

3680
TANNERY, P.
1905

Un traité grec d'arithmétique antérieur à Euclide.

Par PAUL TANNERY.¹⁾

1. L'ouvrage de BOETHIUS *De institutione musica*²⁾ contient des données intéressantes pour l'histoire de l'arithmétique chez les Grecs, et n'a certainement pas été assez utilisé à cet égard. J'en mentionnerai deux exemples.

Le premier n'a qu'une importance secondaire; cependant il concerne une indication qui permet d'aborder la solution d'une petite énigme. Aucun écrit ne paraît avoir circulé dans l'antiquité sous le nom d'HIPPASUS de Métaponte,³⁾ pourtant, en dehors des légendes relatives à son rôle ou des opinions de physique que lui attribuent les doxographes, on trouve dans JAMBLIQUE sur NICOMAQUE⁴⁾ et dans THÉON de Smyrne⁵⁾ des assertions concernant ses travaux sur l'arithmétique et sur la musique, assertions qui supposent une tradition écrite. On doit donc se demander d'où vient cette tradition, et quelle peut en être la valeur.

Or nous lisons dans BOETHIUS (*Mus.* II, 18, p. 250): „Sed EUBULIDES atque HIPASUS alium consonantiarum ordinem ponunt“. Ce passage conduit à penser que l'opinion dont il s'agit et qui d'ailleurs n'a aucun intérêt

1) Quelques semaines avant sa mort, PAUL TANNERY m'écrivit: „J'ai sur le chantier pour vous un article faisant suite à celui que je vous ai envoyé sur la musique grecque. J'ai l'intention de démontrer que la *κατασκευή κανόνας* d'EUCLIDE n'est pas authentique, et j'ai exhumé de Boeck un fragment d'ARCHYTAS prouvant que déjà il faisait des démonstrations arithmétiques sur le type géométrique.“ Le manuscrit de cet article a été retrouvé par Madame M. TANNERY parmi les papiers de son mari, et il a été mis à ma disposition. L'article n'est pas terminé, mais la partie se rapportant au fragment d'ARCHYTAS est achevée, et elle est publiée ici. G. ENESTRÖM.

2) Je citerai l'édition de FRIEDLEIN: *ANICI MANLI TORQUATI SEVERINI BOETHI De institutione arithmetica libri duo. De institutione musica libri quinque* (Leipzig, Teubner 1867).

3) Voir LAERTIUS DIOGENES, VIII, 84.

4) Ed. TENNULIUS (Arnheim 1668), p. 11: définition du nombre comme „premier paradigme de la formation du cosmos!“ p. 141—142: nom donné à la proportion harmonique, auparavant appelée sous-contraire; p. 159: introduction des 4^e, 5^e et 6^e médiétés.

5) Ed. HILLER (Leipzig, Teubner 1878), p. 59: expériences acoustiques (passage suspect d'ailleurs).

avait été défendue par un certain EUBOULIDE, qui l'aurait exposée comme étant d'HIPPASUS. Mais cet EUBOULIDE est évidemment l'auteur qualifié de pythagoricien dans les *Theologumena arithmetica* (sur l'hexade), et cité à côté d'ANDROCYDE etc., comme ayant raconté que l'âme de PYTHAGORE se réincarnait tous les 216 ans.¹⁾ Nous pouvons dès lors hardiment conclure que c'est à cet auteur (probablement aussi peu digne de foi qu'ANDROCYDE, et, comme lui, de la première période alexandrine) que l'on doit l'origine de la tradition écrite sur les travaux d'HIPPASUS en arithmétique et en musique. Il semble au reste l'avoir forgée sans grand talent d'invention, se contentant de lui faire prendre part aux découvertes de LASOS d'Hermione ou à celles d'ARCHYTAS (malgré l'anachronisme, en ce qui concerne ce dernier, qui vivait au moins un siècle après HIPPASUS). Tout au plus, EUBOULIDE s'est-il avisé en outre de mettre au compte du disciple de PYTHAGORE quelque-une de ses fantaisies personnelles, comme celle qu'a mentionnée BOETHIUS.

2. Mais ce dernier a beaucoup mieux mérité notre reconnaissance, en nous conservant (*Mus.* III, 11, p. 285—286) toute une démonstration d'ARCHYTAS, laquelle semble bien offrir des caractères incontestables d'authenticité. Il s'agit de la proposition qu'un rapport *épimore* (c. a. d. de la forme $\frac{n+1}{n}$) ne peut être divisé en deux rapports égaux par l'intercalation d'aucun nombre. La particularité de cette proposition est une garantie évidente de son ancienneté.

A la vérité, la marche de la démonstration est de nature à nous déconcerter quelque peu de prime abord; elle ne se comprend en effet que si on suppose déjà développée une suite de théorèmes assez considérable sur un plan analogue à celui du livre VII des *Eléments* euclidiens. Mais c'est précisément là ce qui fait à mes yeux l'importance historique de ce fragment d'ARCHYTAS, ce qui la rend presque égale, dans le domaine de l'arithmétique, à celle du célèbre fragment d'HIPPOCRATE de Chios, conservé par SIMPLICIUS d'après EUDÈME.

A la vérité encore, BOETHIUS dénigre lui-même la démonstration d'ARCHYTAS. „Nimium fluxa est“, dit-il en promettant d'en donner plus loin une meilleure. Mais celle-ci, il l'emprunte (*Mus.* IV, 2, p. 303, 19 à 304,6) à la *κατατομή κανόνος* euclidienne, qu'il a presque entièrement

1) En sorte qu'après EUPHORBIE, au temps de la guerre de Troie, il y aurait eu un autre avatar seulement avant PYTHAGORE. PORPHYRE (*De vita Pythagorae*, 45) en compte trois, ΑΓΓΑΛΙΔΗΣ, ΗΡΜΟΤΙΜΗΣ, ΠΥΡΡΗΟΣ, probablement d'après une tradition plus récente. — Notre EUBOULIDE peut aussi être l'auteur mentionné incidemment par LAKRTIUS DIOG. II, 41 à propos de SOCRATE; VI, 20 à propos de DIOGÈNE le cynique, pour deux assertions historiques plus ou moins contestables.

soit traduite, soit paraphrasée, et où la proposition en question porte le No. 3. Or, il y a au fond entre les deux démonstrations une identité réelle, comme on va pouvoir en juger par la comparaison des deux textes.

ARCHYTAS, d'après BOETHIUS.

Sit superparticularis proportio *A. B.*, sumo in eadem proportione minimos *C. DE.* Quoniam igitur sunt minimi in eadem proportione *C. DE.* et sunt superparticulares, *DE.* numerus *C.* numerum parte una sua eiusque transcendit. Sit hæc *D.* Dico, quoniam *D.* non erit numerus sed unitas. Si enim est numerus *D.* et pars est eius, qui est *DE.*, metitur *D.* numerus *DE.* numerum; quocirca et *E.* numerum metietur, quo fit, ut *C.* quoque metiatur. Utrumque igitur *C.* et *DE.* numeros metietur *D.* numerus, quod est impossibile. Qui enim sunt minimi in eadem proportione quibuscumque aliis numeris, hi primi ad se invicem sunt [et solam differentiam retinent unitatem]. Unitas igitur est *D.* Igitur *DE.* numerus *C.* numerum unitate transcendit. Quocirca nullus incidit medius numerus, qui eam proportionem æqualiter scindat. Quo fit, ut nec inter eos qui eandem his proportionem tenent, medius possit numerus collocari, qui eandem proportionem æqualiter scindat.

EUCLIDE *κατατ. κανόνος* (*Music script. Gr.* éd. JAN, p. 152).

Ἐστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ *ΒΓ*, ἐλάχιστοι δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς *Β, Γ* ἔστωσαν οἱ *ΔΖ, Θ*. οὗτοι οὖν ὑπὸ μονάδος μόνῃς μετροῦνται κοινῷ μέτρῳ. ἀφελεῖ ἴσον τῷ *Θ* τὸν *ΗΖ*.

Καὶ ἐπεὶ ἐπιμόριός ἐστιν ὁ *ΔΖ* τοῦ *Θ*, ἡ ὑπεροχὴ ὁ *ΔΗ* κοινὸν μέτρον τοῦτε *ΔΖ* καὶ τοῦ *Θ* ἐστὶ μονὰς ἄρα ὁ *ΔΗ*· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς *ΔΖ, Θ* μέσος οὐδεὶς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τοῦ *ΔΖ* ἐλάττω, τοῦ δὲ *Θ* μείζων, ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς *ΔΖ, Θ* τις. δοοὶ δὲ εἰς τοὺς ἐλάχιστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. οὐδεὶς δὲ εἰς τοὺς *ΔΖ, Θ* ἐμπεσεῖται· οὐδὲ ἄρα εἰς τοὺς *Β, Γ* ἐμπεσεῖται.

Analysons ces deux démonstrations. ARCHYTAS part d'une définition des nombres épimores qu'il faut supposer identique à celle de NICOMACHE,

c'est à dire deux nombres tels que leur différence soit un sous-multiple donné du plus petit (par conséquent soit un commun diviseur des deux nombres). Il prend les nombres minimi dans le même rapport (cf. EUCLIDE VII, 33) et il admet implicitement que dans ces minimi, la différence est le même sous-multiple du plus petit que pour les nombres non minimi qui sont dans le même rapport (ib. VII, 10 et 20). Il sait enfin que les nombres minimi pour un rapport quelconque sont premiers entre eux (ib. VII, 21). Dès lors il lui est facile de démontrer que la différence de deux *épimores minimi* est l'unité.

Cette partie de la démonstration est très circonstanciée. Dans la *Divisio canonis* elle est très abrégée, ou plutôt, quoique dans les *Eléments* il ne soit jamais parlé de nombres épimores, la *Divisio* suppose connu d'avance l'objet de cette démonstration. On aura remarqué dans la démonstration d'ARCHYTAS l'opposition très nette entre l'unité et les nombres. Je n'insiste pas sur l'absurdité du membre de phrase que j'ai mis entre crochets. Evidemment BOETHIUS n'avait pas sous les yeux un texte exempt d'interpolations.

Dans la seconde partie de la démonstration, ARCHYTAS procède beaucoup plus rapidement, mais ce qu'il dit est parfaitement suffisant. Comme il ne peut y avoir de moyen entre deux nombres entiers consécutifs, il lui suffit d'invoquer une proposition qui est un cas particulier de celle d'EUCLIDE VIII, 8. La *Divisio* au contraire démontre assez inutilement par l'absurde l'impossibilité d'intercaler aucun moyen; d'après la proportion précitée, elle conclut à l'impossibilité d'intercaler entre deux épimores non minimi soit un soit plusieurs moyens. Cette conclusion dépasse celle d'ARCHYTAS, en ce qu'elle montre l'impossibilité de diviser un intervalle (rapport) épimore en un nombre quelconque de rapports égaux.

3. La démonstration d'ARCHYTAS devait très probablement se trouver dans le traité dont NICOMACHE nous a conservé le début et qui avait pour objet la théorie de la musique. Ce traité, le seul ouvrage mathématique d'ARCHYTAS qui ait circulé pendant l'antiquité classique, existait encore du temps de PORPHYRE; je ne crois pas que BOETHIUS en ait vu le texte grec et je suppose qu'il a emprunté à APULÉE de Madaure le fragment reproduit ci-dessus.

Comme je l'ai dit, ce fragment me paraît suffisant pour prouver l'existence dès le temps d'ARCHYTAS, d'*Eléments arithmétiques* développés sous la forme que nous nommons euclidienne, peut-être même (si la traduction est fidèle) sans l'inutile représentation par des lignes.

On sait en effet qu'EUCLIDE symbolise un nombre, somme de deux autres, par segment de droite divisé en deux autres. Ainsi, dans le texte grec reproduit plus haut, l'épimore est un segment AZ divisé au point H

en deux segments, HZ égal au sous-épimore, et AH égal à l'unité. Dans le texte d'ARCHYTAS, une somme est au contraire représentée par deux lettres juxtaposées, dont chacune figure une partie de la somme. Ainsi l'épimore est DE , D étant l'unité, et E étant égal au sous-épimore C . Ce système est plus simple, et tout à fait analogue à celui qu'emploie ARISTOTE. Il diffère d'ailleurs essentiellement de notre notation algébrique, en ce qu'il reste concret. La lettre remplace bien un nombre quelconque (ou un objet de la pensée), mais seulement là où ce nombre est supposé placé; elle n'en symbolise pas la valeur et ne se prête pas aux opérations. C'est pour cela qu'ARCHYTAS ne prend pas C et CD pour les deux termes du rapport. Il va sans dire que nous devons naturellement supposer les *Eléments arithmétiques* existant avant ARCHYTAS, comme beaucoup moins parfaits que ceux d'EUCLIDE, mais ARCHYTAS lui-même et aussi EUDOXE ont sans aucun doute contribué à les améliorer et à les développer, soit dans un intérêt purement arithmétique, soit dans leurs recherches relatives à la musique.

IN BIBLIOTHECA MATHEMATICA 3.6