

36-16

BECKER, O.

1936

Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente.

(Versuch einer Wiederherstellung in der ursprünglichen Gestalt).

Von Oskar Becker (Bonn).

(Eingegangen 8. Juni 1936.)

1.

Am Ende des IX. Buchs der euklidischen Elemente steht eine Reihe von Sätzen (21—34), die von den geraden und ungeraden Zahlen handeln. Die Definitionen 6—11 am Anfang des VII. Buchs, die sich auf diese Dinge beziehen, d. h. die der Begriffe ἄριστος, περισσός, ἀρτιάκις, περισσάκις, [περισσάκις ἄριστος], περισσάκις περισσός ἀριθμός, werden entweder gar nicht (wie die beiden letzten) oder lediglich in den Sätzen IX, 21—34 verwendet (mit einer sogleich noch zu besprechenden Ausnahme). Der Inhalt der Sätze ist im Verhältnis zu den weit vordringenden und und sorgfältig durchgearbeiteten zahlentheoretischen Gedanken der vorangehenden Abschnitte der arithmetischen Bücher VII, VIII, IX außerordentlich elementar, um nicht zu sagen trivial, und bietet ihnen gegenüber im Grunde gar nichts Neues. Vom Gesichtspunkt des modernen Lesers aus betrachtet, ist es unerklärlich, wieso diese äußerst einfachen Dinge am Schluß einer hochentwickelten Theorie auftreten.

Man muß sich aber erinnern, daß nach den Forschungen W. Jaegers¹⁾ am Ende eines „Buchs“ eines antiken Schriftstellers häufig Nachträge stehen, die aus technischen Gründen dort am Rollenende am bequemsten Platz fanden. Solche Fälle gibt es in den metaphysischen Pragmatien des Aristoteles und auch sonst. Ja in den Elementen selbst findet sich ein weiteres Beispiel in dem letzten (nach der Baseler Ausgabe von 1533 dem 118., nach der Oxforder Edition von 1703 dem 119.) Satz des X. Buchs über die Inkommensurabilität von Quadratdiagonale und -seite. Die modernen Herausgeber (so schon E. F. August 1829 und später Heiberg) haben mit dem Satz nichts anzufangen gewußt und ihn daher aus dem Text entfernt, ein

¹⁾ S. „Studien zur Entstehungsgeschichte der Metaphysik des Aristoteles“, Berlin 1912; S. 38 ff.

Verfahren, das nur dann berechtigt ist, wenn hinzugefügt wird, daß es sich hier um sehr altes, bei weitem voreuklidisches Gut handelt, das vielleicht von Euklid selbst, mindestens aber von seinen ältesten Herausgebern der Aufbewahrung am Ende der Rolle aus Pietätsgründen für würdig befunden wurde.

Nun ist es sehr merkwürdig, daß in dem Beweis des genannten Satzes sich die einzige Stelle der Elemente findet, an der die Lehre vom Geraden und Ungeraden, nämlich Satz IX, 23, benutzt ist.

Noch wichtiger erscheint aber die eigentümliche Stellung der Satzfolge IX, 21–34 in ihrer unmittelbaren Umgebung. IX, 20 ist der Satz von der Existenz unendlich vieler Primzahlen, der in der antiken Arithmetik ganz isoliert dasteht. Auch er ist also wohl ein Nachtrag; mit dem Vorhergehenden hängt er innerlich nicht zusammen. Auf unsere Folge IX, 21–34 aber folgen noch IX, 35–36, der Satz über die vollkommenen Zahlen (36) nebst vorangehendem Hilfssatz (35). Er gibt eine hinreichende Bedingung für die Existenz der τέλει ἀριθμοί an und eine Konstruktionsvorschrift, die allerdings noch von dem Erfülltsein einer gewissen Primzahlbedingung abhängt. Auch dieser bis heute noch grundlegende Satz über die vollkommenen Zahlen ist ganz isoliert und steht mit der Zahlentheorie der vorangehenden Bücher VII, 1–IX, 19 in keinem inneren Zusammenhang. Umsomehr scheint Euklid versucht zu haben, ihn wenigstens in eine äußerliche Verbindung zu bringen, dadurch, daß er in seinem Beweis reichlich Sätze aus den arithmetischen Büchern zitiert. Dagegen werden die unmittelbar vorangehenden Sätze IX, 21–34 zum Beweis von 36 überhaupt nicht herangezogen!

Da drängt sich nun die Frage auf, ob hier nicht eine Verdunkelung des ursprünglichen Gedankenaufbaus stattgefunden hat. Die Sätze IX, 21–34 haben kein Ziel und auch sehr wenig Interesse an sich selbst. IX, 36 seinerseits steht unverbunden am Ende: sollte da nicht ursprünglich der Satz von den vollkommenen Zahlen das Ziel und Ende der „Lehre vom Geraden und Ungeraden“ gebildet haben?

Im folgenden soll nun eine Rekonstruktion des ursprünglichen Zusammenhangs der Sätze IX, 21–36 versucht werden mit der ferneren Absicht, ein Stück stilistisch sehr alter griechischer Mathematik wieder ans Licht zu ziehen.

2.

Über die Methode einer solchen Wiederherstellung ist kurz folgendes zu sagen: An mancherlei Stellen der Elemente läßt sich beobachten, daß zu den Beweisen viel allgemeinere und weittragendere Sätze benutzt werden als notwendig ist; Sinn für Spar-

samkeit der Beweismittel fehlt. Ein Beispiel aus den arithmetischen Büchern ist etwa VIII, 24, zu dessen Beweis VII, 18 (ein Satz über $\delta\mu\omega\iota\sigma\tau\epsilon\varsigma \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omega\iota$) verwandt wird, wo doch der einfachere Satz VIII, 11 (über die allein in VIII, 24 eine Rolle spielenden Quadratzahlen) genügen würde. Will man nun die ursprüngliche Form eines später in die systematische Gesamtdarstellung Euklids einbezogenen Satzgefüges wiederherstellen, so muß man vor allem alle zu hoch gegriffenen Hilfssätze durch die gerade hinreichenden einfacheren ersetzen, von denen man doch annehmen darf, daß sie früher als die später eingeführten allgemeineren Lemmata bekannt gewesen sind. Dieses Verfahren muß natürlich mit Vorsicht und unter Berücksichtigung des geschichtlich Möglichen und insbesondere der noch erhaltenen Spuren und Nachrichten (etwa der Scholien und späterer Autoren) angewandt werden.

3.

Bevor wir auf den Zusammenhang von IX, 21–34 mit IX, 36 eingehen, ist noch das Satzgefüge IX, 21–34 selbst zu bereinigen. Während es nämlich sonst ein in sich abgeschlossenes, ganz auf sich selbst gegründetes Ganze darstellt, wird diese Autarkie durchbrochen im Beweis von IX, 32, in dem Euklid auf den Satz IX, 13 Bezug nimmt, der von Primzahlpotenzen ($\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omega\iota \acute{\omicron}\pi\omicron\sigma\omicron\upsilon\omicron\nu\acute{\alpha}\nu \acute{\alpha}\pi\omicron \mu\omicron\nu\acute{\alpha}\delta\omicron\varsigma \acute{\epsilon}\xi\eta\varsigma \acute{\alpha}\nu\acute{\alpha}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$, wo $\acute{\omicron}$ μετά την μονάδα Primzahl ist) handelt. Der Beweis von IX, 13 macht denn auch von den Eigenschaften der Primzahlen, die in der vorangehenden Zahlentheorie von Euklid abgeleitet werden, reichlich Gebrauch und geht erheblich über das elementare Niveau der Sätze IX, 21–34 hinaus.

Es entsteht die Aufgabe, IX, 32 elementar innerhalb der Lehre vom Geraden und Ungeraden zu beweisen. Das ist nun überraschend leicht möglich und zwar dadurch, daß man einen der unmittelbar vorangehenden Sätze IX, 30 oder 31 heranzieht.

Der Satz IX, 32 lautet: „Die von der Zwei aus verdoppelten Zahlen sind sämtlich nur in zwei gerade Faktoren zerlegbar.“

IX, 31 besagt: „Wenn eine ungerade Zahl einer zweiten Zahl gegenüber (relativ) prim ist, ist sie auch prim gegen das Doppelte jener Zahl.“ Nun sei in der Reihe $a, b, c, d, \dots$ jede Zahl das Doppelte der unmittelbar vorangehenden und a sei gleich 2. (Dann sind die Voraussetzungen des Satzes IX, 32 erfüllt.) Alle ungeraden Zahlen, die zu $a = 2$ prim sind, sind also auch zu $b, c, d, \dots$ (d. h. zu $4, 8, 16 \dots 2^n$) prim. Demnach teilt keine ungerade Zahl irgend eine der Zahlen $b, c, d, \dots$ ($4, 8, 16 \dots 2^n$); sie sind also lediglich in gerade Faktoren zerlegbar. (Will man den vielleicht nicht ganz elementaren Begriff „relativ prim zu ..“ vermeiden, so kann man statt der überlieferten

Fassung von IX, 31 die folgende, etwas schwächere setzen: „Eine ungerade Zahl, die eine andere Zahl nicht teilt, teilt auch nicht deren Doppeltes.“ Da nun die Zwei von keiner ungeraden Zahl geteilt wird, ist dies auch mit keiner der Zahlen 4, 8, 16 ... der Fall.)

Mit wenig mehr Mühe läßt sich IX, 32 auch direkt aus IX, 30 herleiten: Würde 2^n durch die ungerade Zahl q geteilt, dann nach IX, 30 auch 2^{n-1} , 2^{n-2} ... 8, 4, 2, was unmöglich ist.

Der Zusammenhang von IX, 30, 31, 32 ist nach der dargestellten Beweisumformung ein so bruchloser und zwingender, daß sich wohl niemand dem Eindruck entziehen kann, daß hier die ursprüngliche Verkettung zutage getreten ist.

Die Geschlossenheit des nunmehr erreichten Satzgefüges IX, 21–34 zeigt sich in der folgenden Aufstellung über die zum Beweise jeweils benutzten Sätze des IX. Buchs (einfache Nummer) und Definitionen des VII. Buchs (D mit Nummer); O bedeutet die Benutzung der Kommutativität und Assoziativität der Operation der Addition, wie sie bei Euklid V, 1 und VII, 5 zu „beweisen“ versucht wird.

21: D 5, D 6, not. com. 2, O	28: D 16, 21
22: D 7, 21	29: D 16, 23
23: D 7, D 7, 21	30: D 16, 23, D 6, D 7
24: D 6, O	31: 29, 30, D 13
25: D 7, D 7, 24	32: D 8, 31, D 13 (oder D 8, 30, D 7)
26: D 7, D 7, 24	33: D 8, D 9, O
27: D 4, D 7, 24	34: D 8, D 9

4.

Wir müssen uns nun dem Inhalt und der Methode der Ableitung der Sätze IX, 21–34 zuwenden. Man kann den Inhalt des fraglichen Satzgefüges kennzeichnen als den Anfang einer Theorie der Kongruenzen modulo 2 (z. T. auch mod 4 und mod 8): 21–27 geben die Resultate der Addition und Subtraktion, 28–29 der Multiplikation gerader bzw. ungerader Zahlen in allen möglichen Fällen an; 30–31 stellen zwei methodisch wichtige Hilfssätze dar über die ungerade Zahl als Teiler: sie ist auch Teiler der (eventuellen) Hälfte und ist auch prim zum Doppelten; 32–34 endlich zeigen, daß die eigentümliche Einteilung der geraden Zahlen in lediglich gerademalgerade, lediglich ungerademalgerade und in gemischte nicht leer ist, d. h. daß jede der genannten Klassen wirklich Zahlen enthält, nämlich die Potenzen von zwei, die Zahlen mit ungerader Hälfte und die sonstigen geraden Zahlen. (Die Umkehrung dieser Sätze fehlt trotz ihrer überaus leichten Beweisbarkeit!)

Was die Methode der Ableitung dieser Sätze angeht, so spricht Alles dafür, daß sie mittels Rechensteinen ($\psi\eta\phi\alpha\iota$ oder $\pi\epsilon\sigma\sigma\alpha\iota$), die auch als Spielsteine verwendet wurden, erfolgt ist.

Ein sehr altes Dokument dafür ist das folgende Dialogfragment aus Epicharm (fragm. 2 Diels):

- A. $\langle\alpha\rangle$ πότε ἀριθμόν τις περισσόν, αἱ
 δὲ λῆς πότε ἄρτιον ποιεῖται λῆ
 ψάφον ἢ καὶ τὰν ὑπαρχουσάν λα-
 βεῖν ἢ δοκεῖ καὶ τοι γ' $\langle\epsilon\delta\rangle$ ὡς οὗτος
 εἶπεν:
 B. „Wenn einer zu einer ungeraden
 Zahl, meinerwegen auch einer
 geraden, einen Stein zulegen
 oder auch von den vorhandenen
 einen wegnehmen will, meinst
 du wohl, sie bliebe noch die-
 selbe?“

B. οὐκ ἐπὶν γὰ κα.

B. „Bewahre!“

Das soll offenbar nicht nur heißen, daß aus der vorliegenden Zahl n eine andere $n+1$ bzw. $n-1$ wird, sondern daß dabei aus der ungeraden Zahl $n = 2m+1$ eine gerade $n+1 = 2m+2$ bzw. $n-1 = 2m$ entsteht und umgekehrt aus der geraden $2m$ die ungerade $2m \pm 1$. Denn sonst hätte die Erwähnung der Geradheit und Ungeradheit gar keinen Sinn. Hier ist nun eine unmittelbare Beziehung zwischen der operativ wichtigen zweiten Definition des Ungeraden (VII, def. 7, zweiter Teil: [Ἀριθμὸς περισσὸς] ... ἢ ὁ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ) und dem Rechnen mit $\psi\eta\phi\alpha\iota$ festzustellen. Aber auch die bei späteren Schriftstellern (Nikomachos etc.) überlieferte Lehre von den „figurierten“ Zahlen und die altüberlieferte „pythagoreische“ Verwendung der „Gnomone“ zur Bestimmung der Differenz aufeinanderfolgender Quadratzahlen u. a. m.²⁾ zeigt dasselbe. Ein ausdrücklicher Hinweis darauf findet sich bei Aristoteles: Metaph. N 5 (1092b 10–14): ὡς Ἐδρωτος ἔταρτε, τίς ἀριθμὸς τινος ..., ὥσπερ οἱ τοὺς ἀριθμοὺς ἄγοντες εἰς τὰ σχήματα τρίγωνον καὶ τετράγωνον, οὕτως ἀφομοιών ταῖς ψήφοις τὰς μορφὰς τῶν φυσῶν. (Vgl. auch [Alex.] zur Stelle!)

Man kann sich von diesem Operieren mit $\psi\eta\phi\alpha\iota$ noch gut ein Bild machen: Jeder $\psi\eta\phi\alpha\iota$ bedeutet eine μονάς. So wird auch die bei Aristoteles, da wo er von den Pythagoreern spricht, häufige Wendung σιγμὴ ἐστὶ μονάς θέειν ἔχουσα, μονάς σιγμὴ ἄθετος³⁾ verständlich. Der beliebig bewegliche Rechenstein ist die in ihrer Stellung unbestimmte „Eins“ (Monade). Wird er in einer Konfiguration fixiert, so stellt er einen „Punkt“ (σιγμὴ) dar. Daß die Monas ἄθετος ist, das ist nichts anderes als ein Ausdruck für das assoziative und kommutative Gesetz der Addition, d. h. der Beliebigkeit der Anordnung der Einheiten in einer „Anzahl“ (ἀριθμός), die ja ein πλῆθος μονάδων (VII, def. 2), d. h. eben eine Gruppe von in ihrer Stellung nicht festliegenden Rechensteinen ist. Das Operieren selbst heißt $\psi\eta\phi\iota\zeta\epsilon\iota\alpha$ oder $\psi\eta\phi\sigma\phi\alpha\iota\alpha$ ⁴⁾.

²⁾ Eine gute Zusammenfassung gibt Sir Thomas Heath, a manual of Greek Mathematics (Oxford 1931), Ch. III: Pythagorean Arithmetic.

³⁾ Vgl. beispielsweise Metaph. A 6; p. 1016b, 25–26, 29–31.

⁴⁾ Vgl. den Titel der allerdings späten Schrift des Maximus Planudes $\psi\eta\phi\sigma\phi\alpha\iota\alpha$.

Die Bestätigung des Gesagten ist die Möglichkeit, die einfachsten und für die anderen grundlegenden Sätze über das Gerade und Ungerade mittels $\psi\eta\phi\sigma\phi\sigma\iota\alpha$ abzuleiten.

Beispielsweise lautet Satz 21: „Es seien gegeben die geraden Zahlen a, b, c, d ; ich sage, auch ihre Summe $e = a + b + c + d$ ist gerade.“

Beweis: „Da jede der Zahlen a, b, c, d gerade ist, hat sie eine (ganzzahlige) Hälfte, sodaß auch die Summe eine Hälfte hat, also gerade ist.“

(1) Dies sieht, mit $\psi\eta\phi\sigma\iota$ ausgelegt,
so aus: es sei $a = 4, b = 6, c = 10,$
(2) $d = 2; e = 4 + 6 + 10 + 2 = 22.$
(3) Da die $\delta\rho\tau\iota\alpha\ \delta\rho\tau\iota\mu\omicron\iota\ \delta\epsilon\lambda\alpha\ \delta\iota\alpha\tau\epsilon\iota\sigma\iota$ -
μενοι sind, werden sie zur Hälfte mit

weißen, zur anderen Hälfte mit schwarzen Steinen gelegt (Stellung 1). Im ersten Operationsschritt werden sie zusammengeschoben (Assoziativität; Stell. 2). Im zweiten Schritt werden sie umgeordnet (Kommutativität; Stell. 3).

Ähnlich läßt sich 24 darstellen. Während bis jetzt die Steine jeweils in einer Dimension, längs einer geraden Linie, angeordnet wurden, ist im folgenden eine zweidimensionale, flächige Anordnung zugrunde gelegt worden. Ein Beweis für die zweidimensionale Anordnung von $\psi\eta\phi\sigma\iota$ ist verschiedentlich überliefert, so in den genannten Fällen der figurierten (Dreiecks-, Quadrat-, Pyramiden-) Zahlen, der „Gnomone“ u. dgl.⁵⁾, besonders auch im Terminus und Begriff der $\eta\mu\omicron\iota\ \epsilon\pi\iota\pi\epsilon\delta\omicron\iota\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\iota\ \delta\rho\tau\iota\mu\omicron\iota$ in den Elementen VII, 17–20, 22. Es handelt sich dabei um Zahlen, die durch ähnliche Rechtecke bzw. Rechtfläche bei der Auslegung mit Steinen darzustellen sind. (Vgl. VII, def. 22: „ $\eta\mu\omicron\iota\ \epsilon\pi\iota\pi\epsilon\delta\omicron\iota\ \kappa\alpha\iota\ \sigma\tau\epsilon\rho\epsilon\omicron\iota\ \delta\rho\tau\iota\mu\omicron\iota\ \epsilon\iota\sigma\iota\upsilon\iota\ \delta\iota\ \alpha\upsilon\tau\alpha\ \lambda\omicron\gamma\omicron\upsilon\iota\ \epsilon\chi\omicron\upsilon\tau\epsilon\varsigma\ \tau\acute{\alpha}\varsigma\ \pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma$ “ mit VI, def. 1: „ $\eta\mu\omicron\iota\ \sigma\chi\eta\mu\alpha\tau\alpha\ \epsilon\upsilon\theta\upsilon\gamma\gamma\alpha\mu\acute{\alpha}\ \epsilon\sigma\tau\iota\upsilon\iota\ \delta\upsilon\alpha\ \tau\acute{\alpha}\varsigma\ \tau\epsilon\ \gamma\omega\upsilon\iota\acute{\alpha}\varsigma\ \epsilon\iota\varsigma\ \epsilon\chi\epsilon\iota\ \kappa\alpha\tau\alpha\ \mu\lambda\alpha\nu\ \kappa\alpha\iota\ \tau\acute{\alpha}\varsigma\ \pi\epsilon\pi\lambda\iota\ \tau\acute{\alpha}\varsigma\ \epsilon\iota\varsigma\ \alpha\ \gamma\omega\upsilon\iota\acute{\alpha}\varsigma\ \pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\acute{\alpha}\varsigma\ \alpha\upsilon\tau\alpha\ \lambda\omicron\gamma\omicron\upsilon\iota$ “).⁶⁾

Wir haben uns also rechteckige Schemata von $\psi\eta\phi\sigma\iota$ vorzustellen, wenn wir uns die Begriffe $\delta\rho\tau\iota\mu\omicron\iota\ \delta\rho\tau\iota\sigma\iota\varsigma$, $\delta\rho\tau\iota\sigma\iota\varsigma\ \pi\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\alpha}\varsigma$ mit und ohne $\mu\acute{\omicron}\nu\omicron\nu$ anschaulich machen wollen. Die Zerlegung einer Zahl in zwei Faktoren kann immer dargestellt werden als ein Rechteck aus soviel Steinen wie die Zahl angibt und mit Seiten, deren jede mit der Zahl ihrer $\psi\eta\phi\sigma\iota$ einen Faktor darstellt.

Beispielsweise heißt es im Beweis von IX, 30: a mißt b gemäß einer geraden Zahl c , also wird a auch die Hälfte von b messen.

..... b : Zahl der Steine des Rechtecks.
..... $a = 3$ Zahl in der senkrechten Seite.
..... $c = 10$ Zahl in der wagerechten Seite.

Die grundsätzliche Würdigung dieser Methode, welche keine Proportionen benutzt, werden wir am Schluß dieser Arbeit versuchen; zuvor soll nun der Beweis von IX, 36 und dann noch der des

$\phi\sigma\phi\iota\alpha\ \kappa\alpha\tau\ \iota\sigma\theta\acute{\omicron}\upsilon\varsigma$ (her. v. Gerhardt u. d. T. „das Rechenbuch des Max. Plan. Halle 1865, p. 15 (nach Hankel, Zur Gesch. d. Math. in Altertum und Mittelalter (Leipzig 1874), S. 188, Anm.

⁵⁾ Vgl. Aristoteles, Phys. III, 4; p. 203 a 1 ff. — Plutarch (?) in Stob. eclog. I pr. 10 p. 22, 16 W (= Diels, Vorsokr. Pythag. Schule B 28). Dazu Heath, the thirteen books of Euclid's Elements Vol. I, p. 359 f. — Eine Andeutung findet sich schon bei Philolaos fr. B 11 (Diels-Cranz, Vorsokr.⁶⁾ I, 411, 14–412, 3), wo man allerdings S. 412, 1 abweichend von Diels-Cranz „κατά γνώμονας φύσιν ἀπεργάζεται σωματίων“ lesen muß.

⁶⁾ Hier ist aber zu bemerken, daß der Begriff der „geometrischen“ Proportion der alten „pythagoreischen“ $\psi\eta\phi\sigma\iota$ -Arithmetik noch fremd ist.

letzten Satzes von X unter Benutzung lediglich dieser primitiven Beweismethode durchgeführt werden. Dabei werden die Sätze IX, 21–34 mit ausgenutzt, die ja auch durch $\psi\eta\phi\sigma\phi\sigma\iota\alpha$ bewiesen gedacht werden müssen.

5.

Der Satz IX, 36, über die vollkommenen Zahlen lautet: „Verdoppelt man von 1 beginnend so lange, bis die Summe der erzeugten Zahlen eine Primzahl ergibt, und multipliziert man die gebildete Summe mit der letzten Zahl — oder verdoppelt man weiter von jener Primzahl beginnend so oft als zuvor von der Eins aus —, so ergibt sich eine vollkommene Zahl (d. h. eine solche, die gleich der Summe ihrer echten Teiler inbegriffen 1 ist)“.

Die Aufgabe, die dem Beweis dieses Satzes obliegt, ist eine doppelte: 1) Sämtliche Teiler der nach der gegebenen Vorschrift gebildeten Zahl zu ermitteln. 2) zu zeigen, daß ihre Summe gleich der Zahl selbst ist. (Wir benutzen zum Beweis zunächst die zweite gegebene Formulierung des Satzes; die Äquivalenz beider Formulierungen wird sich nebenher aus dem zweiten Teil unseres Beweises ergeben.)

I. Teil des Beweises.

Die zunächst verdoppelten Zahlen seien $1, 2, 4, 8, 16, \dots, 2^n$, ihre Summe $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = p$, einer Primzahl; die von p ab verdoppelten Zahlen sind also $p, 2p, 4p, 8p, 16p, \dots, 2^n p$. Dann ist $2^n p$ die gebildete vollkommene Zahl, und zwar hat sie zu Teilern genau die beiden angeführten Reihen von Zahlen, unter Weglassung der Zahl $2^n p$ selbst, die ja kein echter Teiler ihrer selbst sein kann.

Daß sämtliche genannten Zahlen wirklich Teiler von $2^n p$ sind, ist offenbar; denn sie treten ja sämtlich im Verlauf des zweiten Verdoppelungsprozesses selbst auf oder sind evidente Faktoren der erscheinenden Zahlen ($2^i p = 2^i \cdot p$). Zu beweisen ist aber, daß $2^n p$ keine weiteren Teiler außer den genannten besitzt.

Jeder Teiler ist nun entweder eine ungerade oder eine gerade Zahl und im zweiten Fall hat er entweder eine ungerade Hälfte (er ist dann $\delta\rho\tau\iota\sigma\iota\varsigma\ \pi\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\alpha}\varsigma\ \mu\acute{\omicron}\nu\omicron\nu$ IX, 33) oder ist eine Zweierpotenz (alsdann $\delta\rho\tau\iota\sigma\iota\varsigma\ \delta\rho\tau\iota\sigma\iota\varsigma\ \mu\acute{\omicron}\nu\omicron\nu$ IX, 32) oder endlich keins von beiden findet statt (der Fall von IX, 34). Diese vier möglichen Fälle werden wir nacheinander behandeln.

1. Fall: Ungerader Teiler: Ein ungerader Teiler u teilt nach IX, 30 mit der geraden Zahl $2^n p$ zugleich auch ihre Hälfte $2^{n-1} p$, aus demselben Grunde deren Hälfte $2^{n-2} p$ und so fort, bis schließlich die Anfangszahl der Reihe, p selbst, erreicht ist. u teilt also p ; da aber p nach Voraussetzung prim ist, kann u nur entweder 1 oder p sein.

2. Fall: Gerader Teiler, der eine ungerade Hälfte hat: Nach einer Bemerkung im Beweise von IX, 33⁷⁾ teilt die Hälfte jedes geraden Teilers auch die Hälfte des Dividenten. Der gerade Teiler $2u$ mit der ungeraden Hälfte u messe $2^i p$; dann mißt also (IX, 30, vgl. Fall 1⁸⁾) u auch $2^{i-1}p, 2^{i-2}p, \dots, 4p, 2p, p$. Demnach ist u entweder 1 oder p ; $2u$ also 2 oder $2p$.

3. Fall: Gerader Teiler, der weder eine ungerade Hälfte hat noch eine Zweierpotenz ist. Man halbiere den Teiler, seine Hälfte, dessen Hälfte (falls sie existiert) und so fort, bis man zu der ungeraden Zahl u kommt. Eine solche existiert (> 1), denn andernfalls wäre der Teiler eine Zweierpotenz (vgl. den Beweis von IX, 34), gegen die Voraussetzung. Ist i die Anzahl der Halbierungen, die nötig waren, um u zu erreichen, so ist der Teiler selbst $2^i u$. Nach dem Vorhergehenden kann aber u nur 1 oder p sein; also ist der Teiler 2^i oder $2^i p$, wo im zweiten Fall i notwendig kleiner als n sein muß, denn sonst wäre $2^i p$ kein echter Teiler von $2^n p$. (Über 2^i als Teiler siehe den 4. Fall.)

4. Fall: Gerader Teiler, der eine Potenz von 2 ist. Ist der Teiler eine von der Zwei aus verdoppelte Zahl, so kann er nur 2, 4, 8, ..., $2^{n-1}, 2^n$, aber nicht 2^{n+1} oder eine höhere Potenz sein. Denn wäre 2^{n+1} ein Teiler von $2^n p$, so wäre auch, da jede gerade Zahl halbiert die Hälfte des Dividenten mißt, 2^n ein Teiler von $2^{n-1}p$, 2^{n-1} Teiler von $2^{n-2}p$, ... schließlich 2 Teiler von p , was unmöglich ist.

Damit ist die Aufzählung aller Möglichkeiten beendet: es haben sich keine Teiler außer den anfangs genannten ergeben⁸⁾.

II. Teil des Beweises.

Es ist nun noch zu zeigen, daß die Summe der Teiler gleich $2^n p$ ist. Die genannte Summe ist:

$$(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n) + (p + 2p + 4p + \dots + 2^{n-1}p)$$

wo wiederum:

$$p = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n.$$

Setzt man, wie Euklid, beispielsweise $n = 4$, so wird in der Tat p prim und $2^n p$ eine vollkommene Zahl:

$$1 + 4 + 8 + 16 = 31 \text{ (Primzahl)}$$

$$1 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496 \text{ (vollkommene Zahl).}$$

Diese Rechenaufgaben, die auf die Summierung einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten 2 hinauslaufen, sind mittels der $\phi\eta\sigma\tau$, nicht

⁷⁾ εἰ γὰρ ἔσται ὁ A καὶ ἀρτίαιος ἀριθμὸς, μετρηθήσεται ὑπὲρ ἀρτίου κατὰ ἀρτίον ἀριθμὸν ὥστε καὶ ὁ ἡμισυς αὐτοῦ μετρηθήσεται ὑπὲρ ἀρτίου ἀριθμοῦ.

⁸⁾ Vgl. mit diesem Beweise den Euklids (2. Teil) und die von Platon, *Gesetze* 737 E–738 A angedeutete Methode für die Aufzählung sämtlicher Teiler einer beliebigen vorgegebenen Zahl, worüber s. u. S. 553.

nicht wie bei Euklid IX, 35 mittels Proportionen, zu bewältigen. Dazu genügt es nun, zunächst von einem hingelegten Stein ausgehend, ihn zuerst selbst und dann immer die jeweils daliegende Menge der Steine zu verdoppeln, ganz wie beim „Dublieren“ des Einsatzes beim Glücksspiel. Wie untenstehende Figur ergibt, ist bei einem solchen Verfahren die jeweils letzte Zahl der entstehenden Reihe gleich der Summe der vorhergehenden Zahlen; d. h.

$$(1) \quad 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^n = 2^{n+1}$$

$$\text{oder} \quad 1 + p = 2^{n+1}; \quad p = 2^{n+1} - 1;$$

$$\text{z. B.} \quad 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 32; \quad 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

(vgl. Fig. 1).

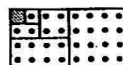
Ebenso ergibt sich, wenn man mit p (etwa 31) als „Einsatz“ beginnt, beim fortgesetzten „Dublieren“:

$$(2) \quad p + p + 2p + 2^2 p + 2^3 p + 2^4 p + \dots + 2^{n-1} p = 2^n p.$$

Da nun $p = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$, so ist $2^n p$ in der Tat gleich der Summe ihrer sämtlichen Teiler:

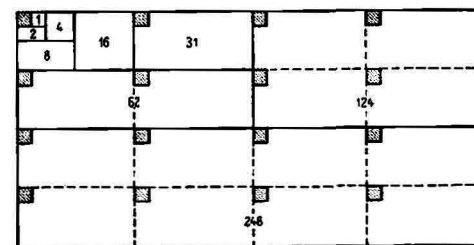
$$2^n p = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} + 2^n + p + 2p + 2^2 p + 2^3 p + \dots + 2^{n-1} p = 2(2^{n+1} - 1)^9;$$

$$\text{z. B.} \quad 496 = 1 + 2 + 4 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 \quad (\text{Fig. 2}) \\ = 16 \cdot 31.$$



$$(1) + 1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

Fig. 1.



$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248 = 496 \\ = 16 \cdot 31.$$

Fig. 2.

Damit ist auch der II. Teil der Beweise durch $\phi\eta\sigma\tau$ vollständig durchgeführt.

Kennzeichnend für diesen ganzen Beweis ist eine gewissermaßen „dyadische“ Arithmetik; die spezifischen Eigenschaften der Zahl 2 sind entscheidend. Es gilt nämlich nur für die Zwei:

$$2 + 2 = 2 \cdot 2 = 2^2, \quad 2^2 + 2^2 = 2 \cdot 2^2 = 2^3, \quad \dots, \quad 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

⁹⁾ Damit ist zugleich die Äquivalenz der beiden Formulierungen des Satzes 36 sicher gestellt.

einzigste echte Faktor von v und demgemäß 1 ist. Denn wäre jener zweite Faktor nicht 1, so würde er eines der v_i sein und man hätte die Gleichung

$$v_i = 1 + v_1 + \dots + v_i + \dots + v_n$$

und das Ganze wäre nicht größer als der Teil, da ja alle v_i nach Voraussetzung natürliche Zahlen > 1 sein sollen. D. h. die Unterfaktoren von v , die v_k , existieren gar nicht, v ist Primzahl und gleich $2^{n+1} - 1$. Damit kommen wir aber gerade auf die euklidische Bedingung zurück.

Der Beweis benutzt nicht den Satz von der eindeutigen Zerlegbarkeit in Primfaktoren und auch sonst nichts, was nicht in den Sätzen IX, 21–34 enthalten wäre.

6.

Es bleibt noch übrig, zu fragen, ob nicht noch andere wichtige Sätze mit den Mitteln der „dyadischen Arithmetik“ hergeleitet werden können und wahrscheinlich in alter Zeit auch hergeleitet worden sind. Es bietet sich da vor allem dar der schon öfter erwähnte Schlußsatz des X. Buchs der Elemente, von der Inkommensurabilität der Seite des Quadrats mit seiner Diagonale. Dieser läßt sich wie folgt „dyadisch“, mittels $\phi\eta\phi\omicron\phi\omicron\iota\zeta$, beweisen¹¹⁾.

Wäre die Seite mit der Diagonale meßbar, so gäbe es ein ganzzahliges (durch $\phi\eta\phi\omicron$ darzustellendes) Quadrat D , welches das Doppelte eines anderen ganzzahligen Quadrats S wäre. Es sei nun:

$$D = d \cdot d, \quad S = s \cdot s \quad \text{und} \quad D = 2S; \quad \text{also} \quad d \cdot d = 2s \cdot s.$$

Man halbiere nun fortgesetzt die $\kappa\lambda\epsilon\upsilon\pi\alpha\iota$ d und s und es sei:

$$D_1 = d_1 \cdot d_1 = \frac{1}{2} d \cdot \frac{1}{2} d = \frac{1}{4} D; \quad S_1 = s_1 \cdot s_1 = \frac{1}{2} s \cdot \frac{1}{2} s = \frac{1}{4} S$$

$$D_2 = d_2 \cdot d_2 = \frac{1}{4} d \cdot \frac{1}{4} d = \frac{1}{16} D; \quad S_2 = s_2 \cdot s_2 = \frac{1}{4} s \cdot \frac{1}{4} s = \frac{1}{16} S$$

$$\dots \dots \dots$$

$$D_i = d_i \cdot d_i = \frac{1}{2^i} d \cdot \frac{1}{2^i} d = \frac{1}{4^i} D; \quad S_i = s_i \cdot s_i = \frac{1}{2^i} s \cdot \frac{1}{2^i} s = \frac{1}{4^i} S.$$

¹¹⁾ Außer der im Text gegebenen Form sind noch andere, aber nicht wesentlich verschiedene Varianten des Beweises denkbar; auf alle läßt sich aber die aristotelische Charakteristik (Anal. priora I, 23; p. 41 a 26. I, 44; p. 50 a 37) anwenden, nach der der alte Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zeigt, daß andernfalls „die ungeraden Zahlen den geraden gleich würden“. Der von Euklid (am Schluß des X. Buchs) gegebene Beweis benutzt zwar (in einer seiner Formen) einen Satz der „dyadischen Arithmetik“ (IX, 23; nebenbei die einzige Stelle der Elemente, wo ein solcher Satz Verwendung findet), aber auch den Begriff der kleinsten Terme eines gegebenen Verhältnisses ($\epsilon\lambda\acute{\alpha}\gamma\iota\sigma\tau\omicron\iota \tau\omicron\upsilon\upsilon \tau\omicron\upsilon\upsilon \sigma\acute{\alpha}\tau\omicron\upsilon\upsilon \lambda\acute{\omicron}\gamma\omicron\upsilon\upsilon \epsilon\chi\acute{\alpha}\nu\tau\omicron\upsilon\upsilon$), was über den Bereich der dyadischen Arithmetik hinausführt.

Dann wird für alle i die Gleichung bestehen:

$$D_i = 2S_i; \quad d_i \cdot d_i = 2s_i \cdot s_i$$

(solange sich die Halbierungen durchführen lassen.) Nun gibt es nach IX, 32–34 nur zwei Möglichkeiten:

1. Man stößt bei der fortgesetzten Halbierung entweder auf eine ungerade Zahl $d_i = u > 1$ oder zuerst auf eine solche $s_i = v > 1$. Dann wird im 1. Fall $D_i = u \cdot u$ ungerade (als $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{\omicron}\varsigma \kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\alpha}\kappa\iota\varsigma \kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\omicron}\varsigma$ IX, 29). Es steht dann in der Gleichung $D_i = 2S_i$ links eine ungerade, rechts eine gerade Zahl, was unmöglich ist. (Ebenso, wenn man zugleich auf $d_i = u$ und $s_i = v$ stößt.) Im 2. Fall steht aber rechts $2v \cdot v$, d. h. ein $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{\omicron}\varsigma \tau\omicron\upsilon\upsilon \gamma\iota\mu\iota\sigma\tau\omicron\upsilon\upsilon \kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\omicron}\nu \epsilon\chi\omicron\upsilon\upsilon$ (da ja $v \cdot v \kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\alpha}\kappa\iota\varsigma \kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\omicron}\varsigma$). Auch das ist unmöglich; denn links steht ein Quadrat und dieses ist offenbar (vgl. die $\phi\eta\phi\omicron$ -Konfiguration!) stets entweder als $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{\omicron}\varsigma \acute{\alpha}\rho\iota\tau\acute{\alpha}\kappa\iota\varsigma \acute{\alpha}\rho\iota\tau\acute{\omicron}\varsigma$ oder $\kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\alpha}\kappa\iota\varsigma \kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\omicron}\varsigma$ darstellbar, während die Zahl rechts nach IX, 33 $\acute{\alpha}\rho\iota\tau\acute{\alpha}\kappa\iota\varsigma \kappa\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{\omicron}\varsigma \mu\acute{\omicron}\nu\omicron\upsilon\upsilon$ ist.

2. Man stößt entweder zuerst auf $d_i = 2$ oder zuerst auf $s_i = 2$; d. h. auf $d_{i+1} = 1$ bzw. auf $s_{i+1} = 1$. Das führt natürlich auch auf Unmöglichkeiten, denn es kann weder $1 \cdot 1 = 2S$ noch $D_{i+1} = d_{i+1} \cdot d_{i+1} = 2 \cdot 1$ jemals sein (oder auch: $2 \cdot 2 = 2s \cdot s$, also $2 = s \cdot s$; aber 2 ist kein Quadrat; oder: $d_i \cdot d_i = 2s_i \cdot s_i = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; d. h. links ein Quadrat und rechts keines!)

7.

Damit haben wir ein Stück ältester griechischer Arithmetik wiederhergestellt und zwar ein solches von wirklichem mathematischen Wert; denn weder der Satz über die vollkommenen Zahlen noch der von der „Unmeßbarkeit“ der Quadratdiagonale mit ihrer Seite ist mathematisch trivial. Die aus Platon wohlbekannte „Lehre vom Geraden und Ungeraden“ hat damit über ihren etwas nebelhaften „philosophischen“ einen genau faßbaren mathematischen Sinn gewonnen und ihre allein erhaltenen Trümmer haben sich zu einem sinnvollen Ganzen, das nicht ohne Anmut ist, zusammenfügen und ergänzen lassen. Das enthebt uns aber nicht der Aufgabe, die kennzeichnenden Züge des gewonnenen Ganzen in ihrer historischen Bedeutung zu würdigen und damit zugleich das erzielte Ergebnis sicher zu stellen. Das soll in aller Kürze geschehen, u. a. auch mit Rücksicht darauf, daß vor Kurzem eine groß angelegte Arbeit von Jacob Klein „Die griechische Logik und die Entstehung der Algebra“ erschienen ist¹²⁾, die einschlägiges Material in großem Umfang ausbreitet.

Die von uns wiederhergestellte Lehre hat drei kennzeichnende Züge: 1. die Aufspaltung der Beweise in eine Reihe von Fallunterschei-

¹²⁾ S. diese Zeitschr. B. 3, S. 18 ff. (I. Teil d. Abhandl.) — Eine kritische Würdigung kann hier nicht versucht werden.

dungen; 2. die Zugrundelegung von Konfigurationen von Rechensteinen und das Operieren mit diesen; 3. die entscheidende Verwendung der beiden „dyadischen“ Grundprozesse der fortgesetzten Verdoppelung und der fortgesetzten Halbierung als Hauptinstrumente der Gedankenführung der Beweise.

Alle drei Eigenheiten zeugen zunächst für das hohe Alter, die „archaische“ Haltung der Theorie; dann bieten sie eine Reihe wichtiger historischer Beziehungen dar.

Zu 1.: Die Fallunterscheidung als archaisches Kennzeichen ist seit langem bekannt¹³⁾. Eutocius überliefert in seinem Kommentar zu den *Conica* des Apollonius (ed. Halley p. 9) eine Notiz des Geminus, nach der „die Alten für jede besondere Form des Dreiecks das Theorem der zwei Rechten speziell bewiesen, zuerst für das gleichseitige, dann für das gleichschenklige und zuletzt für das ungleichseitige“¹⁴⁾.

Weiterhin kann an die Proportionslehre erinnert werden, die nach der bekannten Stelle der zweiten aristotelischen Analytik (I, c. 5: p. 74a, 17–21) in früherer Zeit gesonderte Beweise für Zahlen, Strecken, Körper, Zeiten etc. enthielt, während das *ἐναλλάξ* „jetzt im Ganzen bewiesen wird“ (*ὅν καθόλου δείκνυται*)¹⁵⁾.

Man könnte hier immerhin einwenden, daß es etwas anderes sei, wenn verschiedene Fälle eines bestimmten Theorems getrennt bewiesen als wenn zum Beweise eines Satzes verschiedene Hypothesen der Reihe nach aufgestellt und durchgeprüft würden. Aber auch für das zweite Verfahren lassen sich Beispiele aus archaischen Argumentationen beibringen. Erinnert sei an das bekannte Fragment des Gorgias *περί τοῦ μὴ ὄντος ἢ περὶ φύσεως* (Diels, Vorsokr., Gorgias B 3). Die ganze Art der Beweisführung geht auf den Eleaten Zenon zurück (wenn auch der Sophist die Art des ernsthaften alten Dialektikers parodistisch übertreibt), wie man aus dem Reflex des zenonischen Philosophierens in Platons Dialog „Parmenides“ (in der sog. *γυμνασία*) und auch noch einigermaßen aus Zenons wörtlich überlieferten Fragmenten und den aristotelischen Berichten über ihn ersehen kann. (Vgl. Diels, Vors., Zenon A 21 ff., B 1 ff.)

Zu 2.: Daß das Operieren mit *φῆφοι* oder *πεττοί* eine „alt-pythagoreische“ Methode ist, ist ebenfalls seit langem bekannt und hier nicht von neuem zu beweisen. Ein Sonderhinweis auf mathematisch besonders wertvolle derartige Entwicklungen sei aber gestattet: wir meinen die Verwendung der „Gnomone“, nicht nur in der

¹³⁾ Vgl. Hankel, a. a. O. (Anm. 4), S. 95 ff.

¹⁴⁾ Übersetzt von Hankel a. a. O.

¹⁵⁾ Vgl. O. Becker, Eudoxos-Studien I; ds. Ztschr. B. 2, S. 329 f.

Theorie der „figurierten“ Zahlen, sondern auch zur Addition der Reihe der geraden und ungeraden Zahlen (deren Summen sich als die Quadrate n^2 und „Heteromeken“ $n(n+1)$ ergeben), zur Bestimmung der rationalen „pythagoreischen“ Dreiecke der beiden Typen durch doppelreihige Gnomone, zum Beweise der eleganten Beziehung $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$, die in dem arabischen Werk „*al Fahri*“ des *Al Karhî* (um 1000) überliefert ist u. a. m.¹⁶⁾

Auch die Beziehung auf gewisse platonische Stellen darf nicht übergangen werden. In „Gorgias“ 450 CD werden unter den *τέχναι*, *αἱ διὰ λόγου πᾶν παραινουσιν* erwähnt: *ἡ ἀριθμητικὴ καὶ λογιστικὴ καὶ γεωμετρικὴ καὶ πεττευτικὴ*, d. h. neben Arithmetik, Logistik und Geometrie die Kunst des Brettspiels mit Spielsteinen (*πεττοί*); es besteht offenbar eine engere Korrelation zwischen der Logistik (bei der die Verhältnisse (*λόγοι*) eine besondere Rolle spielen) und Geometrie, entsprechend ist eine solche zwischen Arithmetik und Brettspielkunst zu erwarten — und in der Tat operieren ja beide mit „Steinchen“. Noch bedeutsamer ist die berühmte Stelle der „Gesetze“ (819 D–820 D) über die Lehre vom Irrationalen, die „einen viel hübscheren Zeitvertreib für alte Leute darstellt als das Brettspiel“. Kleinias sagt dort ausdrücklich: „Es scheint mir, daß das Brettspiel und diese Lehre (von den „meßbaren“ und „unmeßbaren“ Größen¹⁷⁾) voneinander nicht viel verschiedene sind“ (*ἔοικεν ἢ τε πεττία καὶ ταῦτα ἀλλήλων τὰ μαθήματα οὐ πάμπολο χωρίζονται*). Wenn diese Worte — und man muß dies bei Platon erwarten — einen präzisen Sinn haben, so können sie sich nur auf den mit Steinchen geführten, von uns wiederhergestellten Beweis der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats beziehen; nur dieser ist so einfach, daß er den alten Herren und den Schulkindern zugemutet werden kann, wie das ja Platon verlangt. Die sehr schwierige Lehre des X. Buchs der Elemente, die nach der

¹⁶⁾ S. Heath a. a. O. (Anm. 2).

¹⁷⁾ Ges. 820 C: *τὰ τῶν μετρητῶν τε καὶ ἀμέτρων πρὸς ἀλλήλας, ἢ τι φέσει γέγονε*. Vgl. dazu Toeplitz, d. Verhältnis v. Mathematik u. Ideenlehre bei Plato; d. Ztschr. B. 1, S. 13–15, abweichend von E. Sachs (a. a. O. Anm. 18). Toeplitz übersetzt dort: „in welcher Entwicklung (ἢ τι φέσει) sich die Theorie der meßbaren etc. Größen aufbaut“. Jedoch ist m. E. *φέσει* einfach im bekannten Gegensatz zu *θέσει* zu verstehen, wie die folgenden Parallelstellen zeigen: a) Ges. 817 E: *τῶν ἄστρων περιόδου (μάθημα) πρὸς ἀλλήλας ὡς πέφυκε πορεύεσθαι* (E. Sachs, a. a. O. S. 177). b) *Epinomis* 990 C: *τῶν οὐκ ὄντων δὲ ὁμοίων ἀλλήλοις φέσει ἀριθμῶν ὁμοιωσις* . . . c) *Scholia in Eucl. El. lib. X* (ed. Heiberg, *Eucl. Opera* Vol. V) p. 414, 3–4: *οὐ γὰρ ταῦτόν ἀσύμμετρα καὶ ἀλογα, ὁρᾷται τὰ μὲν φέσει ἐστίν, τὰ δὲ ἀλογα καὶ ῥητὰ θέσει*. p. 416, 14–16 *διὸ τὸ μὲν σύμμετρον φέσει ἂν εἴη αὐτοῖς καὶ ἀσύμμετρον, τὸ δὲ ῥητόν καὶ ἀλογον θέσει*, cf. p. 416, 10; 418, 10–12. Vgl. den Pappus-Komm. zu Euklid X, übers. v. H. Suter (Abh. z. Gesch. d. Naturw. u. Med. H. IV. Erlangen 1922), S. 17–18, 20; lat. Übers. ds. Zeitschr. B. 3, S. 12 („per naturam“ — „per positionem“).

Ansicht von Eva Sachs¹⁸⁾ gemeint ist, kommt (ganz abgesehen von chronologischen Gründen) nicht in Frage, wenn von Platon auch die allgemeine Perspektive auf das ganze Irrationalitätsproblem offen gehalten wird.

Zu 3.: Die dyadische Eigenart der ältesten griechischen arithmetischen Theorie ist von besonderer Bedeutung.

a) Was zunächst ihre Herkunft anlangt, so ist mit Sicherheit die ägyptische Rechenkunst als Ursprung zu vermuten, denn in dieser spielen, wie u. a. die Forschungen O. Neugebauers völlig klaggestellt haben, die beiden Grundoperationen der sukzessiven Verdoppelung und Halbierung, des Auf- und Absteigens längs den Reihen 2, 4, 8, 16 ... und $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$... eine ausschlaggebende Rolle. Die „dyadische Arithmetik“ ist gewissermaßen die der ägyptischen Rechenpraxis entsprechende Theorie, ebenso wie die „theaetetische“ Zahlentheorie der Primfaktoren der Rechentechnik des Einmaleins (Multiplikationstabellen, κεφαλισμοί¹⁹⁾) zuzuordnen ist. Auf die ägyptische Rechenkunst weist Platon in den „Gesetzen“ (819 C) als Vorbild hin; andererseits ist ihm aber auch die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren bekannt, wie aus der Stelle 737 E—738 B der „Gesetze“ hervorgeht (s. u. S. 553).

b) Zweitens ist die Beziehung zu Platons mannigfacher Erwähnung des „Geraden und Ungeraden“ als des Themas der „Arithmetik“ und „Logistik“ von Wichtigkeit. Die klarste Stelle ist hier die im „Gorgias“ 451 A—C samt einem anonymen Scholion, in zweiter Linie auch ein Scholion des Olympiodor, wozu auch noch Nikomachos und spätere Arithmetiker heranzuziehen wären. Da diese Dinge bei J. Klein ausführlich behandelt sind²⁰⁾, beschränken wir uns auf das Notwendigste. Die „Arithmetik“ handelt nach Platon vom Geraden und Ungeraden, „was wohl ein jedes ist“; die „Logistik“ betrachtet im Unterschied dazu außerdem auch noch: „wie sich das Gerade und Ungerade zu sich selbst und zueinander der Menge nach verhält“. Dies heißt offenbar, die Logistik handelt von den Verhältnissen der Zahlen zu sich selbst (1:1, $n:n$) und zueinander (1:2, 2:3 u. dgl., allgemein $m:n$). Dies bestätigt auch das anonyme Scholion mit den Worten: „Die Arithmetik betrachtet nach ihrer eigenen Natur die Gestalten

¹⁸⁾ Die fünf Platonischen Körper (Philolog. Untersuch. her. von Kießling u. Willamowitz, H. 24), Berlin 1917, S. 169 ff., insb. S. 177.

¹⁹⁾ Aristoteles, Top. VIII, 14; p. 163 b, 24—26 τὸ περὶ τοὺς κεφαλισμοὺς προχείριος ἔχειν μέγα διαφέρει πρὸς τὸ καὶ τὸν ἄλλον ἀριθμὸν γινώσκειν πολλαπλασιασόμενον, cf. Scholia (ed. Brandis, Ed. Acad. Boruss. Vol. IV, p. 296 a, 4 (Alex. Aphrod.): κεφαλισμοὺς λέγει τοὺς τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν μέχρι τῆς δεκάδος πολλαπλασιασμούς. Gemeint ist offenbar das kleine Einmaleins!

²⁰⁾ a. a. O. S. 23—35 (§§ 2—3).

(Arten) der Zahl (also das ἄριτον, περιττόν, ἀρτιάκις ἄριτον usw.), die mit ihnen gebildeten Konfigurationen und die Verhältnisse aber als Ausgangspunkt der Geometrie und Musik.

Weiterhin heißt es auch hier, daß die Logistik das „Wieviel in den Zahlen“ und den „Stoff“ in ihnen behandelt. „Denn es wird Zahl mit Zahl nicht dem Eidos nach vervielfacht, sondern nach den stofflichen Monaden und sie wird nach ihrem Wieviel geteilt, aber nicht nach dem Logos (der begrifflichen Bestimmung), nach dem sich die Zahlen voneinander unterscheiden.“ Ähnlich sagt Olympiodor, die Arithmetik beziehe sich auf das Eidos der Zahlen, die Logistik auf die Hyle; die Eide der Zahlen seien das Gerade usw., die Hyle die „Menge“ (πλήθος) der Einheiten, und erläutert das an Zahlenbeispielen.

Der Hauptpunkt der hier erscheinenden Unterscheidung ist die Gegenüberstellung der auf die Qualität (das Eidos) der Zahlen²¹⁾ bezogenen Arithmetik und der auf ihre Quantitätsbeziehungen (πὺς ἔχει πλήθος) gehenden Logistik; aber als ein Nebengedanke taucht auch der Gegensatz der „reinen“ ideenhaften Arithmetik und der empirisch-praktischen Logistik auf, wo für die erste die absolut gleichen, unteilbaren Einheiten, für die zweite konkrete Gegenstände (Äpfel etc.) als „Einheiten“, die natürlich weder genau gleich noch unteilbar sind, in Frage kommen. Bei Platon spielt dieser Nebengedanke aber keine entscheidende Rolle, wohl aber bei den späteren Arithmetikern²²⁾. Fragen wir nun nach dem mathematischen Hintergrund der platonischen Unterscheidung der beiden um das Gerade und Ungerade bemühten Wissenszweige, so ist offenbar mit der „Arithmetik“ die alte dyadische proportionenfreie Theorie gemeint, die lediglich die Zahlenarten in ihrer Erzeugungsweise und ihren Eigenschaften behandelt und von der IX, 21—36 der euklidischen Elemente ein Stück darstellt; mit „Logistik“ aber die Proportionslehre und ihre Anwendung auf die Zahl.

Einen weiteren Beleg dieser These und zugleich ein anderes, echt platonisches philosophisch-mathematisches Stück einer proportionenfreien Lehre vom Geraden und Ungeraden ist die eigenartige Erzeugung der „sämtlichen“ Zahlen im „Parmenides“ 143 E—144 A: dort wird zunächst aus dem seienden Einen, da Eins und Sein zweierlei sind, die Zwei, aus ihr durch Hinzufügung des Einen die Drei, dann weiter vermöge des „Zweimal“ und „Dreimal“ jedes der Produkte 2.2, 3.3, 2.3, 3.2 erzeugt. Man erhält so Gerademalgerades, Ungerademalungerades, Gerademalungerades und Ungerademalgerades und damit

²¹⁾ Vgl. Aristoteles, Met. Δ 14; p. 1020 b, 8—7: οἱ ἀριθμοὶ ποιοὶ τινες, οἷον οἱ σύνθετοι καὶ μὴ μόνον ἐφ' ὃν ὄντες ἀλλ' ὃν μέγεθος τὸ ἐπίπεδον καὶ τὸ στερεόν (οὗτοι δ' εἰσὶν οἱ ποσάκις ποσὸς ἢ ποσάκις ποσάκις ποσὸς), καὶ ὅπως δ' παρὰ τὸ ποσὸν ὑπάρχει ἐν τῇ οὐσίᾳ.

²²⁾ Vgl. die Darstellung J. Kleins a. a. O. (Anm. 20).

angeblich sämtliche Zahlen²⁹). In Wahrheit ergeben sich aus den genannten multiplikativen Erzeugungsprinzipien auch durch unbegrenzt wiederholte Anwendung lediglich die Zahlen von der Form $2^i \cdot 3^k$ ($i, k = 0, 1, 2, 3, \dots$); also nicht alle Zahlen, wohl aber alle Zahlentypen der dyadischen Arithmetik (da ja Ungerademalgerades und Gerademalungerades nicht wesentlich verschieden sind). Es kommt also hier Plato auf die Erzeugung sämtlicher Zahlqualitäten, nicht sämtlicher Zahlquantitäten an.

c) Drittens ist hinzuweisen auf die enge Beziehung der altarithmetischen Dyadik und der ἀρίστος δυνάς der platonischen Lehre von den Ideenzahlen. Die unbegrenzten Reihen 2, 4, 8, 16 ...; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, ..., die unbegrenzt oft wiederholte Verdoppelung und Halbierung, diese Grundzüge der Operationen der proportionenfreien Zahlentheorie finden sich auch in der platonischen Doktrin wieder. Es sei nur auf Stenzels Ausführungen und Belege in „Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles“², S. 50 ff. und 64 ff. verwiesen.

*

Zum Schluß unserer Ausführungen soll versucht werden, die Stufen der historischen Entwicklung anzugeben, die sich nunmehr in den Wandlungen der griechischen Arithmetik und Proportionenlehre im Verlauf des 5. und der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts verfolgen lassen. Es sind vier Stufen zu unterscheiden, die nach den Namen der führenden Mathematiker bezeichnet werden sollen:

I. Altpythagoreische Stufe: „Dyadische“ Arithmetik ohne Proportionen (Lehre vom Geraden und Ungeraden als Grundlage; noch keine eindeutige Primfaktorenzerlegung). Davon getrennt, von musikalischen und geometrischen Fragen herkommend, eine Theorie der rationalen Proportionen. („Dyadischer“ Beweis der Inkommensurabilität der Quadratdiagonale.)

II. Theodorische Stufe: Allgemeine Definition der Inkommensurabilität durch Antanairesis von Maßstrecken (Eucl. El. X, 2, 3). Formulierung des divisiven Axioms des Messens (Eucl. El. X, 1). Irrationalitätsbeweise von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$. Allgemeine Proportionenlehre, getrennt nach den Eidē der Gebilde (Strecken, Zahlen etc.)

III. Theätetische Stufe: Anwendung der Antanairesis in der Zahlentheorie: „Euklidisches Teilverfahren“, Beweis der Eindeutigkeit der Zerlegung im Primfaktoren (Euklid El. VII, 30).

IV. Eudoxische Stufe: Allgemeine und für alle Eidē einheitliche „abstrakte“ Proportionslehre. Definition der Verhältnissgleichheit

²⁹) Parm. 144 A: εἰ οὖν ταῦτα οὕτως ἔχει, οἷον τινα ἀριθμὸν ὑπολείπεσθαι, οὐδὲν ἀνάγκη εἶναι; — Οὐδ᾽ αὖτως γάρ.

durch den „eudoxischen Schnitt“ (Eucl. El. V, def. 5 u. 7). Multiplikatives Axiom des Messens (sog. archimedisches Axiom, El. V, def. 4.)

Diese Periodisierung hier im einzelnen zu begründen, würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten; indessen sollen einige kurze erläuternde Bemerkungen hinzugefügt werden.

Zu I.: Die Herkunft der Proportionenlehre aus der Geometrie und Musik entspricht einer altpythagoreischen Überlieferung, die einen späten Niederschlag noch in der Disposition der arithmetischen Lehrbücher des Nikomachos und des Theon von Smyrna (vgl. J. Klein a. a. O. § 4) findet. Ferner ist hinzuweisen auf die Terminologie der Proportionenlehre: nämlich die Ausdrücke „geometrische Proportion“, „geometrisches Mittel“ usw.; διάστημα-intervallum (im musikalischen Sinn!) für das spätere λόγος-Verhältnis; beides schon bei Archytas, fragm. 2; ferner auf die σύνθεσις und die διαιρέσις λόγου. (s. Eucl. El. V, def. 15—16, vgl. Plato, Tim. 35 B: ἡρχετο διαιρεῖν ὥδε. — Vgl. den Hinweis von E. Frank, „Platon und die sog. Pythagoreer“ S. 158, Anm. 1, wo die Timäusstelle freilich infolge Druckfehlers als 25 B angegeben ist.) Auch das Problem der Irrationalität von $\sqrt{2}$ kann sowohl aus der Geometrie wie aus der Musiktheorie stammen (P. Tannery)²⁴).

Zu II.: Hier würde die Zeuthensche Hypothese²⁵) über die Kennzeichnung der Quadratwurzeln aus 3, 5, 7, ... 17 durch ihre Kettenbruchentwicklung (= Antanairesis) seitens des Theodoros sich gut einfügen; insbesondere, wenn man die Taylor-Toeplitzsche Interpretation²⁶) der Epinomisstelle 990 C, die in ihr ein Approximationsverfahren mittels einer angenäherten Lösung der Pellschen Gleichung angedeutet findet, nicht zu akzeptieren geneigt ist. Die Stelle scheint sich ungezwungener als eine vereinfachte Darstellung der musikalischen Harmonien durch die platonische Tetraktys des Timäus (36 A) erklären zu lassen²⁷).

²⁴) Vgl. P. Tannery, Mémoires scientifiques (her. v. Heiberg u. Zeuthen) Bd. III (Paris-Toulouse 1915), Nr. 71 „Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure“, S. 68 ff. insb. S. 83—89. — Daß Archytas über die altpythagoreische Stufe wesentlich hinaus war, scheint Fragm. A 19 (Diels) zu bezeugen; vgl. Tannery, Mém. III, 244 ff.

²⁵) S. H. G. Zeuthen, Notes sur l'histoire des Mathématiques VIII (Sur la constitution des livres arithmétiques des Éléments d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité), Bulletin de l'Académie R. de Danemark, 1910, Nr. 5 (bes. S. 423 ff.) — Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles, ib. 1915, Nr. 3—4, bes. S. 346 ff.

²⁶) Da. Zeitschr. B. 2, 334 ff., „Die mathematische Epinomisstelle“.

²⁷) Die entscheidende Stelle lautet: ἡ δὲ διακασίον (sc. δύναμις) μὲν εἰς μέσον, ἴσως δὲ τοῦ ἐλάττωτος πλεόν ἑκατόν τε τοῦ μέλλοντος, τὸ δὲ ἕτερον (scil. μέσον) τοῦ αὐτοῦ μέρεος τῶν ἀκρῶν αὐτῶν ὑπερέχον τε καὶ ὑπερεχόμενον (ἐν μέσῳ δὲ τοῦ ἑξ. πρὸς τὰ δώδεκα

Zu III.: Es ist wichtig für das Verständnis des Übergangs von der „theodorischen“ zur „theätetischen“ Stufe, sich klar zu machen, daß die Verwendung der Antanairesis im X. Buch der Elemente die primäre ist, ebenso die divisive Form des Axioms des Messens (X, 1). Das euklidische Teilerverfahren (VII, 1, 2) und gar das „archimedische“ Axiom sind später; letzteres ist durch Archimedes als eudoxisch ausdrücklich bezeugt; es liegt freilich latent schon dem ersten Schritt jeder Antanairesis zugrunde, aber das ist zunächst anscheinend gar nicht bemerkt worden.

Für die Zahlentheorie Theätets gibt es einen noch wenig beachteten platonischen Hinweis (außer den bekannten Theätetstellen), nämlich in den „Gesetzen“ 737 E—738 A, wo von der vollständigen Aufzählung sämtlicher Teiler der Zahl 5040 die Rede ist. Das ist ein ganz analoges, nur allgemeineres Problem, wie das im zahlentheoretischen

τονὲν τὸ τε ἡμίλιον καὶ ἐπὶ τριτονί, τούτων αὐτῶν ἐν τῇ μέσῃ ἐπ' ἀμφοτέρω στροφόμενῃ τοῖς ἀνθρώποις συμφώνου χρῆαν καὶ συμμετρου ἀπνεύματο, παιδῆς ῥυθμοῦ τε καὶ ἁρμονίας χρεῖν, εὐδαίμονι χορεῖζ Μουσῶν δεδομένη. „Die Macht des Zweifachen schreitet fort zu einem mittleren Term m , der um den gleichen Betrag größer ist als der kleinere a und kleiner als der größere Randterm b (sodaß also: $m - a = b - m$), der andere Mittelterm h übertrifft bzw. unterschreitet dagegen um denselben Anteil die Terme an den Enden (sodaß hier: $(h - a) : a = (b - h) : b$) — in der Mitte der Terme im Verhältnis 6 : 12 sind es gerade das $1\frac{1}{2}$ - und $1\frac{1}{3}$ -fache von 6 (sodaß man die Folge hat 6, 8, 9, 12) —; von diesen Termen in der Mitte selbst wendet sich die Macht des Zweifachen nach beiden Seiten hin (d. h. von h und m aus nach außen auf a bzw. b zu, also in die Zwischenräume zwischen a und h bzw. m und b hinein) und gewährt so dem Menschen die zusammenklingende und proportionierte Notwendigkeit, um der rhythmisch-harmonischen Bildung willen, dem seligen Reigen der Musen hingegeben.“ — Nur so lassen sich die entscheidenden Worte τούτων αὐτῶν (Gen. separ.) ἐν τῇ μέσῃ (gegenüber εἰς μέσον am Anfang und übereinstimmend mit ἐν μέσῃ im Zahlenbeispiel) ἐπ' ἀμφοτέρω στροφόμενῃ (nicht ἀπ' ἀμφοτέρων „von beiden Seiten“, d. h. nicht konvergierend, sondern divergierend!) richtig übersetzen. Sachlich besteht ebenfalls nur so enge Übereinstimmung mit der entsprechenden Timäusstelle 36 A ff. Wie das Stallbaum-Apelt'sche Diagramm (s. Apelts Übers. S. 156) zeigt, ergeben m und h in jeder der drei ersten Oktaven μέση und παραμέση ohne Hilfe der Dreiteilung (des rechten Flügels der Tetraktys 3, 9, 27). Da nun in der Epinomis (unmittelbar vor unserer Stelle) gerade nur die drei ersten Oktaven durch die Zahlen 1, 2, 4, 8 (d. h. 1 : 2, 2 : 4, 4 : 8) gegeben werden, stimmt alles zusammen; wir haben in der Epinomis eine vereinfachte Darstellung der platonischen Tonleiter, die dafür hier rein dyadisch begründet ist. Das ist für die Theorie der Dyas in der platonischen Schule von Bedeutung. Es sei endlich noch darauf hingewiesen, daß nur unsere Deutung der Tätigkeit der „entzweimachenden Zweitheit“ (δωζ δυνάμις) gerecht wird; würde man mit Toeplitz die beiden neuen μέσα zwischen m und h annehmen, hätte man eine Dreiteilung des Intervalls $[h, m]$, während wir, wie es sein muß, eine doppelte Zweiteilung (der beiden Intervalle $[a, h]$ und $[m, b]$) erhalten. So glaube ich, daß der Gedanke einer Approximation des geometrischen Mittels (das ja weder in der Epinomis noch in der entsprechenden Timäus-Stelle (36 A), sondern nur in dem in einem anderen Zusammenhang stehenden Fragment B 2 (Diels) des Archytas auftritt) fallen gelassen werden muß.

Teil des Beweises von IX, 36, wo es ja nur für Zahlen der speziellen Form 2^p gelöst wird. Die entscheidenden Worte Platos lauten:

λέγωμεν δι' τὸν πλείστας καὶ ἐφεξῆς μέγιστα διανομάς ἐν αὐτῷ κεκτημένον.

„Wir wollen die Zahl nennen, die die meisten und auch (außerdem) die meisten unmittelbar (in der Zahlenreihe) aufeinanderfolgenden Teiler besitzt.“

ὁ μὲν δι' πᾶς εἰς πάντα πάντας τομάς εἰληγεν ὁ δὲ τῶν τετραράκοντα καὶ πεντακισχίλων ... οὐ πλείους μᾶς θεουσῶν ἐξήκοντα δύναται δι' τέμνεσθαι τομῶν, ἐφεξῆς δὲ ἀπὸ μᾶς μέχρι τῶν δέκα.

„Jede Zahl (Toeplitz: „die ganze Zahl“) gelangt nun zu allen Teilungen nach allen (ihren) Primfaktoren hin; die Zahl 5040 (insbesondere) aber kann durch eine nicht um mehr als um einen hinter der 60 zurückbleibenden Anzahl von Teilern geteilt werden. Aufeinander unmittelbar folgende Teiler sind aber die Zahlen 1 bis 10.“

Der Sinn der Stelle ist von Toeplitz gedeutet worden²⁹). Das Verfahren der Aufzählung aller Teiler einer Zahl ist folgendes:

Es sei beispielsweise $m = p^2 q^3$, wo p, q die Primfaktoren sind. Dann ergibt sich folgende Tafel für alle Teiler:

1, q , q^2 , q^3
 p , pq , pq^2 , pq^3
 p^2 , p^2q , p^2q^2 , $[p^2q^3]$

Diese Tafel stellt die εἰς πάντα πᾶσαι τομαί dar, von denen aber der letzte als nicht-echter Teiler weggelassen werden muß, es ist also die Formel für die Zahl der Teiler $Z(m)$:

$$Z(m) = (2 + 1)(3 + 1) - 1.$$

Analog ergibt sich für den allgemeineren Fall, daß $m = p^a q^b r^c s^d$, wo p, q, r, s die Primfaktoren darstellen:

$$Z(m) = (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) - 1;$$

also für 5040 = $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$:

$$Z(5040) = (4 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 1 = 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 60 - 1.$$

Diese Ableitung erscheint dadurch als die platonische gesichert, daß die Teilerzahl im Text ausdrücklich in der Form 60—1 erscheint, genau, wie die Rechnung sie entstehen läßt. — Diese Ableitung setzt offenbar die eindeutige Zerlegung in Primfaktoren voraus, wie dies auch der im übrigen etwas anders verlaufende euklidische Beweis für IX, 36 tut.

Zu IV.: Für die eudoxische Proportionenlehre vgl. unsere „Eudoxos-Studien“, insb. I²⁹).

²⁹) In einer Vorlesung über „Platos Ideenlehre und die Mathematik“ in Bonn, Wintersemester 1931/32, vorgetragen. Eine freilich sehr kurze Darstellung ist in dem Werke „Von Zahlen und Figuren“ von H. Rademacher und O. Toeplitz (Berlin 1930), S. 101 f. (§ 17 a, Nr. 10) veröffentlicht worden.

²⁹) A. a. O. (Anm. 15).

IN QUELLEN UND STUDIEN ZUR
GESCHICHTE DER MATHEMATIK
ASTRONOMIE UND PHYSIK III