

Le son est nombre : variations sur la légende des marteaux de Pythagore

François Baskevitch

2008, 2010

Table

Le son est nombre : variations sur la légende des marteaux de Pythagore	1
La légende des marteaux de Pythagore : une représentation des intervalles musicaux par des nombres	2
La version académique : Boèce	2
Le texte fondateur : Nicomaque de Gérase	5
Les trois expériences décrites par Nicomaque	10
Les autres textes	11
Un contradicteur de Pythagore : Vincenzo Galilei	15
L'analyse des expériences	18
Les nombres de Pythagore	20
La première expérience : les poids sonnants	21
La deuxième expérience : les poids tenseurs	25
La troisième expérience : le monocorde	26
Les savants et les musiciens	31
Variation sur les marteaux de Pythagore : légende ou réalité	34

La légende des marteaux de Pythagore : une représentation des intervalles musicaux par des nombres

Nous ne disposons pas de trace écrite des théories construites et enseignées par Pythagore au VI^{ème} siècle avant notre ère. Pourtant quelques anecdotes ont traversé les siècles et ont été transmises comme autant d'illustrations des principes mathématiques développés par le savant de Samos. Parmi celles-ci, il en est une qui concerne la musique, ou plus exactement la théorie des consonances. Il s'agit de la légende des marteaux de Pythagore, rapportée notamment dans le *De institutione Musica* par Boèce qui l'aurait lui-même découverte lors de sa traduction des textes de Gaudence, de Jamblique et de Nicomaque de Gerasse. Cette histoire a tellement accompagné l'enseignement de l'harmonie qu'il était nécessaire de s'y attarder pour en éprouver la validité.

La version académique : Boèce

Pythagore, dit Boèce, se méfie du jugement des sens pour faire une description objective des consonances, et il cherche une méthode fiable, à la fois indépendante de notre subjectivité, et de la variabilité de l'environnement. Laissons Boèce raconter l'histoire des marteaux de Pythagore¹ :

X. Voilà la principale raison pour laquelle Pythagore, après avoir abandonné le jugement des oreilles, se tourna vers l'instance des règles. N'accordant aucune confiance aux oreilles des hommes, lesquelles varient sous l'effet tantôt de la nature, tantôt de circonstances externes, tantôt avec l'âge, il ne se soucia pas davantage des instruments, sources de grande variabilité et d'inconstance. Ainsi, considérons par exemple les cordes : l'air, selon qu'il est plus humide ou plus sec, étouffe ou aiguise la vibration; la corde, selon son épaisseur rend un son plus grave, ou plus aigu selon sa finesse, ou de quelque autre façon, l'état de stabilité antérieur se modifie.

Or, comme il en allait de même sur tous les autres instruments, Pythagore, qui jugeait qu'ils étaient tous sans intérêt et très peu dignes de foi, et s'en préoccupait depuis longtemps, recherchait par quelle opération il parviendrait, de manière ferme et constante, à une pleine connaissance des éléments d'appréciation des consonances. Sur ces entrefaites, tandis qu'il longait, comme poussé par une inspiration divine, des ateliers d'artisans, il entendit des coups de marteaux dont les divers sons produisaient en quelque sorte

¹ Boèce, *Institutione musica*, lib.I, cap.X, trad. Christian Meyer, Brepols, Turnout, 2004, p.47-48.

un accord harmonieux. C'est ainsi qu'en présence de ce qu'il cherchait depuis longtemps, il s'approcha, tout étonné, de l'ouvrage. Après mûre réflexion, il fut d'avis que la diversité des sons dépendait de la force des ouvriers et pour que cela apparût plus clairement, il leur ordonna d'échanger les marteaux. Or la propriété des sons ne tenait pas à la vigueur des hommes : elle était inhérente aux marteaux que l'on venait d'échanger. Lorsqu'il s'en aperçut, il examina le poids des marteaux. Or il se trouvait qu'ils étaient au nombre de cinq. Il en trouva un qui pesait le double d'un autre : ils se répondaient à la consonance d'octave. Celui qui faisait le double de l'autre était en rapport sesquiterce à l'égard d'un autre avec lequel il résonnait à la quarte². Il découvrit ensuite que ce même marteau - celui qui était le double de l'autre - était en rapport sesquialtère à l'égard d'un autre avec lequel il formait une consonance de quinte. En revanche, il découvrit que les deux dont il fut prouvé que le premier - le double - était en rapport sesquiterce et sesquialtère à leur égard, observaient mutuellement un rapport sesquioctave. Le cinquième marteau fut laissé de côté, étant dissonant à l'égard de tous. Donc, comme avant Pythagore déjà, les consonances de musique étaient appelées les unes «octave», d'autres «quinte» et d'autres «quarte» - qui est la plus petite consonance - Pythagore fut le premier à découvrir de cette façon-là la proportionnalité qui fonde cette concorde de sons.

Pour la clarté du propos, prenons à titre d'exemple quatre poids de marteaux représentés ci-dessous par les chiffres 12, 9, 8, 6. Les marteaux qui étaient en rapport de poids 12 à 6, faisaient entendre l'octave selon un rapport double. Le marteau de poids 12 par rapport à celui de poids 9 et le marteau de poids 8 par rapport à celui de poids 6 formaient une consonance de quarte selon un rapport épitríte. En revanche, les marteaux de poids 12 à celui de poids 8 et de poids 9 à celui de poids 6 réalisaient une consonance de quinte. Mais les marteaux de poids 8 à 9 faisaient entendre un ton selon un rapport sesquioctave.

XI. De retour en sa demeure, il se livra à de multiples évaluations pour savoir si toute la théorie des symphonies se résumait à ces rapports. Tantôt il adaptait aux cordes des poids équivalents et appréciait à l'oreille leurs consonances, tantôt il reportait le double sur la longueur des roseaux, rajoutait une moitié et réalisait tous les autres rapports : par ses multiples expériences il

². Pour une plus grande clarté, le rapport sesquiterce (ou épitríte) signifie $\frac{4}{3}$ et représente l'intervalle diatessaron ou quarte, et le rapport sesquialtère (ou hémiole) signifie $\frac{3}{2}$ et représente l'intervalle diapente ou quinte. Le rapport double ou diapason représente l'octave. Le rapport $\frac{9}{8}$ est dit sesquioctave et correspond au ton (fa-sol par exemple). Ces rapports s'entendent, pour Pythagore, entre des nombres sans grandeur (ce sont les rapports de fréquences d'aujourd'hui), et correspondent aux rapports inverses des longueurs de cordes du monocorde. Sachant que la longueur totale de la corde est 1, l'octave est $\frac{1}{2}$, la quinte c'est $\frac{2}{3}$, la quarte $\frac{3}{4}$.

atteignit une totale certitude. Parfois même, à titre de mesure, il versait dans des récipients un nombre de cyathes d'un poids équivalent ; d'autres fois il frappait à l'aide de baguettes d'airain ou de fer des récipients de poids divers. Il put se réjouir de ne trouver aucune fluctuation. De là, il passa à l'examen de la longueur et de l'épaisseur des cordes. C'est ainsi qu'il trouva la règle dont il sera question plus loin. Elle est ainsi nommée, non parce que la règle, à l'aide de laquelle nous mesurons le son et les dimensions des cordes, est en bois, mais parce que cette sorte de règle est un instrument de contrôle si stable et sûr qu'il ne saurait induire en erreur aucun chercheur par une indication trompeuse.

Boèce (vers 470-525) occupe une place importante dans l'élaboration de la science occidentale chrétienne. Il est considéré comme un Père de l'Eglise, et ce statut confère à son œuvre théologique une autorité tout au long de l'histoire de l'Eglise. Il n'est donc pas étonnant que ses écrits scientifiques aient été largement utilisés par les premiers docteurs et savants occidentaux, puis par la suite par les doctrinaires de la science ecclésiastique de la Renaissance, et notamment par les jésuites. Ces écrits sont *Institutio arithmetica*, suivis par *De Institutione geometrica* et *Institutio astronomica*, et celui qui nous intéresse, *De institutione Musica*. On retrouve Boèce pendant tout le Moyen Âge, dans les premières universités, chez tous les théoriciens de la musique et dans nombre d'ouvrages scientifiques, jusqu'au XVII^{ème} siècle. Contemporain et probablement ami de Cassiodore, il influence les premiers encyclopédistes comme Isidore de Séville, puis plus tard Barthelemy l'Anglais, Gossuin de Metz et Vincent de Beauvais. Les théoriciens de la musique qui tentent d'élaborer un langage et une écriture à partir du chant grégorien s'appuient sur le travail de Boèce concernant les intervalles, les gammes et les modes. Guido d'Arezzo, l'inventeur de la nomenclature des notes, ou encore Franchino Gaffurio, pour ne citer que ceux-là, fondent leur théorie de la musique à partir de Boèce.

Boèce, quoique romain, connaît parfaitement le grec, ce qui n'était plus tellement fréquent en cette époque de déclin de l'épopée scientifique d'Athènes et d'Alexandrie. Il lit et traduit les textes de logique d'Aristote, mais reste influencé par le courant néo-platonicien qui était apparu quelques siècles auparavant, notamment avec Plotin. Ayant poursuivi ses études à Athènes, c'est sans doute au cours de cette période qu'il conçoit le *De Institutione Musica*. Ici, son inspiration se fait très nettement néo-pythagoricienne, et sa théorie se construit sur les écrits de Nicomaque de Gerasse, important représentant de ce courant de pensée, qui lui fournira par ailleurs la matière de ses œuvres mathématiques.

Nicomaque de Gerasse, vit au II^{ème} siècle et fait partie du mouvement intellectuel qui se développe autour d'Alexandrie. Nicomaque avait sans doute lu les écrits de Ptolémée et de Théon de Smyrne qui vivaient peu de temps auparavant. C'est un pédagogue, auteur notamment d'un *Manuel d'arithmétique* dont s'inspirera Boèce, et d'un *Manuel d'harmonique*, qui aurait dû faire partie d'un ouvrage plus

général concernant la musique, mais dont on n'a pas d'autres traces. Ses successeurs sont Porphyre, auteur d'un long commentaire des *Harmonices* que Ptolémée avait écrit au siècle précédent à partir des travaux d'Euclide, *La division du canon*³, et Jamblique, qui, outre sa *Vie de Pythagore*, écrit un commentaire du traité d'arithmétique de Nicomaque. Tous ces auteurs s'appuient sur la théorie musicale de Pythagore, élaborée quelque sept siècles auparavant, et transmise par ses disciples, Philolaus et Archytas, puis par Aristoxène qui s'oppose à sa théorie. Les premiers siècles de notre ère voient réapparaître des courants de pensées inspirés des anciens, comme Platon ou Pythagore, et faute d'émergence d'une nouvelle pensée, on assistait alors dans les écoles grecques, à une fascination renaissante pour les nombres et leur rapport à la perfection de la nature.

Ce courant de pensée néo-platonicien apparaîtra à nouveau vers le milieu du XV^{ème} siècle, en Italie puis en France, autour notamment de Marcile Ficin puis de Pic de la Mirandole. On assiste également à un retour de ces idées pythagoriciennes, avec Jean Reuchlin. D'Alembert, dans l'*Encyclopédie*, qualifie en le fustigeant ce courant de 'philosophie pythagoreo-platonico-cabalistique', qui perdure jusqu'à la fin du XVI^{ème} siècle, surtout en Italie, en opposition à la science scolastique officielle.

Le texte fondateur : Nicomaque de Gérase

La légende des marteaux de Pythagore apparaît pour la première fois, en l'état actuel des connaissances, chez Nicomaque de Gérase, dans *Harmonices manuale*. Ce manuscrit a été découvert à la fin du XV^{ème} et édité en grec à Leyde en 1616 par Meursius. Il a été traduit en latin par Marcus Meibom dans un ouvrage regroupant plusieurs textes grecs relatifs à la musique, *Antiquae musicae auctores*, paru en 1652⁴, puis à nouveau édité en grec et en latin par Carl von Jan à la fin du XIX^{ème} siècle⁵.

³ Au début du XX^{ème} siècle, on a contesté l'authenticité du traité d'Euclide, *La division du Canon*, qui aurait été écrit peu avant par un autre auteur, peut-être Eudoxe. Voir Paul Tannery, 'Inauthenticité de la Division du canon' in *Mémoires Scientifiques*, t III, 81, p 213-219. Cependant Ch. Em. Ruelle semble maintenir la paternité du traité à Euclide (C.E. Ruelle, *Sur l'authenticité probable de la division du canon musical attribué à Euclide*, Leroux, Paris, 1906). Il semble qu'on l'attribue de nos jours à Cléonide.

⁴ Cette compilation regroupe les textes suivants :

Aristoxène de Tarente "*Harmonicorum elementorum libri 3*"; Euclide "*Introductio harmonica*"; Nicomaque de Gérase le pythagoricien, "*Harmonices manuale*" ; Alypius, "*Introductio musica*" ; Gaudence le philosophe, "*Introductio harmonica*"; Bacchius senior, "*Introductio artis musicae*"; Aristide Quintilien, "*de Musica libri 3*"; Martianus Capella, "*de Musica liber 9*".

Marcus Meibom, *Antiquae musicae auctores*, Elzevir, Amsterdam, 1652, 2 tomes.

Une partie de ces textes ont été traduits en Français par Charles Emile Ruelle : *Collection des auteurs grecs relatifs à la musique*, Impr. Nationale, Paris, 1895.

⁵ Carl von Jan, *Musici scriptores graeci*, Leipzig, B. G. Teubneri, 1895.

A la fin du III^{ème} siècle, soit environ 150 ans après Nicomaque, le philosophe néo-pythagoricien Jamblique, dans sa *Vie de Pythagore*⁶, reprend la description de l'anecdote, sans ajouter d'éléments exploitables.

Une autre filière nous indique un texte de Gaudence, *Introductio harmonica*, qui fait également partie du recueil édité par Meibom en 1652, mais sous le nom de Gaudentius philosophicus, ce qui laisse supposer qu'il ne s'agit pas de Gaudence, évêque de Brescia à la fin du IV^{ème} siècle, dont on ne connaît que des sermons. Il semble que notre Gaudence ait vécu au I^{er} siècle, selon Fétis, peut-être avant Ptolémée. Une traduction du texte de Gaudence par Charles Emile Ruelle⁷ est disponible dans quelques bibliothèques.

On peut également citer Macrobe (V^{ème} siècle), qui écrit une adaptation du livre 6 du *De republica* de Cicéron, intitulé *Summa Scipionis*. Jusqu'au XIX^{ème} siècle, on ne connaissait l'ouvrage de Cicéron que par cette adaptation de Macrobe, mais on a depuis retrouvé un manuscrit qui en diffère nettement. En particulier, concernant l'extrait qui nous intéresse, qui correspond au livre II, chapitres 1 à 4 de Macrobe, Cicéron, au livre VI, chapitre 13, ne fait aucune allusion à Pythagore et à ses marteaux. Macrobe a lu les auteurs néo-pythagoriciens des siècles précédents.

A la suite de ceux-ci, on retiendra également Cassiodore, contemporain et ami de Boèce, qui écrit aussi un texte citant l'anecdote, et s'inspirant cette fois de Gaudence dont il fait l'éloge.

Nous ne rencontrons, parmi les textes des auteurs antérieurs qui ont traité de l'harmonie et de la théorie musicale, aucune allusion à cette histoire attribuée à Pythagore. Ni Cléonide dans son *Introduction harmonique*, ni dans *La division du Canon*, ni Ptolémée dans ses *Harmoniques*, ni Aristoxène par ailleurs opposé à Pythagore dans sa conception de l'harmonie, ni Aristote, ni Platon ne parlent de cette anecdote qui apparaît donc bien apocryphe et qui pourrait avoir été forgée par Nicomaque pour illustrer son exposé.

On peut s'interroger avec justesse sur l'intérêt que présente de rechercher la paternité de cette histoire. C'est qu'elle nous renseigne sur la façon dont on représente les intervalles de hauteur de son aux premiers siècles de notre ère et comment on justifie la relation entre nombres et intervalles consonants, et en particulier sur la curieuse suite 6, 8, 9, 12 qui génère les intervalles de quarte, de quinte, d'octave et de ton. Pythagore n'a pas créé un système pour les musiciens, les consonances de quarte et de quinte (qui sont en fait le même intervalle, mais renversé) sont des consonances naturelles qui s'appuient sur la présence de l'harmoniques 3, qui est consonant. Pythagore a cherché à mathématiser les intervalles, et a trouvé qu'ils étaient analogues à la série 6, 8, 9, 12. Ces intervalles

⁶ Jamblique, *Vie de Pythagore*, trad. L. Brisson, A.P. Segonds, Paris, Les Belles Lettres, 1996, p.66-68.

⁷ *Alypius et Gaudence*, trad. Ch. Em. Ruelle, Paris, Firmin-Didot et Cie, 1897.

constituent le socle de l'harmonie pendant deux millénaires, et on les retrouve dans toutes les civilisations, parce qu'ils s'appuient sur des rapports naturels, physiques. L'ambition probable des auteurs qui reprennent cette parabole est d'illustrer l'introduction de l'étude des consonances, et cette histoire remplit tout d'abord une fonction pédagogique. Elle permet, après l'introduction de la perception de la réalité physique par les sens, avec Aristote, et en musique avec Aristoxène, de constituer une espèce de caution expérimentale à une théorie mathématique abstraite.

La version de Nicomaque, la première dont nous disposons, est un peu plus détaillée que celle de Boèce, mais un peu moins anecdotique. Boèce se sert de cette histoire pour introduire sa théorie des intervalles, il ne s'encombre pas de littérature et ne conserve que ce qui est utile à son illustration. Nicomaque construit son système d'intervalles à partir de cette légende. Là où Boèce cite la suite 6, 8, 9, 12 comme un exemple, Nicomaque se fonde sur ces nombres nullement pris au hasard puisqu'ils sont les seuls entiers simples à répondre aux rapports qui déterminent les intervalles. L'ensemble de l'Introduction harmonique est un texte pédagogique destiné à expliquer le système des intervalles de façon simple, et sur ce plan, c'est assez réussi.

Voici le texte de Nicomaque⁸ :

CHAPITRE VI

26. Quant à la quantité numérique qui représente la distance des cordes sonnant la quarte, celle de la quinte, celle qui par leur réunion devient ce qu'on nomme diapason (octave), enfin le ton additionnel placé entre les deux tétracordes, voici comment Pythagore, à ce qu'on affirme, s'y est pris pour s'en rendre compte.

27. Un jour qu'il se promenait tout en s'abandonnant aux réflexions et aux pensées que lui suggéraient ses combinaisons, cherchant s'il ne pourrait pas imaginer un secours pour l'oreille, sûr et exempt d'erreur, tel que la vue en possède un dans le compas et dans la règle ou même, disons-le, dans la dioptra, le toucher dans la balance, ou dans l'invention des mesures, il vint à passer, par une coïncidence providentielle, devant un atelier de forgeron, et entendit très distinctement des marteaux de fer frappant sur l'enclume et donnant pêle-mêle des sons parfaitement consonants entre eux, à

⁸ Il s'agit ici de la traduction du grec au français réalisée par Charles Emile Ruelle éminent helléniste de la fin du XIX^{ème} siècle. Ruelle est parti du texte grec retrouvé en 1616 et édité par Meibom en 1652. Cette traduction est parue sous le titre : '*Manuel d'harmonique et autres textes relatifs à la musique*', dans la 'Collection des auteurs grecs relatifs à la musique', Baur, Paris, 1881.

l'exception d'un seul couple. Il reconnut, parmi ces sons, les consonances de diapason (octave), de diapente (quinte) et de diatessaron (quarte). Quant à l'intervalle intermédiaire entre la quarte et la quinte, il s'aperçut qu'il était inconsonant en lui-même ; mais, d'autre part, complémentaire de la plus grande de ces deux consonances.

28. Rempli de joie, il entra dans l'atelier comme si un dieu secondait son dessein, et, au moyen d'expériences variées, après avoir reconnu que c'était la différence de poids qui causait la différence de son, et non pas l'effort des forgerons ni la forme des marteaux, ni le déplacement du fer laminé, il releva avec un grand soin le poids des marteaux et leur force impulsive qu'il trouva parfaitement identique, puis il rentra chez lui.

29. Il fixa un clou unique dans l'angle formé par deux murailles, pour éviter qu'il y eût même de ce côté la moindre différence ou que, d'une manière quelconque, la pluralité des clous ayant chacun leur matière propre rendît l'épreuve suspecte. Il suspendit à ce clou quatre cordes semblables par la substance, le nombre des fils, la grosseur, la torsion, et fit supporter à chacune d'elles un poids qu'il fixa à son extrémité inférieure. De plus, il rendit les longueurs des cordes de tout point égales, puis frappant ensemble les cordes deux à deux, il reconnut respectivement les consonances précitées qui variaient avec chaque couple de cordes.

30. La corde tendue par la suspension du plus grand poids, comparée avec celle qui supportait le plus petit, lui fit constater une résonance à l'octave ; or celle-ci représentait 12 des poids donnés, et celle-là 6. Il établit ainsi que l'octave est dans le rapport double, ce que les poids eux-mêmes lui avaient fait entrevoir. La plus grande corde, comparée avec celle qui venait après la plus petite et qui représentait 8 poids, sonnait la quinte, et il établit qu'elles étaient dans le rapport sesquitièrs, ce qui était aussi le rapport des poids entre eux ; puis il la compara avec celle qui la suivait, par rapport au poids supporté. La plus grande des autres cordes se trouvant avoir 9 poids sonnait la quarte, proportionnellement aux poids ; or il constata, qu'elle était dans le rapport inversement sesquitièrs et que cette même corde se trouvait par nature sesquialtère de la plus petite, car 9 est à 6 dans le même rapport, de même que la corde proche de la petite et supportant 8 poids était à la corde qui en supporte 6 dans le rapport sesquitièrs et à la corde de 12 poids dans le rapport sesquialtère.

34. Par conséquent, l'intervalle compris entre la quinte et la quarte, c'est-à-dire celui dont la quinte surpasse la quarte était confirmé comme se trouvant dans le rapport sesquioctave qui est

celui de 9 à 8. Le diapason (octave) était le système formé par la réunion de l'une et de l'autre, autrement dit de la quinte et de la quarte placées en conjonction ; de même que le rapport double se compose du sesquialtère et du sesquitiens, soit 12, 8, 6 ; ou inversement, par la réunion de la quarte et de la quinte, de même que le double se compose du sesquitiens et du sesquialtère, soit 12, 9, 6, placés dans cet ordre.

32. Après avoir exercé sa main et son oreille à l'étude des poids suspendus et bien établi d'après ces poids le rapport des proportions constatées, il transporta ingénieusement les résultats généraux obtenus par les cordes, (lesquels provenaient du clou placé dans l'angle des deux murailles), sur la *batère* (la tablette inférieure) d'un instrument qu'il nomma *cordotone*, et la tension, portée à un point proportionnel à celles que produisaient les poids, passa dans le mouvement des chevilles placées à la partie supérieure. Une fois installé sur ce terrain et comme qui dirait en possession de ce gnomon infallible, il étendit l'expérience en la faisant sur divers instruments, par exemple au moyen de la percussion des vases, sur les flûtes, les syrinx ; les monocordes, les trigones et autres semblables ; toujours il trouva consonante et invariablement sûre la détermination indiquée par les nombres.

33. Il nomma *hypate* le son correspondant au nombre 6, *mèse*, le son 8, qui se trouve être son sesquitiens ; *paramèse*, le son 9, plus aigu d'un ton que le son moyen et par conséquent son sesquioctave ; enfin *nète*, le son 12. Ensuite il suppléa les points intermédiaires, suivant le genre diatonique, au moyen de sons proportionnels et subordonna ainsi la (lyre) octacorde aux nombres consonants, savoir le double, le sesquialtère, le sesquitiens, et à la différence de ces deux derniers, le sesquioctave.

Sans aucun doute le résumé de Boèce est beaucoup plus compréhensible, et encore davantage par l'élégante traduction de Christian Meyer.

On relève quelques différences avec la version de Boèce, peut être dues à des copies ou à des approximations de traduction. On notera l'analogie très moderne, expérimentalisante presque, entre la vue et le compas, d'une part, et l'ouïe et ce nouvel instrument de mesure que Pythagore invente : « [...] cherchant s'il ne pourrait pas imaginer un secours pour l'oreille, sûr et exempt d'erreur, tel que la vue en possède un dans le compas et dans la règle ou même, disons-le, dans la dioptra, le toucher dans la balance, ou dans l'invention des mesures ». Si cette comparaison n'est pas un ajout des copistes ou des traducteurs, on constate un réel souci de quantification de la sensation qu'on pensait plus tardif. Cette préoccupation de vérification, de mesure et de réalisation est une préoccupation de physicien, et on peut trouver ici encore un argument contre l'authenticité de cette histoire. Son auteur semble plus aristotélien, se fondant sur les sens, sur le réel, sur la mesure, que pythagoricien, constructeur

d'un édifice géométrique parfait dont les briques sont les nombres, et les mathématiques la règle. Cette période des premiers siècles est emprunte à la fois d'un néo-platonisme (et néo-pythagorisme) très mathématique, et d'un aristotélisme beaucoup plus physique et expérimental.

Les trois expériences décrites par Nicomaque

Cependant le texte de Nicomaque laisse bien apparaître la succession des expériences, qui nous fait comprendre à quel point elles ne sont pas forcément liées. La distinction entre ces trois expériences explique les deux erreurs que nous allons développer.

La première expérience est celle des marteaux : Pythagore entend les consonances des sons produits par les chocs des quatre marteaux pris deux à deux. Il procède avec justesse à des vérifications (échange des manipulateurs, constance de la force), et conclut à la relation entre les poids et les hauteurs de son. Mais, et c'est important, il ne dit pas dans quel sens. Il est tout à fait probable que le marteau le plus lourd rende le son le plus grave. Nicomaque parle de 'différence de poids qui causait la différence de son', et Boèce nous dit : 'Il en trouva un qui pesait le double d'un autre: ils se répondaient à la consonance d'octave'.

On ne sait pourquoi Boèce introduit un cinquième marteau, sans doute à cause d'une mauvaise interprétation de '*Quant à l'intervalle intermédiaire entre la quarte et la quinte, il s'aperçut qu'il était inconsonant en lui-même*', il s'agit de l'intervalle nommé sesquioctave, qui correspond à un ton, ou si l'on veut entre les poids 8 et 9. La détermination de cet intervalle est essentielle, et Boèce semble l'ignorer, ou plutôt il minimise l'importance de cette détermination, qui pour Boèce allait de soi. En effet, la démarche de Pythagore consiste ici à créer un nouveau système d'intervalles dans lequel ce rapport a une fonction centrale, on le verra.

Une fois rentré chez lui, Pythagore suspend les poids équivalents à quatre cordes égales, et c'est la seconde expérience. Cette fois les poids ne sont plus des résonateurs, comme dans l'échoppe du forgeron, mais des tenseurs. Les cordes devraient donc sonner dans les proportions inverses de celles des marteaux. En effet, si on convient bien que des corps sonores produisent un son grave lorsqu'ils sont pesants, les cordes tendues par un poids important produisent un son aigu. Il n'y a donc aucune raison de rapprocher ces deux expériences, il est clair que la hauteur des sons est déterminée par des facteurs différents dans les deux cas : les accroissements respectifs de poids d'un corps sonore rend un son grave, et de la tension d'une corde un son aigu. C'est la première erreur, évidente, et qui pourtant n'est jamais relevée par les commentateurs de cette histoire, même par nos contemporains... La seconde erreur, plus théorique, c'est bien entendu que la hauteur de son est proportionnelle au carré des poids tenseurs, et c'est le père de Galilée, Vincenzo qui en est le découvreur, vers 1585. On doit à Claude Palisca d'avoir découvert et traduit le texte de Vincenzo dans lequel ce dernier explique,

avec un certain courage il faut le dire, l'erreur de Pythagore. Galilée reprendra cette théorie dans les *Discorsi* parus en 1638, on y reviendra plus loin.

Enfin, la troisième expérience, celle que l'histoire de l'acoustique musicale a retenue avec raison, c'est celle du monocorde, au cours de laquelle Pythagore associe aux longueurs d'une corde tendue les sons de différentes hauteurs qu'elle produit lorsqu'elle vibre. Cette expérience fonde la théorie des intervalles et des consonances.

Dans son texte, Boèce est nettement évasif, il nous raconte que Pythagore, de retour chez lui, pratiquait de nombreuses expériences : *'Tantôt il adaptait aux cordes des poids équivalents et appréciait à l'oreille leurs consonances, tantôt il reportait le double sur la longueur des roseaux, rajoutait une moitié et réalisait tous les autres rapports: par ses multiples expériences il atteignit une totale certitude'*. Boèce est nettement plus imprécis que Nicomaque sur la distinction entre ces trois expériences, ne prenant aucun risque car sans doute peu confiant dans la perfection de l'analogie entre les marteaux et les cordes.

Les autres textes

Jamblique, dans la *Vie de Pythagore*, nous offre la relation de l'histoire des marteaux, relativement fidèle à celle de Nicomaque. Jamblique est soucieux de la vraisemblance de l'histoire, et il précise quelques détails pratiques. A propos des marteaux de poids 8 et 9 il dit : *« Il constata que l'intervalle entre la quarte et la quinte était en soi dissonant, mais qu'il pouvait combler la différence de grandeur qui pouvait subsister entre elles »*. En effet, si l'intervalle de seconde n'est pas agréable à l'oreille, il est essentiel pour la construction du système à deux tétracordes disjoints séparés par un ton représenté par le rapport $9/8$, et qui est l'objet même de cette expérience. C'est peut-être ici l'explication du cinquième rapport, dissonant, relevé par Boèce dans sa narration. Par ailleurs, Jamblique, esprit pratique, suggère que Pythagore, quittant l'échoppe du forgeron, rentre chez lui, *« Ayant pris des morceaux de métal d'un poids rigoureusement égal à celui des marteaux »*. Par contre on peut supposer qu'il n'a pas réalisé l'expérience (mais doit-on vérifier les affirmations du maître vénéré ?), puisqu'il affirme et confirme que les cordes étaient *rigoureusement de longueur égale*. Il est important de noter que les écrits de Jamblique ont été largement diffusés par la suite, sans doute beaucoup plus que ceux de Nicomaque.

Peu avant Boèce, Macrobe nous fait une tout autre relation de cette histoire, légèrement plus romancée, dans son adaptation du livre VI du *De republica* de Cicéron, le *Songe de Scipion*.

Macrobe, *Somnium scipionis*, Livre II, cap 1

[...] Pythagore est le premier des Grecs qui ait attribué aux

sphères cette propriété harmonique et obligée, d'après l'invariable régularité du mouvement des choses célestes ; mais il ne lui était pas facile de découvrir la nature des accords et les rapports des sons entre eux. De longues et profondes méditations sur un sujet aussi abstrait ne lui avaient encore rien appris, quand une heureuse occurrence lui offrit ce qui s'était refusé jusqu'alors à ses opiniâtres recherches.

Il passait par hasard devant une forge dont les ouvriers étaient occupés à battre un fer chaud, lorsque ses oreilles furent tout à coup frappées par des sons proportionnels, et dans lesquels la succession du grave à l'aigu était si bien observée, que chacun des deux tons revenait ébranler le nerf auditif à des temps toujours égaux, en sorte qu'il résultait de ces diverses consonances un tout harmonique. Saisissant une occasion qui lui semblait propre à confirmer sa théorie par le sens de l'ouïe et par celui du toucher, il entre dans l'atelier, suit attentivement tous les procédés de l'opération, et note les sons produits par les coups de chaque ouvrier.

Persuadé d'abord que la différence d'intensité de ces sons était l'effet de la différence des forces individuelles, il veut que les forgerons fassent un échange de leurs marteaux ; l'échange fait, les mêmes sons se font entendre sous les coups des mêmes marteaux, mus par des bras différents. Alors toutes ses observations se dirigent sur la pesanteur relative des marteaux; il prend le poids de ces instruments, et en fait faire d'autres qui diffèrent des premiers, soit en plus, soit en moins mais les sons rendus par les coups des derniers marteaux n'étaient plus semblables à ceux qui s'étaient fait entendre sous le choc des premiers, et ne donnaient que des accords imparfaits.

Pythagore en conclut que les consonances parfaites suivent la loi des poids; en conséquence, il rassembla les nombreux rapports que peuvent donner des poids inégaux, mais proportionnels, et passa des marteaux. aux cordes sonores.

Il tendit une corde sonore avec des poids différents, et dont le nombre égalait celui des divers marteaux; l'accord de ces sons répondit à l'espoir que lui avaient donné ses précédentes observations, et offrit de plus cette douceur qui est le propre des corps sonores. Possesseur d'une aussi belle découverte, il put dès lors saisir les rapports des intervalles musicaux, et déterminer, d'après eux, les différents degrés de grosseur, de longueur et de tension de ses cordes, de manière à ce que le mouvement de vibration imprimé à l'une d'elles pût se communiquer à telle autre éloignée de la première, mais en rapport de consonance avec elle.

Chez Macrobe, on ne parle plus de nombres et de rapports. Le style littéraire l'emporte, et on frise l'invraisemblance. Macrobe raconte ainsi que Pythagore, non

content de procéder à l'échange des marteaux, en fait confectionner d'autres, différents et donc dissonants. La transition entre les trois expériences et les explications des phénomènes sont très succinctes : « *Pythagore en conclut que les consonances parfaites suivent la loi des poids; en conséquence, il rassembla les nombreux rapports que peuvent donner des poids inégaux, mais proportionnels, et passa des marteaux aux cordes sonores* ». Cette version du *Songe de Scipion*, adaptée par Macrobe d'un texte de Cicéron, a été lue et commentée pendant des siècles, eu égard à la réputation du grand orateur.

Les références à cette histoire des marteaux de Pythagore sont très nombreuses, en particulier dans la littérature d'acoustique musicale, plus préoccupée de l'esthétique des intervalles, des gammes et des tempéraments que des lois physiques de production des sons. Citons par exemple Guido d'Arezzo, célèbre théoricien de la musique du XI^{ème} siècle, à qui l'on doit la nomenclature des notes de la gamme, dans son ouvrage le plus célèbre, *Micrologus* :

Un certain Pythagore, grand philosophe, voyageait d'aventure ; on arriva à un atelier où l'on frappait sur une enclume à l'aide de cinq marteaux. Etonné de l'agréable harmonie qu'ils produisaient, notre philosophe s'approcha et, croyant tout d'abord que la qualité du son et de l'harmonie résidait dans les différentes mains, il interchangea les marteaux. Cela fait, chaque marteau conservait le son qui lui était propre. Après en avoir retiré un qui était dissonant, il pesa les autres et, chose admirable, par la grâce de Dieu, le premier pesait douze, le second neuf, le troisième huit, le quatrième six de je ne sais quelle unité de poids.

C'est un résumé bref et concis, mais qui au moins ne commet pas l'erreur de la transposition de l'expérience aux cordes tendues...

Voici un exemple de ce qu'on pouvait trouver dans un ouvrage d'harmonie du début du XVII^{ème} siècle (Salomon de Caus, *Institution Harmonique*, 1615) :

Celui qui a essayé premièrement à donner quelques proportions aux intervalles, entre les sons graves et aigus, fut (comme dit Macrobe, et après luy Boèce) Pitagoras lequel passant par une rue, où il y avoit une boutique de forgerons qui travailloyent avec leurs marteaux, trouva que lesdits marteaux donnoient en frappant chacun un son différent suivant leur pesanteur; de là trouva les proportions des consonances par le poids desdits marteaux, et après recherche (comme dit le même Boèce) sur un instrument d'une corde (nommé des grecs monochorde) les intervalles qui estoient entre les consonances, et trouva que lesdites consonances estoient formées d'intervalles proportionnés ensemble.

On n'est plus du tout dans la description d'une expérience, mais bien dans l'anecdote destinée à soutenir un discours plutôt dogmatique. Il s'agit ici d'un ouvrage d'enseignement de la théorie musicale.

Plus près de nous, il n'est pas inutile de considérer comment Huygens abordait cette légende. On sait que le grand savant hollandais était également musicien, et qu'il a inventé un clavier de 31 parties par octave afin de résoudre le problème du tempérament idéal, c'est-à-dire respectant la justesse et la contrainte des notes fixes. Dans une pièce manuscrite non datée, il commente l'histoire de Pythagore⁹ :

Je veux bien croire que ce fut Pythagore qui s'avisait le premier de faire cette recherche, car il avait l'esprit porté à la recherche des choses naturelles et très beau, non pas toutefois que les marteaux du maréchal lui en aient donné l'occasion car des pièces de fer de la forme qui sert à cela ne sont nullement sonores. Il se peut qu'il ait rencontré des pièces de quelque métal mieux formées pour sonner que les marteaux et qu'il ait remarqué que, de celles qui étaient semblables, les plus grosses sonnaient plus bas. Et il pouvait déterminer par leurs différents poids la proportion des consonances, parce qu'il est vrai que de deux pièces de métal semblables celle qui est double de poids de l'autre lui consonoit de l'octave plus bas et celle qui est sesquialtère en poids fait la quinte en bas et ainsi de suite. Quelques anciens auteurs de même racontent qu'après cela il attachait des poids suivant ces proportions trouvées à des cordes pour les tendre, et qu'il trouva que le poids double tendait la corde à l'octave plus haut, et la sesquialtère à la quinte, ce qui est faux : et si ces auteurs s'étaient donné la peine de faire l'expérience ils auraient trouvé qu'il faut le poids quadruple du premier pour faire monter une corde à l'octave; qu'il faut qu'il soit comme 9 à 4 pour faire la quinte, et qu'universellement la raison des poids doit être double de celle qui détermine les consonances par les parties d'une corde tendue. Si Pythagore a donc aussi examiné les consonances par des cordes tendues par des poids différents, il a trouvé la chose comme je viens de dire, mais ce n'est pas d'ici qu'il a établi les proportions des consonances, mais par la division de la corde ou du canon comme ils appelaient cela anciennement.

Comme on le remarque, Huygens sépare bien les deux expériences, il rejoint Pythagore sur les rapports inversement proportionnels entre les poids frappés et les hauteurs de son, il relève bien qu'il n'en est pas de même pour les poids tenseurs qui suivent une loi proportionnelle à leur carré. Huygens avait lu le passage des *Discorsi* de Galilée dans lequel il puise presque mot pour mot.

⁹ Christiaan Huygens, Portefeuille 27 (Musica), f. 56, *Œuvres complètes*, Société Hollandaise des Sciences, Nijhoff, La Haye, 1937, tome 19, p 362-363.

Un contradicteur de Pythagore : Vincenzo Galilei

Venons-en donc aux Galilei, père et fils, Vincenzo, le père qui, luthiste, a fait l'expérience de la tension des cordes, et Galileo, le fils qui a écrit ce remarquable ouvrage de physique, paru en 1638, les *Discorsi*, mais dont les pages concernant l'acoustique datent probablement d'avant 1610, et qui rendent un hommage posthume aux théories développées par son père.

Vincenzo Galilei (1520-1592) était avant tout musicien, luthiste, et théoricien de la musique. Formé par Zarlino, il entre en conflit avec lui sur la méthode de détermination des degrés de la gamme. Vincenzo fréquente les assemblées de la *Camerata Fiorentina* du comte Bardi qui regroupe alors des poètes, des savants et des amateurs de curiosités intellectuelles. Il est l'auteur de trois ouvrages de théorie musicale.

Dans un traité non publié, et découvert dans les années 1960 par Claude Palisca,¹⁰ probablement écrit vers 1586, Vincenzo Galilei s'intéresse aux différentes façons de produire le *diapason* (l'octave). Il relate une expérience qu'il a effectuée et qui contredit la théorie de Pythagore sur la définition du rapport de proportionnalité simple entre la hauteur de la note et le poids tenseur. Vincenzo n'est pas seulement un théoricien, il est également musicien. Lorsqu'il accorde son luth, il sent, physiquement, la tension exercée sur la corde. Il n'est pas étonnant qu'il ait cherché à vérifier la fable du forgeron, ce qu'aucun savant n'avait pensé à faire auparavant. Il suspend des poids aux cordes à l'extrémité d'un luth, là où elles sont fixées sur les chevilles qui permettent l'accord. Et il constate que pour produire l'octave, il faut non pas doubler le poids, mais le quadrupler. De même, pour produire la quinte (rapport de longueurs de cordes de 2/3), il faut multiplier le poids par 9/4, ce qui exprime bien le carré de l'inverse du rapport de longueur de corde¹¹. Ce que fait Vincenzo Galilei ici, c'est réellement une expérience de physique. Il observe la différence de tension qui lui paraît anormalement forte lorsqu'il accorde son luth. Il fait l'expérience des cordes tendues, mesure les poids tenseurs, et conclut à la formulation mathématique de la loi du carré. Vincenzo Galilei est un praticien, un technicien, un artiste disait-on à l'époque. Il est devenu théoricien au contact des savants qu'ils rencontrait, et a pu développer, auprès de ces influences multiples, ce savoir faire et ce savoir penser qui permet à la science de se construire, sur la base à la fois de l'observation, de la quantification, de la théorie et de l'expérience. Dès le début de son *Dialogo* de 1581,

¹⁰ Vincenzo Galilei, *Discorso intorno alla diversita delle forme del Diapason*, Trad. De C. Palisca : A special discourse concerning the diversity of the ratios of the diapason, in *The Florentine Camerata*, Yale University Press, New Haven, 1988

¹¹ Vincenzo Galilei, *Discorso...*, Trad. De C. Palisca : *A special discourse concerning the diapason*, in *The Florentine Camerata*, Yale University Press, New Haven, 1988, p 184-185.

contre les aristotéliens, Vincenzo affirme sa préférence pour la connaissance issue d'expérience des sens plutôt que du dogme¹² :

je désire, à propos des choses que la sensation peut atteindre, que soit écartée (comme le dit Aristote dans le huitième livre de sa *Physique*), non seulement l'autorité, mais aussi, la raison biaisée qui récuse comme lui étant contraire ce qu'on voudrait que ce ne soit qu'une vérité apparente, parce qu'il me semble qu'ils se comportent de façon ridicule (pour ne pas dire, comme le philosophe, de façon idiote) les gens qui pour prouver quelque conclusion qui est la leur veulent tout bonnement qu'on y croit sur la simple foi de l'autorité, sans produire les raisons qui la rendraient valides.

Bien sûr nous ne sommes pas encore en présence d'une méthode expérimentale achevée, mais c'est bien chez un musicien que la prééminence de l'expérience des sens sur le dogme s'est manifestée, et ce n'est pas anodin.

Vincenzo Galilei commente ainsi son expérience¹³ :

Il existe peu de choses qui ne peuvent être pesées, comptées ou mesurées.

Nous sommes bien ici en présence des principes fondateurs de la méthode expérimentale, la mesure et la quantification. Vincenzo ne refuse pas les mathématiques, mais au lieu de les considérer comme un langage qui permet l'expression de la beauté des nombres et de leurs relations, il les utilise pour traiter des grandeurs préalablement mesurées.

Vincenzo reprendra sa thèse dans son *Discorso* contre Zarlino de 1589, mais ses ouvrages n'ont pas eu un grand retentissement auprès de la communauté scientifique de l'époque, tout au plus intéressaient-ils les théoriciens de la musique alors en pleine élaboration d'un nouveau langage. C'est le fils de Vincenzo, Galileo Galilei, qui reprendra la théorie du carré des poids tenseurs, contre l'opinion courante scolastique teintée de pythagorisme. Au cours des dernières années de la vie de son père, Galileo, âgé d'une vingtaine d'années, s'est attelé aux problèmes des phénomènes périodiques, tant pour les cordes vibrantes que pour les pendules. La légende des lustres de la cathédrale de Pise se situe vers 1583, mais c'est sans doute lors de son retour à Florence, entre 1585 et 1589, qu'il commence sa réflexion sur le mouvement périodique. Nous n'avons aucune donnée sur le rôle joué par son père et ses expériences musicologiques dans l'élaboration des réflexions de Galilée sur les mouvements périodiques. Raymond Fredette, éminent traducteur et spécialiste du

¹² Vincenzo Galilei, *Dialogo della musica antica e della moderna*, Florence, 1581, trad. R. Fredette.

¹³ Vincenzo Galilei, *Discorso intorno alla diversita delle forme del Diapason*, trad. Palisca, p. 181.

De motu antiquioria, recueil de manuscrits du jeune Galilée sur le mouvement local, est persuadé de cette influence¹⁴ :

Le père prouve, expériences contrôlées à l'appui, qu'on ne peut pas se fier à la théorie si belle et vénérablement appuyée sur les idées des autorités anciennes les plus prestigieuses, Pythagore, Platon. Que s'est-il passé, nous ne le savons pas vraiment. On pourrait même imaginer de façon tout à fait vraisemblable que c'est le fils, à l'occasion de sa découverte en 1583 de l'isochronisme des petites oscillations du pendule, qui aurait rapporté des résultats d'expériences à la maison et qui aurait influé sur les expérimentations dont on vient de parler. Une chose paraît certaine, cependant, la musique, la sensibilité rythmique acquise auprès du père, ont joué un rôle décisif dans cette découverte du fils.

Galilée n'a rien écrit à cette époque sur le son. On sait qu'il avait l'intention d'entreprendre un *De sono et voce*, par une allusion dans une lettre à Belisario Vinta de 1610. Dans les *Discorsi*, son dernier ouvrage paru en 1638, Galilée consacre une dizaine de pages remarquables sur l'acoustique et les vibrations des cordes. Il est probable qu'il se soit servi de notes, aujourd'hui encore introuvables, rédigées au cours de ces années florentines, avant son départ pour Padoue. Ce long délai, au cours duquel Galilée s'intéresse à tout autre chose, explique sans doute certaines inexactitudes dans la description d'expériences, inexactitudes qui ont conduit certains commentateurs à douter de l'authenticité de ces expériences.

A partir du début du XVII^e siècle, on ne se sert presque plus de cette histoire des marteaux de Pythagore pour illustrer la loi des rapports d'intervalles, parce que la notion du 'nombre de vibrations dans le même temps' commence à se substituer à la mystique des nombres chère aux pythagoriciens. Galilée cite à de nombreuses reprises l'expression '*numero di vibrazione in medesimo tempo*' dans les *Discorsi*, ce qui signifie bien le 'nombre de vibrations dans le même temps'. On ne parle pas encore de fréquence, mais le concept se précise, et Mersenne utilise le mot 'période' pour expliquer comment, lui, a pu compter ces mouvements en utilisant une corde très longue et peu tendue, à l'inverse de Galilée qui peine à trouver un moyen de représenter ces vibrations. Il y parviendra dans une expérience dont nous parlerons ailleurs, celle des traces laissées par un couteau sur une plaque de laiton.

La référence à la légende de Pythagore ne sera plus invoquée que dans les textes à caractère historique, à l'occasion de l'exposé des différentes théories sur les

¹⁴ Raymond Fredette, *D'où vient l'antiaristotélisme de Galileo Galilei*, Note de recherche, CRIST, Univ. Du Québec, Montréal, 2002, p 28. Cette intuition que Galilée a pu élaborer sa théorie des mouvements périodiques auprès de son père Vincenzo, en travaillant sur les cordes vibrantes est partagée également par Thomas B. Settle, ami de R. Fredette, dans 'A Reflection on Galileo's Early Empirical Sense', Paper presented at the XXth International Congress of History of Science, Liège, 20-26 July 1997. Ces commentaires sont extraits d'une correspondance que j'ai eue avec Raymond Fredette au cours de l'année 2005-2006.

intervalles. On notera que pendant longtemps, en particulier au XIX^{ème} siècle, on attribue à Montucla la découverte de l'erreur de Pythagore concernant le rapport de poids proportionnel au lieu de quadratique¹⁵. On sait maintenant qu'il faut rendre à Vincenzo Galilei cette correction, reprise par son fils, puis par Huygens.

Après avoir présenté cette approche numérique de la 'division du canon', par les différentes versions de la légende des marteaux de Pythagore, passons maintenant à l'interprétation de la démarche des pythagoriciens.

L'analyse des expériences

Pour une meilleure compréhension, on considèrera à présent dans cette étude cette anecdote comme authentique et on nommera donc l'expérimentateur 'Pythagore', même si, on le verra, il est probable que cette expérience ait été effectuée bien après lui. On sait combien Pythagore était mathématicien avant tout, et que son approche de la description et de la compréhension de la nature est d'abord numérique. La description du son est rendue délicate par sa fugacité, et les phénomènes observables sont limités. Le terrain d'observation est constitué : de la voix humaine, mais tellement changeante d'un individu à l'autre et tellement inconstante ; des sons de la nature ensuite, le bruit du vent, des ruissellements, et surtout le tonnerre, le plus grand bruit sans doute jamais entendu ; enfin des sons artificiels, produits par l'activité humaine, mais difficiles à observer et à reproduire. Alors Pythagore utilise un instrument de musique à cordes, la lyre, sans doute. Les sons sont reproductibles, suffisamment durables et leur hauteur correspond à des longueurs mesurables avec une règle, ainsi qu'à des tensions, également mesurables par les poids. Il a également utilisé des flutes et des aulos (genre de hautbois), mais les intervalles sont déterminés par les trous et sont difficilement modifiables. Pythagore n'a pas inventé le principe de réglage de la hauteur des sons par modification de la longueur de cordes et de la tension. Les instruments de musique existaient bien avant lui et les luthiers et les musiciens savaient parfaitement comment les accorder en jouant sur la tension, et comment, en appliquant ses doigts on raccourcit la corde et on élève le son. Le système alors en vigueur est l'heptacorde, c'est-à-dire deux tétracordes joints qui forment chacun une quarte, et dont les deux cordes intermédiaires sont laissées à l'appréciation du musicien. On accorde les quarte au moyen des battements, tout comme sur une guitare de nos jours, également accordée par quartes. Tout ceci est largement connu, mais ce savoir empirique ne repose pas sur une connaissance de la relation de cause à effet, elle est intuitive. Pythagore va introduire le nombre dans ce savoir-faire, par une méthode de mesure systématique.

¹⁵ Montucla, *Histoire des Mathématiques*, Agasse, Paris, 1799, t 1, p.126.

Le son est un phénomène difficile à étudier, essentiellement parce qu'il ne laisse pas de trace. L'approche mathématique des objets sonores, telle que Pythagore l'envisage, nécessite un certain nombre de préalables. Une telle approche repose sur la mesure de paramètres, et concernant le son, la hauteur, l'intensité, la durée, le timbre. La problématique de l'étude des sons repose donc sur la définition de grandeurs mesurables affectées à ces différentes caractéristiques. Pour définir des grandeurs caractéristiques dans le but de les mesurer, il est nécessaire d'établir des classes d'objets, c'est-à-dire de comparer, et de réunir des sons, identiques en tout point à l'exception de la caractéristique à observer. Cette démarche, décrite ici avec un langage du XX^{ème} siècle, Pythagore l'adopte, même si elle n'est pas explicitée. L'histoire de la physique est une succession de tentatives de définir ces classes d'objets qui permettent de mesurer les grandeurs à observer. Lorsqu'il s'agit de phénomènes visibles et durables, telles que la caractérisation d'objets par la forme, la couleur ou les dimensions, il est aisé de procéder aux observations, de façon visuelle ou tactile. Le travail du mathématicien consiste alors à définir des formes et des méthodes de mesure par comparaison avec des références constituées par la nomenclature des formes (rond, carré, triangle, puis rectangle, coniques, etc.), et la définition d'une longueur étalon. C'est l'objet de la géométrie, aidée par l'arithmétique lorsqu'il est nécessaire de composer ces grandeurs, après leur mesure.

Dans le cas de l'étude des sons, la première démarche consiste donc à établir des classes de sons, selon leurs caractéristiques, et c'est ici que la difficulté apparaît. La première grandeur à définir, et sans doute la plus accessible, serait l'intensité. Mais elle est difficilement mesurable. En effet, l'intensité sonore est une grandeur trop variable, dans l'espace et dans le temps, et sa perception est sujette à la subjectivité. Le timbre, qu'on appelle parfois la couleur du son, peut être défini par comparaison avec des sons connus, comme ceux des instruments de musique, ou plus simplement par les éléments simples du langage. Mais cette grandeur échappe à toute méthode de mesure fiable. Reste donc la hauteur. Parce qu'elle peut être rendue constante et indépendante des autres caractéristiques, elle constitue une grandeur mesurable. Pour cela il est nécessaire de construire une méthode fiable et un instrument propre à produire des sons de hauteurs différentes mais stables, d'une durée suffisamment longue pour en permettre l'observation, et comparable avec un son de hauteur constante, qui sert de référence. La seconde condition est que cet instrument établisse une relation bijective entre d'une part l'ensemble des hauteurs de notes et d'autre part un ensemble de grandeurs mesurables. Voyons maintenant comment Pythagore a élaboré une méthode et un instrument pour parvenir à cette mesure.

Pythagore est frappé par la perfection naturelle des consonances qui reposent sur des rapports de nombres entiers. Ces nombres entiers sont 1 pour l'unisson, 2 pour l'octave ($1/2$ pour la longueur de corde), 3 pour la quinte (qui, ramenée dans une octave, correspond à $3/2$, et donc à $2/3$ pour la longueur de la corde correspondant à cette note), 3 encore pour la quarte, mais en rapport inverse ($4/3$

donc $3/4$ pour la longueur de corde), enfin 4 pour la double octave et bien entendu les multiples de ces grandeurs, qui correspondent aux octaves successives. Le nombre 5 qui détermine le rapport de tierce naturelle ($4/5$) n'est pas utilisé par Pythagore, ni le 7 qui semble-t-il est un chiffre magique et sacré. La méthode est celle des épimores, c'est-à-dire d'établir des rapports constitués d'un tout plus une fraction dont le numérateur est égal au dénominateur augmenté de 1 (nous dirions $1 + 1/n$). L'utilisation conjointe de la série de la *tetractys* (1, 2, 3, 4, dont la somme fait 10) et des rapports épimores, produits les rapports d'intervalles qui constituent le système pythagoricien : 1, $1/2$ (octave), $2/3$ (quinte), $3/4$ (quarte). Cette démarche de construction des éléments de base de la musique par la détermination des intervalles puis par la construction des gammes, se poursuivra pendant plus de vingt siècles, avec ses ruptures, ses dogmes et ses variantes culturelles¹⁶. Encore une fois, ces rapports ne sont pas choisis parce qu'ils sont 'beaux', mais parce qu'ils correspondent aux consonances naturelles, produites par la présence des harmoniques 2 et 3 dans un son quelconque, et qui donc 'résonnent' agréablement à l'oreille.

Les nombres de Pythagore

Avant Pythagore, la musique ne se préoccupe pas de nombres. L'intervalle de base est constitué par le tétracorde qui couvre un intervalle de quarte, qu'on nomme à l'époque épitrète. Une quarte, le diatessaron, c'est l'intervalle do-fa de notre notation, c'est le rapport sesquiterce tel qu'on le définit, c'est-à-dire une unité plus son tiers, ou encore le rapport $4/3$. Le système pré-pythagorien, c'est l'assemblage de deux quartes successives avec une corde commune (un heptacorde, donc), c'est-à-dire do-fa-sib, ou encore un rapport total de $4/3 \times 4/3 = 16/9$. Ce système, fondé sur le plus petit intervalle consonant, convient à l'esthétique de l'époque, mais pas à la perfection mathématique exigée par les pythagoriciens. Ceux-ci veulent que la note la plus grave (hypate) soit en consonance d'octave avec la note la plus aiguë (nète), donc correspondant à un rapport total de 2, tout en conservant des intervalles consonants de quarte. Or, il faut bien comprendre qu'une quarte, c'est également une quinte. Mathématiquement, une quarte, $4/3$, est équivalente à $2/3$, puisque les rapports des deux sons étant à l'octave, ils produisent la même note. Or, une quinte, c'est $3/2$, c'est-à-dire l'inverse d'une quarte $4/3$. Et en effet, do1-fa1, c'est une quarte, et fa1-do2, c'est une quinte. Une octave, do1-do2, c'est donc un assemblage d'une quarte et d'une quinte, ou d'une quinte et d'une quarte. Un tel assemblage, dans notre langage mathématique, c'est un produit de rapports. L'assemblage d'une quarte et d'une quinte, c'est $4/3 \times 3/2$ égal à 2, donc à une octave, et c'est commutatif. Mais une quinte, c'est une quarte 'plus' un petit intervalle tel que deux quartes assemblées

¹⁶ On attribue souvent à Pythagore la construction du système de 12 quintes successives qui construisent la gamme occidentale moderne. C'est beaucoup plus tard, d'abord avec Platon (*Timée*), puis avec la division du canon (attribuée à Euclide), et surtout avec Ptolémée (*Harmoniques*) au Ier siècle, que s'élabore lentement cette construction, en rapport avec la construction des différents genres (diatonique, chromatique, enharmonique...).

'plus' cet intervalle fasse une octave. Si l'on cherche le rapport p/q , tel que $4/3 \times 4/3 \times p/q = 2$, la solution est $p/q = 9/8$.

La révélation des pythagoriciens, c'est de promouvoir un assemblage de deux quarts séparées par un intervalle de $9/8$, dont la 'somme' fait 2, et dont les 'sommés' imbriqués font des quintes de rapport $3/2$. Le tout doit être réalisé avec des nombres entiers...

Les quatre nombres les plus simples qui répondent à ces conditions sont la combinaison 6, 8, 9, 12. En effet, 6 et 8 d'une part, et 9 et 12 d'autre part, sont en rapport sesquiterce ($4/3$, épitrite ou diatessaron) et forment des quarts ; 6 et 9, d'une part, et 8 et 12 d'autre part, sont en rapport sesquialtère ($3/2$, hémiole ou diapente) et forment des quintes ; et 6 et 12 sont en rapport double ($2/1$, octave ou diapason). Le rapport restant est dit sesquioctave ($9/8$, qui forme le 'ton'). Ces arrangements de rapports constituent la véritable invention de Pythagore. Dès lors, l'heptacorde fait place à l'octacorde composé de deux tétracordes séparés par un ton égal à un intervalle de $9/8$.

La détermination des intervalles contenus dans la quarte va occuper pendant plusieurs siècles la communauté des mathématiciens et des musiciens, et susciter de nombreuses polémiques¹⁷. La légende des marteaux consiste à établir la légitimité de l'octacorde : une succession de nombres qui construisent cette nouvelle combinaison, pythagoricienne, d'une octave composée d'un assemblage de deux quarts et d'un ton, ou d'une quarte et d'une quinte. Cette succession est caractérisée par les nombres 6, 8, 9, 12, associés soit à des poids sonnants, soit à des poids tenseurs, soit à des longueurs de cordes, ou encore aux longueurs de tuyaux¹⁸.

La première expérience : les poids sonnants

Revenons alors au texte de Boèce, référence dans la littérature musicologique, relatant les expériences de Pythagore. Il observe les sons produits par les marteaux et constate qu'ils rendent des sons de hauteurs différentes. Dans un premier temps il élimine la composante humaine entachée de subjectivité, c'est-à-dire la force de frappe, et pour cela procède à l'échange des manipulateurs. Il constate alors que les différences sont exclusivement causées par les différences des marteaux. Ils ne diffèrent que par leurs masses, c'est donc la grandeur caractéristique, qui induit la différence de hauteur de sons. Pythagore ne cherche pas à comprendre pourquoi la

¹⁷ On classe les différentes méthodes de détermination des intervalles contenus dans la quarte en genres : diatonique, chromatique et enharmonique. On comptera plus d'une vingtaine de façons d'organiser ces sons à l'époque de Ptolémée (Ier siècle). Ces modes, et les controverses qu'ils suscitent, ont alimenté une littérature abondante jusqu'à nos jours.

¹⁸ Les spécialistes de la théorie musicale de l'Antiquité pensent aujourd'hui que l'heptacorde a subsisté longtemps et que ce serait Philolaos, disciple de Pythagore, qui serait en fait l'inventeur des deux tétracordes disjoints et de l'intervalle $9/8$ (le ton). Paul Tannery qui conteste l'authenticité des 'fragments philolaïques', suggère qu'il s'agit plutôt d'Archytas, disciple de Philolaos et théoricien de l'acoustique, contemporain de Platon.

masse détermine la hauteur du son, il constate seulement la relation. Rentré chez lui, il ne poursuit pas dans cette voie, celle des poids des corps sonnants, mais transpose l'expérience sur les cordes tendues, dans un premier temps avec des poids équivalents à ceux du forgeron, et ensuite avec un poids tenseur unique et constant et des longueurs de cordes différentes. Si on se réfère à la cohérence de l'histoire, on peut penser que manipuler des poids différents est peu pratique, et que la pesée est une opération complexe (d'ailleurs on n'en parle pas dans la légende). Si on considère que cette histoire n'est qu'une illustration destinée à faire sentir la différence physique par des poids censés être plus accessibles à la sensation que les longueurs de cordes, alors pourquoi pas. Sauf que l'expérience sensible de tout musicien montre que l'histoire des poids ne peut pas fonctionner, puisque intuitivement on sent bien que les poids les plus grands doivent sonner plus grave, alors que lorsqu'ils tendent la corde, ils la font sonner plus aigu. Cette incohérence aurait dû sauter aux yeux de tous, y compris de Galilée père, avant même de mesurer les rapports de poids qui, en effet, ne suivent pas la proportionnalité simple mais quadratique.

Car si on observe seulement les sons produits par les marteaux — on ne sait pas bien ce qui les rend sonores — rien n'indique que la légende soit fausse, sur le plan des rapports de poids et Huygens l'avait bien relevé. Cependant Huygens nous dit que les marteaux ne sonnent pas :

[...] des pièces de fer de la forme qui sert à cela [les marteaux] ne sont nullement sonores. Il se peut qu'il ait rencontré des pièces de quelque métal mieux formées pour sonner que les marteaux et qu'il ait remarqué que, de celles qui étaient semblables, les plus grosses sonnaient plus bas.

Les recherches qu'on a pu faire sur les marteaux en usage dans l'antiquité montrent qu'ils étaient de formes très diverses, et pas du tout comme les outils modernes.

Au XIX^{ème} siècle, Fétis reprend cet argument avec autorité (il est coutumier de la méthode..) dans sa biographie des musiciens. Selon lui ce n'est pas le marteau qui sonne, mais l'enclume. Ce qui est faux car les deux entrent en vibration et produisent un son. Par ailleurs l'enclume est plus massive, donc plus inerte.

Les marteaux sont des masses de métal moulées. Il est probable que le moule servant à fabriquer ces marteaux soit unique, de forme oblongue, et que le poids est déterminé par la longueur du métal coulé dans ce moule. Alors, si ces marteaux sont de forme parallélépipédiques ou cylindrique, de forme allongée, on les considère comme des barreaux, et les lois de l'acoustique qui s'appliquent sont celles de la vibration des tiges, c'est-à-dire qu'ils vibrent selon plusieurs modes (transversal, de flexion, de torsion et longitudinal) à des fréquences propres différentes. Lorsque la forme est allongée, le mode longitudinal est prédominant et la fréquence des

vibrations selon ce mode est déterminée de façon analogue à celle des tubes¹⁹, c'est-à-dire que la fréquence est inversement proportionnelle à la longueur, à masse spécifique constante, et pour une raideur (grandeur analogue à la tension des cordes) constante. On observe très bien ce phénomène dans les instruments de musique à percussion composés de lames ou de tiges métalliques, tels que les métalphones, vibraphones, xylophones ou autres instruments orientaux. Parmi les disciples de Pythagore, Hippase aurait confectionné une série de quatre disques de bronze de diamètre égal et d'épaisseur variable qui sonnaient lorsqu'on les frappait dans les rapports consonants de quarte, de quinte et d'octave. Cette expérience aurait fourni à Glaucos de Rhegium l'idée d'en faire un instrument de musique²⁰.

On peut noter par ailleurs une remarque de A.-J.-H. Vincent, en 1847, à propos de ces fameux marteaux²¹ :

[.., l'outil] qu'il désigne, non par le mot σφύρα, marteau, comme on l'a voulu d'abord et comme ensuite on l'a dit et répété dans toutes les langues, mais par σφαίρα, corps sphérique, ce qui ne saurait plus signifier autre chose que le corps forgé, soit globe, soit vase sphérique. Et alors il devient parfaitement exact d'attribuer les différentes intonations des sons rendus à la différence des dimensions de ce vase qui est ici le véritable corps vibrant et par conséquent sonore. [...] D'après Raoul Rochette, certains vases portent le nom de σφαίρα au lieu de σφάιρα, ce qui vient encore confirmer cette manière de voir.

Quoi qu'il en soit, il n'est donc pas interdit de penser que Pythagore ne s'est pas trompé sur la proportionnalité entre les hauteurs de notes et les poids des marteaux (eux-mêmes proportionnels à la longueur), ou des corps sphériques de M. Vincent. Mais, et c'est essentiel, dans le sens où le marteau le plus lourd produit bien l'octave, mais *en dessous* du marteau le plus léger. Alors en effet, les deux intermédiaires produisent bien la quarte et la quinte, et entre eux le ton. Par contre l'effet est inverse lorsque les poids sont tenseurs : alors le poids le plus grand détermine la note la plus aiguë. La première 'erreur' de Pythagore n'est donc pas dans la relation entre poids et hauteur, mais dans le sens de la relation. Cette 'erreur'

¹⁹ Les vibrations selon le mode longitudinal sont analogues aux vibrations produites dans les tubes, c'est-à-dire qu'elles provoquent l'apparition d'ondes stationnaires dont la disposition dépend des ouvertures des extrémités. Et la loi de Taylor applicable aux cordes vibrantes est analogue à celle de Bernoulli pour les tubes. La tension des cordes est l'équivalent de la raideur. La fréquence est inversement proportionnelle à la longueur, comme pour les cordes. Dans le cas des tiges, lorsque la fixation est au centre, les ondes stationnaires se forment avec un nœud au centre. et il n'y a pas d'harmoniques paires.

²⁰ H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker*, Berlin, 1903, trad. Daniel Delattre, Gallimard, Paris, 1988, p 79.

²¹ A.J.H Vincent, Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du roi et autres bibliothèques

t XVI, 1847, p 267, cité par C.E. Ruelle, *Etude sur Aristoxène et son école*, Revue d'Archéologie, vol. XIV, 1857, p.418.

prend forme lors de la transposition de cette expérience à la tension des cordes. Dans son *Etude sur le Timée* de Platon, parue en 1844, Thomas Henri Martin relève cette inversion d'échelle et tente d'en trouver la raison. Dans la plupart des cas les nombres représentant les sons sont grands pour les sons graves, que ce soit dans les cordes tendues, les flûtes ou les marteaux. Ces nombres sont en effet associés à des grandeurs qui sont proportionnelles à la période (ou inversement à la fréquence). Cependant, à partir de Platon, et sans doute antérieurement, on associe les nombres à la hauteur, par analogie avec la vitesse du 'phénomène', grandeur qui détermine la hauteur du son selon les théories de l'époque²² :

De quelle nature étaient, suivant eux [les pythagoriciens] et Platon, ces quantités représentées en musique par les nombres ? D'après les témoignages de Porphyre, de Théon de Smyrne, de Plutarque et du platonicien Elie, commentateur du *Timée*, dont Porphyre cite un fragment, et d'après le *Timée* même, ces quantités, d'autant plus fortes que le son était plus aigu, étaient considérées par eux comme étant les vitesses des impulsions de l'air transmises à travers ce fluide depuis l'instrument musical jusqu'à l'oreille.

Même si T.-H. Martin anticipe un peu lorsqu'il parle de 'vitesse des impulsions de l'air' (les Anciens n'évoquent que la 'vitesse' d'on ne sait pas bien quoi), on voit bien la contradiction devant laquelle se trouvaient nos auteurs. Les lois naturelles associaient les grandeurs aux sons graves, et la loi qu'ils élaboraient sur la propagation des sons impliquait le contraire. En effet, on définit le rapport de quarte comme $4/3$, et l'octave supérieure comme rapport double. Double de quoi ? pas des cordes ni des flûtes, en tout cas, qui ne mesurent que la moitié. Cette représentation de la hauteur des sons, grandeur des nombres associée à l'acuité, va s'étendre à la spatialité de l'échelle des sons, le haut pour l'aigu, le bas pour le grave. Cette représentation, toute arbitraire, trouve peut être son inspiration dans l'idée que les sons aigus viennent de la tête, et les sons graves du corps. On comprend la tentation de choisir la tension des cordes comme paramètre, ce qui permet de se conformer au modèle intuitif et de légitimer le rapport direct entre hauteur de son et grandeur numérique. Cette préoccupation de hiérarchisation des hauteurs de son, avec l'aigu en haut, est probablement tardive, ce qui corrobore la théorie d'une écriture récente (Ier siècle) du texte sur les marteaux de Pythagore.

Il était donc important pour nos auteurs de réaliser deux expériences aux résultats inversés, mais dont les lois sont conservées. Il y a une cohérence dans cette obstination apparente de trouver une loi qui associe des quantités aux hauteurs de son de façon directe, et l'expérience des poids tenseurs le permet. Néanmoins l'absence de transition explicative entre les deux expériences introduit une confusion qui a permis aux hauteurs modernes de reléguer cette théorie au rang des anecdotes

²² Thomas-Henri Martin, *Etudes sur le Timée de Platon*, Paris 1844, p 391-392.

sans fondement. Cette transition est plus ou moins évasive selon les auteurs et nous allons l'étudier à présent.

Boèce conclut l'exposé sur les poids par « *Pythagore fut le premier à découvrir de cette façon-là la proportionnalité qui fonde cette concorde de sons* ». Si on s'en tient là, c'est exact. Boèce passe alors à un autre paragraphe pour décrire l'expérience du monocorde. Et là, il n'est pas très clair, il évoque les tentatives avec des poids suspendus ainsi qu'avec des récipients remplis d'eau, mais il ne détaille que celle des longueurs de cordes. A-t-il remarqué la contradiction entre les marteaux sonnants et ceux qui tendent les cordes ? Il n'en dit mot.

Par contre il établit bien la proportionnalité des hauteurs de sons avec les nombres 6, 8, 9, 12, qui représentent le fondement de la théorie de Pythagore concernant la constitution de l'octave par un système d'une quarte et d'une quinte elle-même formée d'une quarte et d'un intervalle de 9/8. Boèce cite cette combinaison de nombres comme un exemple, alors qu'elle est unique (avec leurs multiples), si on exige que les nombres soient des entiers.

La deuxième expérience : les poids tenseurs

Nicomaque est beaucoup plus clair quant à la démarche de Pythagore construisant son nouveau système basé sur l'octacorde, à partir de l'heptacorde ancien, manifestement imparfait. C'est d'ailleurs l'objet de sa démarche d'illustration avec l'histoire des marteaux. Par contre sa relation de l'expérience des cordes tendues à un clou par des poids équivalents à ceux de la forge est apparemment fantaisiste. On ne sait pas quels sont les poids lourds et ceux qui font les notes élevées. La parfaite symétrie du système, et sa commutativité, font qu'il fonctionne sans qu'on ait besoin de spécifier le sens. D'un point de vue mathématique cela fonctionne, mais d'un point de vue physique c'est très fâcheux, puisqu'on ne sait toujours pas si les poids de 12 font un son aigu ou grave, certes on le suppose...Mais qu'importe, l'essentiel est que la démonstration est faite : on peut associer des nombres à des hauteurs de sons (Nicomaque est pythagoricien...), même si on ne sait pas à quoi ces nombres correspondent, et une méthode de mesure est établie, rigoureuse et exacte.

Par ailleurs, on peut se demander si le texte n'a pas été manipulé au cours de sa transmission. En effet, Nicomaque nous explique, à propos de la seconde expérience : « *Il suspendit à ce clou quatre cordes semblables par la substance, le nombre des fils, la grosseur, la torsion, et fit supporter à chacune d'elles un poids qu'il fixa à son extrémité inférieure. De plus, il rendit les longueurs des cordes de tout point égales, [...]* »²³. Ces cordes sont identiques, mais ce '*de tout point égales*' laisse perplexe. On ne sait pas bien à quoi elles sont égales, et si elles sont égales entre elles. Les commentateurs le

²³ Nicomaque de Gerasse, *Manuel d'harmonique et autres textes relatifs à la musique*, Trad. C.-E. Ruelle, in 'Collection des auteurs grecs relatifs à la musique', Baur, Paris, 1881.

supposent, mais il y a peut-être là un problème d'interprétation. En effet, en supposant les cordes de longueurs inégales, dans un rapport de $1/\sqrt{k}$ pour k qui représente le rapport des poids tenseurs, on retrouve la proportionnalité entre les poids et les hauteurs de notes, et c'est essentiel car c'est peut-être là que Pythagore va chercher la cohérence de son système. Car par la suite, au paragraphe suivant, Nicomaque nous dit : « *La plus grande corde, comparée avec celle qui venait après la plus petite et qui représentait 8 poids, sonnait la quinte, et il établit qu'elles étaient dans le rapport sesquitiars, ce qui était aussi le rapport des poids entre eux* ». Outre l'erreur sur la nature du rapport qui n'est pas sesquitiars ($4/3$), mais sesquialtère ($3/2$) entre 8 et 12, Nicomaque nous parle bien de cordes *plus grande* et *plus petite*, expression qu'il reprend plus loin. Le traducteur C.-E. Ruelle nous dit en note qu'il s'agit là d'une forme elliptique, et que Nicomaque voulait en fait dire 'la corde tendue par le poids le plus grand'. Mais si les cordes étaient réellement inégales, et dans une proportion déterminée ? Nous tenterons, dans un autre chapitre, d'évaluer cette hypothèse inédite.

La troisième expérience : le monocorde

Pythagore tente donc, à son retour chez lui, plusieurs expériences, avec des poids suspendus, des vases remplis d'eau, et des cordes tendues. L'expérience la plus efficace, parce qu'elle permet une mesure immédiate par comparaison avec un roseau de longueur déterminée, c'est l'expérience de la corde, tendue par un poids constant, et dont la longueur est variable. Pour cela, Pythagore invente un instrument. Sur une planchette, une corde est tendue entre un point fixe et un arrêt. A cette corde est attaché un poids. Entre la corde et la surface du support, on place un chevalet mobile, qui tend la corde et crée deux segments tendus par le même poids. Si on pince la corde, elle vibre et émet un son d'une certaine hauteur. On mesure la distance entre le point fixe et le chevalet pour chaque hauteur de son considérée, et on compare, d'une part cette longueur avec celle de la corde entière, d'autre part le son émis avec celui de la corde entière. Cet instrument, le monocorde, sera utilisé dans les mesures de hauteur du son jusqu'au XIX^{ème} siècle. Nous assistons donc ici à la conception de la première représentation d'un paramètre du phénomène sonore, l'analogie entre la hauteur du son et la longueur d'un segment de droite.

Il s'agit d'une construction analogique simple entre deux ensembles qui n'ont a priori rien de commun, d'une part les sons envisagés selon leur hauteur, et d'autre part un segment de droite mesurable, qu'on va diviser en intervalles. Mesurer un segment de droite est une pratique courante au VI^{ème} siècle av. J.-C., en usage dans de nombreux actes de commerce ou d'arpentage. Diviser ce segment en intervalles est également une pratique courante. Mais composer ces intervalles constitue une difficulté qui demande une certaine abstraction.

La composition des intervalles ou, si l'on veut, la détermination de la quinte d'une quinte, suppose une opération de multiplication de rapports, processus qui ne fait pas partie des opérations arithmétiques simples à l'époque de Pythagore.

L'analogie avec les sons permet à la fois une représentation du phénomène sonore de façon visuelle, mais également une représentation perceptible, par l'audition, de l'opération abstraite de composition de rapports. Pour cette raison, la division du monocorde aura un grand succès auprès des mathématiciens grecs, et la musique, étude des proportions arithmétiques selon la définition des anciens, fera son entrée dans l'univers des mathématiques, grâce notamment à Euclide.

On dit que Pythagore, sur son lit de mort, aurait enjoint ses disciples d'utiliser le monocorde²⁴. Il semble qu'une controverse agitant la secte à ce sujet. On a vu que le problème de la représentation de la hauteur des sons consistait dans l'impossibilité pratique de trouver une loi directe entre dimensions des corps sonores et nombres correspondants. En effet, les pythagoriciens voulaient que les nombres élevés correspondent aux sons aigus, et inversement pour les graves. Le système musical de Pythagore repose d'une part sur l'utilisation des 4 nombres de la *tetractys* (1, 2, 3, 4), et d'autre part sur des rapports épimores de la forme $n + 1 / n$. Les degrés qui délimitent ces rapports sont donc représentés par des nombres plus grand que l'unité pour des sons plus aigus. Les lois naturelles sont inverses, que ce soit pour les flûtes, les vases ou les longueurs de cordes qui sonnent d'autant plus graves que leurs dimensions s'accroissent. Lorsque les successeurs de Pythagore, et notamment Archytas, ont cherché une représentation des nombres en relation avec les degrés, ils ont tenté d'utiliser une méthode qui conserve le caractère direct de la représentation. Par ailleurs Archytas associait la hauteur des sons à la vitesse du mouvement, les sons aigus sont rapides, les sons graves lents. C'est à cette époque que, selon Théon de Smyrne, Lasos et Hippase ont fait des expériences avec des vases²⁵ :

On raconte que Lasos d'Hermione et les disciples d'Hippase de Métamonte, ce dernier de la secte de Pythagore, ont observé sur des vases la rapidité et la lenteur des mouvements à l'aide desquels les consonances se calculent en nombres. Prenant plusieurs vases de même capacité et semblables, on a laissé l'un vide et l'on a rempli l'autre à moitié d'un liquide, puis on a frappé chacun d'eux, on a obtenu la consonance d'octave. Laissant de nouveau un vase vide et remplissant l'autre au quart, on a obtenu, en les frappant, la consonance de quarte : pour l'accord de quinte, on remplissait le tiers d'un vase : le rapport des espaces vides était, pour l'octave celui de 2 à 1, pour la quinte celui de 3 à 2, pour la quarte celui de 4 à 3.

²⁴ Aristide Quintilien, *La musique*, trad. François Duysinx, Ed. Bibl. Fac. Philo et lettres, Université de Liège, 1999, p 181. Il est probable que le terme utilisé n'est pas 'monocorde' puisqu'il en comprenait deux. Environ six siècles séparent Pythagore de Quintilien.

²⁵ Theon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, traduction du grec au français J. Dupuis, Paris, Hachette, 1892, p 97.

Il existe au moins deux façons d'obtenir des sons avec des vases plus ou moins remplis. La première est celle qui est décrite, on frappe sur le verre. Dans ce cas, le vase rempli sonne plus grave, et s'il est rempli à moitié, on obtient un intervalle faible, de l'ordre du ton, et pas une octave. Le texte relate donc une inexactitude sur ce point. Par contre, si on souffle sur le bord, comme sur le goulot d'une bouteille, alors on obtient le résultat proposé. Dans le premier cas c'est la structure qui vibre, avec une élasticité variable, dans le second, c'est la colonne d'air qui produit le son, comme dans une flûte, et on observe bien la relation décrite. On peut également frotter son doigt mouillé sur le bord, mais il s'agit d'une autre expérience..

Quoi qu'il en soit, cette méthode avait l'avantage de conserver, du moins apparemment, la relation directe entre nombre et hauteur de son. On peut disposer les différentes colonnes d'eau côte à côte et ainsi représenter les intervalles. Cependant les rapports sont différents de ceux recherchés ($1/4$ pour la quarte, $1/3$ pour la quinte), et le but recherché n'est pas atteint.

Alors on comprend pourquoi ces pythagoriciens ont tenté l'expérience des poids tenseurs sur des cordes. Cette méthode conserve le sens direct de l'association, et de plus elle reproduit la relation entre rapports de poids et rapports d'intervalles. De plus, la notion de poids associé à un mouvement convient bien aux théories de la mécanique alors en usage, les corps tombent d'autant plus vite qu'ils sont lourds, ce qui permet une analogie supplémentaire avec la vitesse du mouvement sonore.

Malheureusement, on l'a vu, dans ce cas les longueurs de cordes ne peuvent pas être égales..Ce qui a forcément induit une tentative de trouver une loi de longueur qui satisfasse à cette condition.

Il semble que le choix de cette représentation associant nombre et hauteur de son ait été l'objet d'une controverse, et Platon y a sans doute pris parti, comme l'évoque Théon de Smyrne.

La tentative d'associer directement la tension, et donc les poids, avec la hauteur de note était problématique et la raison platonicienne l'a emporté sur l'intuition physique. Il fallait donc se résoudre à utiliser la longueur des cordes, au prix d'une opération mathématique inélégante, l'inversion du rapport. C'est donc ce procédé que préconisait Pythagore à la fin de sa vie, et ce n'est sans doute pas lui, encore une fois, qui l'expérimenta, comme le raconte Théon de Smyrne, qui relate²⁶:

Par la division des cordes, on obtient les mêmes rapports, comme nous l'avons vu. Toutefois on ne se servait pas d'une seule corde, comme dans le canon harmonique, mais de deux cordes à l'unisson également tendues. On interceptait la moitié d'une de ces cordes en pressant le milieu avec le doigt, on obtenait avec la moitié et l'autre corde entière la consonance d'octave ; quand on interceptait

²⁶ *Idem*, p.99.

seulement un tiers, les deux autres tiers et la corde entière donnaient l'accord de quinte. De même pour obtenir la consonance de quarte, on interceptait le quart d'une des deux cordes, en laissant l'autre entière.

Le monocorde pythagoricien est donc l'ancêtre du canon, à une seule corde, qu'on attribue souvent à Euclide.

La *Division du canon* est probablement le premier traité qui indique précisément l'utilisation de l'instrument, donc sans doute le texte fondateur du monocorde. Attribué à Euclide, mais sans doute d'un auteur antérieur, peut-être Eudoxe (selon Paul Tannery), ou Cléonide (selon des auteurs plus récents). Le texte est pédagogique et se comprend en liaison avec les ouvrages traitant des rapports, et notamment le chapitre V des *Elements* d'Euclide²⁷. Il est essentiellement théorique et présente la construction des différents intervalles ainsi que les définitions des notions qui lui sont nécessaires.

Avec Ptolémée, qui commente longuement la *Division du Canon*, on assiste à l'élaboration de l'instrument qui permet d'établir les rapports recherchés sans risque d'erreur. Dans les *Harmoniques*, Ptolémée décrit l'Hélikon, sorte de gabarit permettant la construction, au moyen de triangles rectangles homothétiques, des longueurs correspondant aux intervalles de quarte, de quinte d'octave et de ton. Et on retrouve ici les nombres 6, 8, 9, 12 qui ont tant fasciné les pythagorociens et leurs successeurs.

On trouvera, page suivante, l'extrait du *Dictionnaire des Antiquités Grecques et Romaines* de Daremberg et Saglio qui reproduit le dessin de l'hélikon de Ptolémée, d'après l'ouvrage de Georges Pachymère, *Quadrivium*, datant du XIV^e siècle²⁸, avec la traduction du commentaire par Ruelle. L'hélikon aurait également pu avoir été inventé par Quintilien, peu avant Ptolémée, ce que suggère Charles-Emile Ruelle²⁹.

²⁷ Au sujet de la *Division du canon*, voir : Patrice Bailhache, Science et musique : quelques grandes étapes en théorie musicale, in *Littérature, médecine et société*, 13, Université de Nantes.

Patrice Bailhache, *Une histoire de l'acoustique musicale*, éd. CNRS, Paris, 2001, chap. I.

²⁸ Georges Pachymère, *Quadrivium*, ed. A.J.H. Vincent, in *Notices et extraits des manuscrits*, t XVI, partie 2, p 476 et suiv.

²⁹ Ch. Em. Ruelle, article 'Hélikon' in *Dictionnaire des Antiquités Grecques et Romaines* de Daremberg et Saglio, t III, partie 1, p 60.

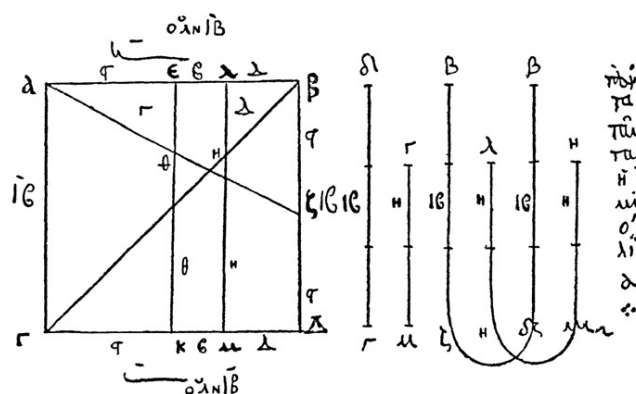


Fig. 3749. — Hélikon.

« On peut encore rapporter le diapason (l'octave) au canon octacorde en s'y prenant d'une autre façon, au moyen de l'instrument appelé *Hélikon*, que les mathématiciens ont construit pour faire connaître les rapports qui résident dans les consonances. Voici comment ils procèdent. On installe un châssis quadrangulaire $ABGD$. On partage en deux parties égales les côtés AB , BD , en E et en Z . On joint AZ et BHG , et l'on mène, parallèlement à AG , la ligne $E\Theta K$, puis, passant par le point H , la ligne LHM . Par suite, la ligne AG est donnée comme double de chacune des lignes BZ , ZD , et par suite aussi, chacune de celles-ci est double de $E\Theta$, puisque AB est double de AE ⁶ : de sorte que AG est quadruple de $E\Theta$ et sesquitière de ΘK , reste (de EK). Or il est démontré que la ligne MH est double de LH , puisque DB est à HM comme DG est à GM ⁷ et comme BA est à AL ⁸ ; c'est-à-dire encore que BZ est à LH comme DG est à GM ⁹, et par suite BZ est à LH comme BD est à HM ¹⁰ ; et réciproquement MH est à LH comme BD est à BZ ¹¹. Donc la ligne AG est sesquialtère de HM et triple de HL . Ainsi donc, si l'on prend quatre cordes d'égale tension, placées dans les mêmes positions que les droites AG , EK , LM et BD , et que l'on y applique une réglette (curseur) dans la position de la droite $ZH\Theta A$, en faisant correspondre à la ligne AG le nombre 12, à ΘK 9, à AM 8,

à chacune des lignes BZ , ZD 6 ; puis à LH 4, à $E\Theta$ 3, on obtiendra toutes les consonances et l'intervalle de ton. La consonance de quarte sera établie suivant le rapport sesquitière ($\frac{4}{3}$), existant entre les droites AG et ΘK , HM et ZD ,

LH et $E\Theta$; la consonance de quinte suivant le rapport sesquialtère ($\frac{3}{2}$), existant entre AG et HM , ΘK et ZD , BZ et LH ; la consonance d'octave suivant le rapport double ($\frac{2}{1}$), existant entre AG et ZD , HM et LH , BZ et $E\Theta$; la consonance d'octave et quarte (11^e suivant le rapport de 8 à 3, existant entre HM et $E\Theta$ ¹ ; la consonance d'octave et quinte (12^e) suivant le rapport triple ($\frac{3}{1}$), existant entre AG et LH , ΘK et $E\Theta$; la consonance de double octave suivant le rapport quadruple ($\frac{4}{1}$), existant entre AG et $E\Theta$; enfin le ton, suivant le rapport sesquioctave ($\frac{9}{8}$), existant entre ΘK et HM .

On voit ici que ces mathématiciens d'influence pythagoricienne du début de notre ère n'hésitaient pas à construire des instruments propres à montrer leurs théories, dans un grand souci de pédagogie. Cependant, Ptolémée, dans les Harmoniques, parle de l'hélikon comme d'un instrument en usage à son époque, mais non comme d'une invention de sa part. Il y avait sans doute des hommes de l'art, plus pratiques que nos savants, et qui savaient bien cacher leurs connaissances sous une certaine rusticité. Ceux là n'ont pas laissé d'écrits, et on ne saura jamais vraiment comment Nicomaque avait suspendu ses poids aux cordes soi-disant de longueurs égales..

Les savants et les musiciens

C'est justement ce point qui pose problème. Les savants écrivent, les 'artistes', non. Par 'artistes', il faut entendre, les musiciens, les luthiers et les différents corps de métier qui participent à l'élaboration des outils utilisés par nos savants.

On a vu comment Pythagore était à la remorque des usages pratiqués par les musiciens de son époque, et comment il a cherché à trouver des lois mathématiques pour réglementer les dimensions de la lyre de Terpandre. Pythagore n'a pas inventé les quarts ni les quintes, ce sont des rapports naturels fondés sur la présence des harmoniques 3 dans les sons des cordes graves, et ce sont également les intervalles consonants les plus simples à produire. On accorde les instruments en tendant plus ou moins les cordes, jusqu'à ce que les battements disparaissent. Comme de nos jours, on accorde les guitares par quarts ou les violons par quintes. Alors pourquoi la dénomination de quart ? Sans doute en raison des quatre cordes, et là, nous n'avons pas d'explication. Ce qui est sûr, en revanche, c'est que les intervalles internes sont mobiles, et laissés à l'appréciation des musiciens. C'est alors que les mathématiciens interviennent, en créant les genres. Pythagore ne connaissait que le genre diatonique, c'est-à-dire une succession (de l'aigu au grave) : un ton - un ton - un 'reste'. Pourquoi cette succession ? Parce que pour accorder une lyre heptacorde, on part du milieu (la mèse), on monte d'un quart (on obtient la nète), on baisse d'une quinte (lichanos), on remonte d'un quart (paranète), on rebaisse d'une quinte (parhypate), et on monte à nouveau d'un quart (paramèse). Les deux intervalles restant, mèse-paramèse et hypate-parhypate sont nommés 'restes', en grec *limma*. Par la suite, Philolaos nommera ce reste *diesis*, nom que reprendra Aristoxène plus tard pour définir le quart de ton. Pendant tous ces siècles de science resplendissante, les mathématiciens ont voulu coller à la mode des musiciens qui ont utilisé à foison ces petits intervalles, dissonants mais tellement sensuels, en leur donnant des valeurs différentes selon les époques. On a, de même, augmenté les tons, pour mettre en valeur ces intervalles et ainsi créé les genres enharmoniques puis chromatiques, composés parfois de ditons encore inédits (tierces majeures ou mineures, qui plaisaient bien aux musiciens parce qu'elles comportent l'harmonique 5), au détriment des petits intervalles (restes) qui devenaient des ornements dans la mélodie. C'est ainsi que des controverses byzantines sur la valeur de ces intervalles,

sur la non-divisibilité du demi-ton et autres intervalles ont jalonné ces siècles, supervisées par nos grands philosophes, et sous le regard sans doute amusé des musiciens que seul Aristoxène avait su comprendre. Il est en effet le seul à avoir affirmé que le quart de ton était le plus petit intervalle audible, et qu'un demi-ton se divisait en deux quarts de tons égaux (deux *diesis*), ce qui bien entendu a fait rugir ses détracteurs. Les puristes divisent le ton (9/8) en un *limma* (256/243) et un *apotome* (2187/2048) plus grand que le *limma* d'un *comma* (531441/524288). Les musiciens savent bien à quel point il est difficile de garder l'accord tout au long de l'exécution d'une oeuvre, compte tenu de la température, de la constitution des cordes, de leur élasticité, de l'humidité sur les doigts, du glissement au niveau des fixations. Que dire alors du *comma* (environ 1/9 de ton), qui est semble-t-il le plus petit intervalle perceptible? Le *comma* trouve sa justification lors de l'accord de plusieurs instruments ensemble, mais il ne joue pas un rôle d'intervalle absolu dans une mélodie, et il faut bien admettre qu'Aristoxène ne manifestait finalement qu'un certain bon sens. Il convient de préciser que les petits intervalles (*diesis*, *limma* et *apotome*) ne s'emploient que pour passer au degré inférieur du tétracorde, et ne sont jamais utilisés isolément ou successivement (« On ne peut chanter successivement plus de deux *diesis* enharmoniques ou quarts de ton, sans s'écarter du chant régulier et mélodique »³⁰).

Au début de notre ère, le mouvement de pensée qui s'appuyait sur le retour des idées de Pythagore et de Platon est à l'origine d'une réaffirmation des fondamentaux de la théorie harmonique. On retrouve les vertus du cadre immuable des tétracordes, on fait l'historique des multiples genres (Ptolémée, Aristide Quintilien), et on choisit de façon presque définitive pour l'occident, le genre diatonique platonicien (2 tons 9/8 et un *limma* 256/243). Ptolémée propose une légère modification pour agrandir l'intervalle de *limma* par la différenciation des tons mineurs (10/9) et majeurs (9/8) et la création du demi-ton (16/15). Le système occidental³¹ est alors presque complet, il sera confirmé à la fin de la Renaissance par Zarlino qui introduira définitivement les tierces justes majeure (5/4) et mineure (6/5) à la place des ditons. La place est alors nette pour une nouvelle controverse, celle des tempéraments, qui s'attellera à la difficulté d'accorder les instruments à notes fixes selon ces intervalles.

Toute cette problématique embrasse donc les siècles qui nous séparent de Pythagore, et constitue ce qu'on peut appeler l'acoustique musicale, matière largement traitée par les musiciens, les facteurs d'instruments, les physiciens, les musicologues et quelques historiens des sciences.

³⁰ C.-E. Ruelle, *Etude sur Aristoxène et son école*, in *Revue d'Archéologie*, t XIV, 1857, p 541.

³¹ Dans la tradition arabo-islamique on continue d'utiliser les petits intervalles (*limma* et *apotome*) et on multiplie les intervalles à l'intérieur de la quarte (jusqu'à 10 intervalles pour certains théoriciens de la musique du XI^{ème} siècle).

L'acoustique physique s'attache quant à elle à décrire et à comprendre la production des sons, sa propagation et ses caractéristiques et c'est l'histoire de celle là que nous allons à présent aborder.

Lorsque Pythagore établit les règles de mesure de la hauteur des sons, il construit une représentation d'un seul des aspects du phénomène sonore, la hauteur (ou la fréquence pour employer un terme actuel). Cette représentation est, bien entendu, insuffisante pour décrire entièrement le phénomène sonore, puisqu'il n'est pas tenu compte de l'intensité ni du timbre, et encore moins de la variabilité de ces paramètres dans le temps. Dans un premier temps, Pythagore associe des nombres à ces hauteurs, faibles pour les sons graves, élevés pour les sons aigus. Dans les versions postérieures à Boèce, l'expérience des poids tenseurs différents est une pollution dans le raisonnement, elle n'intervient que comme transition entre les deux expériences, et comme elle est fausse, elle est parfaitement inutile au raisonnement. L'analyse de cette parabole ne doit donc retenir que la première expérience, celle des marteaux de Pythagore, dont la loi est présumée juste, et passer directement à celle de la corde tendue de longueur variable, et qui suit la même loi : au grand est associé le grave, au petit est associé l'aigu.

On retiendra également que les pythagoriciens ont établi la notion de degrés dans la mélodie, c'est-à-dire l'idée de notes fixes, discrètes dirions-nous, qui font de la musique ce qu'Aristoxène appelle le 'mouvement discontinu' des sons musicaux, par rapport au 'mouvement continu' de la parole³².

Par ailleurs, la représentation spatiale de la hauteur des sons prend forme avec les pythagoriciens, les sons aigus sont représentés par les grands nombres, alors que les lois physiques induisent le contraire. A la même époque on assiste aux débuts de la codification symbolique des sons, et, alors qu'Isidore de Séville avait affirmé que la musique ne pouvait pas s'écrire, il sera bientôt contredit avec l'apparition des neumes, vers le VIIIème siècle³³. Par la suite, la représentation graphique des hauteurs de sons sera une pratique courante dans l'écriture musicale.

En dépit de toutes les imprécisions qui jalonnent la transmission de cette légende des marteaux, le rôle des pythagoriciens dans l'histoire de l'acoustique est d'avoir associé des nombres aux hauteurs de son, et d'avoir proposé une construction de ces nombres pour définir des intervalles consonants.

³² Aristoxène, *Eléments harmoniques*, liv. I, chap. 3, trad. C.-E. Ruelle, P. Haffner, Paris, 1870.

³³ Voir à ce sujet l'étude de Marie-Elisabeth Duchez 'La représentation spatio-verticale du caractère musical grave-aigu et l'élaboration de la notion de hauteur de son dans la conscience musicale occidentale' in *Acta Musicologica*, Vol. 51, Fasc. 1 (Jan.- Jun., 1979), pp. 54-73

Variation sur les marteaux de Pythagore : légende ou réalité

La légende des marteaux de Pythagore comprend trois parties. La dernière est restée dans l'Histoire comme l'expérience du monocorde. La première concerne les marteaux consonants entendus dans l'échoppe du forgeron. On a vu qu'elle pouvait paraître vraisemblable. La seconde pose problème, parce que Pythagore tend quatre cordes identiques avec des poids dans les rapports de quarte, de quinte et d'octave (6, 8, 9, 12) et obtient, lorsqu'il joue les cordes, les mêmes rapports d'intervalles. On sait que la loi des tensions des cordes vibrantes ne peut pas accepter cette expérience, puisque les rapports de poids devraient être quadratiques (4 pour l'octave, $9/4$ pour la quinte et $16/9$ pour la quarte).

Sur l'authenticité et la validité de cette expérience, on peut émettre plusieurs hypothèses :

- Soit Pythagore n'a pas fait l'expérience, et la légende a été forgée lors du renouveau des idées pythagoriciennes, vers le I^{er} siècle.
- Soit Pythagore a fait l'expérience, mais il s'est trompé. C'est la position généralement adoptée depuis le XVII^{ème} siècle.
- Soit Pythagore a fait l'expérience, il ne s'est pas trompé, mais elle a mal été transmise. En explorant cette dernière hypothèse, il est possible d'imaginer une configuration qui convient aux exigences de la physique, et c'est l'objet de cette recherche. Il s'agit d'une spéculation qui ne s'appuie sur aucun texte, mais sur une interprétation des textes disponibles, et qui malgré tout est cohérente.

Il est légitime de se poser la question de l'authenticité et de la validité de l'expérience. Partons de l'hypothèse qu'elle a eu lieu. Dans ce cas, un des paramètres a mal été transmis au premier auteur connu, Nicomaque de Gerasè, au II^{ème} siècle. Rappelons qu'aucun auteur antérieur ne fait état de cette expérience. Mais est-ce un argument, l'absence de texte, pour en conclure quoi que ce soit, compte tenu du faible nombre de textes qui nous sont parvenus. N'oublions pas que les idées pythagoriciennes ont été longtemps et vigoureusement combattues. La légende est donc peut-être l'œuvre de Nicomaque, ou alors il a assisté à cette démonstration effectuée par un homme de l'art qui n'a pas laissé d'écrits retrouvés à ce jour. On peut conjecturer que c'est soit Nicomaque qui a mal compris les éléments de l'expérience, soit les copistes, entre Nicomaque et Jamblique (qui vient après) qui ont mal transmis.

Reprenons l'expérience telle qu'elle est décrite au livre VI de l'*Introduction harmonique* de Nicomaque de Gérèse.

Il suspendit à ce clou quatre cordes semblables par la substance, le nombre des fils, la grosseur, la torsion, et fit supporter à chacune d'elles un poids qu'il fixa à son extrémité inférieure. De plus, il rendit les longueurs des cordes de tout point égales, [...]³⁴.

Prenons l'hypothèse que les cordes sont égales, et tentons de nous représenter les gestes de l'expérimentateur. Il fait sonner les cordes par paires, elles ne produisent pas de consonances. Par exemple, l'accord entre les deux cordes égales correspondant aux poids 6 et 12 ne sonnent pas l'octave. Pire, le rapport de fréquence est de 1,414, ce qui donne un intervalle de triton (do-fa#), extrêmement désagréable à l'oreille. Nous pouvons déterminer les rapports de fréquence pour chaque paire, grâce à la formule de Taylor, qui établit la fréquence d'une corde vibrante en fonction de la tension et de la longueur, sans tenir compte de la masse :

$$F = k(\sqrt{T}) / L$$

F est la fréquence, T la tension, L la longueur et k une constante liée à la masse par unité de volume de la corde, supposée constante ici. Par ailleurs, Les longueurs L sont donc ici supposées égales. Entre les cordes de poids 6, 8, 9 et 12, qui déterminent les tensions T, nous aurons les rapports de fréquence:

$$8 \text{ et } 6, F/F' = 2 / \sqrt{3}$$

$$9 \text{ et } 6, F/F' = 3 / \sqrt{6}$$

$$12 \text{ et } 6, F/F' = \sqrt{2}$$

$$12 \text{ et } 8, F/F' = \sqrt{6} / 2$$

$$12 \text{ et } 9, F/F' = 2\sqrt{3} / 3$$

$$9 \text{ et } 8, F/F' = 3 / 2\sqrt{2}$$

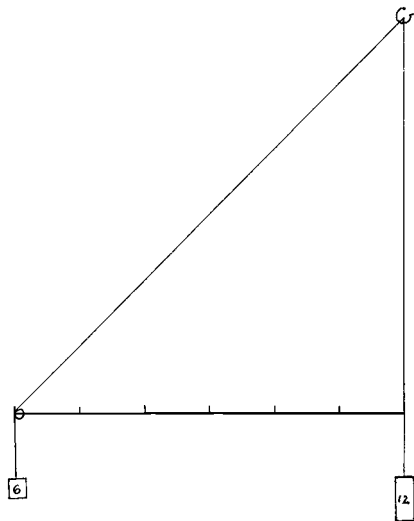
Aucun de ces rapports n'est consonant, ils sont incommensurables. C'est contrariant pour Pythagore. Il veut d'abord établir un rapport d'octave entre les cordes de poids 6 et 12, c'est le rapport le plus simple, car il est facile de confectionner deux poids de rapport 2. Comment est-il possible qu'il ne se soit pas aperçu de l'erreur ? Cela paraît difficilement concevable. Alors, il fait ce que n'importe qui ferait : comme la corde de poids 6 est trop aiguë, il la rend plus grave en l'allongeant. Mais comment sont disposées les cordes ? Nicomaque nous dit : *Il fixa un clou unique dans l'angle formé par deux murailles*. Si elles sont verticales, cela semblerait assez peu pratique, d'autant qu'elles sont, d'après le texte, de longueurs égales. On imagine les cordes qui s'enchevêtrent, les poids qui se bousculent... Pourquoi donc ce clou dans

³⁴ Nicomaque de Gerase, *Manuel d'harmonique et autres textes relatifs à la musique*, Trad. C.-E. Ruelle, in 'Collection des auteurs grecs relatifs à la musique', Baur, Paris, 1881.

l'angle? Ne doit-on pas y voir une disposition dans laquelle les cordes seraient horizontales? Mais alors, elles devraient former un angle avec le mur, et Nicomaque semble délaissé ce point pourtant essentiel.

Supposons que la corde de poids 12 soit le long du mur, tendue à la verticale. Pythagore constate l'absence de consonance à l'octave, il allonge une des deux cordes, ce que ferait n'importe quel expérimentateur, pour atteindre la note désirée. Il construit une structure rigide constituée d'une barre horizontale, donc perpendiculaire au mur. Lorsqu'à l'oreille il atteint l'octave inférieure, il la fixe avec un arrêt (une poulie fixée à la structure) qui laisse pendre le poids, et procède aux mesures.

Surprise pour Pythagore, la distance de ce point au mur est égale à la longueur de la corde de poids 12 (celle qui est le long du mur). Donnons à la longueur de corde la valeur 6. Si on appelle F_{12} la fréquence de la corde dont le poids est 12, et F_6 celle de la corde de poids 6, alors en effet, on a alors pour les fréquences : $F_{12} = \sqrt{12} / 6$ pour le poids de 12 et la longueur de corde correspondant, et $F_6 = \sqrt{6} / 6\sqrt{2} = \sqrt{12} / 12$ pour le poids de 6 et la longueur de corde diagonale (en effet la diagonale d'un carré 6 est $6\sqrt{2}$). Nous avons donc bien $F_{12} = 2 F_6$, et le rapport double des fréquences détermine l'octave.



Soyons clair, il ne s'agit pas d'une affabulation, tout au plus d'une hypothèse possible. Si on accepte l'idée que Pythagore a expérimentée, il a forcément fait cela. Pythagore ne se serait pas contenté d'une erreur aussi manifeste, il aurait cherché la solution, par la pratique. Les poids sont en rapport double, il faut donc produire l'octave en compensant l'erreur par l'allongement de la corde. Il est clair que sa surprise a dû être grande en constatant l'égalité de la distance au mur et de la longueur de corde de poids 12. On sait que Pythagore a bien expérimenté sur les rapports consonants à partir de différentes techniques, comme l'atteste Théon de

Smyrne, dans un texte un peu antérieur à celui de Nicomaque, et qui se fonde sur les *Harmoniques*, traité perdu, écrit par Archytas³⁵ :

[..] C'est Pythagore, disons-nous, qui paraît avoir découvert ces rapports, par la longueur et la grosseur des cordes, ainsi que par la tension à laquelle il les soumettait en tournant les chevilles, ou par une méthode plus connue, en y suspendant des poids [..]. Quelle que soit la méthode choisie parmi celles que nous venons de citer, on aura la consonance suivant le rapport indiqué, toutes choses égales par ailleurs.

Théon de Smyrne évoque également les vases remplis de plus ou moins d'eau ainsi que les flûtes. Le texte indique bien que Pythagore joue à la fois sur la longueur, la grosseur et la tension des cordes. Nous sommes loin de la légende de Nicomaque et de ses marteaux de forgeron, on fait maintenant ici appel à la grosseur des cordes qui intervient également dans le calcul de la fréquence. Et plus loin, en conclusion³⁶ :

Ceux qui ont mesuré les consonances avec des poids, ont suspendu à deux cordes des poids dans les rapports que nous avons dits et qu'on avait obtenus par la longueur des cordes, en déterminant les consonances de ces cordes.

Reconstituons la démarche de Pythagore. Il cherche à établir un rapport de proportionnalité entre la tension, la fréquence et la longueur de corde, ou une fonction simple de cette longueur. Reprenons la formule de Taylor qui détermine la fréquence : $F = k(\sqrt{T}) / L$. Si nous voulons, avec Pythagore, établir cette proportionnalité, nous aurons alors :

$pF = k(\sqrt{p}) / f(p)$, p étant le poids tenseur, et $f(p)$ une fonction à trouver qui détermine la longueur de corde en fonction du poids tenseur. La recherche de Pythagore, en langage moderne, consiste à trouver cette fonction. Parmi les fonctions possibles, il en est une que nous allons développer qui aurait pu être découverte empiriquement par Pythagore, considérant sa connaissance des triangles rectangles auxquels cette hypothèse fait appel. Cette fonction remplit presque parfaitement les conditions requises de proportionnalité simple entre fréquence et tension, donc entre intervalles et poids tenseurs, moyennant une relation faisant intervenir la distance au mur qui détermine la longueur de corde.

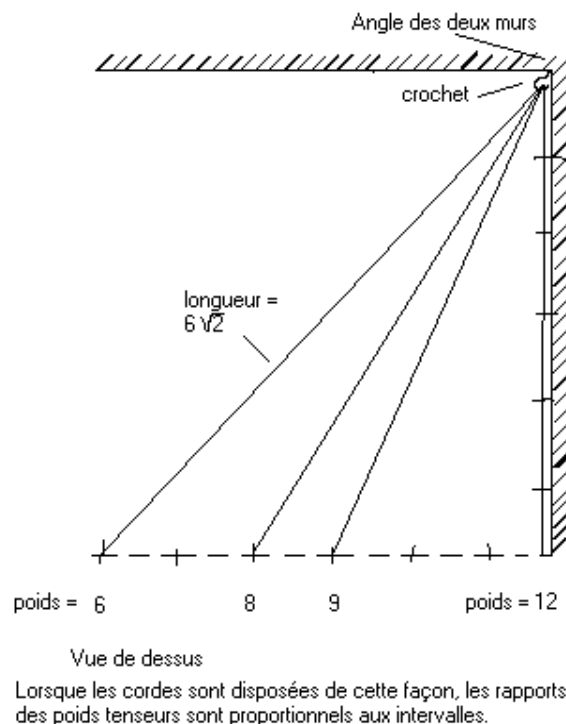
Alors partons de l'idée que Pythagore a expérimentée, et qu'il a tendu une corde de poids moitié selon la diagonale d'un carré, corrigeant ainsi l'insuffisance du rapport de poids. Pythagore est, on le sait, un fin connaisseur de la géométrie des

³⁵ Theon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, traduction du grec au français J. Dupuis, Paris, Hachette, 1892, p 93.

³⁶ Theon de Smyrne, *idem*, p 99.

triangles rectangles. Il a produit le rapport d'octave grâce à la diagonale du carré, il cherche donc à produire les rapports de quarte et de quinte suivant le même procédé, c'est-à-dire en allongeant les deux cordes selon les accords désirés, formant ainsi deux triangles rectangles de côté horizontal plus petits.

Pythagore mesure alors les distances au mur entre les différents points qui produisent les intervalles intermédiaires (8 et 9), et constate qu'elles sont égales respectivement à $12 - p$, p étant le poids fixé à la corde, et l'unité de longueur étant le sixième de la longueur produisant l'octave, et également le sixième de la longueur de la corde la plus courte, celle de poids 12.



Le 'tétracorde triangulaire rectangle' fonctionne, il y a bien proportionnalité entre les rapports de poids et les intervalles. Et c'est ici que le mathématicien conventionnel ne comprend plus, parce qu'il n'y a aucune raison mathématique simple pour que cela fonctionne. On a en effet une relation avec p comme coefficient d'un membre de l'égalité, $\sqrt{p}$ au numérateur de l'autre membre, et une fonction en p^2 au dénominateur. Nous avons ici une conjonction particulière de ces quatre nombres qui permet de respecter cette harmonie, et nous allons l'étudier attentivement.

Cette série, 6, 8, 9, 12 a fasciné les Pythagoriciens, notamment Aristée de Croton, Philolaus, Archytas de Tarente, puis plus tard Theon de Smyrne, Nicomaque de Gêse et Jamblique. Dans son Histoire de la science Hellène, Paul Tannery parle de cette série³⁷ :

³⁷ Paul Tannery, *Pour une histoire de la science hellène*, Paris, Gauthier Villars, 1930, p 391. Tannery fait référence à un ensemble de textes réunis sous le nom de *Fragments philoaiques sur la musique*, cités dans les Mémoires Scientifiques III, p. 220-243.

Du pythagoricien Aristée de Crotone, successeur immédiat de Pythagore, suivant la tradition, Iamblique (p 168) rapporte qu'il avait parlé de la proportion $6 : 8 :: 9 : 12$, enseignée à Pythagore par les Babyloniens, et les *Théologumène* (VI) disent qu'il avait montré que, dans la décade, il n'est pas possible de trouver un autre nombre que 6 susceptible de tous les rapports de l'harmonie psychique, c'est-à-dire, sans doute, pouvant servir de point de départ à une telle proportion.

Cette citation ne pourrait avoir de valeur que si elle s'appuyait sur un témoignage traditionnel de Philolaus, auquel la connaissance de cette proportion et la désignation de l'âme comme harmonie sont au reste attribuées. Une attribution de ce genre ne peut être contestée, puisqu'elle se réfère à un ouvrage célèbre dans l'antiquité et qui existait certainement encore au temps de Iamblique. On a de cet ouvrage de nombreux fragments dont l'authenticité est généralement reconnue et dont plusieurs ont un caractère mystique très accusé.

Pour quelle raison cette suite de nombres prend-elle ce caractère mystique et unique, on ne le sait que par l'application qui en est faite à la musique, comme l'atteste Iamblique. Il est probable cependant que, venant des Babyloniens, elle ait été utilisée pour établir une grille de partage, à l'usage du commerce ou des successions. L'hypothèse proposée, par la construction de triangles rectangles respectant ces proportions et auxquelles on applique des poids est une suggestion. Néanmoins elle fonctionne et donne une explication à la fascination exercée par cette suite de nombres sur les théoriciens de la musique pythagoricienne.

Pour calculer les longueurs de cordes, on applique :

$L = \sqrt{[6^2 + (12 - p)^2]}$, le carré mesure 6, et on reporte les nombres de Pythagore nommés p, soit 6, 8, 9, 12.

La fréquence F est déterminée comme suit : $F = k(\sqrt{T})/L$

Poids (tension T)	Racine des poids ($\sqrt{T}$)	Longueur de la corde	Coefficient de proportionnalité de la fréquence ($\sqrt{T})/L$
6	2,449	8,485	0,288
8	2,828	7,2115	0,392
9	3	6,708	0,447
12	3,464	6	0,577

Le rapport des coefficients de proportionnalité des fréquences nous donne le rapport d'intervalles :

Intervalle et rapport théorique	Rapport des poids	Rapports des coefficients de fréquence	Erreur
2 : octave	12 / 6	2	0
4 / 3 = 1,33 : quarte	8 / 6	1,36	0,98
4 / 3 = 1,33 : quarte	12 / 9	1,29	1,03
3 / 2 = 1,5 : quinte	12 / 8	1,47	1,02
3 / 2 = 1,5 : quinte	9 / 6	1,55	0,97
9 / 8 = 1,125 : ton	9 / 8	1,14	0,99

L'erreur est calculée comme le rapport des valeurs théoriques aux coefficients de fréquence. Si cette erreur atteint 1,06, elle est d'un demi-ton. On voit que les erreurs sont toutes inférieures au quart de ton, limite de perception tonale selon Aristoxène, on les considère donc insignifiantes, compte tenu de la précision des mesures de longueurs, de poids et de hauteur de son à cette époque.

La conjonction de la série de nombres ayant entre eux les rapports harmoniques, avec celle des poids tenseurs, puis des longueurs des hypoténuses est tout à fait fortuite. Il n'y a aucune loi apparente qui les lie et qui permettrait de généraliser. En effet, nous avons la formule de Taylor qui détermine la fréquence F d'une corde vibrante,

$F = k(\sqrt{T}) / L$, avec k supposée constante, liée à la masse de la corde.

La longueur de corde L est déterminée par le calcul de l'hypoténuse,

soit $L = \sqrt{[6^2 + (12 - p)^2]}$, avec p entier compris entre 6 et 12.

Si on donne à T les valeurs différentes de p , et qu'on veut que la fréquence suive la même proportionnalité de facteur p , on doit avoir,

suivant la formule de Taylor : $F = k(\sqrt{T}) / L$:

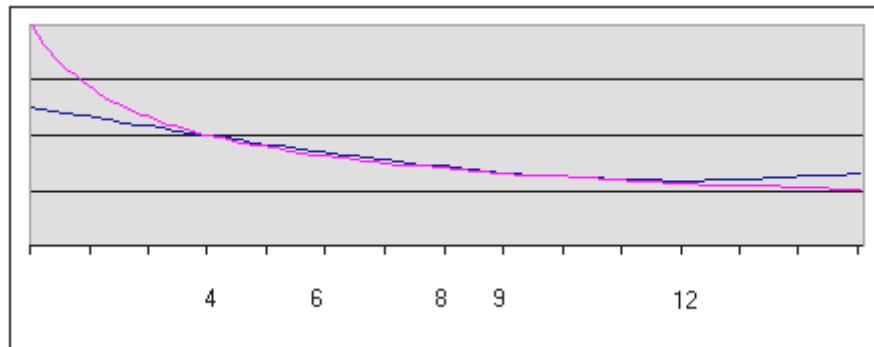
$$pF = k(\sqrt{p}) / L, \quad \text{et donc } L = k'(\sqrt{p/p}), \quad \text{avec } k'=k/F$$

mais on a aussi $L = \sqrt{[6^2 + (12 - p)^2]}$

Sur le graphe ci-dessous, on représente :

en rose la courbe de $L = \sqrt{[6^2 + (12 - p)^2]}$

en bleu la courbe de $L = k'(\sqrt{p}/p)$, avec $k' = 20$



On voit que les deux courbes coïncident presque parfaitement entre les valeurs 4 et 12, et donc bien sûr pour les valeurs qui nous intéressent, 6, 8, 9, 12. Ce qui signifie que pour ces valeurs, la longueur de corde est égale, à un facteur près ($k'=20$), d'une part à celle qui est calculée selon l'hypoténuse, en fonction de la distance au mur, et d'autre part à celle qui est fonction de la tension. Ce qui veut dire que pour ces valeurs, on respecte les proportions entre fréquence, tension et distance.

On peut formaliser cette égalité par une équation en faisant le rapport des deux expressions :

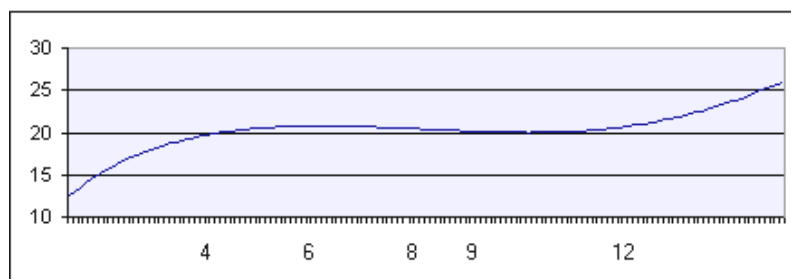
$$pF = k(\sqrt{p}) / \sqrt{[6^2 + (12 - p)^2]}, \text{ d'où } p[\sqrt{[6^2 + (12 - p)^2]}] / \sqrt{p} = \text{constante.}$$

$$\text{On a donc l'équation } [\sqrt{p[6^2 + (12 - p)^2]}] - k' = 0, \text{ avec } k' = k/F.$$

C'est une équation du troisième degré qui présente, à un endroit de sa courbe, une portion presque constante, et c'est là que les nombres de Pythagore prennent place. En effet, si on fait le rapport des deux membres de l'égalité de façon séparée, on obtient approximativement une constante entre 6 et 12 :

Poids = p	$\sqrt{p}$	$\sqrt{[6^2 + (12 - p)^2]}$	$\sqrt{p[6^2 + (12 - p)^2]}$
6	2,449	8,48528137	20,7846097
8	2,828	7,21110255	20,3960781
9	3	6,70820393	20,1246118
12	3,464	6	20,7846097

Voici le graphe de la courbe, pour une valeur de p entre 1 et 15 :



La portion de courbe entre 6 et 12 est quasiment constante, ce qui permet de vérifier la relation d'égalité à un facteur près, et donc d'attribuer aux fréquences les rapports harmoniques identiques à ceux des poids et des distances qui déterminent les longueurs de cordes. La valeur 20 du rapport n'a aucune influence sur le résultat, on est dans le domaine des rapports, et ce qui compte c'est que celui-ci soit constant pour toutes les valeurs de p considérées.

Il est donc tout à fait plausible que l'expérimentateur ait procédé de cette façon, selon une démarche empirique, bien entendu. Néanmoins on objectera que c'est une hypothèse qui n'est corroborée par aucun texte. Mais justement les différentes versions sont très peu claires dans la description du protocole utilisé. Cette confusion permet l'élaboration d'hypothèses, et celle-ci fonctionne. Par ailleurs, il est vrai que les pythagoriciens de la première heure sont fascinés par l'exactitude et la perfection des opérations sur les nombres (voir la *tétractys*). Néanmoins, plus tard, Aristoxène de Tarente, successeur d'Archytas lui-même pythagoricien fidèle, se rebelle contre le dogme du nombre et introduit l'empirisme dans la musique, avec sa nécessaire imprécision. Il est probable que cette expérience ait été effectuée, à la suite de celle d'Hippase et de ses disques de bronze, par Archytas, et transmise par Aristoxène³⁸, tous deux de Tarente, ainsi que le rapporte Théon de Smyrne.

Les pythagoriciens ont effectué des expériences, c'est attesté par de nombreux textes, certes de sources secondaires, comme celui de Théon de Smyrne, mais qu'il n'y a aucune raison de suspecter. Par contre, il est vrai que, au cours des siècles suivants, c'est un savoir dogmatique qui se transmet, et en effet, chez Nicomaque comme chez Boèce, et comme pour la plupart des relais de transmission jusqu'à la Renaissance, on est bien en présence d'un recopiage, sans vérification, d'une confiance abusive dans la vérité du dogme.

En 1892, Théodore Reinach écrit un article dans la Revue des Etudes Grecques sur les '*Problèmes musicaux*' d'Aristote (d'authenticité douteuse, probablement du III^{ème} siècle). A la fin de son article, il sollicite Paul Tannery et son érudition pour

³⁸ Aristoxène fait allusion à l'Art de Glaucos et aux disques d'Hippase dans un traité perdu, *De la musique* (Diels, *les présocratiques*, trad franc, p 79).

élucider ce point de la légende de Pythagore. Voici ce que conclut l'éminent historien³⁹ :

[...] En résumé, il ne me paraît pas douteux que la relation des poids tenseurs n'ait été étudiée par les anciens, et si la proportionnalité à la racine carrée n'est nullement énoncée dans les documents qui nous restent, il me semble incontestable qu'elle a dû être reconnue; car la question était simplement de reconnaître si l'accord d'octave s'obtenait avec les poids 1 et 2, ou 1 et 4, et l'accord de quinte avec les poids 1 et $3/2$, ou 1 et $9/4$.

Ces expériences ont dû en fait être poursuivies par l'école pythagoricienne avant Aristote (en dehors de Lasos, on cite Hippiasos, mais on doit surtout penser aux écrits d'Archytas et d'Eudoxe). Après Aristote, les recherches expérimentales furent abandonnées et on se contenta de notions vagues et inexactes en admettant en principe l'existence de relations numériques simples.

Nous ne pouvons que nous ranger à cette analyse : les pythagoriciens ont expérimenté, ils ont forcément observé la proportionnalité des carrés des poids tenseurs avec les rapports d'intervalles. Si ces expériences ont donné lieu à des écrits, ils ont forcément relaté cette proportionnalité quadratique. Mais la notion de carré étant encore peu familière et surtout délicate à formaliser, les successeurs (ceux de Philolaos et d'Archytas, peut-être..) ont simplifié maladroitement la relation en énonçant la simple proportionnalité. Cet exemple est édifiant : Lorsque Porphyre (III^{ème} siècle) dans sa *Vie de Pythagore*, relate l'histoire du fameux théorème, il parle de l'égalité de la somme des côtés du triangle avec l'hypoténuse⁴⁰, sans même mentionner le terme de 'carré'. Enfin, corroborant cette hypothèse des longueurs de cordes inégales, Thomas-Henri Martin, dans ses *Etudes sur le Timée de Platon*, se range à cet avis, suivant ainsi la suggestion de Gaudence dans son récit de l'expérience des poids de Pythagore⁴¹ :

Il est donc probable que Pythagore, comme Gaudentius le rapporte, s'avisait de tendre les cordes de même grosseur et de même nature, mais de longueurs différentes [...]

Résumons les éléments qui tendent à défendre cette installation audacieuse en regard du texte de Nicomaque :

³⁹ Paul Tannery, in Th. Reinach 'Notes sur les problèmes musicaux', *Revue des études grecques*, 1892, 17-2, p 52, post scriptum de P. Tannery.

⁴⁰ Porphyre, *Vie de Pythagore*, trad. E. Des Places, Ed. Les belles lettres, Paris, 1982, p 53. Le traducteur relève l'omission.

⁴¹ Thomas-Henri Martin, *Etudes sur le Timée de Platon*, Paris, 1844, p 391.

- Selon Nicomaque, les cordes sont maintenues au même clou. Quel serait l'intérêt, si elles sont d'égale longueur? Cette disposition présente une gêne inutile à la démonstration. Par contre cette disposition permet de tendre les cordes de façon oblique, en créant autant de triangles rectangles avec un des murs.

- Nicomaque nous dit comment les cordes portant les poids sont tendues : *Il fixa un clou unique dans l'angle formé par deux murailles*. Pourquoi donc ce clou dans l'angle, si ce n'est pour former des triangles?

- Or on sait l'importance chez Pythagore de la géométrie du triangle rectangle qu'il maîtrise parfaitement.

- Nicomaque parle bien de cordes plus longues et plus courtes, alors qu'il dissocie bien dans le texte les cordes tendues par les différents poids.

- Par ailleurs les différentes versions qui nous sont parvenues sont soit évasives, soit muettes sur l'explication de cette proportion supposée entre les poids tenseurs et les hauteurs de notes. Il y a quelque part une erreur qui a été mal transmise et recopiée, car il est très probable que l'expérience ait été correctement réalisée, sans doute pas par Pythagore lui-même, mais au moins par Archytas.

- Enfin il n'y a aucune raison de faire l'exposé d'une manipulation dont les résultats sont faux de façon évidente et spectaculaire, au moins concernant les premiers expérimentateurs qui sont à l'origine de l'histoire, Pythagore lui-même, Philolaus, Archytas ou d'autres...

La question se pose de la nécessité de faire une telle expérience qui présentait tant de difficultés de manipulation. A la fin de la période pythagoricienne, une controverse existe entre ceux qui associent les grands nombres à l'acuité des sons, et ceux qui proposent l'inverse, selon les lois physiques qui associent les grandes dimensions aux sons graves. On le sait, les deux méthodes seront utilisées conjointement avec le monocorde, au prix de l'inversion des rapports, gymnastique constante des théoriciens de l'harmonie. La première formule s'inspire de l'analogie supposée entre la hauteur des sons et leur 'vitesse'. Le monocorde, comme les flûtes, ne permet pas cette première représentation. Alors que la méthode des poids tenseurs permet de rendre compatible l'échelle mathématique avec les contraintes de la physique. De plus, l'utilisation de poids induit une autre analogie, celle du poids et de la vitesse, qui est compatible avec la physique de l'époque.

Peu importe de savoir si c'est Pythagore lui-même, ou ses successeurs qui ont réalisé cette expérience. Cette histoire a forcément un fondement pratique et expérimental. En effet, il est inconcevable que cet ensemble de conjonctions, tout à fait fortuites, ait pu germer uniquement de façon mentale. Par la suite, les différentes transcriptions, et notamment celle de Boèce, très insuffisante, n'ont pas permis de

transmettre la complexité de la manipulation qui apparaît donc comme fortement dégradée dans la littérature future. Le texte de Nicomaque, ou peut-être celui de Gaudence, est apparemment fondateur, vers le I^{er} siècle, de la légende des marteaux de Pythagore puisque Theon de Smyrne, son inspirateur, n'en parle pas. Théon lui-même s'inspire d'Adraste dont nous n'avons aucun texte. Est-ce Théon qui a occulté le texte? Est-ce un de ses prédécesseurs? On peut admettre qu'Euclide ou Ptolémée refusent de raconter une anecdote qui ternirait le sérieux de leur propos. Mais Platon ne rechigne pas à orner ses écrits de telles métaphores, et lorsqu'il traite des rapports et des intervalles musicaux, dans le *Timée*, il n'en dit mot. En revanche la période des premiers siècles de notre ère est nettement favorable à une présentation romanesque de la science, et c'est sans doute à cette époque que fut élaborée cette légende. Quoi qu'il en soit, le texte de Nicomaque est imprécis, mais porte en lui la solution proposée ici.

La principale objection à l'hypothèse proposée, c'est ce texte de Nicomaque, dont la traduction de Ruelle nous dit que *les cordes étaient de tout point rendues égales*. Mais dans une phrase distincte de la précédente on nous donne les autres qualités de ces cordes (*semblables par la substance, le nombre des fils, la grosseur, la torsion*). Plus loin Nicomaque nous parle de *la plus grande corde*, puis de *la plus petite*. Charles Emile Ruelle a la réputation d'un excellent helléniste, et sa traduction est fiable. Pourtant lui-même est contraint d'ajouter une note pour suggérer une ellipse à propos de cette *plus grande corde*. Alors en effet Nicomaque ne parle pas de la disposition triangulaire des cordes. Theon de Smyrne non plus, et nous ne disposons pas des écrits d'Archytas et de Philolaus. Et pourtant on a cette précision concernant le clou dans l'angle de deux murs.

Est-il légitime de suspecter une mauvaise transmission du texte ? Deux périodes sont en cause pour lesquelles nous n'avons pas de trace : la première, entre les pythagoriciens de la première heure et Nicomaque, la seconde entre Nicomaque et le XVI^{ème} siècle, époque de copie du manuscrit du *Manuel d'harmonique* utilisé par Meursius en 1617. La plus ancienne copie recensée est un manuscrit du XIV^{ème} siècle⁴². Pendant tout le Moyen Âge et la Renaissance, seul le texte de Boèce semble avoir une quelconque influence, et on a vu la légèreté avec laquelle il rapporte l'expérience.

La suggestion proposée ici de la disposition triangulaire est peut-être inexacte, mais la coïncidence de la courbe de l'équation qui présente une portion constante entre 6 et 12 est suffisamment troublante pour échafauder cette hypothèse. Il est donc possible de rendre les intervalles proportionnels aux rapports des poids tenseurs en jouant sur une construction à base de triangles rectangles, qui détermine les longueurs de cordes en fonction des nombres mis en jeu, soit la suite 6, 8, 9, 12.

⁴² BNF, Fonds grec, Ms 2450.

Il semble donc qu'on puisse bien affirmer que Pythagore, ou son successeur, ne s'est trompé dans aucune des trois expériences. Dans la première expérience, celle des poids sonores, s'ils se présentent sous la forme de parallélépipèdes de métal, ils se comportent comme des lames de vibraphone et donc produisent des sons dont les hauteurs sont proportionnelles aux longueurs. Dans la seconde expérience, nous venons de le voir, grâce à un dispositif particulier des cordes tendues qui forment les hypoténuses de différents triangles rectangles. Et bien entendu dans la troisième, celle du monocorde, dans laquelle les rapports de longueur d'une seule corde sont bien équivalents aux rapports inverses qui déterminent les intervalles consonants.