \dots y_{n-1}$ so wie die Summen der ersten Grösse x mit jeder einzelnen folgenden $x + y_1 = s_1, x + y_2 = s_2, \dots x + y_{n-1} = s_{n-1}$, so wird die Vereinigung aller dieser Partialsummen, wenn die Hauptsumme

davon abgezogen wird, zur Auffindung von x dienen: nämlich $s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} - S = (n-2)x$. Nesselmann, dem ich diese ganze Stelle entnehme, beweist die Richtigkeit seiner Auffassung noch dadurch, dass sie an den beiden von Jamblich mitgetheilten Beispielen die Probe besteht. Er führt ferner noch die bedeutungsvolle Thatsache an, dass die Benennung der gegebenen und der unbekannten Grösse ⁽¹⁷⁶⁾ genau dieselben sind, welche bei Diophant sich wiederfinden.

Eine zweite Richtung, welche in der pythagorischen und also auch wohl in der babylonischen Arithmetik zu Tage tritt, ist die zahlentheoretische, welche die Eigenschaften der Zahlen an und für sich ins Auge fasst, wie Proclus ⁽¹⁷⁷⁾ sich ausdrückt, d. h. also, um mit einem modernen Schriftsteller ⁽¹⁷⁸⁾ zu reden, Eigenschaften welche von dem Zahlensysteme unabhängig sind. Beweisend dafür, dass diese Richtung nicht nur schon vorhanden, sondern zu einer Vollkommenheit ausgebildet war, welche den gewöhnlichen Ansichten auch von Mathematikern sehr widerspricht, ist zumeist die Arithmetik des Nicomachus in dem derselben oben beigelegten Sinne und die von ihr nur sehr wenig verschiedene Arithmetik des Theon von Smyrna. Summirung von arithmetischen Reihen, sogenannte figurirte Zahlen finden sich weitläufig und, was mehr sagen will, mit richtigen Resultaten abgehandelt. Ausserdem sind die recht eigentlich zahlentheoretischen Begriffe der graden und ungraden Zahlen, der Primzahlen und zusammengesetzten Zahlen, ja sogar der vollkommenen Zahlen auf's Deutlichste auseinandergesetzt. Mag auch, wie ich früher zugab, Vieles davon dem Nicomachus angehören, für dessen Bedeutsamkeit ja gerade schon die Form seiner Schrift angeführt werden konnte, seine Unterscheidungen sind echt pythagorisch. Wenigstens sagt Aristoteles ⁽¹⁷⁹⁾ in der sogenannten pythagorischen Kategorientafel, diese Schule besitze zehn Paar Elementarbegriffe: das Endliche und Unendliche, das Ungrade und Grade, das Eine und Viele, das Rechte und Linke, das Männliche und Weibliche, das Ruhende und Bewegte, das Grade und Krumme, das Lichte und Dunkle, das Gute und Böse, das Quadrat und die Heteromekie. Die beiden letzten Ausdrücke, welche sich als die wichtigsten ergeben, bleiben noch näherer Erklärung vorbehalten, aber auch unter den früheren Gegensätzen erscheinen solche, wie sie vorausgesetzt werden müssen. Noch sicherer wird die altpythagorische Kenntniss jener ziemlich abstracten Dinge durch Vergleichung einer Stelle des Thymaridas, welche behauptet, ⁽¹⁸⁰⁾

dass Primzahlen immer gradlinig seien, weil sie allein sich nicht als Flächen, d. h. als Producte darstellen lassen, und eine weitere Stelle des Timäus, welche nur verstanden werden kann, wenn man zu deren Erklärung einestheils die geometrische Proportion, andernteils den Begriff der Primzahl und zusammengesetzten Zahl geometrisch nachgebildet in Anwendung bringt. Die betreffende Stelle hat nämlich ihrem Wortlaute nach etwa den Sinn: ¹⁸¹⁾ um mit zwei Flächen eine geometrische Proportion anzusetzen, deren äussere Glieder sie sein sollen, genüge es eine dritte Fläche als geometrisches Mittel anzuwenden; sollen aber zwei Körper die äusseren Glieder einer geometrischen Proportion sein, so müsse man zwei von einander verschiedene innere Glieder annehmen, weil ein geometrisches Mittel nicht existire. Dem ersten Anscheine nach ist dieser Ausspruch widersinnig, da man keinen Grund sieht, warum die Proportion $a : b = b : c$, welche richtig wäre, wenn a und c Flächen bedeuten, plötzlich falsch werden soll, wenn dieselben Zahlen die Bedeutung von Körpern annehmen. Da uns nun Timäus nicht daran gewöhnt hat, an sich Verkehrtes in seinen Sätzen zu finden, wenn auch Manches unseren heutigen Anschauungen widerspricht, so muss wohl den gebrauchten Wörtern noch ein anderer tiefer liegender Sinn zukommen, der zu ermitteln gesucht werden muss. In der That ergiebt sich derselbe, wenn wir statt Flächen Flächenzahlen, statt Körper Körperzahlen lesen, und uns Folgendes in's Gedächtniss einprägen. Die Primzahlen heissen bei den Mathematikern, von denen hier gesprochen wird, linear, weil sie in keine Factoren weiter zerlegbar für sich allein betrachtet werden müssen, wie die grade Linie nur nach einer Richtung hin sich erstreckt. ¹⁸²⁾ Solche Zahlen, welche in zwei Factoren zerlegt werden können, heissen dagegen Flächenzahlen, weil man sie als Product einer Länge und einer Breite betrachten kann. ¹⁸³⁾ Sind beide Factoren lineare Zahlen, so hat man es mit Flächenzahlen im engeren Sinne zu thun, welche nur in einer Weise in Factoren zerlegbar sind, und selbstverständlich ist dabei kein wesentlicher Unterschied, ob die beiden Factoren identisch sind oder nicht; nur werden dem Namen nach die Quadratzahlen von den Rechteckszahlen getrennt. Das Product dreier Factoren wird alsdann Körperzahl genannt, weil bei der Ausmessung der Körper solche dreifache Multiplication auftritt, und wieder hat man hier andere Namen, je nachdem die Factoren alle identisch sind oder nicht; im ersteren Falle sind die

Zahlen Kubikzahlen.¹⁸⁴⁾ Ferner unterscheiden wir wieder Körperzahlen im engeren Sinne, wenn sämtliche Factoren Primzahlen sind, die Zerlegung also nur in einer Weise erfolgen kann. Denken wir uns nun mit Martin, dessen Erklärung sicherlich auch hier das Wahre getroffen hat, die Flächenzahlen und Primzahlen, von denen Timäus spricht, seien solche im engeren Sinne des Wortes, und zwar sollen die zwei gegebenen unter sich theilerfremd sein, was mit der Natur der Dinge, die sie darstellen (Erde und Feuer) weit mehr übereinstimmt, als wenn diese Bedingung nicht stattfände. Jetzt wird der Sinn leicht verständlich. Sind nämlich a, b, c, d, e, f lauter Primzahlen, und zwar die drei ersten von den drei letzten verschieden, so kann man zwischen den beiden Flächenzahlen $a \cdot b$ und $d \cdot e$ das geometrische Mittel $\sqrt{a \cdot b \cdot d \cdot e}$ wirklich darstellen, so oft $a = b$ und $d = e$. Dann heisst es nämlich $\sqrt{a^2 \cdot d^2} = ad$ und die verlangte Proportion ist $a^2 : a \cdot d = a \cdot d : d^2$. Nehmen wir dagegen die beiden Körperzahlen $a \cdot b \cdot c$ und $d \cdot e \cdot f$, so lässt deren geometrisches Mittel $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f}$ sich nicht rational darstellen, sich also auch nicht genau angeben, mag man nun a, b, c und d, e, f je unter sich als identische Factoren annehmen oder nicht. Deshalb sagt Timäus, ein geometrisches Mittel existire hier nicht. Wohl aber lassen zwei mittlere Glieder sich darstellen, um die Proportion zu ergänzen, wie z. B. $a \cdot b \cdot c : a \cdot b \cdot d = c \cdot e \cdot f : d \cdot e \cdot f$ und auch dieses stimmt sonach mit der Rede des Timäus überein. Damit scheint nun aber unwiderleglich festgestellt, dass die Schule des Pythagoras die hier auseinander gesetzten Kenntnisse ihr Eigenthum nennen darf.

Und nun bleibt bei dieser Voraussetzung, und bei der weiteren Thatsache, dass von einer griechischen Arithmetik vor Pythagoras nirgends die Rede ist, nur die eine Wahl offen: Entweder hat Pythagoras die ersten Ringe zu dieser ganzen Kette von Sätzen selbst gebildet, oder aber er hat sie von einem anderen Orte mitgebracht, und das könnte nur von Babylon her sein. Fast zu hoch müsste man aber die Intelligenz eines einzelnen Mannes stellen, welcher neben so vielem Anderen, das authentisch auf ihn sich zurückführt, und wovon ich hier nur noch die mathematische Musik¹⁸⁵⁾ nennen will, von der zu reden sich doch keine passendere Gelegenheit finden dürfte, auch Erfindungskraft und möchte ich sogar sagen Zeit genug gehabt hätte, den Grundstein zu einem so künstlichen Aufbau zu legen, wie die Zahlentheorie ihn zeigt. Ne-

ben diesem inneren Grunde, der gegen die Urheberschaft des Pythagoras spricht, fällt noch Mancherlei für Babylon in die Wagschale. Nicht als ob ich grosses Gewicht legte auf den hohen Grad der Entwicklung, welchen die Zahlentheorie in dem benachbarten Indien erreichte. Die uns dort zu Gebote stehenden Werke sind viel zu neu, um sichere Rückschlüsse auf jene Zeit zuzulassen, welche allein uns interessiren könnte. Ich will auch jene chinesische Methode der Auflösung unbestimmter Aufgaben nur beiläufig erwähnen, welche den Namen ta-yen, die grosse Erweiterung, führt, und welche wohl im dritten Jahrhundert n. Ch. Geb., vielleicht aber auch schon 220 v. Ch. Geb. entstand. Ich habe an einem anderen Orte gezeigt,¹⁸⁶⁾ dass diese Methode grade nicht berechtigt, an eine sehr ausgebildete Zahlentheorie bei den Chinesen zu glauben. Aber abgesehen von der bis zum Ueberdrusse oft erwähnten harmonischen Medietät, die sicher in Babylon zu Hause ist, muss Pythagoras noch Einiges dort kennen gelernt haben, welches gleichmässig in China und in Griechenland auftritt, welches also nur zwischen beiden Ländern entstanden sein kann, oder doch durch diesen Mittelpunkt hindurch seine Wanderung von Osten nach Westen machen musste. Es sind dieselben mathematischen Lehren, durch welche ich früher den Nachweis des alten chinesisch-babylonischen Verkehrs zu liefern versprach, und was uns gegenwärtig von Wichtigkeit ist, es sind Lehren, die an ganz bestimmte Zahlen sich knüpfen, die also der Vermuthung Raum geben, dass man dort, wo sie sich herschreiben, überhaupt mit Eigenschaften der Zahlen sich beschäftigte.

Das Erste, das ich erwähne, schöpfe ich aus einer Bemerkung von Montucla,¹⁸⁷⁾ dem gelehrten Verfasser der für seine Zeit nicht hoch genug zu schätzenden ersten eigentlichen und man kann wohl sagen einzigen Geschichte der Mathematik, welche diesen Namen verdient. Zudem setzt er uns meistens durch ziemlich genaue Citate in die Gelegenheit, eine freilich oft nothwendige Controle auszuüben, und ich muss es daher um so mehr bedauern, dass er grade hier versäumte, seine Quellen zu nennen. Es ist mir nicht gelungen, dieselben anderweitig ausfindig zu machen,¹⁸⁸⁾ und so begnüge ich mich damit, zunächst die ganze Stelle wörtlich zu übersetzen, und dann noch eine Bemerkung daran zu knüpfen. „Ich kann nicht umhin, heist es, eine von den Träumereien der Pythagoräer über die Zahl und deren Tugenden hier anzuführen. Nach

einem sicherlich den Egyptern entliehenen Traumgebilde setzen sie nämlich das Weltall aus den vier ersten graden und den vier ersten ungraden Zahlen zusammen, und dasselbe findet sich durch eigenthümlichen Zufall bei den Chinesen wieder, welche die Erfindung ihrem ersten Kaiser Fo-hi zuschreiben. Die vier ersten ungraden Zahlen stellen dabei die reinen und himmlischen Elemente dar, die graden Zahlen, deren Stellung keine so würdevolle ist, entsprechen denselben Elementen mit irdischer Unreinheit verbunden. Die Summe aller dieser Zahlen ist 36. Das Weltall, die Verbindung aller himmlischen und irdischen Elemente, wurde also durch die Zahl 36 dargestellt, welche grosse Eigenschaften besitzen musste. Das war nach Plutarch, der uns diese Fetzen pythagorischer oder vielmehr egyptischer Philosophie aufbewahrt hat, die berühmte Vierzahl des Pythagoras, bei welcher man schwur, wenn man dem Eide die heiligste Form geben wollte. Plato soll nun, gleichfalls nach Plutarch, diese Vierzahl noch vervollkommen haben, indem er ihren Werth auf 40 erhöhte. Denn er setzte die vier himmlischen Elemente den ungraden Zahlen 1, 3, 7, 9 gleich. Die mittlere Zahl 5 stellt das Urprincip, den Nous, die höchste Vernunft, die Gottheit dar und musste desshalb wegleiben. Die vier graden Zahlen 2, 4, 6, 8 stellen die vier irdischen Elemente dar. Und aus diesen acht Zahlen entsteht die Zahl 40, welche also dem Weltall zukommt. Es ist gewiss eigenthümlich, dass während bei den Chinesen Fo-hi als Erfinder der erhabenen Gedanken des ersten Systems gilt, Vou-vang, Vater des Kaisers Vou-vang, der gegen 1120 v. Ch. Geb. in China regierte, das zweite System dort erfunden haben soll. Welch eigenthümlicher Zufall ist nothwendig, um eine so vollständige Uebereinstimmung bei zwei so entfernten Völkern wie Egyptianer und Chinesen hervorzubringen! Dass zwei Völker dieselbe Wahrheit auffinden, das hat nichts Ueberraschendes, denn die Wahrheit ist nur eine. Aber dass sie in so bizarren Träumereien zusammentreffen, darüber hat man das Recht sich zu erstaunen, wenn man nicht das eine Volk gewissermassen den Vater des anderen nennen will, oder annimmt, dass beide eines gemeinsamen Ursprunges sind. Mir scheint Letzteres schon durch diesen einzigen Umstand fast erwiesen.“ So weit Montucla, den ich wie gesagt leider hier nicht controliren kann. Nur so viel steht fest nach den Untersuchungen Röth's über die Zahlensymbolik,¹⁸⁹⁾ welche zu den scharfsinnigsten Theilen seines Werkes gehören, aber hier nicht, wenig-

stens in diesem Kapitel nicht weitläufiger auseinandergesetzt werden können, dass Montucla im Irrthume ist, wenn er einen egyptischen Ursprung von Platos Spekulationen so sicher hinstellt, dass vielmehr „dieser ganze spekulative Ideenkreis mit seinen Urzahlen und Urbildern, sowie die mit ihm verbundene auf die Zahlenlehre gegründete spekulative Methode, beide in letzter Abstammung auf dem Boden der zoroastrischen Glaubenslehre wurzeln.“ Somit ist in Montucla's Auseinandersetzung durchweg das Wort Egypten durch Babylon zu ersetzen, und die zu lösende Schwierigkeit des Zusammenhangs dadurch gehoben.

Das Zweite und ungleich Wichtigere, welches hier zu erwähnen ist, als in identischer Weise in Griechenland und China erscheinend, ist der pythagoräische Lehrsatz geknüpft an die Zahlen 3, 4, 5. Ich habe schon früher,¹⁹⁰⁾ und wohl zuerst, die Entdeckung dieses Satzes in Zusammenhang mit den übrigen pythagorischen Lehren gebracht. Ich will jetzt in aller Ausführlichkeit beweisen, was ich damals nur andeutete. Die chinesische Quelle war mir dabei durch einen Auszug zugänglich, den Biernatzki in seiner früher schon citirten Abhandlung⁶³⁾ über die Arithmetik der Chinesen veröffentlicht hat. Kaiser Tschaou-kong, welcher um 1100 v. Ch. Geb. regierte, war ein ganz besonderer Freund der Mathematik. Er scheint so sehr in derselben bewandert gewesen zu sein, dass er selbst ein mathematisches Werk schrieb, oder doch wenigstens bei dessen Verfassung mitwirkte. Die Schrift ist aber noch vorhanden und enthält die Grundwahrheiten der Mathematik in Gestalt eines kurzen Dialoges zwischen Tschaou-kong und einem Gelehrten Namens Schang-kaou. Der Titel der Schrift lautet Tschaou pi d. h. Schenkelbein des Tschaou, indem die einen Winkel bildenden Linien in ähnlicher Weise als Schenkel bezeichnet werden, wie dieses in allerdings späterer Zeit im Griechischen, im Lateinischen und auch noch im Deutschen stattfindet.¹⁹¹⁾ Sie besteht aus mehreren Kapiteln, deren erstes eine Art von Uebersicht über das ganze Werk bildet. Dieses ganze Kapitel hat Biernatzki in 22 Paragraphen abgetheilt und vollständig in seine Abhandlung aufgenommen. Ich will nur einige dieser Paragraphen entlehnen, welche mit der Schreibart bekannt machen sollen, und besonders einen Paragraphen, welcher von unmittelbarer Wichtigkeit für meinen Gegenstand ist.

§. 1. Tschaou-kong sagte einmal zu Schang-kaou: Ich habe

vernommen, Herr, Du seiest in den Zahlen sehr bewandert; daher möchte ich Dich fragen, wie der alte Fo-hi die Grade an der Himmelskugel festgestellt hat. Es sind ja doch keine Stufen vorhanden, auf welchen man den Himmel ersteigen kann; und Richtschnur und Maass von der Grösse der Erde lassen sich auf den Himmel nicht anwenden. Desshalb wünschte ich zu erfahren, wie er diese Zahlen feststellte.

§. 2. Schang-kaou erwiderte: Die Kunst zu zählen ist auf den Kreis und auf das Viereck zurückzuführen.

§. 6. Zerlegt man daher einen rechten Winkel in seine Bestandtheile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie, wenn die Basis gleich 3 und die Höhe gleich 4 ist, gleich 5.

§. 22. Tschaou-kong rief aus: In der That, das ist vortrefflich.

Es würde mich von meinem jetzigen Gegenstande zu weit seitab führen, wenn ich noch weitere Paragraphe hier nachfolgen liesse, aus welchen z. B. hervorgeht, dass die Chinesen in so früher Zeit, wie während der Regierung des Tschaou-kong schon Messungen veranstalteten, welche der Trigonometrie zum Verwechseln ähnlich sehen, indem man sich des rechten Winkels dazu bediente, der aufgerichtet, umgekehrt oder horizontalliegend angewendet wurde, je nachdem es sich darum handelte Höhen, Tiefen oder Entfernungen zu messen. Hier genügt uns die Betrachtung des §. 6, welcher zeigt, dass die Chinesen mit dem rechtwinkligen Dreiecke aus den Seiten 3, 4, 5 bekannt waren, dass sie es einer besonderen Erwähnung werth hielten. Dasselbe Dreieck spielt nun in der Mathematik des Pythagoras eine so wichtige Rolle, dass es noch heute vor allen anderen durch den Namen des pythagoräischen Dreiecks ausgezeichnet wird. Auch das Alterthum schrieb schon ebendasselbe Dreieck dem Pythagoras zu. Eine Anzahl von Stellen, welche von dem hohen Ansehen zeugen, in welchem unser Dreieck bei den Alten stand, hat Röth gesammelt.¹⁹²⁾ Eine fernere Stelle des Nicomachus nennt das pythagoräische Dreieck beim Namen.¹⁹³⁾ Endlich der römische Architekt Vitruvius bemerkt,¹⁹⁴⁾ Pythagoras habe ein überaus bequemes Mittel angegeben, einen rechten Winkel genau zu construiren, indem man drei Stangen von der Länge von 3, 4 und 5 Fussen zu einem Dreiecke verbinde.

Die zu lösende Frage besteht nun darin: Wie hängt das pythagoräische Dreieck, welches doch nur ein ganz he-

sonderes rechtwinkliges Dreieck ist, mit dem pythagoräischen Lehrsatz zusammen? Wurde es aus dem allgemeinen Satze nachträglich abgeleitet, warum gab man ihm dann den hervorragenden Titel? War es, wie eben aus diesem Titel vermuthet werden kann, und wie es überhaupt dem Erfindungsgange der mathematischen Wissenschaften entspricht, zuerst bekannt, wie leitete Pythagoras dann den eigentlichen Lehrsatz vom rechtwinkligen Dreiecke daraus ab? Ich denke mir die Sache so. Ich habe gezeigt, dass Pythagoras und seine Schule mit Summationen von Reihen sich beschäftigten, und die letzte Bemerkung über Montuclas Angaben macht es wahrscheinlich, dass solche Summationen in Babylon an der Tagesordnung waren. Ich habe ferner angeführt, dass man nicht bei den arithmetischen Reihen erster Ordnung stehen blieb, sondern auch die figurirten Zahlen betrachtete. Das heisst etwas anders ausgedrückt, man bildete eine arithmetische Reihe und nahm die Summe des ersten, der beiden ersten, der drei ersten Glieder u. s. w. So fand sich z. B. dass die Reihe der ungraden Zahlen in der angegebenen Weise die Quadratzahlen erzeugen,¹⁹⁵⁾ ja diese Eigenschaft wurde sogar von Theon von Smyrna als Definition der Quadratzahlen benutzt.¹⁹⁶⁾ Was war natürlicher, als dass man die Glieder der neu gebildeten Reihe, welche wir heute zu Tage eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung nennen, einem analogen Additionsverfahren unterwarf, um zu den Pyramidalzahlen zu gelangen, und in der That kannten die Alten¹⁹⁷⁾ diese Zahlen. Da musste sich bemerklich machen, dass in dieser zweiten Reihe einige Zahlen der Art waren, dass wenn nicht sämtliche, sondern nur zwei neben einander stehende addirt wurden, als eigenthümliches Resultat die nächstfolgende Zahl auftrat, dass nämlich 9 und 16 zusammen 25 gaben.

Ich fragte, was natürlicher als dieses Verfahren sei, und der geneigte Leser (um wie viel mehr der ungeneigte) wird mir die Frage zurückgeben, was unnatürlicher sei? Gewiss, die Annahme erscheint für den ersten Augenblick gekünstelt, aber auch nur für den ersten Augenblick. Zunächst will ich jetzt an das erinnern, was ich im vorigen Kapitel bei Gelegenheit der Zusammensetzung der Flächen aus Elementardreiecken aussprach. Die Schule des Pythagoras, also auch wohl der Lehrer selbst, liebte das mathematische Experiment. Und wie man geometrisch experimentirte, ganz ähnlich verfuhr man in der Arithmetik. Ich habe schon ge-

sagt, dass man die Quadratzahlen erhielt, indem man die Reihe der ungraden Zahlen addirte. Aber wir wissen ferner, dass man auch die Reihe der graden Zahlen addirte, dass man die Bemerkung machte, die so entstehenden Zahlen können immer als Product von zwei aufeinanderfolgenden Zahlen der natürlichen Zahlenreihe angesehen werden, ⁽¹⁹⁸⁾ und dass man desshalb diese Zahlen als heteromeke Zahlen bezeichnete, ⁽¹⁹⁹⁾ d. h. als Zahlen, deren einer Factor um die Einheit grösser ist, als der andere. Nun ist aber zur Gewissheit erhoben, dass diese Methoden altpythagorisch sind, nicht etwa dem Theon oder dem Nicomachus angehören; denn durch die angegebene Betrachtungsweise allein ergibt sich ein wahrer Gegensatz zwischen dem Quadrate, als der Summirung von Ungraden, und der Heteromekie, als der Summirung von Graden, wie Aristoteles ihn als eine der pythagorischen Kategorien aufzählt. ⁽¹⁹⁹⁾ Ein weiteres Beispiel bestand darin, dass man die gewöhnliche Zahlenreihe ebenso behandelte, wie vorher die ungraden und die graden Zahlen für sich, und so die Dreieckszahlen erhielt, ⁽²⁰⁰⁾ das sind Zahlen, welche durch einzelne Punkte dargestellt in die Figur eines gleichseitigen Dreiecks gezeichnet werden können. Ja man war mit einer Entstehungsweise solcher Zahlen nicht zufrieden. Man stellte die Reihe der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16 u. s. w. und die von 3 anfangende Reihe der ungraden Zahlen 3, 5, 7, 9 u. s. w., wo also bei dieser zweiten Reihe das Anfangsglied 1 weggelassen worden war, unter einander, und addirte beide Reihen, also immer nur zwei Zahlen auf einmal. Da erhielt man ⁽²⁰¹⁾ wieder die Quadratzahlen und zwar von der 4 anfangend. Das war dem Sinne nach dieselbe Methode, welche zuerst zur Bildung der Quadratzahlen führte, aber anders ausgesprochen; und Theon hielt es nicht für überflüssig diesen anderen Ausspruch wirklich zu thun. Scheint da nicht auf der Hand zu liegen, dass man ein Untereinanderstellen zweier Reihen, wie es mit den Quadratzahlen und den ungraden Zahlen geschehen war und zu Interessantem geführt hatte, auch mit Reihen einer und derselben Natur vornahm? Nicomachus ⁽²⁰²⁾ bestätigt diese Vermuthung auf's Vollständigste in Bezug auf Dreieckszahlen. Er zeigt wie die Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10 u. s. w. wenn wieder die Dreieckszahlen, ohne die 1, nämlich 3, 6, 10, 15 u. s. w. daruntergesetzt und hinzugefügt wurden, die Quadratzahlen liefern. Wenn man nun dasselbe auch mit Quadratzahlen und Quadratzahlen vornahm, und auch bei den in zweiter Reihe befindlichen Quadrat-

zahlen die 1 wegliess, war das nicht eine ganz natürliche Consequenz der bisherigen Versuche? Und was war dieses anderes als das Verfahren, von dem ich vorhin sagte, dass man es eingeschlagen habe und durch dasselbe zu dem Resultate $9 + 16 = 25$ kam, zu einem Resultate, welches einzig dastand ²⁰³) und desshalb um so mehr überraschen musste?

So waren denn die Zahlen 3, 4, 5 und die Eigenschaft der Producte dieser Zahlen in sich selbst dem Augenmerke des Pythagoras vor allen anderen Zahlen gekennzeichnet. Wenn er nun erfuhr, und bei dem babylonisch-chinesischen Verkehre konnte er es in Babylon erfahren, dass dieselben Zahlen auch die Längen der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen, was musste grade für Pythagoras die Folge sein? Er musste auch hier den Versuch machen, den ich schon früher, als in dem Charakter seines Studienganges begründet, nachwies, den Versuch jetzt, wo die Zahlen 3, 4, 5 geometrische Bedeutung annahmen, den Satz $3^2 + 4^2 = 5^2$ auch geometrisch zu beweisen. Und was er wohl sicher nicht erwartet hatte, ereignete sich. Er fand dass der Satz von der Gleichheit des Quadrates der Hypotenuse mit der Summe der Quadrate der beiden Katheten nicht bloss bei dem einen Dreiecke von den Seiten 3, 4, 5 stattfand, sondern dass er eine gemeinschaftliche Eigenschaft aller rechtwinkligen Dreiecke entdeckt hatte. Ich sage, er hatte sie entdeckt, denn darüber hat den übereinstimmenden Zeugnissen aller Schriftsteller gegenüber noch nie ein Zweifel statt gefunden, dass Pythagoras wirklich den nach ihm benannten Satz zuerst bewies. Wie er den Beweis führte, wissen wir allerdings nicht mehr, denn der namentlich in früheren Zeiten am Meisten bekannte sogenannte euclidische Beweis ist, wie Proclus uns mittheilt, das Eigenthum dieses Mathematikers.

Prüfen wir meine Hypothese, welche hoffentlich schon einigen Grad der Wahrscheinlichkeit gewonnen hat, noch weiter. Wenn es sich so verhielt, wie ich auseinandersetzte, welchen Ideengang musste Pythagoras von nun an weiter verfolgen, den geometrischen oder den arithmetischen? Sicherlich wohl einen aus beiden gemischten, einen dem Inhalte nach vorwiegend arithmetischen in geometrischem Gewande. Er musste andere Zahlen prüfen und dabei entdecken, dass es gewisse Zahlen giebt, welche zwar das Maass eines Quadrates genau bestimmen, aber unter deren Annahme die Seite des

Quadrates nicht näher angebbar war, mit anderen Worten Zahlen, deren Quadratwurzeln irrational sind. Solche Zahlen erscheinen z. B. bei den beiden Elementardreiecken des vorigen Kapitels. Das eine derselben scheint absichtlich gewählt, um zu zeigen, dass die Hypotenuse ($= 2$) und die kleinere Kathete ($= 1$) angebbar sein können, während die grössere Kathete ($= \sqrt{3}$) unangebbar ist. Das andere, also das gleichschenkelig rechtwinklige Dreieck, führt Aristoteles ganz besonders an²⁰⁴) mit der Bemerkung, bei ihm seien Hypotenuse und Katheten nicht in Theilen derselben Einheit angebbar. Genau damit übereinstimmend giebt Proclus¹⁵²) uns an, dass Pythagoras es gewesen, der die Theorie der Irrationalgrößen entdeckte.

Waren diese einmal bekannt, so ergab sich als nächste Frage: Welche ganze rationale Zahlen sind es, mit deren Hülfe rechtwinklige Dreiecke construirt werden können? Giebt es Methoden, solche Zahlen zu finden, oder in die Sprache moderner Algebra übersetzt, giebt es ganze rationale Auflösungen der unbestimmten Gleichung zweiten Grades $x^2 + y^2 = z^2$, und wie findet man sie? Dass Pythagoras auch diese Frage stellte, ist gleichfalls bekannt. Wir kennen aus dem Zeugnisse des Proclus,²⁰⁵) sogar zwei Methoden der Auflösung, deren eine dem Pythagoras selbst, die andere dem Plato oder nach einer davon verschiedenen Angabe²⁰⁶) einem gewissen Archytas zugeschrieben wird. Ich sollte lieber sagen, einem ungewissen Archytas, da über dessen Persönlichkeit das tiefste Dunkel herrscht. Ich will nun nach Röth, mit welchem ich hier wieder zusammentreffe, nachdem ich eine ganze Weile den von ihm eingeschlagenen Pfad als unwegsam und irreleitend verliess, noch in Kürze versuchen, jene Methoden selbst darzustellen und zu zeigen, wie man etwa zu denselben gelangen konnte. Denkt man sich die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ so verändert, dass das Quadrat der einen Kathete auf die andere Seite gebracht wird, so ergibt sich $x^2 = (z + y)(z - y)$ d. h. es ergibt sich eine wenigstens rationale Auflösung, so oft $z + y$ und $z - y$ ähnliche Flächenzahlen sind, wie die Alten sich ausdrücken,²⁰⁷) d. h. solche Zahlen, welche mit einander vervielfacht ein Quadrat bilden, und deren allgemeinste Form demnach $\frac{\alpha^2}{\gamma}, \frac{\beta^2}{\gamma}$ ist. Ein Name, der beiläufig bemerkt bis weit in die Neuzeit hinüberreicht und z. B. noch bei dem berühmtesten Zahlentheoretiker des 16. Jahrhunderts, bei Hieronymus

Cardanus vorkommt. Dass die angegebene Bedingung genügt, ebenso wie sie unzweifelhaft nothwendig ist, zeigt sich alsbald, wenn man die weiteren Folgerungen zieht, die daraus hervorgehen. Ist $z + y = \frac{\alpha^2}{\gamma}$, $z - y = \frac{\beta^2}{\gamma}$ so wird selbstverständlich $x = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$, $y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}$, $z = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\gamma}$ und somit die Aufgabe gelöst, indem $\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\gamma}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}\right)^2 + \left(\frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)^2$.

Wenn nun auch natürlicher Weise die Alten diese Bezeichnungen nicht besaßen, also die in der letzten Gleichung enthaltene allgemeinste Auflösung der Aufgabe sicherlich nicht kannten, so ist doch keiner der hier gezogenen Schlüsse von der Art, dass er in einer etwas specielleren Form den Mathematikern, die ich im Auge habe, nicht zugetraut werden dürfte. Das Einzige, was fraglich erscheinen könnte, wäre, ob die Griechen im Stande waren, aus der Summe und der Differenz zweier Zahlen (oben $z + y$ und $z - y$) die Zahlen selbst zu finden? Doch auch diese Möglichkeit muss bejaht werden in Erinnerung an das Epanthem des Thymaridas, welches eine ganz ähnliche Methode ist wie die, welche zur Auflösung jener Aufgabe dient. Man könnte vielleicht noch weiter gehen, und das Epanthem eine Verallgemeinerung jener Aufgabe nennen, insofern es sich bei ihm um mehr als zwei Unbekannte handelt.

Die beiden Methoden des Pythagoras und des Plato liegen nun in der vorhin gefundenen Formel wirklich als Specialfälle verborgen, und gehen aus ihr hervor, die erstere wenn $\beta = \gamma = 1$, die zweite wenn $\beta = \gamma = 2$ gesetzt wird. Darin liegt indessen keineswegs ein Widerspruch gegen deren Auftreten zu verschiedener Zeit, wie Röth²⁰⁸) wohl irrig annimmt. Grade weil, wie ich schon sagte, die Griechen solche allgemeine Formeln nicht hatten, mussten sie Specialfälle oft in übergrosser Anzahl unterscheiden, konnte es also sehr wohl eintreffen, dass der eine Fall schon bekannt war, der andere erst später aufgefunden wurde. Die Methode des Pythagoras ist nach unserer Schreibweise: $\left(\frac{\alpha^2 + 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 - 1}{2}\right)^2 + (\alpha)^2$, die des Plato: $\left(\frac{\alpha^2}{4} + 1\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2}{4} - 1\right)^2 + (\alpha)^2$. Darin zeigt sich denn auch der Unterschied, der von Proclus²⁰⁵) gemacht

wurde, und gemacht werden musste, dass Pythagoras seinen Ausgangspunkt von den ungraden Zahlen nahm, Plato dagegen den seinen von den graden Zahlen. Denn nur unter dieser Voraussetzung werden die drei Seiten nicht nur rationale, sondern auch ganze Zahlen. Somit wäre auch diese Untersuchung zu einigem Abschlusse gebracht, und so mögen denn wieder einige Thesen den Hauptinhalt zusammenfassen.

1) Die wissenschaftliche Rechenkunst ist phönikischen oder wahrscheinlicher babylonischen Ursprunges.

2) Aus ihr zweigte sich in Babylon auch eine Zahlentheorie ab.

3) Beide Richtungen lernte Pythagoras dort kennen, die eine führte zum Epanthem des Thymaridas und zur Lehre von den Proportionen und Progressionen, die andere zur Unterscheidung von Primzahlen, zusammengesetzten Zahlen und ähnlichen Kategorien.

4) In arithmetischen Experimenten summirte man Reihen in den verschiedensten Combinationen. Mittelt dieser Untersuchungsmethode wurde erkannt, dass $3^2 + 4^2 = 5^2$.

5) Chinesischen Ursprungs ist die Kenntniss, dass die 3, 4, 5 Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks sind.

6) Eben daher stammt vielleicht der Name Schenkel in seiner geometrischen Bedeutung.

7) Ebendort finden sich zahlensymbolische Spekulationen wieder, welche ursprünglich babylonisch sich auch nach Griechenland verbreiteten.

8) Der pythagoräische Lehrsatz entstand aus dem Bemühen, den zahlentheoretischen Satz $3^2 + 4^2 = 5^2$ mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks zu beweisen.

9) In Folge dieses Satzes entdeckte Pythagoras die Irrationalzahlen.

10) Weitere Folge war die Erfindung von Methoden zur Auflösung der unbestimmten Gleichung zweiten Grades mit drei Unbekannten durch ganze rationale Werthe.

11) Unter den Nachfolgern des Pythagoras blieben die Schriftsteller von eigentlichen Lehrbüchern bei der geometrisch-arithmetischen Methode; nur Wenige verfahren rein arithmetisch, wie es in Babylon Sitte war.
