

Theaetetus Mathematicus. — HELLER S., *Theaetets Bedeutung als Mathematiker*: AGM LI 1967 55-78. | On a eu tort de douter de l'historicité du mathématicien Théétète : c'est lui qui avec Eudoxe redonna à la mathématique grecque une base solide après la crise provoquée par la découverte des grandeurs irrationnelles. Il fonda la théorie des grandeurs irrationnelles et du traitement des corps réguliers, théorie qui devait être développée par Eudoxe.

Theaetets Bedeutung als Mathematiker

Von SIEGFRIED HELLER¹

Einleitung

Über das Leben und die wissenschaftlichen Leistungen des Mathematikers THEAETET aus Athen liegen zahlreiche Berichte aus verschiedenen Jahrhunderten vor.

Die älteste und wohl zuverlässigste Nachricht stammt von PLATON, der in dem nach seinem Freund benannten Dialog *Theaetet* diesem ein *monumentum aere perennius* gesetzt hat².

Nur wenig später tritt der Name THEAETETS wiederholt in dem Mathematiker-Verzeichnis des EUDEMOS (etwa 320 v. Chr.) auf. Von diesem Werk des EUDEMOS kennen wir nur Auszüge³, die aus späteren Jahrhunderten stammen und bei der Wiedergabe willkürlich geändert und ergänzt sein können.

Der Kommentar des PAPPUS von Alexandria (um 320 n. Chr.) über das X. Buch der *Elemente* EUKLIDS, fast 700 Jahre nach THEAETET entstanden, liegt uns nicht in griechischer Sprache, sondern nur in einer arabischen Übersetzung vor, von der es Übersetzungen durch FR. WOEPCKE⁴, H. SUTER⁵ und insbesondere eine englische Übersetzung durch W. THOMSON mit einer deutschen Einleitung von G. JUNGE⁶ gibt.

Zu erwähnen sind noch Scholien⁷ zu EUKLIDS Elementen, die teilweise mit dem PAPPUS-Kommentar übereinstimmen, der Kommen-

In dankbarem Gedenken an OSKAR BECKER (5. 9. 1889 – 13. 11. 1964).

¹ Nach einem Vortrag im 11. Internationalen Kolloquium zur Problemgeschichte der Mathematik am 20. September 1966 im Mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach (Schwarzwald).

² *Platonis opera recogn.* I. BURNET. Oxford 1900, I, 142a–210d. Deutsche Zitate nach *Theaetet*, übers. von O. APALT, Leipzig 1921³.

³ *Prokli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii*, gr. ed. G. FRIEDLEIN, Leipzig 1873, S. 16f. Deutsch von P. LEANDER SCHÖNBERGER, ed. M. Steck. Halle 1945, S. 212f.

⁴ FR. WOEPCKE, *Essai d'une restitution de travaux perdus d'Apollonius sur les quantités irrationnelles*. In: *Mém. de l'Acad. des Sciences, Sc. Math. et Phys.* 14, Paris 1856.

⁵ H. SUTER, *Der Kommentar des Pappus*. In: *Abhdlg. z. Gesch. d. Naturw. u. d. Med.*, IV., Erlangen 1922, S. 11–78.

⁶ W. THOMSON–G. JUNGE, *The Commentary of Pappus on book X of Euclid's elements*, Cambridge (USA) 1930.

⁷ *Euclidis Elementa*, ed. I. L. HEIBERG, Bd. 5, Leipzig 1888, S. 414–592.

3473
HELLER, S
1967

tar des PROKLOS DIADOCHOS (410–485) zum I. Buche der Elemente, der den oben genannten Auszug aus dem Mathematiker-Verzeichnis des EUDEMOS enthält, und schließlich einige Nachrichten über THEAETET aus späterer Zeit, wie z. B. bei SUIDAS⁸.

2. Platons Urteil über den Mathematiker Theaetetus

Will man sich über ein Ereignis oder über eine Persönlichkeit aus früherer Zeit unterrichten, so greift man selbstverständlich, wenn irgend möglich, auf zeitgenössische Berichte zurück. Denn je weiter sich die Berichterstattung vom Zeitpunkt des Geschehens entfernt, desto unsicherer wird sie. Selbst bei bestem Wahrheitswillen erfährt die Beurteilung weit zurückliegender Ereignisse durch neuere Erfahrungen und Vorkommnisse eine Trübung. Deshalb wird man dem Bericht eines Zeitgenossen den Vorzug geben, vorausgesetzt, daß dieser nach seiner ganzen Persönlichkeit und seiner Sachkenntnis unser Vertrauen verdient. Handelt es sich überdies, wie im vorliegenden Falle, darum, das Lebenswerk eines Gelehrten aus alter Zeit zu würdigen, so kommt noch die Schwierigkeit hinzu, einen gerechten Maßstab zu finden, an dem seine persönliche Leistung gemessen wird, sowohl hinsichtlich der Ausgangslage, aus der heraus seine Untersuchungen begannen, als auch hinsichtlich seiner Wirkung auf den Fortschritt der Wissenschaft.

Im Falle des Mathematikers THEAETET sind wir nun in der glücklichen Lage, PLATON als denjenigen zeitgenössischen Berichtserstatter benennen zu können, der wie kein anderer fähig war, ein sachlich begründetes Urteil über die *Bedeutung Theaetets als Mathematiker* abzugeben.

PLATON benutzt in dem nach THEAETET benannten Dialog die Kunstform der *Rahmenerzählung*, um die Persönlichkeit THEAETETS an zwei Zeitpunkten seines Lebens zu schildern, einmal im Jünglingsalter, das andere Mal im reifen Mannesalter.

Die erste Szene spielt in Athen im Jahre 399 v. Chr., als THEAETET etwa sechzehn Jahre alt war⁹. THEODOROS schildert dem SOKRATES die äußere Erscheinung und die Charaktereigenschaften des THEAETET sehr eingehend und hebt besonders die glänzende Auffassungsgabe seines Schülers hervor, dem¹⁰ „das Lernen und For-

⁸ SUIDAS, *Lexicon*, ed. TH. GAISFORD—G. BERNHARDY, Halle 1852, S. 1120.

⁹ PLAT. *op.* I, 143d–210d. ¹⁰ PLAT. *op.* I, 144b 3–7.

schen so leicht, sicher und erfolgreich vonstatten gehe, dabei mit einer Ruhe, gleich dem Strome des geräuschlos fließenden Öles, daß man sich wundern muß, wie jemand in so jugendlichem Alter es zu solcher Vollkommenheit bringen könne“. Gleich darnach tritt THEAETET auf, und es folgt nun das Gespräch zwischen ihm, SOKRATES und THEODOROS, in dessen Verlauf THEAETET über eine Unterrichtsstunde bei THEODOROS berichtet sowie über seinen eigenen Versuch, die Quadrate mit ganzzahligem Flächeninhalt in zwei Klassen einzuteilen¹¹. (Hiervon wird weiter unten noch die Rede sein.) SOKRATES gewinnt aus dieser Unterredung sogleich einen ganz vorzüglichen Eindruck von dem raschen Auffassungsvermögen und der geistigen Beweglichkeit des jugendlichen THEAETET und findet die lobende Beurteilung, die THEODOROS zuvor von ihm gegeben hat, vollauf bestätigt¹².

Die zweite Szene¹³ spielt dreißig Jahre später in der Athen benachbarten Stadt Megara. Handelnde Personen sind zwei Bürger von Megara, EUKLEIDES und TERPSION, beide seinerzeit mit SOKRATES bekannt und befreundet. Gerade hat sich EUKLEIDES von THEAETET verabschiedet, der schwerverwundet und an der im Heer ausgebrochenen Ruhr leidend, aus dem Feldlager vor Korinth nach Athen zurückgebracht wird; es besteht kein Zweifel, daß es mit ihm bald zu Ende gehen wird. Aus der Unterhaltung zwischen EUKLEIDES und TERPSION klingt die Trauer und der Schmerz um den Verlust dieses trefflichen Gelehrten wieder, und wir erfahren dabei, daß EUKLEIDES vor dreißig Jahren das Gespräch zwischen SOKRATES, THEODOROS und THEAETET, an dem EUKLEIDES selbst nicht teilnahm, nach den Mitteilungen des SOKRATES aufgezeichnet hat.

An dieser Stelle des Vorberichts benutzt PLATON die Gelegenheit, sein Urteil über die wissenschaftlichen Leistungen THEAETETS durch EUKLEIDES zum Ausdruck zu bringen und seiner Meinung durch die Einschaltung von SOKRATES besonderes Gewicht zu verleihen¹⁴. EUKLEIDES weist auf die wunderbare Prophetengabe des SOKRATES hin, die sich wie in anderen Fällen so auch bei diesem Manne, THEAETET, bewährt habe. SOKRATES sei, wie er ihm seinerzeit erzählt habe, durch das Zusammensein und die Unterredung mit THEAETET zu lebhafter Bewunderung seiner geistigen Anlagen hingerissen worden und habe damals vorausgesagt, es könne gar nicht fehlen, daß THEAETET es zur Berühmtheit bringen werde, wenn er

¹¹ PLAT. *op.* I, 147d3–148b2.

¹² PLAT. *op.* I, 148b 3–4.

¹³ PLAT. *op.* I, 142a1–143c7.

¹⁴ PLAT. *op.* I, 142c4–d3.

das Mannesalter erreicht habe¹⁵. TERPSION stimmt seinem Freunde bei, daß „SOKRATES hiermit die Wahrheit gesagt hat“¹⁶.

Bei THEAETET handelt es sich offenbar um einen besonderen Fall des frühzeitigen Auftretens einer ungewöhnlichen Begabung für mathematische Fragen¹⁷. Aus diesem Grunde hat PLATON wohl auch neben den charakterlichen Eigenschaften die geistigen Anlagen THEAETETS so ausführlich geschildert, was etwas ganz Außergewöhnliches in seinen Schriften darstellt. Die erste Andeutung des jugendlichen THEAETET über eine Klassifikation der Zahlen erweist sich als die Keimzelle der umfassenden Theorie der irrationalen Größen, die das Werk des herangereiften THEAETET ist und die ihm bei seinen Zeitgenossen den Ruf eines hervorragenden Gelehrten einbrachte.

Angesichts der dichterischen Freiheit, mit der PLATON die Vorgeschichte und den Dialog selbst gestaltet, ist die Frage berechtigt, wie weit man diese Darstellung als historische Quelle für die Beurteilung des Mathematikers THEAETET in Anspruch nehmen darf. Die ganze Szene, in der THEAETET durch THEODOROS mit SOKRATES zusammengeführt wird, ist doch der Phantasie des „Dichters“ PLATON entsprungen, und das gleiche gilt auch für das Zwiegespräch zwischen EUKLEIDES und TERPSION in Megara. Aber der Hintergrund, vor dem sich alles abspielt, die geistige Atmosphäre, in der die Gespräche stattfinden, entspricht den Tatsachen. Nach dem Urteil eines so ausgezeichneten Kenners der Platonischen Dialoge wie Ivo BRUNS¹⁸ ist, ganz allgemein gesprochen, die Platonische Szene, auch wenn sie erfunden ist, doch „ihrem Gehalt nach historisch. Wohl ist sie erfunden, aber sie will erfunden sein im Geist der Wirklichkeit“. Von den einzelnen zur Darstellung kommenden Personen sagt BRUNS¹⁹: „Alles, was sie tun und sagen, ist, einzeln betrachtet, unhistorisch, ist Dichtung. Aber der Eindruck, den der

¹⁵ PLAT. *op.* I, 142d 1–3: εἰπέ τε ὅτι πᾶσα ἀνάγκη εἴη τοῦτον ἐλλόγιμον γενέσθαι, εἴπερ εἰς ἡλικίαν ἔλθοι.

¹⁶ PLAT. *op.* I, 142d4: Καὶ ἀληθὴ γε, ὡς εἰκεν, εἶπεν.

¹⁷ E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer*. Halle 1923, S. 228, Anm.: Es ist nicht unmöglich, daß Theaetet tatsächlich schon in dem jugendlichen Alter von 16–18 Jahren, wie es Plato darstellt, diese großartige mathematische Entdeckung gemacht hat. Die meisten großen Mathematiker – man denke z. B. an Pascal und Gauß – haben die Grundzüge ihrer mathematischen Erkenntnisse schon in frühen Jahren konzipiert (vgl. RÉVESZ, in: *Frühzeitiges Auftreten der Begabung. Zeitschr. f. angewandte Psychologie* 1920).

¹⁸ I. BRUNS, *Das literarische Porträt der Griechen*. Berlin 1896, S. 241.

¹⁹ I. BRUNS, a. a. O., S. 241.

Verfasser mit der Gesamtheit dieser Einzelheiten erzielen will, soll der historischen Wirklichkeit entsprechen. Und so oft uns die sonstige Überlieferung erlaubt, die Platonische Zeichnung zu kontrollieren, läuft sie der historischen Wahrheit nicht zuwider.“

So dürfen wir die Frage, ob der Dialog *Theaetet* als Geschichtsquelle anzusehen ist, nach dem Vorgang von Ivo BRUNS bejahen. Seiner Auffassung pflichten auch die meisten Forscher bei, z. B. H. VOGT in seiner *Entdeckungsgeschichte des Irrationalen*²⁰ und H. G. ZEUTHEN in seiner Abhandlung über die arithmetischen Bücher in EUKLIDS *Elementen*²¹.

Schließlich könnten noch Zweifel auftauchen, ob PLATONS Urteil über THEAETET nicht zu günstig ausgefallen ist, sei es aus persönlicher Freundschaft, sei es, weil es sich hier um einen „Nachruf“ auf den im Kampf für die Heimat gefallenen Mitbürger handelt. Nun besitzen wir aber in dem Dialog *Menexenos* ein Zeugnis für PLATONS Einstellung zu den damals üblichen Gedenkreden bei öffentlichen Totenehrungen. In der Einleitung zu diesem Dialog²² verspottet der platonische SOKRATES die „Schönredner“, die bei solcher Gelegenheit alle und alles über die Maßen loben und verherrlichen, und zeigt dann an einer improvisierten, scheinbar ernsthaft klingenden Leichenrede²³, wie man es nach seiner Ansicht *nicht* machen soll. Gegen das Ende der Rede, als er sich an die Väter der Gefallenen wendet, läßt er den Merkspruch *Μηδὲν ἄγαν* einfließen und hebt ihn als ein ganz vortreffliches Wort in seiner Rede hervor²⁴. Man könnte fast glauben, PLATON habe durch SOKRATES mit der auffälligen Hervorhebung dieses Spruches die verspotteten Lobredner ermahnen wollen, künftig bei ihren Reden maßzuhalten. Mag bei dem Dialog *Menexenos* die Urheberschaft PLATONS auch umstritten sein, so entspricht die Forderung des *Μηδὲν ἄγαν* doch sicherlich ganz dem Wesen PLATONS. Er wird nicht in den Fehler verfallen sein, bei seiner Darstellung THEAETETS zu übertreiben.

Da zudem aus vielen Schriften PLATONS hervorgeht, wie innig vertraut er mit den damaligen Problemen der Mathematik war, wie

²⁰ H. VOGT, *Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen*. In: *Bibl. Math.* (3), 10, Leipzig 1910, S. 117 ff. und 127.

²¹ H. G. ZEUTHEN, *Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité*. In: *Overzicht over de k. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger* (= ODVS), Kopenhagen 1910, S. 398.

²² PLAT. *op.* III, 234c1–235c5. ²³ PLAT. *op.* III, 236d 4 ff.

²⁴ PLAT. *op.* III, 247e 5–6. πάλαι γὰρ δὴ τὸ Μηδὲν ἄγαν λεγόμενον καλῶς δοκεῖ λέγεσθαι· τῷ γὰρ ὄντι εὖ λέγεται.

er den systematischen Aufbau der Geometrie und Arithmetik gefördert und die Schaffung einer Körperlehre vorangetrieben hat so können wir überzeugt sein, daß Platon in seinem Dialog *Theaetetus* ein sachlich wohl begründetes und in der Form maßvolles und zutreffendes Urteil über die wissenschaftlichen Leistungen Theaetets der Nachwelt überliefert hat. Darnach besaß Theaetetus, als er in der Vollkraft seiner Jahre aus dem Leben schied, auf Grund seiner Forschungsergebnisse den Ruf eines hervorragenden Mathematikers.

3. Aus der Vorgeschichte der Irrationalitätslehre

Von dem Werdegang THEAETETS wissen wir, daß er, etwa 415 v. Chr. in Athen geboren, Schüler des Mathematikers THEODOROS in Kyrene war und nach einem mehrjährigen Aufenthalt in Herakleia am Schwarzen Meer, wo er Mathematik und Astronomie lehrte, etwa 375 v. Chr. in seine Vaterstadt zurückkehrte²⁵. Hier gehörte er der Akademie „als eines jener älteren Mitglieder an, welche vor allem auf dem Gebiete ihrer Wissenschaft neben PLATON eine selbständige Rolle als Lehrer spielten“²⁶. Sein Tod fällt nach den Untersuchungen von E. SACHS²⁷, denen sich auch Herr v. FRITZ u. a. anschließen²⁸, in das Jahr 369 v. Chr.

Die wissenschaftlichen Leistungen THEAETETS liegen auf dem mathematischen Gebiet. Nach allen uns überlieferten Berichten kann es keinem Zweifel unterliegen, daß er wesentliche Beiträge zur Begründung und Ausbildung der Lehre von den irrationalen Größen geliefert und damit zusammenhängend die Konstruktion der fünf regelmäßigen Körper in eine für die damalige Zeit endgültige Form gebracht hat.

Zur Beschäftigung mit irrationalen Größen war THEAETET nach PLATONS Darstellung durch THEODOROS angeregt worden. Dieser hatte seinen Schülern begreiflich gemacht, daß die Seiten der Quadrate mit 3, 5, . . . 17²⁹ Quadratfuß Fläche nicht mit der Einheitsstrecke, d. h. mit der Strecke von ein Fuß Länge, meßbar sein können. PLATON spricht übrigens hier nur von einem ἀνοσιταίειν,

²⁵ K. v. FRITZ, *Theaitetos* 2). In: *Real-Enzykl. d. klass. Altertumsw.* Vn, 1934, Sp. 1351/52. ²⁶ K. v. FRITZ, a. a. O., Sp. 1352, 60–64.

²⁷ E. SACHS, *De Theaeteto Atheniensi mathematico* (Diss.), Berlin 1914, S. 40: *Evicimus-cum intra annos 394 et 369 solos nobis discernendum esset-Theaetetum 369 ad Corinthum cecidisse.* ²⁸ K. v. FRITZ, a. a. O., Sp. 1352, 7.

²⁹ Von den Quadratzahlen 9 und 16 ist abzusehen.

einem „Anschaulichmachen im geistigen Sinne“, aber nicht von einem ἀποδεικνύειν, einem „Beweisen“. Darauf weist bereits E. SACHS mit Nachdruck hin³⁰.

THEAETET äußert nun den zunächst fast trivial anmutenden, für die Folge aber, wie sich zeigen wird, äußerst wichtigen Gedanken, einen zusammenfassenden Begriff aufzusuchen, durch den alle ganzen Zahlen hinsichtlich ihrer Eigenschaft, die Flächengröße von Quadraten anzugeben, in zwei Klassen eingeteilt werden: Diejenigen Zahlen, die ein Produkt aus gleichen ganzen Zahlen darstellen, sollten unter Vergleichung mit der Quadratfigur „Quadratzahlen“ oder „gleichseitige Zahlen“ heißen. Die dazwischenliegenden Zahlen wie 3 und 5 und jede Zahl, die kein Produkt gleicher Faktoren ist, sondern durch Multiplikation einer größeren mit einer kleineren ganzen Zahl entsteht, sollten unter Vergleichung mit der Figur eines Rechtecks, das von einer größeren und einer kleineren Seite gebildet wird, die Bezeichnung „Rechteckzahlen“ oder „ungleichseitige Zahlen“ erhalten.

Nun wird jede Strecke, über der man ein Quadrat mit einer durch eine Quadratzahl ausdrückbaren Fläche errichten kann, „Länge“ (μήκος), diejenige Strecke aber, die zu einem Quadrat mit einer Rechteckzahl für den Flächeninhalt führt, „Quadrat“ (δύναμις) genannt; sie ist nämlich mit jener, d. h. mit der erstgenannten Strecke (Länge) der Länge nach nicht kommensurabel, sondern nur hinsichtlich der Quadrate, die man über ihr und jener Strecke errichten kann. Damit wird das von THEODOROS oben nur für Quadrate mit 3, 5, . . . 17 Quadratfuß Flächeninhalt ausgesprochene Ergebnis auf alle Quadrate erweitert: Seiten von Quadraten, deren Flächeninhalte sich nicht durch (ganze) Quadratzahlen ausdrücken lassen, sind mit der Einheitsstrecke nicht meßbar.

THEAETETS zusätzliche Bemerkung³¹, daß diese Einteilung der Zahlen auch hinsichtlich eines räumlichen Unterscheidungsmerkmals möglich ist, hat den entsprechenden Satz zur Folge: Kanten von Kuben, deren Rauminhalt sich nicht durch eine Kubikzahl ausdrücken läßt, sind nicht mit der Einheitsstrecke meßbar.

Die Folgerung, die THEAETET aus den Feststellungen seines Lehrers THEODOROS über die Quadratseiten $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . $\sqrt{17}$ zog, ist sachlich richtig und widerspruchsfrei. Aber sie ist unvollständig und genügt daher nicht für den Aufbau einer Irrationalitätslehre. Denn

³⁰ E. SACHS, a. a. O., S. 57.

³¹ PLAT. *op. I*, 148b 2: καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλα τοιοῦτον.

wenn z.B. für zwei Quadrate mit den Flächeninhalten a bzw. b bekannt ist, daß sowohl die Seite des ersten Quadrats, $\sqrt{a}$, wie auch die Seite des zweiten Quadrats, $\sqrt{b}$, mit der Einheitsstrecke inkommensurabel ist, so läßt sich daraus noch keine Schlußfolgerung für die Kommensurabilität der Seiten beider Quadrate ziehen. Dies wurde bereits frühzeitig als ein Mangel der Aussage THEAETETS im Dialog festgestellt. Darauf verweist z. B. PAPPOS in seinem Kommentar zum X. Buche der Elemente EUKLIDS, unter Heranziehung der Quadrate mit den Flächeninhalten 8 und 18³². Sowohl die Seite $\sqrt{8}$ wie auch die Seite $\sqrt{18}$ ist nach THEAETET inkommensurabel mit der Einheitsstrecke. Daß die beiden in dieser Hinsicht inkommensurablen Strecken aber eine irrationale Strecke, nämlich $\sqrt{2}$, als gemeinsames Maß besitzen, also zueinander kommensurabel sind, das wußte der THEAETET des Dialogs offenbar nicht. Aber wir dürfen ihm deshalb keinen Vorwurf machen; denn *er konnte es damals gar nicht wissen*. Dies wird sofort klar, wenn wir die spätere Formulierung heranziehen, die sich im Satz X, 9 der Elemente vorfindet und die höchstwahrscheinlich auch von THEAETET, aber aus einer späteren Forschungsperiode herrührt³³. Der Lehrsatz X, 9, der an die Stelle der Aussage des jugendlichen THEAETETS tritt, lautet³⁴:

Die Quadrate über linear kommensurablen Strecken haben zueinander ein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl;

und von Quadraten, die zueinander ein Verhältnis haben wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, müssen auch die Seiten linear kommensurabel sein.

Die Quadrate über linear inkommensurablen Strecken hingegen haben kein Verhältnis zueinander wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl;

³² THOMSON-JUNGE (1930), S. 73f. (§ 10). Vgl. auch Scholion 62 zu Buch X der Elemente, EUCL. El. Bd. 5, S. 452, 1ff.

³³ Vgl. hierzu CL. THAER, *Die Elemente von Euklid*, IV. Leipzig 1936, S. 108, Anm. zu X, 9, insbesondere den Hinweis auf H. HANKEL, *Gesch. d. Math. i. Alt. u. Mittelalt.* 2. Aufl. Hildesheim 1965, S. 103, Anm. 2. Nach HANKELS Meinung gestattet die mathematische Stelle in PLATONS Dialog *Theaetet* nicht die Auslegung, daß dem Pythagoriker THEODOROS das allgemeine Theorem X, 9 unbekannt gewesen sei. Man muß hierbei aber unterscheiden, ob THEODOROS den Satz nur vermutungsweise ausgesprochen oder ob er ihn auch bewiesen hat. Ersteres kann man ihm zugestehen, letzteres aber m. E. nicht, da ihm eine Erklärung der Verhältnisgleichheit für irrationale Größen noch fehlte.

³⁴ CL. THAER, a. a. O., IV, S. 7.

und von Quadraten, die kein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl zueinander haben, können auch die Seiten nicht linear kommensurabel sein³⁵.

Ein Vergleich von X, 9 mit dem Satz des jungen THEAETET zeigt, daß hier wie dort eine Einteilung der Quadratseiten in zwei Klassen vorliegt. Aber der Einteilungsgrund ist in beiden Formulierungen gänzlich verschieden. In der ursprünglichen Fassung nimmt THEAETET die *Einheitsstrecke* zu Hilfe und teilt die Quadratseiten in die mit ihr kommensurablen bzw. inkommensurablen ein. Bei der abgeänderten Fassung dagegen wird vom *Verhältnis* ganzzahliger Quadratinhalte auf die Kommensurabilität der Quadratseiten geschlossen. *Die Verwendung des Verhältnissbegriffes ist der wesentliche Unterschied gegenüber der Aussage des jugendlichen Theaetet.*

Mit der Entdeckung irrationaler Größen um die Mitte des 5. Jahrhunderts v. Chr. hatte ja die alte Proportionslehre, die auf dem Begriff der ganzen Zahl aufgebaut war, ihre allgemeine Gültigkeit verloren. Daher durfte THEODOROS bei seinen Untersuchungen keine Sätze der alten Proportionslehre verwenden. *Er hätte ja sonst die Rationalität derjenigen Strecken voraussetzen müssen, deren Irrationalität er beweisen wollte!* Offenbar hatte man aber zu der Zeit, als die mathematische Szene in PLATONS Dialog spielte, noch keine Erklärung für die Verhältnisgleichheit irrationaler Größen gefunden. Hätte THEODOROS nämlich über eine auch für irrationale Größen gültige Proportionslehre verfügt, so wäre ihm der Nachweis für die Irrationalität von $\sqrt{n}$ (n nicht gleich einer Quadratzahl) wahrscheinlich leichter gefallen, und er hätte nicht bei $\sqrt{17}$ haltgemacht. Aber ohne eine derartige Definition der Verhältnisgleichheit mußte er zu einem umständlichen geometrischen Verfahren greifen, das nach der Vermutung von H. G. ZEUTHEN³⁶ und O. TOEPLITZ³⁷ auf eine Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzeln hinausläuft und bei

³⁵ Aus X, 9 folgt sofort, daß sich die Seiten der Quadrate mit 8 und 18 Quadratfuß Inhalt wie 2:3 verhalten und durch die Diagonale des Einheitsquadrats meßbar sind.

³⁶ H. G. ZEUTHEN (1910), S. 423ff. und *Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles*. In: ODVS, Kopenhagen 1915, S. 346ff.

³⁷ Als Ergebnis aus einem gemeinsamen Kieler math.-geschichtl. Kolloquium veröffentlicht in der Abhandl.: H. HASSE—H. SCHOLZ, *Die Grundlagen der griechischen Mathematik*. In: *Kantstudien* XXXIII, Berlin 1928, S. 28f. Vgl. auch O. BECKER, *Eudoxos-Studien I* (S. Anm. 46), S. 332f., insbesondere S. 333, Anm. 29.

$\sqrt{19}$ schon zu einem Kettenbruch mit sechsstelliger Periode führt³⁸. Wenn aber THEODOROS damals noch nicht über eine geeignete Proportionslehre verfügte, so ist dies auch nicht von seinem Schüler THEAETET anzunehmen. Daher trifft diesen keine Schuld, daß seine Aussage über die Kommensurabilität von Quadratseiten noch unvollkommen war. PLATON hat hier mit feinem psychologischem Gefühl ein Zwischenstadium in der Entwicklung der Irrationalitätslehre herausgegriffen, um die geistige Wendigkeit des THEAETET aufzuzeigen. Und er ist dabei nicht in den Fehler verfallen, seinem Freund, dem doch dieser „Nachruf“ galt, zu viel des Lobes zu spenden, sondern er hat auch hier bei der Gestaltung der Szene „die historische Treue“ gewahrt.

4. Theaetetus als Begründer einer voreudoxischen allgemeinen Proportionslehre

Nun beruht die Irrationalitätslehre des X. Buches der Elemente, das THEAETET zugeschrieben wird, auf der Proportionslehre des EUDOXOS, die von EUKLID als V. Buch in die Elemente eingereiht wurde³⁹. EUDOXOS, der mehr als zwanzig Jahre jünger als THEAETET war, ist aber erst nach dessen Tode nach Athen gekommen. Selbst wenn trotz der räumlichen Trennung ein Gedankenaustausch zwischen THEAETET und EUDOXOS stattgefunden haben sollte, so konnte sich THEAETET bei den Beweisen seiner Theoreme doch unmöglich auf die Proportionslehre des EUDOXOS stützen. Dagegen spricht einmal der Altersunterschied beider Forscher sowie THEAETETS früher Tod, zum andern liegen sichere Anzeigen dafür vor, daß EUDOXOS erst in höherem Alter seine Proportionslehre aufgestellt hat⁴⁰.

Herr v. FRITZ hat die Beziehungen zwischen THEAETET und EUDOXOS eingehend untersucht. Nach seiner Ansicht⁴¹ „wäre es falsch, anzunehmen, daß THEAETET keine wirklichen Beweise für die höhere Irrationalität jener Größen (gemeint sind Mediale, Binomiale und Apotome, von denen weiter unten die Rede sein wird) gegeben, sondern diese etwa nur durch experimentierendes Zu-

³⁸ Das algebraisch-geometrische Verfahren hierfür findet sich bei S. HELLER, *Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog „Theaetetus“*, Kopenhagen 1956. In: *Centaurus* 5, S. 5 ff.

³⁹ EUCL. *El.* Bd. 5, S. 282, 13–20 (Scholion 3 zu Buch V der *El.*).

⁴⁰ K. v. FRITZ (1934), Sp. 1358, 25–28. ⁴¹ A. a. O., Sp. 1358, 28–62.

sammensetzen von irrationalen Längen des ersten Grades gefunden habe. Denn schon das Aufsuchen dieser Größen und das Aufstellen des Satzes, daß sie auch im Quadrat inkommensurabel sind, erfordert eine exakte Betrachtung, wie sie ohne Beweisschema nicht möglich ist. Umgekehrt setzt wiederum die neue Grundlegung der Lehre vom Irrationalen durch EUDOXOS voraus, daß schon reichliches Material vorhanden war, um eine solche neue Grundlegung aufkommen und als notwendig erscheinen zu lassen. Während also zwar sachlich die Sätze des EUDOXOS die Grundlage der Euklidischen Beweise über die μέση usw. bilden, kann man es umgekehrt historisch als Voraussetzung für die Aufstellung der Eudoxischen Sätze betrachten, daß jene Beweise schon vorhanden waren und nur hinsichtlich der begrifflichen und axiomatischen Grundlegung von EUDOXOS ergänzt zu werden brauchten. Wie die Beweise des THEAETET, die also mit den Euklidischen nicht ganz übereingestimmt haben können, da diese nach Eudoxischen Voraussetzungen umgearbeitet sind, konkret ausgesehen haben, wird sich im einzelnen nicht mehr feststellen lassen. Sie brauchen sich aber im formal-mathematischen Beweisschema nicht von jenen unterscheiden zu haben. Auf der anderen Seite ist auch unabhängig davon die historische Stellung des THEAETET in der Entwicklung, die zu diesen Beweisen führt, mit ziemlich großer Genauigkeit bestimmt“.

Herr v. FRITZ sucht auch nach einer Erklärung für diese merkwürdige Sachlage, indem er die Frage aufwirft, wie es mit der Autorschaft des Satzes X, 9 der Elemente steht. Nach seiner Ansicht ist dieser Satz im wesentlichen auf THEAETET zurückzuführen⁴². Wenn man dieser sehr plausibel klingenden These beipflichten will, muß man zuvor bedenken, daß dieser Satz allein nicht ausreicht, um alle Theoreme im X. Buche der Elemente zu begründen. Vielmehr bedarf es dazu einer allgemein gültigen Proportionslehre, wie man aus der Euklidischen Fassung des X. Buches ersieht, die vielfach auf Sätze des V. und VI. Buches zurückgreift. Eine wirklich befriedigende Erklärung läuft daher m. E. auf die Beantwortung der Frage hinaus, ob es bald nach Theodoros und noch, bevor Eudoxos seine Theorie entwarf, bereits eine Proportionslehre gab, die auch irrationale Größen miteinbegriff. Hinweise auf eine solche Lehre finden sich ganz vereinzelt bei ARISTOTELES⁴³ und im ARISTOTELES-Kommentar

⁴² A. a. O., Sp. 1359, 48–50.

⁴³ ARISTOTELES, *Topik*, 8. Buch, 3. Kap., 158b, 29–35, und ARISTOTELES, *Zweite Analytik*, 1. Buch, 5. Kap., 74a, 17–25.

des ALEXANDER VON APHRODISIAS⁴⁴. Die betreffenden Stellen wurden lange Zeit nicht richtig verstanden. Erst H. G. ZEUTHEN⁴⁵ sah darin Spuren einer voreudoxischen Proportionslehre. Auch O. TOEPLITZ äußerte nach 1928 gelegentlich einer Gastvorlesung in Kiel diese Ansicht, ohne noch etwas von ZEUTHENS Deutung dieser Stelle zu wissen. Aber erst durch die eingehenden Untersuchungen O. BECKERS⁴⁶ wurde die bisherige Vermutung zu einer zwingenden Gewißheit.

Die entscheidende Stelle in ALEXANDERS Kommentar lautet⁴⁷: „Es ist aber die Definition der proportionalen (Größen), deren sich die Alten bedienten, folgende: In Proportion stehen Größen zueinander, denen dieselbe „Anthyphairesis“ zukommt. ARISTOTELES aber nannte Anthyphairesis „Antanaireisis“.

ALEXANDER bezieht sich hier auf die Stelle in der Aristotelischen Topik (Θ.3, p. 158b 29–35)⁴⁸: „Es scheint aber auch in der Mathematik Einiges wegen des Fehlens einer Definition nicht leicht zu beweisen zu sein, wie z. B. daß die ein Parallelogramm parallel zur Seite schneidende Gerade die Linie und die Fläche (d. i. die anliegenden Seiten und die Fläche des Parallelogramms) in demselben Verhältnis teilt. Wenn aber die Definition ausgesprochen ist, ist das Gesagte sogleich einleuchtend. Denn dieselbe „Antanaireisis“ haben die Flächen und die Linien. Es ist aber die (erste?) Definition desselben (d. i. des gleichen) Verhältnisses diese (d. i. die soeben angeführte)“.

⁴⁴ ALEXANDER von Aphrodisias, *Aristoteles-Kommentar* (WALLIES-Ausg.), S. 545, 9–17.

⁴⁵ H. G. ZEUTHEN, *Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev national Videnskab*. D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, naturvidensk. og mathem. Aft. 8. Række, I.5, Kopenhagen 1917, S. 108 (306) ff.

⁴⁶ O. BECKER, *Eudoxos-Studien I: Eine voreudoxische Proportionslehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid*. In: *Qu. u. St. B*, II, 4, Berlin 1931, S. 311–333.

⁴⁷ O. BECKER, a. a. O., S. 312. Der griechische Text bei ALEXANDER lautet: *ἔστι δὲ ὁρισμός τῶν ἀναλόγων, ὃ οἱ ἀρχαῖοι ἐχρῶντο, οὗτος· ἀνάλογον ἔχει μετέθῃ πρὸς ἀλλήλα ὧν ἡ αὐτὴ ἀνθυφαίρεσις· αὐτὸς δὲ τὴν ἀνθυφαίρεσιν ἀντανάιρεσιν εἴρηκε.*

⁴⁸ O. BECKER, a. a. O., S. 311. Der griechische Text bei ARISTOTELES lautet: *ἔοικε δὲ καὶ ἐν ταῖς μαθήμασι ἐνιαυτὸν ὁρισμοῦ ἔλλειπιν οὐ ὁρθῶς γράφεσθαι, ὅλον [καὶ] ὅτι ἡ παρὰ τὴν πλεονάζον τέμνουσα τὸ ἐπίπεδον ὁμοίως διατεῖ τὴν τε γραμμὴν καὶ τὸ χωρίον. τοῦ δὲ ὁρισμοῦ ὁρθότητος εὐθέως φανερόν τὸ λεγόμενον. τὴν γὰρ αὐτὴν ἀντανάιρεσιν ἔχει τὰ χωρία καὶ αἱ γραμμαί. ἔστι δ' ὁρισμός τοῦ αὐτοῦ λόγου <πρώτος> οὗτος.*

Nach heutigem Sprachgebrauch besagt die „Definition der Alten“: Zwei (rationale oder auch irrationale) Verhältnisse werden als gleich bezeichnet dann und nur dann, wenn sie dieselbe Kettenbruchentwicklung haben⁴⁹.

O. BECKER wirft nun die Frage auf, ob sich die beiden Definitionen der Verhältnissgleichheit, die eben angeführte der „Alten“ und die Euklidische im V. Buche, Def. 5, den beiden bahnbrechenden Forschern zuschreiben lassen, nämlich die anthyphairetische dem THEAETET und die jüngere des V. Buches der Elemente dem EUDOXOS. Das letztere trifft nach allen Überlieferungen, die wir besitzen, sicherlich zu. Das erstere scheint aus mancherlei Gründen, die O. BECKER im einzelnen anführt, zwar auch sehr wahrscheinlich zu sein. Aber es läßt sich dagegen einwenden, daß im X. Buche doch vielfach auf die Lehrsätze der Eudoxischen Theorie zurückgegriffen werde. Das ältere X. Buch des THEAETET wäre also von dem jüngeren V. Buche des EUDOXOS abhängig, was aber (wegen des Altersunterschiedes beider Forscher) doch nicht sein könne.

Diesen Einwand widerlegt nun O. BECKER, indem er eine auf der anthyphairetischen Definition der Verhältnissgleichheit begründete Proportionslehre entwickelt und nachweist, daß sich mit ihrer Hilfe alle Beweise des X. Buches streng durchführen lassen. Zugleich zeigt er aber auch die Begrenztheit dieser nach seiner Überzeugung von THEAETET⁵⁰ herrührenden Theorie auf. EUDOXOS gelang es dann, mittels einer Neufassung der Definition der Verhältnissgleichheit über die ältere Proportionslehre des THEAETET hinauszugehen.

Unerheblich sind allenfallsige Bedenken, daß keine Berichte über die Urheberschaft THEAETETS betreffs der anthyphairetischen Theorie vorliegen. THEAETET mußte diese Hilfstheorie aus dem einfachen Grunde aufbauen, weil er sie für seine Irrationalitätslehre notwendig brauchte. Sie entstand wahrscheinlich während seines Aufenthaltes in Herakleia am Schwarzen Meere, fernab von allen Fachgenossen. THEAETET hat sie dann seinem Hauptwerk eingegliedert, so daß von ihr als einem Bestandteil dieses Werkes keine besondere Erwähnung zu erwarten ist. Später wurde das Kapitel mit der älteren Proportionslehre (wahrscheinlich von EUKLID) aus dem THEAETETSchen Werk herausgelöst und dafür die Eudoxische Proportionslehre als V. Buch in die Elemente eingefügt.

Durch die Untersuchungen von O. Becker in seinen *Eudoxos-Studien I* „Eine voreudoxische Proportionslehre und ihre Spuren

⁴⁹ O. BECKER, a. a. O., S. 313. ⁵⁰ O. BECKER, a. a. O., S. 215 und 226.

bei Aristoteles und Euklid“ ist der sichere Nachweis erbracht, daß wir Theaetet nicht nur als den Schöpfer der Irrationalitätslehre, sondern auch als den Vorläufer des Eudoxos bei der Begründung einer allgemein gültigen Proportionslehre ansehen dürfen.

Dieser Zusammenhang der Forschungsarbeiten von THEAETET und EUDOXOS bei der Bewältigung des Irrationalen deckt sich auch mit den Nachrichten, die uns PROKLOS DIADOCHOS aus der Mathematikgeschichte des EUDEMOS überliefert hat. Dreimal wird hier THEAETET genannt, davon zweimal in Verbindung mit EUDOXOS. Zuerst hören wir von THEAETET als dem Zeitgenossen des LEODAMAS von Thasos und des ARCHYTAS von Tarent; von diesen drei „wurden die Lehrsätze vermehrt und in ein wissenschaftlichen Anforderungen entsprechendes System gebracht“⁶¹.

Dann wird HERMOTIMOS von Kolophon erwähnt⁶², der „die Ergebnisse des EUDOXOS und des THEAETET weiter entwickelt und einen beträchtlichen Beitrag zu den Elementen geleistet hat“. So weit benutzt PROKLOS den EUDEMOS als Gewährsmann für seinen Bericht. Er fährt dann fort⁶³: „Nicht viel jünger als diese ist EUKLID, der die Elemente zusammenstellte, viele Ergebnisse des EUDOXOS zusammen faßte, viele des THEAETET zum Abschluß brachte“.

Eine sehr aufschlußreiche Ergänzung zu diesem Bericht des PROKLOS bietet der Kommentar des PAPPOS von Alexandria zum X. Buche der Elemente EUKLIDS. Hier heißt es⁶⁴: „Diese Theorie

⁶¹ PROKLOS Diadochos (s. Anm. 3), griech. ed. FRIEDLEIN, S. 66, deutsch von SCHÖNBERGER, S. 212.

⁶² PROKLOS Diadochos, a. a. O., griech. S. 67, 20, deutsch S. 213.

⁶³ PROKLOS Diadochos, a. a. O., griech. S. 68, 7, deutsch S. 213.

⁶⁴ THOMSON-JUNGE (1930), S. 63 (§ 1): *This science (or knowledge) had its origin in the sect (or school) of Pythagoras, but underwent an important development at the hands of the Athenian, Theaetetus, who had a natural aptitude for this as for other branches of mathematics most worthy of admiration. One of the most happily endowed of men, he patiently pursued the investigation of the truth contained in these [branches of] science (or knowledge), as Plato bears witness for him in the book which he called after him, and was in my opinion the chief means of establishing exact distinctions and irrefragable proofs with respect to the above-mentioned quantities. For although later the great Apollonius whose genius for mathematics was of the highest possible order, added some remarkable species of these after much laborious application, it was nevertheless Theaetetus who distinguished the powers (i. e. the squares) which are commensurable in length, from those which are incommensurable (i. e. in length), and who divided the more generally known irrational lines according to the different means, assigning the medial line to geometry, the binomial to arithmetic, and the apotome to harmony, as is stated by Eudemus, the Peripatetic.*

(d. h. der rationalen und irrationalen Größen) nahm ihren Anfang in der Pythagoreischen Schule, erfuhr dann eine wichtige Entwicklung in den Händen von THEAETET, dem Athener, der für diesen und andere Zweige der mathematischen Wissenschaft eine natürliche Fähigkeit besaß, welche die größte Bewunderung verdient. Als ein ganz hervorragend veranlagter Mensch bemühte er sich unablässig um die Erforschung der Wahrheit, die in diesen Zweigen der Wissenschaft enthalten ist, wie PLATON dies von ihm in dem nach ihm benannten Dialog bezeugt. Nach meiner Ansicht hat er dabei durch seine Einführung genauer Unterscheidungen und unumstößlicher Beweise hinsichtlich der oben genannten (rationalen und irrationalen) Größen die Hauptarbeit geleistet. Denn wenn auch später der große APOLLONIUS, der im höchsten Grade für Mathematik veranlagt war, nach sehr mühevoller Arbeit einige bemerkenswerte Arten zu diesen (Definitionen und Beweisen) hinzufügte, so war es nichtsdestoweniger THEAETET, der die sog. Potenzen (Quadrate), welche der Länge nach kommensurabel sind, von den der Länge nach inkommensurablen unterschied und der die allgemein bekannten Irrationallinien entsprechend den verschiedenen „Mitteln“ einteilte, indem er die Mediale dem geometrischen, die Binomiale dem arithmetischen und die Apotome dem harmonischen Mittel zuwies, wie dies von EUDEMOS, dem Peripatetiker, festgestellt ist“.

Bemerkung: Aus der Seite und Diagonale des Einheitsquadrats erhält man z. B. als geometrisches Mittel die Mediale $\sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt[4]{2}$, als arithmetisches Mittel die Binomiale $\frac{\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$, als harmonisches Mittel die Apotome $\frac{2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{2} + 1} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 4 - 2\sqrt{2}$.

Legt man eine Ausgangsstrecke, hier etwa die Quadratseite 1, als rationale Strecke zu Grunde, so sind offenbar diese drei Mittel auch quadriert nicht kommensurabel mit der „Rationalen“.

5. Ein „Hauptstück“ der Theaetetschen Irrationalitätslehre

Das X. Buch, mit seinen 115 Paragraphen, das umfangreichste der Elemente EUKLIDS, enthält die von THEAETET begründete Theorie der einfachen und doppelten quadratischen Irrationalitäten, die zur Berechnung und Konstruktion regelmäßiger Vielecke und Vielfache erforderlich sind. Da den Griechen eine mathematische Symbolsprache fehlte, waren sie genötigt, die verwickelten alge-

braischen Operationen durch Worte wiederzugeben, was das rasche Eindringen in den Inhalt und den Überblick über die ganze Irrationalitätslehre ungemein erschwert. Das Buch ist andererseits aber so sorgfältig und unter Berücksichtigung aller möglichen Arten von irrationalen Strecken verfaßt, daß es von Sachkennern, wie TH. L. HEATH⁵⁵ und Herrn B. L. v. D. WAERDEN⁵⁶, als ein ganz besonders gelungenes Werk bezeichnet wird.

Die Begriffe der Kommensurabilität und Rationalität werden im X. Buche bei allgemeinen Größen und bei Flächen im üblichen Sinne gebraucht, nicht jedoch bei Strecken. Hier wird neben den der Länge nach kommensurablen bzw. inkommensurablen Strecken eine neue Art, nämlich die quadriert kommensurablen bzw. inkommensurablen Strecken definiert. Zur Definition rationaler bzw. irrationaler Strecken nimmt THEAETET eine vorgelegte rationale Strecke zu Hilfe und bezeichnet die mit ihr, sei es linear und quadriert, sei es nur quadriert, kommensurablen Strecken als *rationale* (ῥητός), die mit ihr inkommensurablen als *irrationale* (ἄλογος).

Als *Mediale* (X, 21) definiert THEAETET diejenige Strecke, welche quadriert gleich dem Rechteck aus nur quadriert kommensurablen rationalen Strecken ist: $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})$.

Als *Binomiale* (X, 36) wird die Summe, als *Apotome* (X, 73) die Differenz zweier nur quadriert kommensurablen rationalen Strecken bezeichnet: $(a \pm \sqrt{b})$.

Die folgende Zusammenstellung gibt eine Übersicht über die verschiedenen im X. Buche verwendeten Strecken.

(vorgegebene) Rationale (Strecke) —			
ἡ προτεθείσα εὐθεία ῥητή			
Strecken εὐθεῖαι			
rational ῥηταί		irrational ἄλογοι	
lin. u. quadr. komm. μήκει σύμμετροι		quadr. inkommensurabel ἀσύμμετροι	
nur quadr. komm. δυνάμει σύμμετροι			
		Mediale μέσαι	Binomiale ἐκ δύο ὀνομάτων
			Apotome ἀποτομή

⁵⁵ TH. L. HEATH, *A manual of Greek mathematics*. New York [1931], S. 241: *Book X is perhaps the most remarkable, as it is certainly the most finished, of all the Books in the Elements.*

⁵⁶ B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*. Basel 1956, S. 271 ff.

Bei den Binomialen und Apotomen wird noch unterschieden, ob das größere bzw. kleinere Glied linear oder nur quadriert kommensurabel mit der Rationalen ist. Dies gibt die Möglichkeiten $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm b$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$.

Ein weiterer Einteilungsgrund folgt aus der Feststellung, ob die größere Strecke quadriert um das Quadrat einer mit ihr linear kommensurablen Strecke die kleinere Strecke quadriert übertrifft oder nicht.

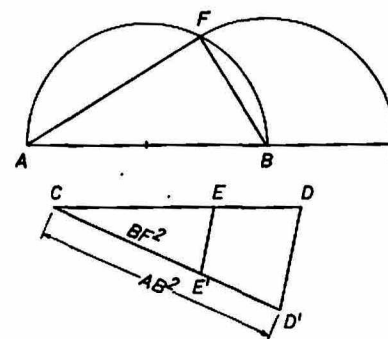
Der Existenzbeweis für die verschiedenen Arten irrationaler Strecken wird durch ihre Konstruktion erbracht. Als Beispiel diene die Aufgabe X, 29⁵⁷: Zwei nur quadriert kommensurable rationale Strecken zu finden, daß quadriert die größere um das Quadrat einer mit ihr linear kommensurablen Strecke die kleinere übertrifft.

Ausführung (stark gekürzt wiedergegeben): Zu Grunde gelegt werden die Rationale AB und die beiden Quadratzahlen CD und DE, deren Unterschied CE keine Quadratzahl ist (Fig. 1).

Mittels der Sätze VI, 2 und V, 17 konstruiert man BF so, daß $BF^2 : AB^2 = CE : CD$ ist.

BF wird im Halbkreis über AB als Sehne eingetragen und AF gezogen.

Fig. 1



Weil BF^2 der Strecke CE entspricht, die keine Quadratzahl ist, so ist BF nur quadriert mit AB kommensurabel. Da zudem AB die Rationale ist, so ist BF auch rational.

⁵⁷ CL. THAER (1936), IV, S. 22f.

Weil im rechtwinklichen Dreieck ABF die Kathete AF der Strecke ED entspricht, die Quadratzahl ist, so ist AF kommensurabel mit AB, also auch rational.

AB und BF sind die gesuchten Strecken. Wird AB um BF bis G verlängert, so wird AG als „Erste Binomiale“ bezeichnet (X, 47, def. 1).

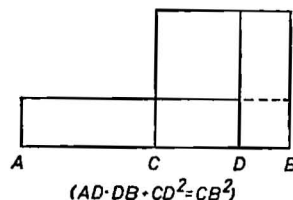
Zu bemerken ist hierbei, daß zur Durchführung dieser Konstruktion mehrere Lehrsätze der Proportionslehre des V. und VI. Buches der Elemente benötigt werden.

Die Hauptaufgabe, die im X. Buche gelöst wird, ist folgende: Wenn man das Rechteck aus der Rationalen und einer der irrationalen Strecken bildet, soll die einfachste Form derjenigen Strecke gefunden werden, die quadriert gleich diesem Rechteck ist, oder nach heutigem Sprachgebrauch: Aus den Binomialen und Apotomen soll die Quadratwurzel gezogen und auf die einfachste Form gebracht werden. Dies erfordert die Lösung der Aufgabe, die Quadratwurzel aus einem irrationalen Binom wieder in der Form eines Binoms darzustellen. In welcher eleganter Weise THEAETET diese Aufgaben mit den Hilfsmitteln seiner Zeit löste, soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Der Satz X, 54 lautet: Wird eine Fläche von der Rationalen und einer Ersten Binomialen umfaßt, dann ist die Strecke, die quadriert die Fläche ergibt, eine Irrationale, wie man sie Binomiale nennt⁵⁸.

Es ist also nicht nur die Länge der Quadratseite zu bestimmen, was ja leicht mittels EUKLID, El. II, 14, durchzuführen wäre. Vielmehr muß auch der Teilungspunkt gefunden werden, durch den die Quadratseite in zwei Glieder zerfällt, von denen wenigstens eins nicht mit der Rationalen linear kommensurabel ist. THEAETET zerlegt zu diesem Zweck das Rechteck in vier Teilrechtecke und verwandelt jedes einzelne in ein flächengleiches Quadrat bzw. Rechteck derart, daß sich aus ihnen ein Quadrat zusammensetzen läßt.

Fig. 2

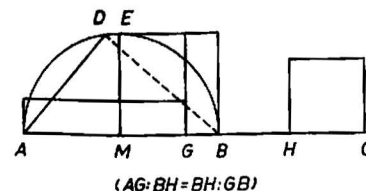


⁵⁸ CL. THAER, a. a. O., IV, S. 41 f.

Es wird auf den Satz II, 5 (Fig. 2) zurückgegriffen: Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten (der ganzen Strecke) zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten gleich dem Quadrat über der halben Strecke⁵⁹:

$$AD \cdot DB + CD^2 = CB^2.$$

Fig. 3



Die Erste Binomiale AC zerfalle (Fig. 3) im Punkte B in die größere mit der Rationalen linear kommensurable Strecke AB = a und die kleinere linear inkommensurable Strecke BC = b, und es sei

$$AB^2 - BC^2 = a^2 - b^2 = \square.$$

In den Halbkreis über AB wird BC als Sehne BD eingetragen; dann ist AD = $\sqrt{a^2 - b^2}$ eine linear kommensurable Strecke. Ich

ziehe den Radius ME senkrecht zu AB, mache $MG = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 - b^2}$

und vervollständige die Figur. Dann ist $AG \cdot GB + MG^2 = MB^2$ oder $AG \cdot GB = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2 - b^2}{4} = \left(\frac{b}{2}\right)^2$,

wodurch der Teilpunkt G eindeutig bestimmt ist.

Halbiert man noch BC in H, so ist schließlich

$$AG \cdot BH = BH \cdot GB.$$

Nun werde das Rechteck aus der Rationalen AA' und der Binomialen AC mit den Teilpunkten G, B und H hergestellt, und durch diese Teilpunkte werden die Parallelen zu AA' gezogen (Fig. 4).

Das Rechteck aus $AG = \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}$ und der Rationalen AA' = 1 wird in das Quadrat mit der Seite $MN = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}$ verwandelt (Fig. 5).

Aus dem Rechteck mit der Seite $GB = \frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}$ erhält man

das Quadrat mit der Seite $NT = \sqrt{\frac{a}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - b^2}}$.

⁵⁹ CL. THAER, a. a. O., I, S. 36 f.

Fig. 4

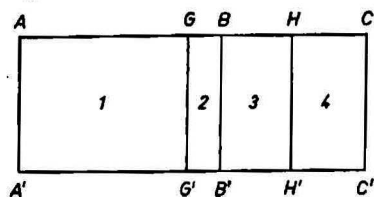
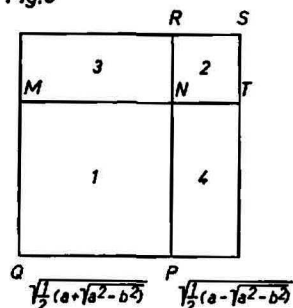


Fig. 5



Beide Quadrate werden, mit der Ecke N zusammenhängend, so hingelegt, daß die Quadratseiten sich paarweise geradlinig fortsetzen; die Figur werde zum vollen Quadrat ergänzt.

Nun folgt aus der Streckenproportion $AG: BH = BH: GB$ die Flächenproportion $AG': BH' = BH': GB'$. Also ist Rechteck BH' mittlere Proportionale zwischen den Rechtecken AG' und GB' , folglich auch mittlere Proportionale zwischen den ihnen flächengleichen Quadraten QN und NS . Zwischen diesen Quadraten ist aber auch Rechteck MR bzw. PT mittlere Proportionale; also ist $MR = BH'$ und $PT = HC'$. Somit ist das Rechteck $AC' = (a + b) \cdot 1$ flächengleich mit dem

$$\text{Quadrat } QS = \left(\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b^2})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b^2})} \right)^2; \text{ d. h.}$$

$$\sqrt{a + b} = \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b^2})} + \sqrt{\frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b^2})}.$$

Es läßt sich schließlich zeigen, daß MN und NT nur quadriert kommensurable Strecken sind. Also ist MT eine Binomiale⁶⁰.

$$\text{Beispiel: } \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{1}{2}(6 + 4)} + \sqrt{\frac{1}{2}(6 - 4)} = \sqrt{5} + 1.$$

Alle Arten irrationaler Strecken werden in dieser Weise untersucht und außerdem wird der Nachweis erbracht, daß alle Binomialen nur in einem Punkte in zwei nur quadriert kommensurable rationale Strecken zerfallen (X, 42–47) und alle Apotomen nur auf eine Weise sich als Differenz zweier nur quadriert kommensurablen rationalen Strecken darstellen lassen. (X, 79–84).

⁶⁰ In X, 54 wird der Teilungspunkt G mittels X, 17 bestimmt; X, 17 wird auf II, 5 zurückgeführt. Der Beweis ist hier stark verkürzt wiedergegeben.

Die eine Quadratwurzel darstellenden Strecken werden im allgemeinen nach der Art ihrer Zusammensetzung benannt. $\sqrt{\sqrt{a} + b}$ ($\sqrt{a - b^2}$ linear kommensurabel mit $\sqrt{a}$) z. B. wird Binomiale genannt, weil diese Strecke in zwei Mediale zerfällt. Beispiel: $\sqrt{\sqrt{12} + 3}$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{4}} + \sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Auffälligerweise wird die zur Vierten Binomiale gehörige Quadratseite *Major* genannt (X, 57) und entsprechend die zur Vierten Apotome gehörige Quadratseite *Minor* (X, 94). Da die Minor bei der Berechnung der Seite des regelmäßigen Fünfecks (XIII, 11: $s_5 = \frac{r}{2}\sqrt{2(5-\sqrt{5})}$) und der Ikosaederkante (XIII, 16: $k_{20} = \frac{r}{5}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}$) auftritt, sind vermutlich die Minor und ihr Gegenstück, die Major, zuerst von THEAETET untersucht worden, weil er die Minor zur Berechnung der regelmäßigen Vielfache benötigte⁶¹. Die Systematik der Irrationalen ist nach THEAETETS frühem Tode von HERMOTIMOS und EUKLID vervollständigt worden, wobei auch mit der Ersetzung der THEAETETISCHEN durch die EUDOXISCHE Proportionslehre das X. Buch seine endgültige Form erhielt.

6. Theaetets Konstruktion der fünf Platonischen Körper

Eine weitere bedeutende Leistung THEAETETS ist die zusammenfassende Darstellung der Konstruktion der fünf regulären Körper, die den Inhalt des XIII. Buches der Elemente ausmacht. Die Nachrichten darüber widersprechen sich zwar zum Teil; was ihnen aber als Wahrheitsgehalt zu Grunde liegt, läßt sich doch mit einiger Wahrscheinlichkeit ermitteln, wenn man das XIII. Buch mit Buch II und IV einerseits und mit Buch X andererseits vergleicht⁶² und außerdem bedenkt, daß es ein weiter Weg war von der ersten Konzeption regelmäßiger Figuren und Körper über ihre nur bildhafte bzw. körperliche Darstellung bis zur geometrisch begründeten Konstruktion und Berechnung ihrer Seiten und Kanten.

In einem Scholion zum XIII. Buche der Elemente⁶³ wird mitgeteilt, daß die fünf sog. Platonischen Körper nicht von PLATON stammten; vielmehr stammten drei derselben, nämlich Würfel, Pyramide und Dodekaeder, von den Pythagoreern (*Πυθαγορεί-*

⁶¹ THOMSON-JUNGE (1930), S. 25.

⁶² B. L. VAN DER WAERDEN (1956), S. 282 ff. ⁶³ EUCL. EL., Bd. 5, S. 654, 1–10.

ων ἐστίν), das Oktaeder und das Ikosaeder aber von THEAETET (Θεαίτητον ἐστίν). Dagegen lesen wir bei SUIDAS⁶⁴, daß THEAETET als erster die sog. fünf Körper gezeichnet (konstruiert) habe (πρῶτος δὲ τὰ πέντε καλούμενα στερεὰ ἔγραψε).

Wollte man beim Scholion an eine Konstruktion der regulären Körper denken, so wäre es doch sehr merkwürdig, daß die Pythagoreer bereits die schwierige Konstruktion des Dodekaeders, aber nicht die ganz einfache des Oktaeders gekannt hätten. Wahrscheinlich hat der Scholiast bei seinem Bericht nur an die aus der Erfahrung gewonnene Kenntnis der Form des Dodekaeders gedacht. Dafür spricht die Tatsache⁶⁵, daß der Pyrit (Schwefelkies) hemiedrische Kristallformen bildet, die mit dem im mathematischen Sinne regulären Dodekaeder zwar nicht identisch, ihm aber doch sehr ähnlich sind. Gut ausgebildete Pyritkristalle finden sich vor allem auf der Insel Elba und in Norditalien; sie haben, wie Funde bezeugen, etwa 500 v. Chr. Veranlassung zur Nachbildung des Dodekaeders in Speckstein gegeben. Vermutlich hat auch HIPPOSOS aus Metapont, dessen Name IAMBLICHOS⁶⁶ mit dem Dodekaeder in Verbindung bringt, vom Pyritkristall her die Anregung zur Beschäftigung mit dem Dodekaeder erhalten (um 450 v. Chr.). Dadurch könnten HIPPOSOS und seine Schüler, die sog. „Mathematiker“, zur Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks und zur Entdeckung der Inkommensurabilität seiner Seite und Diagonale geführt worden sein.

Aber damit ist noch nicht die Frage beantwortet, wieso unter den zuerst entdeckten regulären Körpern nicht das Oktaeder genannt wird. Der Grund könnte vielleicht der gewesen sein, daß man anfangs die Frage nach den regelmäßigen Vielecken stellte, aus denen sich reguläre Polyeder herstellen lassen. Nach der Erkenntnis, daß dafür nur das gleichseitige Dreieck, das Quadrat und das regelmäßige Fünfeck in Frage kämen, begnügte man sich zunächst mit der (vielleicht modellmäßigen) Herstellung der entsprechenden Polyeder aus einer Mindestzahl der gefundenen Flächen. Dies führte zur Feststellung, daß es entsprechend den drei möglichen erzeugenden Vielecken auch drei verschiedene typische reguläre Polyeder gebe, nämlich die Pyramide, den Würfel und das Dodekaeder.

Die Oktaederform, von der sich in der Natur Kristalle aus Bleiglanz, Kupfer, Silber und Gold vorfinden, wird bald darnach die

⁶⁴ SUIDAS (1852), unter Θεαίτητος.

⁶⁵ E. SACHS, *Die fünf Platonischen Körper*, Berlin 1917, S. 84f.

⁶⁶ *Iamblich de vita Pythagorica liber*, ed L. DEUBNER, Leipzig 1937, S. 52. 3-5.

Aufmerksamkeit der Geometer auf sich gezogen haben. Schwieriger war die Auffindung des Ikosaeders, weil — nach meiner Kenntnis — Kristalle dieser Form in der Natur nicht vorkommen. Diesen Körper wird man wohl erst entdeckt haben, als man nach der Anzahl der überhaupt möglichen Arten regulärer Körper fragte. Die Antwort gibt der Satz XIII, 18 der Elemente (Außer den genannten fünf Körpern gibt es kein weiteres reguläres Polyeder), der nach den Untersuchungen von E. SACHS⁶⁷, E. J. DIJKSTERHUIS⁶⁸, Herrn v. FRITZ⁶⁹ u. a. unzweifelhaft THEAETET zuzuschreiben ist. Beim Beweis dieses Satzes findet sich erstmals die Feststellung, daß sich aus vier gleichseitigen Dreiecken die körperliche Ecke des Oktaeders⁷⁰ und aus fünf gleichseitigen Dreiecken die körperliche Ecke des Ikosaeders bilden lasse⁷¹. Das oben genannte Scholion zum XIII. Buche entspricht also den Tatsachen; denn es besagt nur etwas über das erstmalige Auftreten der regulären Körper, aber nichts über ihre Konstruktion, von der SUIDAS berichtet.

7. Zusammenfassung

Das Verdienst THEAETETS liegt vornehmlich in der Begründung und Durchführung der Lehre von den irrationalen Größen und in der damit eng zusammenhängenden Behandlung der regelmäßigen Körper. Darüber sind sich alle Mathematikhistoriker⁷² einig bis auf

⁶⁷ E. SACHS (1914), S. 112.

⁶⁸ E. J. DIJKSTERHUIS, *De Elementen* Bd. 1. Groningen 1929, S. 60.

⁶⁹ K. v. FRITZ (1934), Sp. 1365, 61–62. ⁷⁰ EUCL. *El.*, Bd. 4, S. 336, 21.

⁷¹ EUCL. *El.* Bd. 4, S. 336, 22.

⁷² Außer der bereits genannten werde noch auf folgende Literatur zu THEAETET hingewiesen:

O. BECKER—J. E. HOFMANN, *Gesch. der Mathematik*. Bonn 1951, S. 66 und 69.

O. BECKER, *Das mathematische Denken der Antike*. Göttingen, 1957, S. 16 u. 18.

O. BECKER, *Größe und Grenze der mathematischen Denkweise*. Freiburg/München 1959, S. 77.

O. BECKER, *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*. Darmstadt 1965, S. XVII.

H. HASSE, *Proben mathematischer Forschung*. Frankfurt/Pinneberg 1955, S. 37ff.

G. HAUSER, *Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid*. Luzern 1955, S. 138ff.

I. L. HEIBERG, *Geschichte der Mathematik und Naturw. im Altertum*. München 1925, S. 8 und 19.

J. E. HOFMANN, *Geschichte der Mathematik* I. 2. Aufl. Berlin 1963, S. 41f.

FR. LASSERRE, *The birth of Mathematics in the Age of Plato*. London 1964, S. 17 und 65.

P. LORENZEN, *Die Entstehung der exakten Wissenschaften*. Berlin/Göttingen/Heidelberg [1960], S. 82.

Herrn K. REIDEMEISTER⁷³, der „sich nicht des Verdachts erwehren kann, daß Theaetet der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den Theaetet des Platonischen Dialogs kristallisiert hat“.

Auf die Einwendungen und Bedenken, namentlich von Altphilologen, zu den ältesten Nachrichten über die bahnbrechenden Leistungen THEAETETS soll hier nicht eingegangen werden. Das Wesentliche darüber findet man bei E. SACHS⁷⁴, und Herrn v. FRITZ⁷⁵ eingehend dargestellt. Hier und da auftauchende Zweifel, ob eine bestimmte Einzelleistung wirklich THEAETET gehört, können an dem Gesamtbild, das wir von seinem Wirken gewonnen haben, nichts ändern.

THEAETET und EUDOXOS werden in der Geschichte der altgriechischen Mathematik oft zusammen genannt und „als die beiden größten Mathematiker der Zeit PLATONS“ bezeichnet⁷⁶. Ihre Arbeiten ergänzen einander, und ihnen gebührt nach dem Urteil namhafter Mathematikhistoriker das Verdienst, der griechischen Mathematik nach der Grundlagenkrise, in die sie durch die Entdeckung des Irrationalen gestürzt war, wieder eine sichere Grundlage gegeben zu haben. Bei der Beurteilung dieser Sachlage konnte aber früher vielfach noch nicht die aufschlußreiche Arbeit O. BECKERS (1933) über eine *Voreudoxische Proportionenlehre* berücksichtigt werden. Auf Grund deren Ergebnisse kann man THEAETET als den Initiator, EUDOXOS aber als den Vollender der neueren griechischen Mathematik zu PLATONS Zeit bezeichnen.

Selbst wenn philologische Akribie aus dem gewaltigen Lebenswerk THEAETETS einige kleine Stückchen herausbräche, so würde dies doch nichts an der Tatsache ändern, daß Theaetet neben Eudoxos als einer der größten Mathematiker längst in die Geschichte der Mathematik eingegangen ist.

P.-H. MICHEL, *De Pythagore à Euclide*. Paris 1950, S. 278–281, bes. S. 279 und 280.

E. STAMATIS, *Euklids Elemente*, Bd. 3. Athen 1956, S. 15.

Á. SZABÓ, *Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik*. In: *Osiris* 14 (1962), S. 316.

O. TOEPLITZ, *Mathematik und Antike*. In: *Die Antike*, 1, 1925, S. 201.

O. TOEPLITZ, *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*. Berlin 1949, S. 6.

H. WIELEITNER, *Geschichte der Mathematik I*. Berlin/Leipzig 1922, S. 13 u. 19.

⁷³ K. REIDEMEISTER, *Die Arithmetik der Griechen*. Leipzig/Berlin 1940, (Hamburger Math. Einzelschr. 26), S. 13. ⁷⁴ E. SACHS (1914) und (1917).

⁷⁵ K. v. FRITZ (1934). ⁷⁶ B. L. VAN DER WAERDEN (1956), S. 271.

Anschrift des Verfassers:

Oberschulrat i. R. Dr. Siegfried Heller, 238 Schleswig, Chemnitzstraße 72