

7 notes dans une gamme... toujours ? Pourquoi ?

Nicolas Minet

Mais bien sûr ! Le système de Pythagore reliait l'arithmétique à la musique, et, au-delà, à toutes les parties de l'Univers, dans un vaste système philosophique. Cette vision du monde héritée des Grecs a dominé la culture scientifique de toute l'Europe médiévale : le Quadrivium (arithmétique, géométrie, musique et astronomie) constituait la base des sciences.

Nicolas Minet dévoile pour PLOT les fondements de cette si ancienne liaison. Ce texte est le compte rendu d'un atelier qu'il a animé aux Journées Nationales de l'APMEP à Clermont-Ferrand en 2006.

On trouvera à plusieurs reprises dans le texte un renvoi noté [@], qui propose au lecteur de consulter la « Feuille à problèmes » de l'IREM de Lyon à l'adresse suivante :

<http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/feuille7/7notes/7notes.html>

On y retrouve les grandes lignes de ce texte, quelques compléments, photos, et surtout des fichiers audios qui illustrent les propos en musique, plus parlants (chantants ?) qu'un texte.

Nicolas Minet
enseigne les mathématiques au lycée
Marcelin Berthelot à
Châtellerauld (86).

Do, ré, mi, fa, sol, la, si...

Si l'on dit aujourd'hui de ces 7 notes qu'elles forment, dans cet ordre, la « gamme diatonique de do majeur », cette succession de noms de notes dissimule un implicite, à savoir les « différences sonores » entre deux notes consécutives. Mais comment ces différences, qu'on appelle intervalles en musique, sont-elles déterminées ? Nous allons examiner deux choix de tels intervalles faits dans notre civilisation occidentale, l'un attribué à Pythagore, datant en tout cas de l'Antiquité grecque, l'autre présidant à la construction, du moins théoriquement, de la majorité des instruments actuels. Les mathématiques nécessaires sont à peu de choses près du niveau du collège, où la présence de professeurs de musique permet d'envisager ce sujet comme relevant de l'interdisciplinarité.

Prélude ...

L'Histoire de la musique a été le théâtre de divers compromis, que ce soit par exemple au niveau de la forme des instruments (ce qui ne sera pas notre sujet) ou

du choix des notes. Pour faire de la musique, il faut en particulier déterminer « différentes hauteurs de sons », donc déterminer un système de notes avec lesquelles la musique sera exécutée. Intéressons-nous à deux attitudes qui s'offrent au facteur d'instruments :

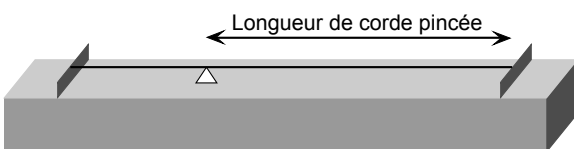
- il peut tâtonner, fabriquer différents modèles, les tester, et les modifier jusqu'à obtenir satisfaction...
- ...ou opter pour une méthode un peu moins empirique, qui consisterait à se fixer des principes *a priori*, avant la conception de l'objet désiré, ce qui n'exclut cependant ni les essais insatisfaisants ni, par conséquent, la nécessité de modifier les principes et de construire successivement plusieurs instruments !

Nous nous contenterons ici d'expliquer comment a été conçue l'échelle de sons appelée « gamme de Pythagore », de signaler en quoi elle peut paraître insuffisante, et nous terminerons par un aperçu de la « gamme également tempérée » qui domine depuis plusieurs siècles notre musique occidentale.

Brefissimo point historique...

Il serait erroné de croire que seul le mysticisme du nombre 7 explique le choix de 7 notes pour l'exécution musicale. La tradition accorde à la « gamme de Pythagore » une place récurrente dans des textes de la Grèce Antique, relayés au Moyen Âge par des personnages tel Boèce (VI^{ème} siècle) ; cette gamme, ancêtre de nos gammes « diatoniques » aurait été élaborée à l'École Pythagoricienne dans le cadre d'un culte voué aux nombres entiers et à la faculté qu'on leur prêtait de permettre la compréhension de l'Univers. C'est à sa rencontre que nous irons dans quelques lignes.

Toujours dans la Grèce Antique, des systèmes englobant la gamme de Pythagore ont été proposés par des théoriciens tel Aristoxène (II^{ème} siècle avant J.C.), avec une « division du canon » ; ce canon tout à fait pacifique est un instrument rudimentaire également appelé « monochorde » : le son est produit par une simple corde tendue au dessus d'une caisse de résonance en bois. On peut comparer ce son « de base » avec un second son, joué ensuite en pinçant une corde plus courte, grâce à un chevalet, objet mobile figuré par un triangle :



Des choix (cf [1]) de systèmes à 4 notes, appelés tétracordes, ont été faits, et l'assemblage de deux tétracordes ayant une note commune a fourni des gammes à... 7 notes ! Malgré les raisons différentes des choix, on retrouve en particulier dans ces systèmes les intervalles de la gamme de

Pythagore.

Des nuances entre les gammes sont apparues (genres, modes,...), qui ont été conservées peu ou prou jusqu'au XVI^{ème} siècle, quand des exigences liées à la transposition d'une mélodie sont devenues prioritaires. Pour autant, des gammes heptatoniques ont subsisté, même si d'autres nombres que 7 ont été utilisés : ainsi, les pianistes nous étonnent sur un clavier organisé selon un schéma répétitif de 7 notes sur les touches blanches, touches blanches elles-mêmes interrompues par 5 touches noires selon une périodicité visible à l'œil nu. On parle alors de gamme chromatique lorsqu'on évoque cette gamme à 12 notes.

Do, ré, mi, fa, sol, la, si, do... y a-t-il plusieurs « do » ?

Qu'on chante ou qu'on joue d'un instrument, on dispose d'un nombre variable de notes : si les pianistes n'ont pas d'autre issue que d'utiliser les 80 à 90 touches de leur clavier, c'est une infinité de notes qu'offrent la voix, un trombone, un violon... car si l'étendue des sons potentiels est limitée par la note « la plus grave » qu'on puisse produire et « la plus aiguë », aucune autre contrainte ne subsiste entre ces deux bornes. On parle parfois de « 8 notes » en disant : do, ré, mi, fa, sol, la, si, do. Peut-on considérer que les deux « do » sont deux notes différentes alors qu'elles portent le même nom ? Bien sûr, le 2^{ème} do est plus aigu que le 1^{er}, et voici comment percevoir le lien entre deux « do » consécutifs : par exemple, on obtient le premier en pinçant une corde d'une longueur donnée, et l'autre en pinçant la même corde, mais deux fois plus courte.

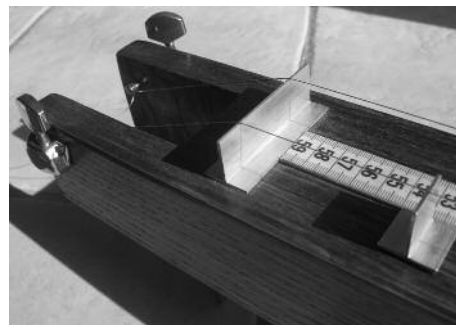
On dit que le 2^{ème} do est à l'octave supérieure du 1^{er}, et que l'intervalle entre les deux notes est une octave.

En faisant l'expérience, indispensable à quiconque ne se trouvant pas convaincue par le texte – à défaut d'expérience, voir [@] – on a, si son oreille a été un minimum exercée, une impression particulière de « ressemblance » en entendant ces deux notes... On s'autorise alors à leur donner le même nom !

L'intervalle d'octave est probablement le seul intervalle qu'on rencontre dans toutes les civilisations. Le choix de notes intermédiaires relève entre autres de la tradition, de la culture, de la science.

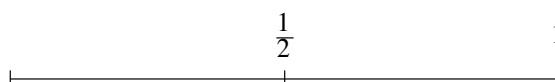
Qu'entendrons-nous par « gamme » ?

Prenons une corde dont nous notons 1 la longueur (l'unité). Nous produisons une note à l'octave (supérieure) de ce son si la corde est de longueur moitié. Petite parenthèse : fabriquer un monocorde nécessite une caisse de résonance en bois, des trépieds pour ne pas la poser à même le sol, vis et mécanique de guitare (à acquérir ou à se faire offrir gracieusement dans un magasin de musique...) pour tendre la corde. On peut voir ci-dessous un objet qui serait en l'occurrence un bicorde (photo complète dans [@]) avec deux cordes aux caractéristiques identiques : même diamètre, même longueur et même tension, produisant ainsi le même son. L'intérêt d'avoir deux cordes identiques est de pouvoir faire une comparaison entre le son de référence, produit par la



corde de longueur 1, et un autre son, obtenu en réduisant la longueur de la corde vibrante (sans la couper !) en utilisant un chevalet mobile (à droite sur les photos).

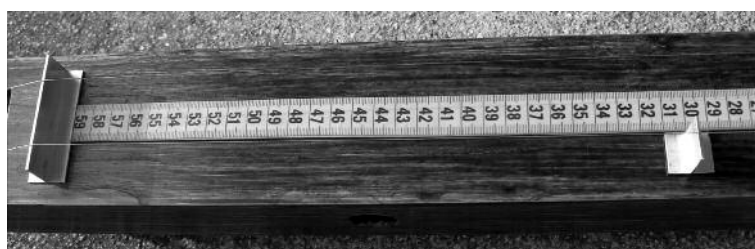
Nous dirons qu'une **gamme** se définit par une échelle de sons entre deux notes à l'octave l'une de l'autre, ce qui revient donc, en pensant « longueur de cordes », à choisir un ensemble de nombres compris entre $\frac{1}{2}$ et 1...



L'infini des possibilités peut laisser perplexe. Il faut donc se donner des critères de choix. L'idéal serait de posséder un tel instrument – et il y en a dans les laboratoires de physique de nombreux lycées, peut-être de certains collèges – de prendre le temps de déplacer le chevalet et de relever les positions donnant une note « agréable » lorsqu'il est joué à la suite de la note « fondamentale », cet « agrément » devenant un critère subjectif pour choisir des notes intermédiaires, sans fixer *a priori* de limite au nombre de notes.

7 notes : un idéal certain ?

7 est un nombre de notes retenu par l'Histoire... En pensant à une « régularité » des intervalles entre deux notes, on peut avoir au moins deux idées : une division arithmétique entre les cordes de



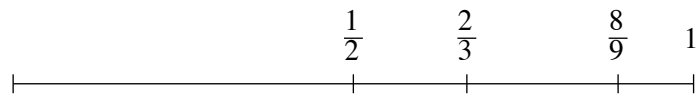
longueur 1 et $1/2$ (la raison de la suite est $1/14$) ou une division géométrique : entre les deux longueurs de cordes, un rapport constant : $\sqrt[7]{\frac{1}{2}}$ ([@] pour une écoute).

On peut voir dans cette recherche de division en « parties égales » d'un intervalle musical l'une des origines possibles de la rencontre des « savants » grecs avec le problème de l'irrationalité (cf [1]). On sera conscient ici d'avoir une méthode de détermination des intervalles *a priori*, en se fixant un nombre de notes et en calculant les longueurs avant de concevoir l'instrument ; une fois celui-ci terminé, il faudra ensuite juger « à l'oreille » de la validité du choix ainsi fait.

À la rencontre de la gamme de Pythagore

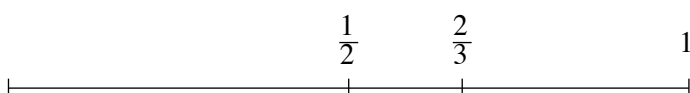
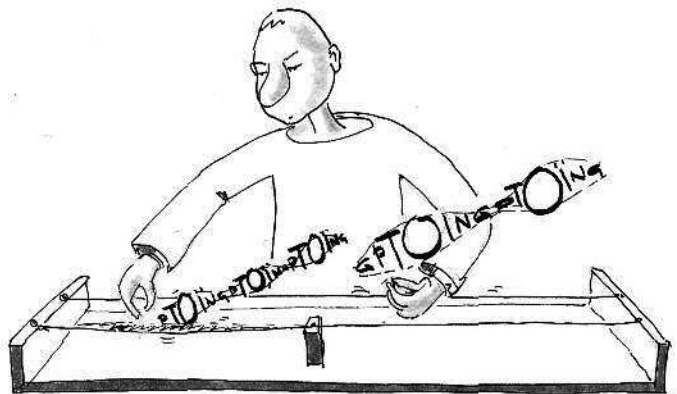
Nous allons maintenant examiner le choix attribué à Pythagore, donnant au passage une explication de la prééminence du nombre 7 dans les gammes ; après la moitié (pour l'intervalle d'octave), quoi de plus simple que le tiers de la corde ? Mais $1/3 \notin [1/2 ; 1]$, ce qui impose — c'est un des nœuds de l'affaire — de prendre plutôt la note à l'octave inférieure, qui nous donne, on l'a dit, une impression similaire, d'où le choix du nombre $2/3$. Pour les Pythagoriciens, considérer que des fractions formées avec les premiers nombres entiers $1/3$ et $2/3$ donnent des sons consonants avec le son émis par la corde de référence était un acte de foi, car ce sont des lois numériques — autour des nombres rationnels — qui étaient censées permettre de comprendre l'Univers.

Deux notes, ce n'est pas assez pour faire de la musique... Voici le principe pour poursuivre : puisque la corde de longueur $2/3$ « sonne bien » avec la corde de départ, une corde de longueur « les $2/3$ des $2/3$ » donnera la même impression avec la corde de longueur $2/3$... On obtient ainsi une corde de longueur $4/9$. Mais comme $4/9$ n'est pas compris entre $1/2$ et 1, on prend le même son... à l'octave inférieure en multipliant par 2 la longueur. On obtient donc une corde de longueur $8/9$:



Et on n'a qu'à itérer le processus... Voici les douze premières fractions obtenues selon ce principe :

$$\begin{aligned}
 1 &\rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{8}{9} \rightarrow \frac{16}{27} \rightarrow \frac{64}{81} \rightarrow \frac{123}{243} \rightarrow \\
 \frac{512}{729} &\rightarrow \frac{2048}{2187} \rightarrow \frac{4096}{6561} \rightarrow \frac{16384}{19683} \rightarrow \\
 \frac{32768}{59049} &\rightarrow \frac{131072}{177047} \rightarrow \frac{524288}{531441}
 \end{aligned}$$



7 notes : un certain idéal...

Le fait que 7 astres — hormis les étoiles — étaient connus à l'époque aurait été fortement lié au choix des Pythagoriciens de s'en tenir à 7 notes, et en annonçant que ces astres émettent des sons en se déplaçant, naissait une théorie, « l'Harmonie des Sphères », futur carrefour de la religion, de l'astronomie, de la musique et des mathématiques en Occident, et ce au moins jusqu'à la Renaissance.

Nous laisserons de côté cette approche (cf [2]), et constaterons plutôt que la 7^{ème} fraction obtenue est plus proche de 1 que toutes les précédentes ! On peut considérer — en étant conscient que ce n'est pas tout à fait vrai — qu'on a quasiment bouclé la boucle ! Et la prochaine « bonne approximation » intervient à la 12^{ème} note ! La précédente intervenait à la 5^{ème} note, car $128/243$ est « suffisamment proche » de $1/2$.

On peut voir ici une raison de la place privilégiée des nombres 5, 7 et 12 dans les gammes (penser aux touches noires & blanches du piano par exemple).

Réordonnons les sept premières fractions obtenues en remplaçant $\frac{2048}{2187}$ par 1 ; nous obtenons :

$$\frac{1}{2} < \frac{128}{243} < \frac{16}{27} < \frac{2}{3} < \frac{512}{729} < \frac{64}{81} < \frac{8}{9} < 1$$

À l'écoute des notes correspondantes, jouées de la plus grave à la plus aiguë, la 4^{ème} note peut heurter... en tout cas, peut-être par rapport à nos habitudes occidentales — écouter dans [@] — qui amènent à considérer qu'il faut qu'elle soit remplacée par une note plus grave, ce qui impose

de choisir une fraction plus grande ; la fraction la plus simple qui respecte ce contrat est $3/4$; notons d'ailleurs que les $2/3$ de $3/4$ redonnent $1/2$. Cette correction faite — et elle a pu l'être — nous avons (peut-être...) l'impression d'entendre une gamme « convenable »... Remarquons en tout cas que c'est la fraction la plus « compliquée » qui est en cause, et pensons à l'artisan qui aurait en charge la division en 729 d'une corde afin d'en prendre 512 parties ; voilà un autre argument pour lui substituer un autre nombre.

Question légitime : peut-on, au bout d'un nombre fini d'itérations, obtenir une note déjà rencontrée ? Cela reviendrait à dire que deux notes seraient obtenues l'une après n multiplications par $2/3$ et n' corrections (tel le $4/9$ devenu $8/9$) et l'autre avec p multiplications par $2/3$ et p' corrections, amenant à :

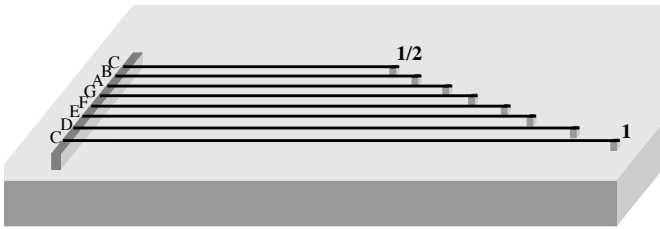
$$(2/3)^n \times 2^{n'} = (2/3)^p \times 2^{p'}$$

Cela revient à l'égalité entre une puissance de 2 et une puissance de 3, d'où l'impossibilité théorique du problème ; mais la perception de l'oreille a ses limites, ce qui permet, comme on l'a vu, de considérer par « approximations » que, parfois, « la boucle est presque bouclée ». La jolie formulation : « le cycle des quintes ne se referme pas » provient, elle, du fait que la 5^{ème} note de la gamme, la « quinte » (le sol : « G ») est obtenue par la fraction $2/3$, qui permet la construction de toute la gamme.

Et voici donc les rapports de la gamme de Pythagore (avec la notation « américaine » : C = do, D = ré, ...)

C	B	A	G	F	E	D	C
$\frac{1}{2}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{8}{9}$	1

Voici donc un instrument possible – esthétique mise à part – à huit cordes, chacune de longueur l’une des fractions ci-dessus.



Des notes « justes »... Une raison physique...

Cette gamme de Pythagore a des avantages : elle utilise un principe naturel, celui de la voix humaine, dit des « quintes justes ». On l’a dit, la fraction $2/3$, base de la construction de la gamme, est la cinquième note de la liste, une fois réordonnées les notes dans l’ordre croissant des fréquences. Quant au mot « juste », en voici deux interprétations : premièrement, il a été constaté que, lorsqu’un son est émis, des personnes à qui on demandait de le chanter émettaient spontanément, non pas ce son, mais... sa quinte ! Mais que le rapport de quinte ait été dans de nombreuses cultures considéré comme consonant a aussi une explication « scientifique » : alors qu’on pourrait penser produire avec un instrument un son à la fois, disons de fréquence N , par exemple en appuyant sur une touche d’un piano, c’est en fait une multitude de sons superposés qui sont émis et que notre oreille perçoit globalement, chacun ayant

une intensité et une fréquence propre, dépendant des propriétés du corps mis en vibration. Dans cette multitude, on peut mettre en évidence expérimentalement des sons appelés harmoniques du son de fréquence N , qui ont théoriquement pour fréquence les multiples de N . L’inverse proportionnalité entre longueur de corde et fréquence étant approximativement acceptable, avec des hypothèses sur la nature d’une corde (longue, fine,...) on donne dans le tableau ci-dessous des fréquences et non des longueurs ; on reconnaîtra dans la première colonne les inverses de fractions dont certaines nous ont accompagnés depuis l’évocation de la gamme de Pythagore.

Ce tableau (dont on peut imaginer le prolongement vers la droite) permet par exemple de constater que la note de fréquence kN avec k rationnel, ayant le maximum d’harmoniques en commun avec une note, est celle de fréquence $3N/2$ — la quinte de cette note (rappelons que si k est une puissance de 2, alors la note de fréquence kN porte le même nom que celle de fréquence N , cas que nous excluons donc). Du coup, lorsqu’une note et sa quinte sont jouées ensemble, quoi de plus naturel qu’elles semblent consonantes, étant donné que les sons qu’elles génèrent sont, théoriquement, pour moitié, les mêmes !

Harmoniques d’une note (disons : do)	N	$2N$	$3N$	$4N$	$5N$	$6N$	$7N$	$8N$	$9N$	$10N$
Harmoniques de la tierce majeure Zarlino (XVI ^{ème} s.) (mi)	$5/4 N$	$5/2 N$	$15/4 N$	$5N$	...	...	...	$10N$	...	...
Harmoniques de la quarte de Pythagore (fa)	$4/3 N$	$8/3 N$	$4N$	...	...	$8N$	...	...	$12N$	...
Harmoniques de la quinte de Pythagore (sol)	$3/2 N$	$3N$	...	$6N$	...	$9N$	...	$12N$	...	$15N$

La gamme de Pythagore : vraies notes, fausse route ?

La gamme de Pythagore est restée une référence tout au long du Moyen-Âge et jusqu'au XVI^{ème} siècle, de même que le monocorde est resté l'instrument de base du théoricien de la musique, le « musicus » qui était finalement seul véritable musicien, par opposition au « cantor », simple exécutant. Deux inconvénients sont apparus à cette gamme : il y eut le développement — notamment pour la liturgie — de la polyphonie, c'est-à-dire le fait de jouer plusieurs notes simultanément et non plus l'une après l'autre,

comme lors du choix des notes sur le monocorde. On a considéré que les notes de la gamme de Pythagore ne répondaient pas à cette première exigence, et on a pris d'au-

tres fractions, plus simples pour former des accords « parfaits » (cf [2]).

Par ailleurs, lors de l'avènement des instruments à clavier, s'est posé le problème de la transposition ; on peut le rencontrer dans la situation courante que voici : que fait une personne qui commence à chanter et réalise finalement qu'elle est partie « de trop haut » et qu'elle doit s'interrompre car la suite de la mélodie est trop aiguë ? Il lui faut reprendre le chant en partant d'une note plus grave, décalant d'autant les autres notes vers le grave — de manière instinctive ? — et elle reconsti-

tue un air donnant l'impression d'entendre la même mélodie.

Mais peut-on, sur un instrument fabriqué avec une échelle de notes fixées (comme par exemple celui à 8 cordes de la page précédente), changer la note de départ et décaler toutes les notes en donnant l'impression de conserver la mélodie ? Ou bien cela impose-t-il des règles pour l'échelle en question ?

Les réponses sont « non » à la 1^{ère} question et « oui » à la 2^{nde}.

Autrement dit, si on joue les trois premières cordes, puis les trois dernières, sur un instrument accordé selon la gamme de Pythagore, on n'a pas nécessairement l'impression de jouer le « même air », transposé.

Précisons : on peut à partir d'une mélodie, imaginer la rejouer transposée (« décalée ») :

- par exemple en gardant le même rapport de longueurs de cordes, d'une note à l'autre, que dans la mélodie de départ : la mélodie étant jouée sur des cordes de longueur a, b, c , sa transposée est : $d, db/a, dc/a$,
- ou encore en gardant la même différence de longueurs de cordes, d'une note à l'autre, que dans la mélodie de départ : si la mélodie est a, b, c alors la transposée est : $d, d + (b - a), d + (c - a)$.

Si l'on accepte ainsi que ce qui compte pour reconnaître une mélodie transposée, c'est d'avoir une échelle géométrique (car la seconde version, transposition « arithmétique », heurte l'oreille en général ; écouter [2] pour se faire une opinion), on constate que la gamme de Pythagore ne convient pas car les fractions ne sont pas les termes d'une suite géométrique...



La gamme également tempérée

On appelle gamme également tempérée une gamme dont les n notes ont pour fréquence les termes d'une suite géométrique : l'intervalle entre deux notes consécutives est solution de l'équation $x^n = 1/2$. Le nombre $a = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ est l'intervalle appelé demi-ton pour la gamme également tempérée qui préside à la conception « théorique » de la plupart des instruments à notes fixes actuels (piano, guitare, instruments à vent munis de clés...).

Mais pourquoi 12 et plus 7, alors ?

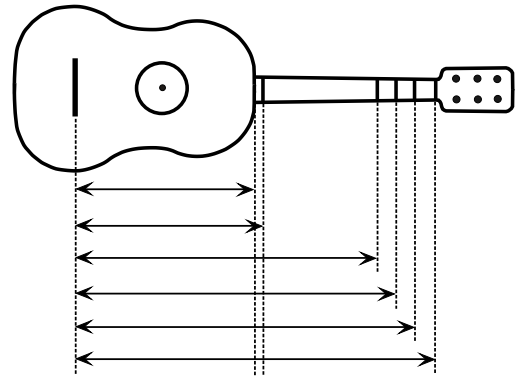
On peut se rappeler qu'on a proposé dans un paragraphe précédent une échelle à 7 notes dont les fréquences forment une suite géométrique ; si le résultat n'a pas été considéré comme satisfaisant (voir [4] pour se faire une opinion), c'est peut-être parce que trop peu de notes se rapprochent des quintes « justes » dont on a rappelé l'importance avec la théorie des harmoniques ! En fait, ce défaut est assez bien atténué en passant à 12 notes ; en effet, le nombre a^7 est une valeur approchée de $2/3$ à 0,001 près. Constatons de plus que la 12^{ème} fraction obtenue est plus proche de 1 que toutes les précédentes ! Ainsi, 12 est un nombre « médiateur », offrant à la fois un nombre de notes relativement important, la possibilité de transposer, et une approximation satisfaisante des quintes naturelles.

On peut se demander si la différence entre le système pythagoricien et le système tempéré est perceptible. La réponse est oui, pour certains intervalles... et pour une oreille (un peu) exercée.

Les cases des guitares...

On lit souvent dans un manuel de 1^{ère} S que la suite longueurs des cases des guitares est géométrique...

En voici l'explication sur une guitare classique : cet instrument est conçu de telle sorte que la longueur de chaque corde pincée en posant son doigt sur



la douzième case (située à la « jonction » entre le corps de la guitare et le manche) est égale à la moitié de la corde complète ; on obtient ainsi l'octave de la corde jouée « à vide » ; de plus, la division en 12 cases respecte le principe de la transposition, ce qui fait que les douze longueurs de cordes, obtenues en posant le doigt sur la 1^{ère} case, puis la 2^{ème}... et qui sont figurées par les flèches sur le schéma ci-dessus, forment une suite géométrique de raison $\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$. Il reste à vérifier que cette raison est aussi celle la suite des longueurs de cases...

C'est l'avènement des instruments à clavier qui, au début du XVII^{ème} siècle a imposé ce choix de 12 notes en Europe ; sa paternité est attribuée à différents noms : Werckmeister, Stévin...

En conclusion, une gamme est une affaire de compromis, le nombre de notes n'étant qu'un paramètre parmi d'autres.

Voir la bibliographie en bas de la page 29.