

3756 pdf
TANNER, P.
1876
IN REVUE PHILOSOPHIQUE 2
P. 433-481

LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE

ET LA NOTION D'ESPACE

I

On confond souvent à tort, sous le nom de *géométrie imaginaire*, plusieurs théories essentiellement distinctes.

Ecartons tout d'abord la plus récente, je veux dire la géométrie à n dimensions.

Les métaphysiciens y chercheraient en vain quelques lumières pour éclaircir la fameuse question : L'existence d'espaces ayant plus de dimensions que le nôtre est-elle possible? Ce problème, pour longtemps encore, sinon pour toujours insoluble, ne peut être raisonnablement abordé que du côté de la physiologie. Dans la nouvelle théorie mathématique, il ne s'agit nullement en fait de géométrie, mais simplement d'algèbre pure.

L'objet théorique de l'algèbre est l'étude des relations (équations) qui peuvent exister entre diverses quantités variables. La constitution, par Descartes, de la géométrie analytique a respectivement ramené l'étude des problèmes qui se présentent, soit sur le plan, soit dans l'espace, aux cas algébriques où les variables sont deux ou trois. Ceux où elles sont en nombre plus élevé ne trouvent leur application pratique que dans les sciences dont l'objet est moins abstrait que celui de la géométrie.

Dès les commencements de la géométrie analytique, il s'est fait comme une fusion entre l'algèbre et la science de l'espace. Ainsi, que l'on convienne, avec Descartes, de définir la position d'un point quelconque d'un plan par ses distances (coordonnées) à deux droites fixes perpendiculaires entre elles, toute droite placée sur le plan pourra se représenter par une équation du premier degré entre les coordonnées, et, réciproquement, toute équation du premier degré

L'HYPOTHÈSE GÉOMÉTRIQUE

DU MÉNON DE PLATON

I. Outre le passage sur « le nombre nuptial » au livre VII de la *République*¹, il n'y a guères qu'un *locus mathematicus* de Platon, qui n'ait pas, jusqu'à présent, reçu d'explication réellement satisfaisante. C'est un endroit du *Ménon*².

Pour expliquer un mode de raisonnement qu'il emploie, Socrate montre quel usage en font les géomètres :

« Quand je dis : — examiner suivant une hypothèse, — j'entends ce procédé ordinaire aux géomètres. Qu'on les interroge sur une figure, « (χωρίου), par exemple, qu'on leur demande s'il est possible d'inscrire « cette figure triangulaire-ci dans ce cercle-ci, (ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ « χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι), ils feront une réponse comme celle-ci : — Je « ne sais pas encore ce qui en est, mais je pense que pour cette ques- « tion il convient d'avoir une hypothèse du genre de la suivante. »

Ici vient l'endroit obscur dont voici le texte :

εἰ μὲν ἐστὶ τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον, οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρτείναντα ἐλλείπειν τοιοῦτῳ χωρίῳ, οἷον ἂν αὐτὸ παρτεταμένον ᾗ, et où tous les commentateurs s'accordent à voir la condition pour que le triangle soit inscriptible dans le cercle. S'il en est ainsi, continue Socrate, « il en résultera telle chose, et telle autre, si cette condition « n'est pas remplie. Cette hypothèse posée, je consentirai à te répondre « sur ce qui en résultera pour l'inscription de cette figure dans le cercle, « et à dire si cette inscription est possible ou non. »

II. Ce ne sont pas ici, comme pour le passage de la *République*, les explications complètes qui font défaut. Celles que l'on a données feraient presque la matière d'un volume³, mais toutes celles qui méritent l'examen, autant que nous sachions, se heurtent contre de sérieuses difficultés.

Dans l'impossibilité de rapporter le texte au cas d'un triangle quel-

1. Voir la *Revue philosophique* de février 1876.

2. Platon, édition Didot, vol. I, p. 454. l. 52, — p. 455, l. 4.

3. Voir, dans la traduction de Cousin, une très-longue note. — Dans sa « dissertation philologique » de *Platone mathematico* (Bonn. 1861), C. Blass connaît vingt-sept essais. Disons en passant que ce « philologue » n'entend rien aux mathématiques.

conque à inscrire dans un cercle donné, elles admettent qu'il s'agit d'un triangle ou rectangle, ou isocèle, ou même à la fois rectangle et isocèle. Socrate a, en fait, précédemment tracé, pour un autre objet, divers triangles de cette dernière espèce. Il désignerait donc l'un d'eux (τόδε), en même temps qu'un cercle (τόνδε) qu'il tracerait tout en poursuivant son discours.

Il est déjà singulier que Platon omette ainsi, précisément quand il se propose d'expliquer ce qu'est une hypothèse géométrique, une condition essentielle de celle qu'il prend pour exemple. Mais si l'on passe outre, il est facile de voir que pour que l'inscription soit possible, il faut et il suffit que l'hypoténuse du triangle rectangle soit égale au diamètre du cercle.

Comme d'ailleurs en géométrie ancienne, un cercle n'est jamais donné que son diamètre ne le soit, il devient absolument incompréhensible, qu'au lieu d'énoncer une condition aussi simple, ce qui satisferait pleinement au but qu'il se propose, Socrate la transforme en une autre beaucoup plus compliquée. Il n'a pas à éblouir Ménon de ses connaissances, il doit avant tout chercher à se faire comprendre¹.

III. Cette double difficulté ne peut être levée, si l'on conserve le point de départ commun aux explications les plus satisfaisantes, et qui consiste dans l'identification du terme παρατείνειν avec l'expression παραβάλλειν, classique dans Euclide.

Παραβάλλειν τὸ χωρίον A παρὰ τὴν γραμμὴν p, (appliquer l'espace A sur la ligne p) signifie : construire, sur une droite de longueur p, un rectangle dont la surface soit A, ce qui revient à trouver une autre ligne droite x telle que $px = A$ ou $x = \frac{A}{p}$, de sorte qu'arithmétiquement, παραβάλλειν παρὰ signifiera : diviser par : (Diophante).

A la vérité, il semble bien qu'au livre VII de la *République* (Platon, éd. Didot. II, 132, 48), παρατείνειν soit employé avec le sens classique de παραβάλλειν dans Euclide. Mais nous savons d'ailleurs que la langue mathématique de Platon n'est pas assez fixée pour qu'il faille attacher à ce rapprochement une importance capitale².

Ce qui a le plus séduit les commentateurs, c'est que l'identification de παρατείνειν avec une expression d'Euclide permet d'expliquer ἐλλείπειν d'une façon analogue.

La παραβολή simple exposée plus haut peut, en effet, se faire aussi d'une façon plus complexe (Euclide, VI, 28, 29), c'est-à-dire soit avec défaut, soit avec excès (ὥστε ἐλλείπειν ἢ ὑπερβάλλειν) d'un rectangle semblable à un rectangle donné.

Dans ce cas, les deux rectangles (l'appliqué et celui en défaut ou en

1. Nos conclusions à cet égard sont celles du savant et regrettable Hankel (Zur Geschichte der Mathematik Leipzig, 1874, p. 134).

2. Voir : *Revue philosophique* de février 1876, p. 185, la note sur δύναμις employé dans les sens opposés de racine et de carré.

excès) ont la même hauteur qui est l'inconnue à construire; la somme ou la différence de leurs bases est la ligne donnée ¹.

Soit A la surface à *παράλλειν* (ici la surface du triangle donné), p la ligne donnée, le paramètre (ici la base du triangle, *παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν*), m le rapport donné de la base à la hauteur du rectangle en défaut (*ἔλλειμα*), x la hauteur commune, l'équation qui traduit analytiquement pour nous la construction euclidienne dans le cas de l'*ἔλλειψις*, est :

$$px - mx^2 = A^2.$$

Si nous voulons appliquer ce langage à l'interprétation du passage de Platon, il faut d'abord supposer l'*ἔλλειμα* carré; c'est-à-dire $m = 1$.

Si nous désignons par h la hauteur du triangle abaissée sur la base p , en remarquant que la surface du triangle $A = \frac{ph}{2}$; la condition énoncée par Platon, que l'*ἔλλειμα*, mx^2 , soit égal à A , deviendra :

$$x = h = \frac{p}{2},$$

c'est-à-dire que la hauteur du triangle donné est égale à la moitié de la base.

Il est clair que cette condition n'est ni nécessaire, ni suffisante pour l'inscription du triangle dans un cercle donné. Il doit donc y avoir une condition sous-entendue relative à ce cercle.

La plus simple est qu'il soit décrit sur la base comme diamètre; mais elle ne suffit pas, il faut encore admettre soit que le triangle est isocèle, soit qu'il est rectangle. De l'une quelconque de ces conditions et de celle exprimée on déduira l'autre.

Il est difficile de croire que Platon ait supposé le triangle isocèle sans le dire. Mais si le triangle est rectangle et le cercle décrit sur la base comme diamètre, l'inscription est toujours possible et la seule condition exprimée d'une manière aussi diffuse est inutile.

Reste à supposer que Platon ait regardé le triangle comme donné de surface seulement, non d'espèce, et que le problème soit en réalité d'inscrire dans un cercle décrit sur la base comme diamètre, un triangle dont on connaît, outre la base, la hauteur. Alors la condition qu'il exprime serait celle du maximum que peut atteindre la hauteur et au-delà duquel le problème n'est plus possible. Si c'est là le sens véritable qu'il attachait à ses paroles, il faut reconnaître qu'il s'est exprimé d'une manière aussi défectueuse qu'obscur.

IV. Nous ne prétendons, pour notre part, que proposer une conjecture. Elle souffre elle-même, il est vrai, une difficulté réelle; mais elle

1. Le problème revient à construire géométriquement une racine d'une équation complète du second degré; c'est d'ailleurs des termes employés à ce sujet que sont venus les noms de parabole, d'ellipse et d'hyperbole, donnés longtemps après aux sections coniques.

2. Dans le cas de l'*ὑπερβολή*, elle serait : $px + mx^2 = A$.

a au moins l'avantage de supposer une simplicité parfaite dans le langage de Socrate.

Nous admettrons qu'il parle d'un triangle *quelconque*, complètement donné, et d'un cercle, également donné, qu'il trace concurremment sur le sable. Voulant inscrire le triangle dans le cercle, il commence par y inscrire un des côtés, τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν, que nous appellerons la base.

Cette inscription est toujours possible, pourvu que cette base soit inférieure au diamètre, condition évidente à *priori* et qu'il était réellement inutile d'exprimer.

Cela posé, la condition nécessaire et suffisante pour l'inscription est que l'angle au sommet du triangle opposé à la base soit égal à l'un de ceux qui ont pour mesure la moitié de l'un des arcs interceptés, et en particulier à l'angle de la base inscrite avec la circonférence du cercle, ce qu'Euclide appelle l'angle du segment ¹.

Il n'est pas besoin d'être très-versé en géométrie pour reconnaître que cette condition est la première qui se présente à l'esprit. C'est d'ailleurs celle qu'on tirerait immédiatement du texte, si l'on pouvait donner à γωρίον le sens d'angle, ou si on lisait γωνιδίον par exemple.

Il suffit de traduire littéralement :

« Si cet angle (Socrate le montre évidemment sur la figure tracée, et ses indications corrigent ce que son langage a de peu précis) est tel qu'à côté de la ligne donnée, par laquelle on le sous-tend, il manque (pour aller jusqu'à la circonférence du cercle) un angle précisément tel que le sous-tendu lui-même... ². »

V. Nous ne proposerons pas, au lieu de γωρίον, une leçon d'un hellénisme douteux; τοῦτο τὸ γωρίον se rapporte d'ailleurs nettement au τὸδε τὸ γωρίον τρίγωνον qui le précède.

Il faut donc admettre, dans le langage de Platon, une certaine confusion entre la notion d'angle et celle de triangle; ou, en d'autres termes, qu'il aura parlé suivant la définition vicieuse :

« Un angle est l'espace compris entre deux lignes qui se coupent. »

Mais si peu précise que fût la langue mathématique de Platon, pouvait-il employer une expression tout à fait ἄτοπον au temps d'Euclide?

Nous répondrions que c'est précisément en étudiant ce dernier auteur, que nous est venue l'idée de la conjecture ci-dessus. On constate, en effet, dans son langage et ses démonstrations, les traces évidentes d'habitudes géométriques antérieures et différentes. Un angle

1. Nous dirions plutôt aujourd'hui l'angle de la base inscrite avec la tangente à l'extrémité.

2. Παρατείνειν serait pris dans le sens classique d'ὑποτείνειν, d'où ἡ ὑποτείνουσα τὴν ὀρθὴν γωνίαν, la ligne qui sous-tend l'angle droit, dit constamment par Euclide pour l'hypoténuse d'un triangle rectangle. La substitution d'un préfixe à l'autre est toute naturelle chez Platon, si la ligne prise comme base était sur le côté et non à la partie inférieure de la figure.

Quant au sens actif particulier de παρατείναντα, il se rapporte aussi sans difficulté à la construction qui reste à faire pour l'inscription.

est constamment défini, par exemple, dans un triangle, au moyen de la sous-tendante ou base, et des deux côtés, tandis qu'aujourd'hui nous n'appliquons guères ces définitions qu'au triangle lui-même. Il semble donc bien qu'il y ait eu, à une certaine époque, confusion réelle entre les termes employés pour désigner l'angle au sommet d'un triangle et ce triangle lui-même. Le texte de Platon donnerait une preuve topique de cette confusion.

En résumé, nous proposerions de traduire ainsi l'énoncé de l'hypothèse :

« Si ce triangle est tel que l'angle formé par la base donnée (et la « circonférence du cercle), soit précisément égal à celui sous-tendu par « cette base, il en résultera telle chose... »

Cette interprétation permettrait de supposer que Platon aura voulu faire allusion à la découverte récente d'un important théorème, — l'égalité de tous les angles inscrits dans un même segment de cercle, — que l'on sait, historiquement, avoir été ignoré d'un géomètre à peine plus ancien, Hippocrate de Cos.

C'est ainsi que, dans le *Théétète*, il nous fait assister à la généralisation de la notion des racines incommensurables des nombres non carrés parfaits.

PAUL TANNERY.





LA GÉOMÉTRIE IMAGINAIRE

ET LA NOTION D'ESPACE

I

On confond souvent à tort, sous le nom de *géométrie imaginaire*, plusieurs théories essentiellement distinctes.

Ecartons tout d'abord la plus récente, je veux dire la géométrie à n dimensions.

Les métaphysiciens y chercheraient en vain quelques lumières pour éclaircir la fameuse question : L'existence d'espaces ayant plus de dimensions que le nôtre est-elle possible ? Ce problème, pour longtemps encore, sinon pour toujours insoluble, ne peut être raisonnablement abordé que du côté de la physiologie. Dans la nouvelle théorie mathématique, il ne s'agit nullement en fait de géométrie, mais simplement d'algèbre pure.

L'objet théorique de l'algèbre est l'étude des relations (équations) qui peuvent exister entre diverses quantités variables. La constitution, par Descartes, de la géométrie analytique a respectivement ramené l'étude des problèmes qui se présentent, soit sur le plan, soit dans l'espace, aux cas algébriques où les variables sont deux ou trois. Ceux où elles sont en nombre plus élevé ne trouvent leur application pratique que dans les sciences dont l'objet est moins abstrait que celui de la géométrie.

Dès les commencements de la géométrie analytique, il s'est fait comme une fusion entre l'algèbre et la science de l'espace. Ainsi, que l'on convienne, avec Descartes, de définir la position d'un point quelconque d'un plan par ses distances (coordonnées) à deux droites fixes perpendiculaires entre elles, toute droite placée sur le plan pourra se représenter par une équation du premier degré entre les coordonnées, et, réciproquement, toute équation du premier degré

entre deux variables quelconques pourra se représenter par une droite du plan, si l'on convient de représenter chacune des variables par l'une des deux coordonnées. De là l'expression géométrique « équation linéaire » qui s'est introduite dès longtemps en algèbre pour désigner l'équation du premier degré.

De même, dans la géométrie analytique à trois dimensions, si, pour fixer les idées, on détermine la position d'un point de l'espace par ses distances à trois plans perpendiculaires entre eux, il y aura représentation réciproque entre le plan, d'une part, l'équation du premier degré entre trois variables, de l'autre.

Grâce aux conventions faites, des propositions purement algébriques pourront s'énoncer sous une forme géométrique et réciproquement.

Ainsi, que je dise : « Trois plans se coupent en général en un point », ou bien : « Un système de trois équations du premier degré à trois inconnues, admet en général une solution, et une seule », j'aurai énoncé sous deux formes diverses, dans deux langues différentes, une seule et même proposition logique ¹.

Remarquez que la première formule est beaucoup plus courte que la seconde; vous comprendrez comment on a pu espérer simplifier, pour certaines études, le langage algébrique en le traduisant en un langage géométrique, et comment, le nombre des variables en algèbre étant indéterminé, il a fallu, tout aussitôt, parler de n dimensions.

Je ne pourrais mieux continuer qu'en citant M. Camille Jordan ² :

« Bien que ces recherches soient purement algébriques, nous avons cru utile d'emprunter, ainsi que nos devanciers, quelques expressions à la géométrie. Ainsi nous considérons un point « comme défini dans l'espace à n dimensions par les valeurs de n coordonnées... Une équation linéaire entre ces coordonnées définira un plan; k équations linéaires simultanées, un k -plan; $n - 1$ équations, une droite, etc. »

En résumé, la géométrie à n dimensions n'est que de l'algèbre écrite dans une nouvelle langue conventionnelle.

Cette langue n'a pas encore âge d'homme, il est difficile de prévoir son avenir. Le réel avantage des représentations géométriques effectives dans les études algébriques consiste dans ce fait que des schémas s'y prêtent à l'intuition et soutiennent l'entendement, qui n'a pas tant de prise dans l'abstraction pure. Mais ici il n'y a plus,

1. Inutile de dire que les cas d'exception se correspondent rigoureusement dans les deux langues.

2. *Bulletin de la Société Mathématique de France*. Tome III, p. 104.

en réalité, ni représentation, ni schéma; il n'y a que des mots et des notations, comme dans l'algèbre ordinaire.

A la vérité, on a tout récemment¹ essayé de constituer une représentation géométrique pour les termes du nouveau langage; comme il pourrait en résulter quelque illusion au point de vue métaphysique, j'en dirai un mot.

On sait que la géométrie descriptive, par exemple, parvient, au moyen de certaines conventions, à représenter sur un plan tout point de l'espace; il est certainement possible, en faisant d'autres conventions analogues, de représenter également sur un plan, le *qualecunque* défini par autant de *quanta* que l'on voudra, ou, en d'autres termes, le point de l'espace à n dimensions. Mais en géométrie descriptive, en raisonnant géométriquement sur les lignes du tableau, si je puis arriver à démontrer quoi que ce soit relatif aux lignes de l'espace représentées, c'est que je suis soutenu par une intuition; je vois, comme on dit, ces lignes dans l'espace; autrement je ne pourrais sortir du tableau et ma démonstration ne porterait que sur la figure qui y est tracée. Or, au-delà de trois dimensions, aucune intuition n'est possible; dans ce que j'appelle représentation de l'espace à n dimensions, je pourrai donc, tout au plus, arriver à trouver certaines règles de construction géométrique représentant certaines opérations algébriques; mais si j'arrive à quelque démonstration en substituant les constructions aux opérations correspondantes, je n'aurai rien fait que démontrer une propriété de figures planes correspondant, sous certaines conventions, à certains théorèmes d'algèbre, et il est indubitable que cette propriété, d'une part, ce théorème de l'autre, auraient pu être obtenus, sans parler d'espace à n dimensions, ni de rien de semblable, et peut-être par des moyens plus directs et plus simples.

Ainsi, quelque convention qui soit faite, nous devons nous garder de toute illusion sur l'impossibilité d'imaginer un espace à n dimensions, et nous avons assez vu que la géométrie ainsi dénommée n'a rien d'imaginaire en aucun sens. Mais ici nous devons, avant tout, faire observer qu'en mathématiques, ce terme « imaginaire » a une signification toute spéciale, parfaitement précise, dont il ne devrait, en aucun cas, être permis de le détourner.

On sait que ce terme s'applique aux expressions algébriques dans

1. M. Spottiswoode. *Comptes-rendus de l'Académie des sciences*. 1875. Tome LXXXI, pp. 875 et 961.

Dans le même tome, on mentionne (p. 1262) une note de M. L. Hugo sur la Géométrie panimaginaire. Il s'agit là de $\frac{m}{n}$ dimensions! (*Bulletin de la Société Mathématique de France*. Tome IV, p. 92.)

lesquelles entre la notation $\sqrt{-1}$, notation qui n'a, par elle-même, aucun sens, mais qu'on est convenu de traiter dans les calculs suivant des règles déterminées et n'impliquant pas contradiction.

Examinons quel rôle peuvent jouer ces expressions algébriques dans l'application de l'algèbre à la géométrie, et spécialement en géométrie analytique.

Si, dans un problème de géométrie, on calcule une quantité inconnue, et que toutes réductions faites, elle se présente sous la forme imaginaire, ce résultat indique que cette quantité n'existe pas en fait, et que c'est à tort qu'on a pu faire l'hypothèse contraire.

Supposons par exemple que nous ayons, en géométrie analytique à deux dimensions, à déterminer par leurs coordonnées les deux points d'intersection de deux cercles donnés dans un plan.

Il peut évidemment se faire que les données soient telles que les deux cercles ne se coupent pas; dans ce cas, les coordonnées se présenteront sous une forme imaginaire.

Mais convenons, en traitant dans le calcul ces quantités imaginaires suivant les règles algébriques, de leur faire subir les mêmes opérations que si elles étaient réelles et que nous nous proposons de déterminer l'équation de la droite passant par les deux points d'intersection, nous trouverons que cette équation n'est pas compliquée d'imaginaires.

Que signifie un pareil résultat? que deux cercles étant donnés, il y a toujours une droite jouissant, par rapport à ces deux cercles, de certaines propriétés¹, et qui, d'ailleurs, si les cercles se coupent, passe par les points d'intersection. Rien de plus.

Mais comme facilité de langage, on pourra dire que deux cercles se coupent toujours en deux points (réels ou imaginaires)², et que la droite passant par ces deux points est toujours réelle et jouit de telle et telle propriété.

Des exemples analogues d'interprétations géométriques de formes imaginaires peuvent se rencontrer dès les débuts de la géométrie analytique. Il y avait là une conséquence forcée de la correspondance établie par Descartes entre l'algèbre et la géométrie. Toutefois ce n'est qu'à une époque toute récente que les conventions nécessaires pour systématiser ces interprétations, ont reçu leur entier développement, aujourd'hui très-complexe, et que nous ne pouvons exposer.

Le point de départ de ces conventions consiste, comme on le pres-

1. Par exemple, que de chaque point de cette droite, on mène aux deux cercles des tangentes égales.

2. Dans le cas de tangence, le point de contact est considéré comme double.

sent, à admettre pour les coordonnées algébriques et pour les coefficients des équations la forme imaginaire, aussi bien que la forme réelle, et à parler dès lors de points imaginaires, de droites imaginaires; etc.

C'est uniquement aux théories reposant sur ces conventions que l'on devrait, à mon sens, réserver le nom de géométrie imaginaire.

C'est bien de géométrie qu'il s'agit ici, et le but final est, bien entendu, d'arriver à établir des théorèmes ou à résoudre des problèmes sur des figures réelles. Les démonstrations y sont souvent très-brèves, mais elles restent malheureusement incompréhensibles pour qui n'est pas initié à la véritable signification du langage conventionnel qu'on y emploie. En tout cas, il n'y a jamais là au fond, sous un déguisement plus ou moins pénétrable, que de l'algèbre appliquée à la géométrie. Grâce aux conventions qui ont été faites pour le langage, on évite d'écrire certaines équations et d'opérer sur elles les déductions nécessaires au raisonnement. Mais, en fait, il y a toujours des relations entre quantités réelles, qu'on doit supposer tout d'abord avoir été transcrites sous formes algébriques avec l'emploi du signe $\sqrt{-1}$, puis retraduites dans le langage conventionnel de la géométrie imaginaire. Ce n'est donc qu'un artifice logique plus ou moins curieux; il n'y a rien qui puisse, en réalité, intéresser le métaphysicien spéculant sur la notion d'espace.

Mais avant d'aborder un nouvel ordre d'idées, il est indispensable que nous précisions le rôle des quantités imaginaires en algèbre. Nous le ferons en exposant le principe de la représentation géométrique des quantités imaginaires, principe essentiellement différent des conventions dont nous venons de parler. Ici ce n'est plus une application de l'algèbre à la géométrie; ce serait plutôt l'inverse. C'est l'emploi de schémas géométriques spéciaux comme support de raisonnements intuitifs sur des relations purement abstraites.

Reprenons la conception fondamentale de Descartes; soit deux quantités, fonction l'une de l'autre, c'est-à-dire telles que chacune d'elles a, pour chaque valeur déterminée de l'autre, une ou plusieurs valeurs également déterminées.

Nous pouvons nous représenter les variations d'une quantité quelconque par les changements de position d'un point sur une droite indéfinie à partir d'une origine fixe sur cette droite; en d'autres termes, la longueur d'une droite déterminée est pour nous le schéma d'une quantité déterminée quelconque. Si, de nos quantités U , V , fonctions l'une de l'autre, nous représentons de la sorte la première par une longueur (abscisse) x portée sur une droite fixe ou axe à

partir d'un point origine, et la seconde ¹ par une longueur (ordonnée) y portée sur la perpendiculaire à l'axe à l'extrémité variable de l'abscisse, nous obtiendrons ainsi, aux extrémités des ordonnées, en supposant que U par exemple passe successivement et continûment par toutes les valeurs possibles, une ligne généralement courbe qui sera pour nous la représentation figurée de la fonction qui lie U et V . Ce procédé est bien connu et nous n'avons pas pour le moment à insister sur les avantages qu'il offre en certains cas pour l'étude des propriétés purement abstraites des fonctions.

Nous avons dit que le déplacement d'un point sur une droite représente la variation d'une quantité. De même le déplacement d'un point de toutes manières possibles sur un plan, figurera la double variation de l'abscisse x et de l'ordonnée y , considérées ici comme indépendantes l'une de l'autre. Pour utiliser ce schéma, nous conviendrons, avec Argand ², d'assigner le point d'abscisse x et d'ordonnée y à l'expression imaginaire $x + y \sqrt{-1}$.

Reprenons nos fonctions U, V . Posons $U = x + y \sqrt{-1}$. D'après la relation entre U et V , et les règles de calcul convenues ou établies, V se présentera sous une forme telle que $X + Y \sqrt{-1}$.

Que faisons-nous en réalité? Nous ne considérons plus les quantités U et V , mais deux groupes binaires (x, y) , (X, Y) liés entre eux par des relations telles que si x et y sont tous deux déterminés, X et Y le sont également tous les deux et réciproquement. Mais nous nommons cette double relation sous le même nom que la relation unique qui lie U et V ; ce que nous pouvons faire, parce que, grâce aux conventions faites pour le calcul, si nous supposons y nul, les deux groupes se réduisent respectivement à U et à V .

Voilà, au point de vue logique, tout le secret de l'emploi des quantités imaginaires en algèbre.

Géométriquement, les variations correspondantes des quantités U et V ou des groupes (x, y) , (X, Y) , se représenteront par les déplacements correspondants sur le plan des points de coordonnées (x, y) , et (X, Y) ; si l'un de ces points décrit une certaine courbe déterminée, l'autre décrira de même une autre courbe déterminée.

Nous nous contenterons d'ajouter que cette représentation, employée par Cauchy, etc., a permis l'invention ou la démonstration

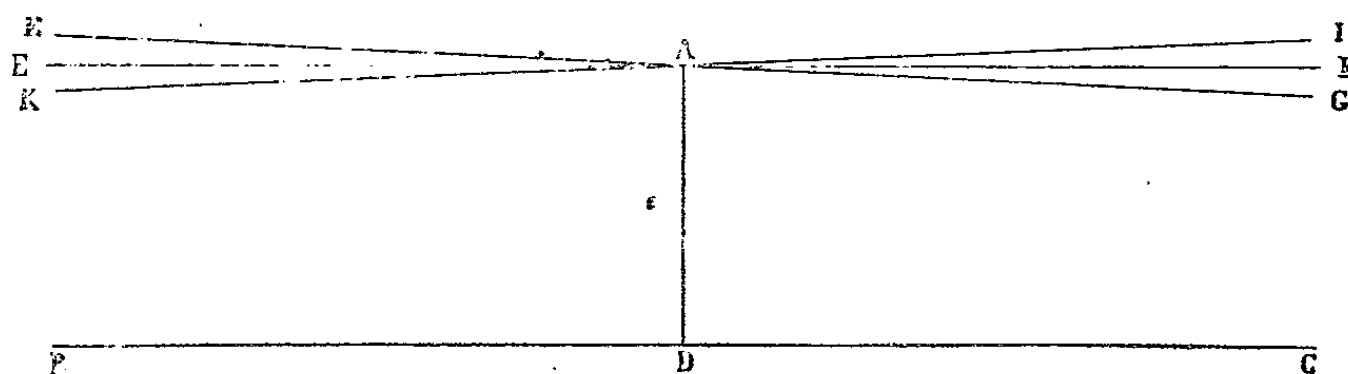
1. Pour simplifier l'exposé, ici comme dans ce qui suivra, nous ne considérons qu'une seule des diverses valeurs que peut prendre une fonction, dans le cas général, pour une valeur déterminée de la variable.

2. *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, par R. Argand. 2^e éd., avec préface de M. J. Hoüel. — Paris, Gauthier-Villars, 1874.

de théorèmes de pure algèbre de la plus grande généralité et de la plus haute importance. Nous nous proposons uniquement de faire sentir comment, quand on parle de quantités imaginaires, il n'y a jamais là une sorte de non-être soumis au calcul, mais seulement des quantités bien réelles entre lesquelles on a établi une relation logique artificielle.

II

La géométrie de Lobatchewsky ¹ diffère essentiellement de toutes les théories dont nous avons parlé jusqu'à présent. Son objet est de reconstituer entièrement la science de l'espace après avoir rejeté la célèbre proposition généralement connue en France sous le nom de postulatum d'Euclide, et y avoir substitué une hypothèse qui comprend celle d'Euclide, comme cas singulier.



Soit une droite BC, en un point D de laquelle j'élève la perpendiculaire DA de longueur déterminée a ; par A je mène la perpendiculaire EAF à DA dans le plan ABDC; Euclide démontre que EF ne rencontre pas BC, il admet que c'est la seule droite menée par A qui soit dans ce cas, et on l'appelle, d'après lui, parallèle à BC.

Lobatchewsky admet, au contraire, que par le point A, on peut mener, outre EF, une infinité de droites du plan qui ne rencontrent pas BC; toutes ces droites sont comprises dans les angles aigus formés pour deux droites GH, IK, symétriques par rapport à EF. La droite GH sépare les droites qui rencontrent BC du côté de C de celles qui ne la rencontrent pas, la droite KI sépare les droites qui rencontrent BC du côté B de celles qui ne la rencontrent pas. Lobatchewsky appelle parallèles à BC ces deux droites limites GH, IK.

1. *Études géométriques sur la théorie des parallèles*, par N. J. Lobatchewsky, traduit par J. Hoüel, suivi d'un extrait de la correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris. Gauthier-Villars, 1866.

Ainsi, par chaque point d'un plan, on peut mener à toute droite de ce plan deux parallèles, une pour chaque côté de la droite ; la position de chaque parallèle sera déterminée par l'angle plus petit qu'un droit qu'elle fait avec la perpendiculaire abaissée du point donné sur la droite donnée. Cet angle GAD, appelé angle de parallélisme, dépend de la distance AD ou α . Il tend vers l'angle droit lorsque α tend vers zéro, il tend vers zéro quand α augmente indéfiniment.

Voilà le point de départ de cette nouvelle géométrie. Remarquons tout d'abord què les inventeurs n'ont nullement été poussés par des considérations philosophiques. Leur œuvre est purement mathématique ; il s'agissait de combler une lacune dans la chaîne des raisonnements qui constitue la géométrie.

Il est impossible de restituer aujourd'hui, telle qu'Euclide a pu l'écrire, la partie des éléments qui précède sa première proposition. Dans les meilleurs manuscrits, on trouve d'abord :

1° Trente-cinq définitions ($\epsilon\rho\omicron\iota$), dont les unes sont nominales, les autres réelles ¹. Ces dernières ne servent pas comme prémisses dans les théorèmes, mais déterminent simplement l'intuition géométrique, affirmant sans déduction. Si l'on voulait supprimer absolument cette intuition et réduire la géométrie à une déduction purement abstraite, il faudrait substituer à ces définitions ou leur adjoindre des affirmations synthétiques, posées à priori, indémontrables, qu'Euclide eût certainement, avec son maître Platon ², qualifiées d'hypothèses.

2° Viennent en second lieu trois $\alpha\iota\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$, postulata. Ce dernier mot n'a pas précisément le sens qu'on lui donne aujourd'hui. Il s'agit des trois constructions élémentaires desquelles dépendent toutes celles qu'on apprend à faire dans la géométrie d'Euclide.

3° Enfin douze notions communes ($\kappa\omicron\iota\iota\nu\alpha\iota \epsilon\nu\nu\omicron\iota\alpha\iota$), dont les sept premières sont des propositions applicables à la grandeur abstraite, les deux suivantes sont ou reviennent à des définitions nominales ; les trois dernières ont été, probablement longtemps après Euclide, tirées du corps des éléments, où on a remarqué qu'elles figuraient comme prémisses non démontrées. Le n° X : — Tous les angles droits sont égaux entre eux, — est un théorème parfaitement démontrable, qui

1. Nominales, comme celles du rhombe (losange) et du trapèze ; réelles comme celles de la ligne et du plan. Ce langage n'est pas parfaitement rigoureux. Voir : *Des définitions géométriques et des définitions empiriques*, par Louis Liard. Paris. Ladrangé, 1873.

Un bon nombre de ces diverses définitions ne sont certainement pas d'Euclide.

2. *République* de Platon, livre VI, à la fin.

était à peu près inutile avec la marche d'Euclide. Le n° XII : — Deux droites ne peuvent limiter aucun espace, — est au contraire absolument indémontrable. Cette proposition est d'ailleurs implicitement supposée dans les définitions. Enfin le n° XI est le fameux postulatum des parallèles.

L'habitude s'est introduite depuis de désigner sous le nom d'axiomes les propositions primordiales de la géométrie. Je répète que, selon toute probabilité, le terme d'hypothèses eût été jugé plus convenable par Euclide.

Quoi qu'il en soit, il est remarquable que le rejet d'un quelconque des axiomes, implicitement ou explicitement admis par Euclide, en dehors de l'axiome XI (postulatum), arrêterait dès le début la chaîne des propositions démontrées. Vingt-huit, au contraire, se suivent en toute rigueur, avant qu'il soit besoin d'invoquer cette affirmation spéciale.

Il était donc permis de supposer que la démonstration en était possible, et la question restait pendante depuis l'antiquité. Mais tout effort était resté infructueux. La presque impossibilité d'éviter un cercle vicieux dans le raisonnement était bien constatée. Une seule voie restait ouverte au géomètre assez hardi pour l'entreprendre. Il s'agissait de supposer que la proposition à démontrer n'était pas vraie et de pousser la nouvelle hypothèse jusqu'à ses dernières conséquences, fallût-il refaire toute la géométrie.

Si la proposition était démontrable, c'est-à-dire, pouvait être ramenée aux autres axiomes admis, on devait, en suivant cette voie, arriver à une contradiction ; dans le cas contraire, il fallait avouer qu'elle n'était pas démontrable.

C'est ce dernier cas qui s'est réalisé ; le chemin complet avait d'ailleurs été parcouru par Gauss dès 1792, mais il n'a pas publié ses travaux ; ce fut sur des terres plus neuves, plus affranchies de la routine, que le germe de la pensée du maître alla porter ses fruits.

En 1832, Wolfgang Bolyai, ancien camarade de Gauss à Goettingue, professeur à Maros-Vasarhely (Transylvanie), publiait dans un de ses traités, un mémoire où son fils, Johann Bolyai ¹, exposait dans tous ses développements nécessaires ce que Gauss nommait la géométrie non-euclidienne.

Dès 1829, Lobatchewsky (né en 1793, mort en 1856), professeur à l'université de Kazan ², où il avait fait ses études sous des maîtres

1. *La science absolue de l'espace*, etc., par Jean Bolyai (traduit par J. Hoüel). Paris, Gauthier-Villars, 1868.

2. Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchewski, traduit du russe par S. Potocki, dans le *Bulletino di bibliografia et*

allemands, notamment Bartels, ami de Gauss, avait commencé à publier des essais sur les fondements de la géométrie. Sa Géométrie imaginaire parut dans les mémoires de l'université de Kazan de 1835 à 1838. Par une méthode différant notablement de celle de Bolyai, il arrivait aux mêmes résultats.

Le nom donné par Gauss à la nouvelle théorie — non-euclidienne — est le plus clair ; mais il faut bien l'entendre dans ce sens, que la géométrie est refaite en substituant au postulatum d'Euclide, un postulatum différent plus général, qui comprend le premier comme cas singulier. Bolyai dit « *scientiam spatii absolute veram* » ; emploi impropre d'un terme métaphysique. Le terme de géométrie imaginaire de Lobatchewsky est encore plus malheureux ; si en effet, comme nous le verrons, l'emploi du symbole $\sqrt{-1}$ présente certains avantages dans les calculs de la nouvelle géométrie, ce n'est qu'un accident, ce n'est nullement le caractère fondamental de la théorie, qui n'a même, en réalité, nul besoin de ce symbole. Lobatchewsky lui-même renonça finalement à cette épithète malencontreuse ; son dernier ouvrage est intitulé : *Pangéométrie*¹. Depuis les travaux récents, on appelle sa géométrie *hyperbolique*. Je ne parle pas du terme de *géométrie astrale*, inventé par Schweikart. Nous verrons ultérieurement à quelles idées correspondent ces différents termes.

Nous n'avons pas à exposer ici l'ordre des déductions de Lobatchewsky ni de Bolyai, mais seulement les conséquences les plus caractéristiques de leur hypothèse, afin de permettre d'établir une discussion métaphysique sur un terrain suffisamment déblayé.

Pour plus de facilité de langage, nous désignerons avec Bolyai par système Σ le système de la géométrie euclidienne, par système S , celui de la nouvelle géométrie.

La géométrie de la sphère, c'est-à-dire celle des figures tracées sur la surface de la sphère avec des arcs de grands cercles, est identique dans les deux systèmes.

Supposons une droite en un point de laquelle soit un cercle tangent ; que le centre du cercle s'éloigne de plus en plus indéfiniment, le point de contact restant le même, la circonférence du cercle (système Σ) se rapproche de plus en plus de la droite ; la droite est la limite de cette circonférence, ce qu'on exprime aussi parfois en disant qu'elle est une circonférence de rayon infini.

di storia delle scienze matematiche e fisiche (Tome II, — mai 1869) du prince Boncompagni.

1. *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, par N. Lobatchewsky. Kazan. Imprimerie de l'Université. 1855. En français.

Dans le système S, la circonférence tend non pas vers la droite, mais vers une courbe limite (horicycle), distincte de la droite et lui restant, bien entendu, tangente. Les perpendiculaires au milieu des cercles de cette courbe, au lieu de se rencontrer, comme dans le cercle, en un même point, sont parallèles.

Système Σ . Il n'y a que deux lignes uniformes, c'est-à-dire telles qu'une partie quelconque puisse parcourir la ligne tout entière sans déformation ; ce sont la ligne droite et le cercle.

Système S. Il y a quatre espèces de lignes uniformes : la ligne droite, le cercle, l'horicycle ; enfin une quelconque des courbes en nombre infini, qu'on peut mener, avec cette condition d'uniformité, entre la droite et l'horicycle, tangentes au point de contact. Bolyai les appelle courbes parallèles à une droite. Si par tous les points d'une droite, on élève du même côté des perpendiculaires toutes égales entre elles, le lieu des extrémités de ces perpendiculaires est une telle courbe. (Dans le système Σ , ce serait une droite parallèle à la première). Les perpendiculaires élevées au milieu des cordes de cette courbe (que nous nous figurons sous le schéma d'un cercle de très-grand rayon du système Σ) ne se rencontrent pas.

Imaginons qu'on fasse tourner toute la figure de la droite et du cercle tangent autour du rayon perpendiculaire à la droite. Celle-ci engendre un plan, le cercle une sphère tangente ; l'horicycle engendre la surface appelée horisphère, limite d'une surface sphérique dont le centre s'éloigne indéfiniment ; les courbes *parallèles à des droites* engendreront de même des surfaces de révolution tangentes au plan.

Système Σ . Il n'y a dans l'espace que deux surfaces uniformes, c'est-à-dire dont un élément quelconque puisse se mouvoir sur toute la surface de toutes les manières possibles et sans aucune déformation. Ce sont le plan et la sphère.

Système S. Il y a quatre surfaces uniformes : le plan, la sphère, l'horisphère et les surfaces courbes parallèles à des plans.

Toute propriété établie dans le système Σ entre droites sur un plan est vraie dans le système S, entre horicycles sur une horisphère.

Les relations métriques les plus ordinaires sur le plan dans le système Σ ne sont pas conservées dans le système S. En particulier rien de ce qui se rapporte à la similitude des figures ne subsiste.

L'angle de parallélisme $GAD = u$, pour la distance a est défini dans le système S par la relation

$$\text{Tang. } u = \frac{2}{\frac{a}{k} - \frac{a}{k}}$$

dans laquelle la tangente de l'angle u est le nombre dont on trouve le logarithme dans les Tables, $e = 2,7182818...$ est la base du système de logarithmes népériens, k est un paramètre, une constante qui ne peut être déterminée que par l'expérience. Celle-ci nous apprend que ce paramètre est extrêmement grand par rapport à tout ce qui est mesurable pour nous.

Si, dans les formules de la géométrie de la sphère du système Σ , où l'on fait entrer la valeur du rayon, et qui diffèrent dès lors de celles du système S , on donne à ce rayon la valeur imaginaire $k \sqrt{-1}$, on retrouve toutes les formules de la planimétrie du système S . A ce point de vue, on a pu dire, en employant un langage qui est, à proprement parler, celui de la géométrie imaginaire, que le plan du système S est une sphère imaginaire de rayon $k \sqrt{-1}$ du système Σ . Mais si curieux que soit ce rapprochement, nous avons suffisamment insisté sur la notion des imaginaires, pour qu'on sache qu'il n'y a là rien autre chose qu'une relation purement analytique. On peut d'ailleurs éviter l'emploi des imaginaires par celui des lignes trigonométriques hyperboliques ¹, qui se substituent dans les formules aux lignes trigonométriques ordinaires des arcs de grand cercle tracées sur la sphère. Il n'y a qu'à supposer les longueurs rapportées au paramètre k , au lieu de les supposer rapportées au rayon de la sphère pris comme unité ainsi qu'on le fait généralement dans la trigonométrie sphérique.

Nous remettons à une étude ultérieure l'examen des développements qu'a subis depuis vingt-cinq ans la théorie de Lobatchewsky, par les travaux de Riemann ², Beltrami ³, Klein. Dans une matière de cette nature, on nous accordera qu'il est préférable de ne faire marcher l'analyse que pas à pas.

III

L'accueil fait par les géomètres aux nouvelles théories n'a pas toujours été très-empressé; celui des philosophes capables de juger la question a été nettement hostile.

1. D'où le terme de *géométrie hyperbolique*. Klein.

2. *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, mémoire posthume de B. Riemann, traduit par J. Hoüel. Extrait des *Annali di Matematica pura et applicata*. Série II. Tome III. Fasc. IV.

3. E. Beltrami. *Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne*, traduit par J. Hoüel; *Annales scientifiques de l'école normale supérieure*, tome IV, année 1869.

Je considère comme incontestable qu'elles ébranlent fortement un des principaux dogmes de l'école critique et la formule de Kant : L'espace est la forme *à priori* du sens extérieur.

Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer avec quelle vigueur M. Renouvier ¹ prend l'offensive contre les novateurs. Quoique je doive reproduire la substance de ses arguments et de ses conclusions, j'essaierai de porter la question sur un terrain quelque peu différent.

Il s'agit de savoir comment la notion d'espace peut se trouver dépendre de ce nombre k , de cette constante déterminable seulement par une expérience *à posteriori*. D'où vient ce nombre? pourquoi aurait-il telle valeur plutôt que telle autre? comment pourrait-il varier?

Des trois termes distincts qui concourent pour la formation de tout concept, — le moi intelligible, les sens, le non-moi intelligible, — le premier est certainement hors de cause.

Admettre que les deux autres termes restant les mêmes, celui-là puisse changer, et qu'il en résulte une variation dans les phénomènes, c'est nier toute science, infirmer tout raisonnement. Ce moi intelligible n'est pas distinguable de l'élément d'identité et de permanence qui entre dans tous nos concepts, qui joue son rôle dans toutes nos déductions. On ne peut, en aucune façon, prétendre à lui enlever son caractère essentiel.

Pour les sens, il est également possible de les éliminer.

Nous n'en sommes pas à l'hypothèse déjà célèbre de l'être linéaire ou superficiel qui n'aurait l'idée que d'une ou deux dimensions de l'espace. Nous manquerions alors de tout élément pour discuter la possibilité de l'hypothèse. On nous donne un être dont les sens sont tels qu'il admet tous les axiomes explicites ou implicites d'Euclide, moins le postulatum.

Dans ce cas, il est clair que la valeur qu'il pourra effectivement trouver pour le nombre k dépendra de ses sens. Ainsi ce nombre est pour nous plus grand que toute quantité que nous pouvons mesurer en fait; si notre front atteignait Sirius, nous pourrions peut-être lui assigner une certaine valeur; si nous allions jusqu'à la nébuleuse du Cygne, nous obtiendrions probablement une valeur différente, plus approchée de la véritable ². Mais cette véritable valeur en elle-même ne peut dépendre aucunement de nos sens.

Construisons par la pensée un triangle rectangle, dont nous nous donnions les côtés de l'angle droit; les principes relatifs à la ligne

1. Renouvier. *Essais de critique générale*, 1^{er} essai, tome II, 2^e édition.

2. D'où le terme de *géométrie astrale*.

droite, à sa mesure, à sa perpendicularité, sont admis par l'être du système S comme par celui du système Σ ; et cependant la longueur de l'hypoténuse est différente dans les deux systèmes, et dans S, elle dépend de la valeur du coefficient k . Que ce triangle soit réel et que nous en mesurons effectivement l'hypoténuse; nos sens et ceux de l'être du système S ont dû, par hypothèse, donner de part et d'autre les mêmes résultats pour les opérations de construction, et n'en peuvent donner de différents pour cette dernière mesure ¹.

La valeur exacte du nombre k ne peut donc, en résumé, dépendre que du non-moi intelligible.

Que devient dès lors la formule de Kant?

Lorsque je suppose deux sphères matérielles, gravitant l'une vers l'autre selon la loi de Newton, ou selon toute autre que j'imaginerai, si je veux déterminer le mouvement qu'elles prendront, je sais bien qu'il me faut faire entrer dans mes formules un coefficient dont je ne puis aucunement penser à déterminer à priori la valeur; par exemple l'attraction de l'unité de masse sur l'unité de masse à l'unité de distance. Mais quand je construis un triangle rectangle, la longueur de l'hypoténuse dépendrait d'un coefficient expérimental! Où est dès lors la différence si essentielle des deux concepts?

Lorsque je constitue la notion d'espace, en appliquant au monde extérieur la forme du nombre ou, si l'on veut, du continu, je soustraies en même temps toute la matière des phénomènes, je fais l'abstraction la plus complète possible, et je crois bien m'être débarrassé de tous ces coefficients à posteriori qui président à chaque phénomène particulier. Non, il en reste un dont l'existence m'est affirmée, mais dont je ne pourrai d'ailleurs calculer la valeur, si j'y arrive jamais, qu'au prix d'expériences et d'observations d'une délicatesse infinie.

Mais dans ce cas, si le nombre est une forme, l'espace n'en est pas une; c'est une matière des phénomènes, absolument au même titre que la couleur; c'est un objet auquel ce coefficient k imprime un caractère concret indélébile, et si « tout change, excepté la loi du changement, » je ne puis même affirmer à priori qu'il est constant, et que le théorème de Pythagore n'est pas en train de devenir faux.

Mais qui me force, après tout, à modifier à ce point mes habitudes d'esprit? Qu'ont fait en somme Lobatchewsky et Bolyai? Une tentative de démonstration par l'absurde qui n'a pas abouti. Il en résulte,

¹. C'est la conclusion à laquelle arrive M. Helmholtz, après une analyse très-minutieuse, dans le remarquable article publié dans le numéro du *Mind* de juillet 1876.

je le veux bien, que le postulatum d'Euclide est irréductible aux autres axiomes de géométrie, que le concept de l'espace est accompagné d'un jugement synthétique *à priori* de plus que certains géomètres ne le supposaient. Mais si l'habitude de le considérer hypothétiquement comme faux a réellement entraîné les novateurs à douter de sa vérité, suis-je obligé de les imiter? Ils n'ont fait qu'un travail logique; du faisceau profondément entrelacé des axiomes fondamentaux de la géométrie, ils en ont détaché un, et ils se glorifient de la dislocation qui en résulte dans la série des conséquences. Mais qui a jamais dit que ces axiomes, — appelez-les d'ailleurs du nom que vous voudrez, hypothèses avec Platon, inductions immédiates de l'expérience avec tel autre, — qui a jamais dit qu'ils découlassent tous logiquement d'une seule et même proposition? Qui dira qu'un semblable effort ne peut à son tour détacher du même faisceau une seconde proposition et ainsi de suite? Et ce faisceau lui-même tout entier, Kant ¹ ne le rejetait-il pas, quand il supposait la possibilité d'un espace à plus de dimensions que le nôtre? Il ne vous est pas permis de conserver à votre choix, de rejeter à votre fantaisie; tout est à prendre ou à laisser en même temps. Autrement nous ne faisons plus ni critique, ni métaphysique; vous me remettez « aux « conditionales, lesquelles, en dialectique, reçoivent toutes contradictions et impossibilités. Si mon mulet transalpin volait, mon « mulet transalpin aurait ailes ². »

Voilà ce que je dirais, si j'appartenais à l'école critique. A l'autre pôle de la philosophie, au milieu des positivistes, mes conclusions seraient les mêmes, si le point de départ était différent. Auguste Comte, dont personne ne niera la compétence, a pris une position très-nette. Très-probablement au courant, dans une certaine mesure au moins, des idées qui s'agitaient à l'étranger, mais écrivant en France, où la tendance était alors toute autre, il s'élève très-vigoureusement contre la prétendue démonstration du postulatum par Legendre à l'aide du principe d'homogénéité ³, et en discerne le paralogisme profondément caché. D'après lui, tous les axiomes viennent de l'expérience; nous ne les formulons immédiatement que grâce à leur très-grande généralité, qui nous permet l'induction sans

1. Voir la citation faite dans la *Revue Philosophique* de mai 1876, p. 511, par M. T. V. Charpentier. Je ne partage nullement, au reste, comme le lecteur a pu s'en rendre compte, la façon de penser exprimée après cette citation.

2. Rabelais. Livre III, ch. 30,

3. Cette démonstration revient au fond, à admettre *à priori*, la possibilité de construire sur un plan une figure semblable à toute figure plane, c'est-à-dire ayant les angles égaux chacun à chacun, et les côtés proportionnels. C'est le postulatum admis dans tous les arts du dessin.

aucune hésitation; ils sont constamment vérifiés *à posteriori* dans les applications pratiques de leurs conséquences. De ces deux circonstances, résulte pour nous la certitude. Il est certainement désirable, au point de vue logique, que ces faits généraux, immédiatement constatés par nos sens, soient rigoureusement énumérés et réduits au moindre nombre possible; mais pour les progrès effectifs de la science, cela importe peu, au fond.

On voit dès maintenant ce que dirait aujourd'hui un héritier de ces doctrines. Vous avez établi que l'axiome XI d'Euclide ne pourra jamais recevoir que des vérifications *à posteriori*; le maître l'a dit pour tous les axiomes. Mais n'allez pas plus loin; n'essayez pas de faire de la géométrie une science d'un autre ordre, comme la physique mathématique, où l'on épuise toutes les hypothèses rationnelles possibles avant de procéder à des déterminations de coefficients et à des vérifications expérimentales. Nous ne vous attendions pas pour retourner la proposition du platonicien Dercyllides¹: De même qu'il faut des hypothèses en géométrie, il en faut en astronomie. Mais prenons cet exemple; l'hypothèse de Copernic a deux mille ans de moins que le postulatum; elle ne se prête qu'à des vérifications expérimentales beaucoup plus incertaines. Prétendrez-vous qu'il faille l'abandonner pour une autre plus générale, et refaire tout à nouveau la mécanique rationnelle? Employons mieux nos efforts: ne vous arrêtez pas au début de la route frayée en rêvant d'en percer une autre; tâchez de prolonger celle où marche l'humanité. Ce qui nous sépare n'est au fond qu'une question de méthode, nous reconnaissons toute la valeur de l'appui que vous nous apportez; mais n'en modifions pas le sens. Le postulatum d'Euclide est une hypothèse, mais il en est de même de tout autre prétendu axiome, et il est aussi légitime, comme hypothèse, que l'affirmation des trois dimensions de l'espace.

Il serait juste maintenant de donner la parole à un des défenseurs actuels de la nouvelle géométrie. Je terminerai cette étude en essayant, après les deux autres, de remplir aussi ce nouveau rôle, tâche que me facilitera surtout l'amitié dont veut bien m'honorer M. Hoüel, l'homme qui aurait sans doute, en France, le plus d'autorité pour le prendre².

Nous reconnaissons parfaitement, dirai-je dans mon nouveau personnage, que l'œuvre de Lobatchewsky, de Bolyai et de leurs suc-

1. Theonis Smyrnæi platonici *liber de astronomiâ*, publié par Th. H. Martin. — Paris, Dezobry et Magdeleine, 1849 — ch. XLI.

2. *Du rôle de l'expérience dans les sciences exactes*, par M. J. Hoüel, professeur à la Faculté des sciences de Bordeaux. — Prague. Ed. Grègr. 1875.

cesseurs est purement logique. Mais faisons un peu de métaphysique : je ne parlerai pas pour le moment aux positivistes, puisqu'ils s'y refusent et trouvent un criterium de certitude dans la vérification *à posteriori* d'une hypothèse, jointe à quelque vague caractère de conformité de sa formule avec les données immédiates de l'expérience. Je constate, en tout cas, que la certitude que me donne le principe de contradiction et les lois du raisonnement est d'un ordre tout différent, et que toute expérience *à posteriori* ne pourra jamais avoir l'exactitude que je réclame. Je sais d'ailleurs que le principe de contradiction seul est infécond ; c'est un cadre vide où je dois mettre d'autres prémisses. Est-ce de mon propre fonds seul que je les tirerai ? est-ce uniquement de l'expérience ? Ni l'un ni l'autre ; pour tout concept, il y a synthèse de l'objet et du sujet. Il n'y a dans le monde extérieur ni ligne droite, ni plan ; que dis-je ? abandonnons la géométrie, reportons-nous au commencement de l'arithmétique ; il n'y a pas d'unités, au moins telles que je les conçois, pouvant se substituer les unes aux autres dans toutes les opérations logiques auxquelles je les soumettrai ; ce concept de l'unité, tel que je l'introduis dans le raisonnement, n'est-il pas formé de deux éléments, l'un emprunté au monde extérieur, sans lequel toute représentation d'unités distinctes me serait impossible, l'autre emprunté à mon moi intelligible, l'identique permanent, la $\mu\omicron\nu\alpha$ de Pythagore, le $\tau\alpha\upsilon\tau\omicron$ $\kappa\alpha\theta'$ $\alpha\upsilon\tau\omicron$ de Platon, le *summum genus* de Ferrier¹ ?

C'est par des synthèses un peu différentes, mais analogues, que se forment les concepts géométriques. L'importance de l'élément extérieur est plus grande ; mais l'intérieur n'est pas annulé. De la sorte je puis construire des propositions primordiales, empreintes, par suite de leur double origine, d'un double caractère. Elles peuvent servir à la déduction, être le point de départ de théories rigoureusement enchaînées, sous la seule condition de ne pas admettre en même temps des thèses fondamentales contradictoires, ce que la suite de la déduction ferait d'ailleurs nécessairement reconnaître. D'autre part, elles ne peuvent jamais être vérifiées complètement par l'expérience ni directement, ni indirectement, et par suite un doute reste toujours sur la parfaite exactitude de leur application dans la pratique. Je puis les déclarer absolument vraies subjectivement ; elles restent hypothétiques relativement à l'objet.

Il en est de même pour toutes les autres sciences dans lesquelles

1. Voir dans la *Revue Philosophique* d'août 1876, l'article de M. Penjon sur Ferrier. — p. 130-167. On peut faire de nombreux rapprochements entre les idées que nous exprimons, et celles du métaphysicien anglais.

les mathématiques ont été introduites ; la géométrie ne s'en distingue que par le degré d'abstraction.

En tout cas, l'expérience joue son rôle dans toute science exacte ; c'est elle qui fournit la matière que l'esprit s'assimile avant de formuler ses axiomes ou ses hypothèses.

Qu'on ne nous accuse pas maintenant, du faisceau des principes fondamentaux de la géométrie, de vouloir rejeter l'un, conserver les autres. Depuis Lobatchewsky, l'on a marché. Nous ne prétendons rien rejeter ; nous voulons essayer de débrouiller l'écheveau et de reconnaître la part de chaque principe dans la série des conséquences. Il nous faut, pour cela, arriver à supprimer complètement le rôle de l'intuition géométrique, et tout reconstruire par pure déduction logique à partir des premiers principes ; il nous faut aussi avoir le droit de faire abstraction de tel de ces principes que nous voudrions et même de le remplacer par un autre différent ou plus général, afin d'examiner les conséquences. Nous disloquerons ainsi la géométrie actuelle, mais nous relierons toujours les parties séparées par des constructions que l'on pourra trouver artificielles ou parasites, qui n'en auront pas moins, sinon immédiatement, au moins un jour, leur utilité. On peut évidemment — question de méthode — mettre en doute l'utilité pratique du travail que nous préconisons. Mais nous sommes prêts à accepter la discussion sur ce terrain ; il nous suffit de rappeler Beltrami retrouvant la théorie d'une surface de l'ancienne géométrie déjà toute faite dans la théorie du plan de Lobatchewsky.

Nous aurions à répondre à d'autres questions ; si nous considérons la notion de l'espace comme un complexe formé de certains concepts tirés de l'expérience, mais auxquels nous nous attribuons le droit de donner subjectivement des formes différentes, il n'en paraît pas moins certain que de tous les complexes de la sorte, formés logiquement avec les concepts modifiés de toutes les manières possibles, il n'y en a jamais qu'un seul qui puisse s'appliquer à l'objet. N'y a-t-il pas dès lors un criterium absolu qui doive nous permettre de le discerner ? N'y a-t-il pas un pourquoi en raison duquel ce complexe objectivable soit tel plutôt que tel autre ?

Sur le premier point, nous croyons dès maintenant pouvoir répondre négativement. Dès que nous voulons objectiver, nous n'avons plus qu'un criterium, l'expérience, qui ne peut fournir de certitude absolue, à aucun degré d'abstraction que ce soit. Pratiquement, il n'est pas douteux que la notion euclidienne ne sera jamais contredite par notre expérience. Mais nous avons toujours le droit de maintenir contre la formule de Kant qu'il n'y a aucune nécessité

à priori dans la notion de l'espace, même nos sens étant ce qu'ils sont, si nous faisons toutefois abstraction de la nécessité logique de non-contradiction entre les concepts simultanément admis.

Pour la seconde question, il semble difficile de rien répondre pour le moment. C'est précisément lorsque le travail de la nouvelle géométrie sera suffisamment avancé, lorsque l'entrelacement des différentes propositions fondamentales aura été dénoué, lorsque l'on connaîtra leurs corrélations réciproques, leurs tenants et aboutissants, que l'on pourra peut-être commencer des études dans ce sens, et donner des réponses partielles, affirmatives ou négatives. Si la physiologie a d'ici là fait des progrès correspondants, peut-être pourra-t-on reconnaître que tel principe tient à telle constitution de nos sens, tel autre non. Jusque-là la question reste ouverte, et la nouvelle géométrie ne peut que demander crédit.

PAUL TANNERY.

(A suivre.)