

3976
CIANCAGLINI, C.A.
1991

— *Le teorie acustiche dei Greci, II: Quantificazione numerica e calcolo nello studio degli intervalli musicali*: RAL 9^a ser. 2 1991 147-177. | Examen des relations existant dans la pensée pythagoricienne entre la théorie musicale et les pré-supposés mathématiques. [4096]

LE TEORIE ACUSTICHE DEI GRECI

II. Quantificazione numerica e calcolo
nello studio degli intervalli musicali

Nota di CLAUDIA A. CIANCAGLINI,
presentata(*) dal Socio Corrispondente W. BELARDI

RÉSUMÉ. — Dans le cadre des conceptions acoustiques grecques, auxquelles était dédiée aussi notre première Note, nous cherchons ici d'examiner de plus près la liaison existante dans la pensée pythagoricienne entre la théorie musicale et les présuppositions mathématiques. Cette liaison semble être bien étroite, et on verra qu'elle justifie un nombre considérable de données que les Pythagoriciens ne pouvaient pas atteindre seulement d'une façon empirique. Dès la naissance, donc, la science acoustique est liée indissolublement soit à la musique, soit à la spéculation mathématique.

PREMESSA.

In una Nota precedente (Rend. Mor. Acc. Lincei, s. 9, v. 2: 47-77 [1991]), relativa alle esperienze e alle prime riflessioni dei Pitagorici su alcuni aspetti fisico-matematici dell'acustica musicale, avevamo annunciato la nostra intenzione di approfondire ulteriormente lo studio delle conoscenze teorico-matematiche tenute presenti dai primi Pitagorici nel concepire e nel determinare i rapporti numerici che descrivono matematicamente gli intervalli principali.

Nella presente Nota intendiamo appunto indagare alcune di tali conoscenze, nel contesto di uno studio più ampio, il cui fine non è di ridisegnare le prime fasi della storia delle teorie musicologiche occidentali, bensì quello di rintracciare i presupposti generali acustico-musicali dell'analisi fonetico-acustica che i Greci condussero successivamente sui "suoni" di lingua.

Nella nostra attuale epoca, dopo il progresso scientifico-tecnologico avutosi intorno alla metà del presente secolo, sappiamo quale importanza abbiano i rapporti tra le frequenze (o sia note) generate nelle cavità epilaringee durante l'articolazione dei suoni di lingua, soprattutto vocalici e più genericamente di "risonanza" ("sonanti", "sonoranti", etc.). Oggi ci è dato "descrivere" un qualsiasi suono

(*) Nell'adunanza del 20 aprile 1991.

vocalico mediante almeno una coppia di valori numerici (Formante prima, Formante seconda). Tale coppia funziona come un insieme di valori non assoluti ma relativi, donde discende il rilievo fondamentale, e decisivo per la percezione, anche dell'*intervallo* che separa i due detti valori numerici. Tale intervallo è un vero e proprio "indice acustico-sensoriale" che determinate strutture neuronali corticali interpretano.

L'importanza dell'intervallo emerge anche nel caso del confronto tra le sostanze acustiche di due distinte articolazioni, come ad esempio tra articolazioni vocaliche in tutto uguali tranne che per la presenza in una della ortocheilia e nell'altra della procheilia. Ad esempio, la differenza acustica tra [i] ortocheilo e [y] procheilo (tipo *n* francese) è data dall'intervallo tra i valori rispettivi della Formante seconda, rispettivamente per [i] circa 2300 cps. e per [y] circa 1800 cps.

Il principio del rapporto numerico si impone alla nostra attenzione anche sul piano anatomo-fisiologico dell'articolazione: il rapporto caratterizzante gli anzidetti tipi vocalici [i] e [y], rispettivamente ortocheilo e procheilo, è infatti quantificabile. Posto ad esempio un valore lineare di 2,5 cm della "lunghezza" della cavità orale anteriore, e un valore lineare aggiunto di 1 cm nel caso di procheilia, il rapporto anatomo-fisiologico tra [i] e [y] sarà descritto da 2, 5:3, 5.

In pratica la fonetica linguistica è oggi in grado di meglio esplorare la fenomenologia di sua competenza, tanto fisiologica quanto acustica, attraverso procedure di quantificazione numerica e di rilevamento di rapporti numerici. Sul piano acustico ciò è stato possibile dopo che la fisica acustica dell'Ottocento aveva potuto definire numericamente le frequenze dei suoni o note. Agli albori del pensiero scientifico greco non esisteva alcun metodo per indagare la struttura fisica del suono *singolo*. L'ambiente pitagorico, tuttavia, fu in grado di individuare percettivamente e di descrivere numericamente certe *coppie* di suoni dal punto di vista del loro reciproco rapporto. È pertanto legittimo considerare le riflessioni teoriche pitagoriche sugli intervalli tra suoni come il primo passo compiuto lungo la strada che condurrà da un lato agli studi di acustica musicologica e dall'altro agli studi di acustica fonetica linguistica⁽¹⁾.

Conformemente all'attitudine mentale del pensiero greco tali riflessioni antiche superano d'un balzo il piano empirico per esplorare il piano metempirico dei valori matematici.

Pertanto la nostra indagine circa le connessioni tra matematica e acustica musicale nel pensiero pitagorico antico sarà articolata nei seguenti paragrafi, che tratteranno:

a) degli intervalli musicali e delle speculazioni matematiche intorno ai numeri assunti nei rapporti ad essi corrispondenti (paragr. 1);

(1) La prima netta distinzione teorica tra suoni musicali e suoni linguistici risale ad Aristosseno, il grande teorico del IV secolo a.C.; cf. *Elementa armonica*, ed. Da Rios, 1934, p. 10 sgg. e RUTHMUELLER ZAMINER, *Musik des Altertums*, 1989, p. 241.

b) dello studio matematico delle medie proporzionali, sulla base delle quali furono stabiliti i rapporti numerici corrispondenti agli intervalli (paragr. 2);

c) dei tentativi condotti da Filolao per suddividere matematicamente il tono in semitoni (paragr. 3);

d) della concezione pitagorica degli intervalli come risultati di operazioni di somma e sottrazione di entità lineari (paragr. 4);

e) della suddivisione del tetracordo e dell'ottocordo nel genere diatonico (paragr. 5);

f) di Archita e dei tre generi di scale musicali (paragr. 6).

§ 1. Intervalli musicali e speculazioni matematiche

Per trattare questo argomento occorre riepilogare brevemente alcuni dati già esposti e commentati nella Nota precedente sopra menzionata.

La teoria musicale del primo pitagorismo è particolarmente interessata alla riduzione delle consonanze in termini matematici. Tale ricerca approda — verosimilmente già con Pitagora o comunque nella sua epoca — alla individuazione dei seguenti rapporti numerici:

- 2:1 intervallo di ottava;
- 3:2 intervallo di quinta;
- 4:3 intervallo di quarta;
- 9:8 intervallo di un tono.

I numeri delle relazioni sopra menzionate rappresentano da prima lunghezze di sorgenti sonore (all'inizio corde musicali, ma in seguito anche canne di strumenti a fiato e colonne d'aria all'interno di vasi). Nella forma inversa, cioè 1:2, 2:3 etc., tali relazioni vengono più tardi interpretate come relazioni tra valori di frequenza, essendo la lunghezza della sorgente sonora inversamente proporzionale alla frequenza da essa generata.

Per quanto riguarda le consonanze di ottava, quarta e quinta, i numeri assunti nei rapporti che le rappresentano costituiscono una serie naturale (1, 2, 3, 4) e compongono inoltre la *tetraktys*, figura sacra ai Pitagorici già in epoca precedente alla scissione della scuola in acumatici e matematici.

In una nota testimonianza riferita da Giamblico e da Nicomaco (Giamblico, *vita Pythag.* 26 e Nicomaco, *harmon. enchir.* 6, in JAN, *Mus. Script. Graeci*, 1895, p. 115 sgg. e p. 245 sgg.), nella quale si narra come Pitagora sarebbe giunto alla quantificazione matematica delle consonanze e dell'intervallo di un tono, i rapporti numerici sono costituiti mediante i numeri 12, 9, 8 e 6, e cioè: 12:6 ottava; 12:9 oppure 8:6 quarta; 12:8 oppure 9:6 quinta; 9:8 tono.

La semplificazione di tali rapporti riconduce a quelli sopra detti, ossia rispettivamente, 2:1 ottava, 4:3 quarta; 3:2 quinta (il rapporto corrispondente all'intervallo di un tono resta ovviamente invariato).

Ci occuperemo ora di chiarire per quali motivi matematici e teoretici vengano assunti dai Pitagorici i numeri coinvolti nei rapporti che rappresentano gli intervalli, cioè le due serie 1, 2, 3, 4 e 6, 8, 9, 12, e sulla base di quali criteri vengano stabiliti i relativi rapporti numerici.

Per i Pitagorici la teoria musicale è strettamente connessa con quella aritmo-geometrica e con i valori mistici e simbolici da essi attribuiti ai numeri. Se pure i Pitagorici non trascurarono l'analisi di dati empirici, questi ultimi vengono sempre costretti all'interno di una dottrina teorica precostituita. Il mondo dei suoni musicali per i Pitagorici consta essenzialmente dei numeri assunti nei rapporti numerici esprimenti gli intervalli, e lo studio della teoria musicale fornisce attraverso la loro ottica di analisi una conferma delle interrelazioni che connettono le cose e i numeri. Abbiamo accennato in precedenza anche all'importanza della *tetraktys* per spiegare il motivo per cui le consonanze riconosciute dal pitagorismo più antico fossero espresse da relazioni numeriche nelle quali erano implicati soltanto i primi quattro numeri naturali, la cui somma è il dieci, considerato il numero perfetto⁽²⁾.

Tra le consonanze principali, poi, i Pitagorici consideravano l'ottava come la consonanza perfetta, come ci testimonia Tolomeo (*harmon.* 5, p. 11 Düring) nel passo seguente:

[...] τῶν τε συμφωνιῶν ἡ διὰ πασῶν ἐστὶ καλλίστη καὶ τῶν λόγων ὁ διπλάσιος ἄριστος. ἡ μὲν διὰ τὸ ἐγγυτάτω εἶναι τοῦ ἰσοτόνου, ὁ δὲ τῷ μόνος τὴν ὑπεροχὴν ἴσῃ ποιεῖν τῷ ὑπερχομένῳ [...]

«Tra le consonanze l'ottava è la più bella, e tra i rapporti numerici quello del doppio è il migliore, la prima perché si avvicina il più possibile all'uguaglianza di altezza⁽³⁾, il secondo perché in esso soltanto l'eccedenza è pari a ciò che è ecceduto»; vale a dire, nel rapporto del doppio (2:1), che è quello che si ritrova nell'ottava, la quantità per cui il primo termine del rapporto supera il secondo termine è uguale al secondo termine stesso, che nella fattispecie 2:1 è uguale a 1. A proposito dei motivi per i quali i Pitagorici, ritenendo che alle diverse consonanze inerisse un diverso grado di perfezione, sostenevano l'eccellenza dell'ottava, si può considerare anche la seguente testimonianza di Porfirio, in *Ptol. harm.* I, 6 p. 107 Düring (= DK 47 A 17)⁽⁴⁾:

τῶν Πυθαγορικῶν τινες, ὡς Ἀρχύτας καὶ Δίδυμος Ἰστορυῶσι, μετὰ τὸ καταστήσασθαι τοὺς λόγους τῶν συμφωνιῶν συγκρίνοντες αὐτοὺς πρὸς ἀλλήλους καὶ τοὺς

συμφωνίους μᾶλλον ἐπιδεικνύναι βουλόμενοι τοιοῦτόν τι ἐποίουν· πρώτους λαβόντες ἀριθμούς, οὓς ἐκάλουν πυθμένας, τῶν τοὺς λόγους τῶν συμφωνιῶν αποτελούντων [...] τούτους οὖν τοὺς ἀριθμούς ἀποδόντες ταῖς συμφωνίαις ἐσκόπουν καθ' ἕκαστον λόγον, τῶν τοὺς ὅρους περιεχόντων ἀριθμῶν ἀφελόντες ἀφ' ἑκατέρων τῶν ὅρων ἀνὰ μονάδα, τοὺς ἀπολειπομένους ἀριθμούς μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν οἵτινες εἰεν οἶον τῶν 2, 1, οἵπερ ἦσαν τῆς διὰ πασῶν, ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα ἐσκόπουν τὸ καταλειπόμενον· ἦν δὲ ἓν. τῶν δὲ 4 καὶ 3, οἵτινες ἦσαν τῆς διὰ τεσσάρων, ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα εἶχον ἐκ μὲν οὖν τῶν τεσσάρων ὑπολειπόμενον τὸν τρία, ἐκ δὲ τῶν τριῶν τὸν δύο· ὥστ' ἀπὸ συναμφωτέρων τῶν ὅρων μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τὸ ὑπολειπόμενον ἦν πέντε. τῶν δὲ 3 καὶ 2, οἵτινες ἦσαν τῆς διὰ πέντε, ἀφελόντες ἀνὰ μονάδα εἶχον ἐκ μὲν τῶν τριῶν ὑπολειπόμενα δύο, ἐκ δὲ τῶν δύο ὑπολειπόμενον ἓν, ὥστε τὸ συναμφότερον λειπόμενον εἶναι τρία. ἐκάλουν δὲ τὰς μὲν ἀφαιρουμένας μονάδας ἑμοια, τὰ δὲ λειπόμενα μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀνόμοια, διὰ δύο αἰτίας, ὅτι ἐξ ἀμφοῖν τῶν ὅρων ἑμοια ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο καὶ ἴση· ἴση γὰρ ἡ μονὰς τῇ μονάδι· ὧν ἀφαιρουμένων ἐξ ἀνάγκης τὰ ὑπολειπόμενα ἀνόμοια καὶ ἄνισα. ἐὰν γὰρ ἀπὸ ἀνίσων ἴσα ἀφαιρεθῇ, τὰ λοιπὰ ἔσται ἄνισα. οἱ δὲ πολλαπλάσιοι λόγοι καὶ ἐπιμόριοι, ἐν οἷς θεωροῦνται αἱ συμφωνίαι, ἐν ἀνίσοις ὅροις ὑφ' ἐστῆκασιν, ἀφ' ὧν ἴσων ἀφαιρουμένων τὰ λοιπὰ πάντως ἄνισα. γίνεται οὖν τὰ ἀνόμοια τῶν συμφωνιῶν συμμιγέντα· συμμιγείν δὲ λέγουσιν οἱ Πυθαγόρειοι τὸ ἓνα ἐξ ἀμφοτέρων ἀριθμῶν λαβεῖν. ἔσται οὖν τὰ ἀνόμοια συντεθέντα καὶ καθ' ἕκαστην τῶν συμφωνιῶν τοιαῦτα· τῆς μὲν διὰ πασῶν ἓν. τῆς δὲ διὰ τεσσάρων πέντε, τῆς δὲ διὰ πέντε τρία. ἐφ' ὧν δ' ἄν, φασί, τὰ ἀνόμοια ἐλάσσονα ἢ, ἐκεῖνα τῶν ἄλλων εἰσι συμφωνώτερα· σύμφωνον μὲν ἐστὶν ἡ διὰ πασῶν, ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια ἐν' μετ' ἦν ἡ διὰ πέντε, ἔτι ταύτης τὰ ἀνόμοια τρία· τελευταία δὲ ἡ διὰ τεσσάρων, ὅτι ταύτης τὰ ἀνόμοια πέντε.

«Alcuni tra i Pitagorici, come riferiscono Archita e Didimo, dopo aver fissato i rapporti numerici delle consonanze, li confrontavano tra loro e, volendo mostrare quali fossero più consonanti, procedevano così: dopo aver preso i numeri primi [scil. i più bassi], che essi chiamano 'pitmeni', tra quelli che formano i rapporti delle consonanze, toglievano un'unità da ognuno dei numeri che costituiscono i termini dei singoli rapporti, e poi consideravano quali numeri risultassero dalla sottrazione: per esempio, sottratta un'unità sia da 2 che da 1, numeri che corrispondono alla consonanza di ottava, consideravano il residuo, che era 1. Poi, togliendo un'unità sia da 4 che da 3, numeri che corrispondono alla consonanza di quarta, ottenevano come resti, da 4, 3 e, da 3, 2; cosicché da entrambi i termini dopo la sottrazione avevano il residuo di 1. Infine, togliendo un'unità da 3 e da 2, numeri che corrispondono alla consonanza di quinta, avevano come resti, da 3, 2 e, da 2, 1; cosicché il residuo complessivo era 1. Inoltre, chiamavano 'simili' le unità sottratte, e 'dissimili' le unità risultanti dopo le singole sottrazioni, per due motivi: perché la parte sottratta da ambedue i termini del rapporto era uguale ed equivalente, e infatti l'unità è uguale all'unità; e poi perché, sottratte queste unità, i residui erano necessariamente dissimili e disuguali; infatti, qualora si sottraggano parti uguali da termini disuguali, i residui saranno disuguali. E invero i rapporti multipli ed epimori, nei quali si individuano le consonanze, constano di termini disuguali, per cui se ne togliamo parti uguali, i valori risultanti saranno senz'altro disuguali.

(2) A proposito dei valori geometrici, simbolici e magici attribuiti dai Pitagorici alla decade e ai numeri che la compongono, cf. in particolare Filolao, DK 44 A 13, e il commento a tale passo in TIMPANARO CARLINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 126 e sgg., note al testo.

(3) Scil. all'unisono. Nella terminologia musicale tecnica, almeno dopo Aristosseno (IV secolo a.C.), il termine *τάσις* — letteralmente 'tensione' — designa l'altezza del suono, in quanto risultato della particolare tensione conferita alla corda che la produce. Cf. RUTHMUELLER-ZAMINER, *Die Musik des Altertums*, 1989, p. 272 sg.

(4) Per ovviare ad eventuali difficoltà tipografiche (assenza di stigma, etc.) abbiamo sostituito le cifre greche con numeri arabi.

Dunque, i dissimili nelle consonanze derivano da una mescolanza: infatti, i Pitagorici definiscono 'mescolare' il formare un numero solo a partire da due numeri; e per ciascuna delle consonanze i dissimili composti saranno i seguenti: per l'ottava 1, per la quarta 5, per la quinta 3. Essi dicono inoltre che formano una consonanza migliore quei rapporti nei quali i dissimili siano più piccoli: pertanto consonante in sommo grado è l'ottava, perché il suo dissimile è 1; dopo questa c'è la quinta, perché il suo dissimile è 3; infine c'è la quarta, perché il suo dissimile è 5⁽⁴⁾.

Questo passo ci testimonia l'esigenza avvertita dai Pitagorici di giustificare la diversa gradevolezza delle consonanze in base ai valori simbolici da essi attribuiti ai numeri, cioè di trovare un parallelismo tra la gerarchia di gradevolezza percettiva soggettiva e comune e la gerarchia di eleganza di economia numerica astratta. Ora, il brano di Porfirio appena esaminato ci dice che la consonanza di ottava era considerata perfetta per il fatto che sottraendo una unità ad entrambi i termini del rapporto 2:1 (vale a dire il rapporto corrispondente all'ottava), si ottiene il più piccolo numero razionale, cioè l'unità; sottraendo invece una unità ad entrambi i numeri costituenti il rapporto della quarta (vale a dire 4:3), si ottiene il numero 5 dalla somma dei resti 3 e 2, etc. Ma Porfirio avverte anche che per i Pitagorici tanto minore era questo risultato complessivo ottenuto dalla sottrazione di un'unità ad entrambi i termini del rapporto, tanto maggiore era la perfezione della consonanza, per cui l'ottava, dal cui rapporto si otteneva il valore risultante minore mediante questo processo di sottrazione, era considerata perfetta rispetto alle altre consonanze.

A ciò si aggiunga il fatto che i Pitagorici conferivano una particolare importanza al numero 1, in quanto generatore di tutti gli altri numeri, e quindi anche delle due serie dei numeri pari e dispari; per tale motivo, essi ritenevano anche che l'unità partecipasse della natura di entrambe le serie, e perciò il numero 1 veniva talvolta chiamato 'parimpari', come ci riferisce Teone di Smirne p. 22, 5 (= DK 47 A 21):

Ἀριστοτέλης δὲ ἐν τῇ Πυθαγορικῇ [fr. 199 Rose] τὸ ἐν φησιν ἀμφοτέρων μετέχειν τῆς φύσεως· ἀρτίῳ μὲν γὰρ προστεθὲν περιττὸν ποιεῖ, περιττῷ δὲ ἄρτιον, ὃ οὐκ ἂν ἤδύνατο εἰ μὴ ἀμφοῖν τῶν φύσεων μετεῖχε· διὸ καὶ ἀρτιοπέριττον καλεῖσθαι τὸ ἐν συμφέρεται δὲ τοῖσι καὶ Ἀρχύτας

«Aristotele nel suo libro 'Sui Pitagorici' dice che l'uno è partecipe della natura di entrambi [scil. del pari e del dispari], perché aggiunto a un numero pari forma un dispari, mentre aggiunto a un dispari forma un pari, cosa che non sarebbe possibile se non partecipasse di entrambe le nature. Perciò l'uno è chiamato anche 'parimpari'. Concorda su questo anche Archita».

(4) A proposito di tale testimonianza, la TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 323, note al testo, osserva giustamente che le motivazioni artificiose ed aprioristiche in essa addotte non sono ragione sufficiente per negarne l'autenticità, a differenza di quanto alcuni studiosi hanno ritenuto.

La ricerca musicale dei Pitagorici si era volta alla individuazione e determinazione numerica di tutti i possibili intervalli compresi in quello d'ottava; la prima fase di tale ricerca aveva condotto alla individuazione degli intervalli di quarta e di quinta, dal cui prodotto si poteva ottenere nuovamente l'ottava [(3:2) · (4:3) = 2:1], secondo quanto ci riferisce Tolomeo, *harmon.* 5, p. 11 Düring, stando al quale per i Pitagorici la peculiarità dell'ottava di comprendere gli intervalli di quarta e di quinta costituiva un ulteriore motivo per affermarne l'eccellenza: [...] καὶ ἔτι τὴν μὲν διὰ πασῶν συγκεῖσθαι συμβέβηκεν ἐκ δύο τῶν ἐφεξῆς καὶ πρώτων συμφωνιῶν, τῆς τε διὰ πέντε καὶ τῆς διὰ τεσσάρων [...] «inoltre l'ottava è composta da due consonanze semplici e contigue, la quinta e la quarta».

Inoltre, le relazioni numeriche esprimenti gli intervalli (2:1 ottava; 4:3 quarta; 3:2 quinta; 9:8 tono) presentano anche la peculiarità di essere epimorie. Il rapporto epimorio è quello in cui vengono a trovarsi due numeri quando il maggiore supera il minore di un'unità; esso si può sintetizzare nella formula [(n + 1) : n]. Tale rapporto per i Pitagorici è uno dei due possibili requisiti ai quali deve rispondere una relazione numerica per esprimere un intervallo consonante. Secondo le informazioni che si possono desumere da Tolomeo, *harmon.* 5, p. 11 Düring, tali rapporti numerici dovevano essere infatti epimori (ἐπιμόριοι) o multipli (πολλαπλασιασμοί; vale a dire quelli in cui il numero maggiore è un multiplo del minore); questa condizione non era però sufficiente, in quanto ad esempio un rapporto del tipo 5:4 (cioè il rapporto corrispondente all'intervallo di terza maggiore, riconosciuto come tale solo a partire da Archita) non è considerato corrispondente a una consonanza da parte dei Pitagorici antichi⁽⁵⁾. Questo il testo di Tolomeo:

ἀρχὴν γὰρ οὐκ εἰσὶν οὐκ εἰσὶν οὐκ εἰσὶν ποιησάμενοι [scil. οἱ Πυθαγόρειοι] τῆς μεθόδου, καθ' ἣν οἱ μὲν ἴσοι τῶν ἀριθμῶν παραβληθῆσονται τοῖς ἰσοτόνοις φθόγγοις, οἱ δὲ ἄνιστοι τοῖς ἀνιστόνοις, τοῦντεῦθεν ἐπάγουσιν, ὅτι καθάπερ τῶν ἀνιστόνων φθόγγων δύο ἐστὶν εἶδη πρὸς ἄλληλα τὰ πρώτα, τὸ τε τῶν συμφώνων καὶ τῶν διαφώνων, καὶ κάλλιον τὸ τῶν συμφώνων. οὕτως καὶ τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν δύο γίνονται πρώται διαφοραὶ λόγων, μία μὲν ἡ τῶν λεγόμενων ἐπιμερῶν καὶ ὡς ἀριθμὸς πρὸς ἀριθμὸν, ἑτέρα δὲ ἡ τῶν ἐπιμορίων τε καὶ πολλαπλασιῶν, ἀμείνων καὶ αὐτὴ τῆς ἐκείνων κατὰ τὴν ἀπλότητα τῆς παραβολῆς, ὅτι

(5) Diversi studiosi hanno cercato di motivare in vario modo la ragione per la quale i Pitagorici antichi non hanno considerato consonante l'intervallo di terza; cf., ad esempio, LOHMANN, *Die griechische Musik*, 1957, p. 153: «[...] die Terz-Intervalle hier schon deswegen nicht als *symphōnoi* auftreten können, weil das eine der Terz-Einteilung der Quint analoge Teilung der Quart zur Voraussetzung haben würde, die die Gliederung des Systems sprengen mussten»; RIETHMÜLLER-ZAMINER, *Die Musik des Altertums*, 1989, p. 299: «Einer der Gründe, warum die harmonische Teilung der Oktave in Quinte und Quarte nicht weiter für Konsonanzen in Anspruch genommen wurde, lag offenkundig darin, dass sich im Falle der Quinte zwar grosse und kleine Terz ergeben hätten [(5:4) × (6:5) = 3:2] — sie erscheinen nirgends im Kreis der Konsonanzen —, aber im Falle der Quarte, die analog hätte behandelt werden müssen, die numinöse Zahl 7 unvermeidlich gewesen wäre [(8:7) × (7:6) = 4:3]». A nostro avviso, tuttavia, il motivo principale della esclusione delle due terze dal novero delle consonanze riconosciute dai primi Pitagorici consiste nel fatto che i rapporti numerici che le rappresentano, cioè 5:4 e 6:5, contengono numeri non compresi nella *tetraktys*.

μέρος ἐστὶν ἀπλοῦν ἐν αὐτῇ τῶν μὲν ἐπιμορίων ἢ ὑπεροχῇ, τῶν δὲ πολλαπλασίων τὸ ἔλαττον τοῦ μεῖζονος. ἐφαρμόσαντες δὴ διὰ τοῦτο τοὺς ἐπιμορίους καὶ πολλαπλασίους λόγους ταῖς συμφωνίαις, τὴν μὲν διὰ πασῶν προσάπτουσι τῷ διπλασίῳ λόγῳ, τὴν δὲ διὰ πέντε τῷ ἡμιολίῳ, τὴν δὲ διὰ τεσσάρων τῷ ἐπιτρίτῳ.

«I Pitagorici, dopo aver posto come principio fondante del loro metodo il fatto che numeri uguali corrispondono a suoni di altezza uguale, mentre numeri disuguali corrispondono a suoni di altezza diversa, affermano che allo stesso modo in cui vi sono due tipi principali di suoni di diversa altezza, vale a dire consonanti e dissonanti, tra i quali i consonanti sono più gradevoli, così vi sono anche tra i numeri disuguali due tipi principali di rapporti: il primo è quello dei cosiddetti epimeri, vale a dire numero con numero [scil. $n:n$; ad es., $3:8$]; il secondo tipo è quello dei numeri epimori e multipli. Questo secondo tipo è da preferire per la semplicità del rapporto, poiché da un lato nei numeri epimori l'eccezione è una parte dell'intero; dall'altro, nei multipli il numero minore è contenuto nel maggiore. Essi comparano perciò i rapporti epimori e multipli con le consonanze: all'ottava fanno corrispondere il rapporto del doppio, alla quinta il rapporto emiolio [scil. $3:2$], alla quarta il rapporto epitrilo [scil. $4:3$].»

Riguardo ai calcoli matematici tramite i quali si ottenevano i rapporti numerici designanti le consonanze, e sul rapporto di derivazione logica che i Pitagorici antichi avrebbero posto tra le consonanze stesse, ci informa anche un brano di Boezio, *inst. mus.* II 19 (= DK 18 A 14), la cui fonte in questo caso è Nicomaco; il brano riguarda il pitagorico Ippaso:

sed Eubulides atque Hippasus alium consonantiarum ordinem ponunt. aiunt enim multipliciter augmenta superparticularitatis deminutioni ratio ordine respondere. itaque non posse esse duplum praeter dimidium nec triplum praeter tertiam partem. quoniam igitur sit duplum, ex eo diapason consonantiam reddi, quoniam vero sit dimidium, ex eo quasi contrarium divisionem sesquialteram, id est diapente, effici proportionem. quibus mixtis, scilicet diapason ac diapente, triplicem procreari, quae utramque contineat symphoniam. sed rursus triplici partem tertiam contraria divisione partiti, ex qua rursus diatessaron symphoniam nascetur. triplicem vero atque sesquitercium iunctos quadruplam comparisonem proportionis efficere. unde fit, ut ex diapason ac diapente, quae est una consonantia, et diatessaron una concinentia coniungatur, quae in quadruplo consistens bis diapason nomen accepit. secundum hoc quoque hic ordo est: diapason, diapente, diapason ac diapente, diatessaron, bis diapason.

«Ma Eubulide ed Ippaso stabiliscono le consonanze in un altro ordine. Dicono infatti che ogni aumento del rapporto multiplo corrisponde a una diminuzione del rapporto epimorio secondo una legge costante, per cui non vi può essere doppio senza metà, né triplo senza terza parte. E se il rapporto è del doppio si ottiene la consonanza di ottava, se invece è della metà, cioè il suo contrario, si ottiene il rapporto di quinta. Unendo questi due rapporti, cioè l'ottava e la quinta, si crea il rapporto triplo, che li contiene entrambi. Il triplo a sua volta, inversamente, diventa un terzo, da cui a sua volta risulterà la consonanza di quarta. Il triplo poi e la quarta,

congiunti, formano il rapporto quadruplo; e così avviene che dall'unione di ottava e quinta, che già formano una sola consonanza [scil. quella di dodicesima, espressa dal rapporto $3:1$], con la quarta, risulta un'unica consonanza che, consistendo in un rapporto quadruplo, prende il nome di doppia ottava. E così anche secondo costoro l'ordine è questo: ottava, quinta, ottava e quinta, quarta, doppia ottava».

Il significato di questa testimonianza è il seguente⁽⁷⁾: nel rapporto epimorio $[(n + 1) : n]$, all'aumento dell'unità (1, 2, 3, 4 etc.) corrisponde la diminuzione del rapporto inverso (cioè $1:2$, $1:3$, $1:4$ etc.); da qui ha origine la serie dei rapporti epimori (cioè $3:2$, $4:3$, $5:4$ etc.), ottenuta aggiungendo all'unità le serie inverse: così $1 + (1:2) = 3:2$; $1 + (1:3) = 4:3$, etc. Dato $2:1$, che è il rapporto dell'ottava, il suo inverso, cioè $1:2$, aggiunto all'unità, crea il rapporto della quinta, in quanto $1 + (1:2) = 3:2$. L'unione dell'ottava e della quinta dà il rapporto triplo, poiché $(2:1) \cdot (3:2) = 3:1$. L'inverso del rapporto triplo, cioè $1:3$, aggiunto all'unità, genera il rapporto della quarta, poiché $1 + (1:3) = 4:3$. L'unione del triplo e della quarta crea il rapporto quadruplo, in quanto $(3:1) \cdot (4:3) = 4:1$; quest'ultimo rapporto corrisponde alla doppia ottava.

Abbiamo visto che per i Pitagorici l'intervallo di ottava comprende gli intervalli di quinta e di quarta, poiché si ottiene dal prodotto dei rapporti numerici dei due intervalli minori. Mediante il procedimento inverso, ovvero dividendo tra loro i due rapporti numerici della quinta e della quarta, i Pitagorici individuano la "differenza" di tali intervalli nel tono, espresso dal rapporto $9:8$, detto "epogdoo": infatti, $(3:2) : (4:3) = 9:8$.

Come si può notare, anche il rapporto numerico che esprime il tono è un rapporto epimorio: in esso, come in tutti gli altri rapporti epimori, non è possibile trovare un medio proporzionale⁽⁸⁾.

Abbiamo detto che la fase più antica della teoria musicale pitagorica presenta come acquisite soltanto le relazioni numeriche degli intervalli principali (ottava, quinta e quarta) e del tono: questo sistema corrisponde alla scala diatonica. Successivamente, in conseguenza anche del parallelo sviluppo della matematica e, in particolare, dello studio delle medie proporzionali, i Pitagorici tentarono ulteriori e diverse suddivisioni degli intervalli. Prima di illustrare questi tentativi, è opportuno chiarire brevemente cosa si intenda per studio delle medietà.

§ 2. Le medie proporzionali

Già anticamente i Pitagorici conoscevano tre tipi di medie proporzionali che potevano ottenersi a partire da due numeri razionali, vale a dire la media aritmetica,

(7) Cf. TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1958, I, p. 104 sg., note al testo.

(8) Cf. la testimonianza di Boezio, *inst. mus.* 3, 11 (= DK 47 A 19), che riferisce il pensiero di Archita. Cf. anche BECKER, *Frühgriechische Mathematik und Musiklehre*, 1957, p. 159 sgg.; VAN DER WAERDEN, *Harmonielehre*, 1943, p. 185 sg.

la geometrica e l'armonica; si veda quanto ci testimonia il seguente passo di Giamblico, in *Nicom. arithm.* 100, 19 (= DK 18 A 15):

μὲναι δὲ τὸ παλαιὸν τρεῖς ἦσαν μεσότητες ἐπὶ Πυθαγόρου καὶ τῶν κατ' αὐτὸν μαθηματικῶν, ἀριθμητικὴ τε καὶ ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἡ ποτὲ μὲν ὑπεναντία λεγόμενη τῇ τάξει τρίτη, ὑπὲρ δὲ τῶν περὶ Ἀρχύταν πύθις καὶ Ἰππασσον ἀρμονικὴ μετακληθεῖσα [...] ἀλλαγέντος δὲ τοῦ ὀνόματος οἱ μετὰ ταῦτα περὶ Εὐδόξου μαθηματικοὶ ἄλλας τρεῖς προσανευρόντες μεσότητας τὴν τετάρτην ἰδίως ὑπεναντίαν ἐκάλεσαν. [...] τὰς δὲ λοιπὰς δύο ἀπλῶς κατὰ τὴν τάξιν προσηγόρευσαν πέμπτην τε καὶ ἑκτὴν

«Nell'antichità erano solo tre le medietà presso Pitagora e i matematici della sua scuola: l'aritmetica, la geometrica e, terza per ordine, quella che allora era chiamata subcontraria, ma che poi fu chiamata armonica dalle scuole di Archita e di Ippaso [...] Cambiato così questo nome, in seguito i matematici della scuola di Eudosso trovarono altre tre medietà, e chiamarono propriamente subcontraria la quarta [...] e le altre due le chiamarono semplicemente, secondo l'ordine, quinta e sesta».

Riguardo alla medietà armonica siamo informati dal seguente brano di Nicomaco, *arithm.* II 26, 2 (= DK 44 A 24), nel quale è sottolineata la relazione intercorrente tra lo studio dell'aritmetica e della geometria, e quello delle medie proporzionali:

τινὲς δὲ αὐτὴν [scil. τὴν μεσότητα] ἀρμονικὴν καλεῖσθαι νομίζουσιν ἀκολουθῶς φιλολῶς ἀπὸ τοῦ παρέπεσθαι πάσῃ γεωμετρικῇ ἀρμονίᾳ, γεωμετρικὴν δὲ ἀρμονίαν φασὶ τὸν κύβον ἀπὸ τοῦ κατὰ τὰ τρία διαστήματα ἡρμόσθαι ἰσάκις ἴσα ἰσάκις· ἐν γὰρ παντὶ κύβῳ ἥδε ἡ μεσότης ἐνοπρὶρίζεται. πλευραὶ μὲν γὰρ παντὸς κύβου εἰσὶν 12, γωνίαι δὲ 8, ἐπίπεδα δὲ 6· μεσότης ἄρα ὁ 8 τῶν 6 καὶ τῶν 12 κατὰ τὴν ἀρμονικὴν

«Alcuni, seguendo Filolao, ritengono che la media armonica si chiami così perché accompagna ogni armonia geometrica; ed essi chiamano armonia geometrica il cubo, per il fatto che è composto da un numero che si ripete identico tante volte e poi altrettante, secondo le tre dimensioni. Ora, in ogni cubo si rispecchia questa medietà: infatti, gli spigoli di ogni cubo sono 12, i vertici 8 e le facce 6; e appunto nella medietà armonica 8 è medio tra 6 e 12»⁹⁾.

I numeri 12, 8 e 6, dunque, rappresentano rispettivamente gli spigoli, i vertici e le facce di un cubo; nella testimonianza di Nicomaco e di Giamblico (cf. supra, paragr. 1) relativa al modo in cui Pitagora avrebbe fissato i rapporti degli intervalli principali, tali numeri possono costituire, opportunamente combinati, i rapporti che

(9) Secondo una tradizione riferita da Giamblico, Pitagora stesso sarebbe stato il primo ad introdurre in Grecia la media armonica; cf. Giamblico, in *Nicom. arithm.* 118, 24 (= DK 44 A 24): εὐρεμα δ' αὐτὴν [scil. la media armonica] φασὶ εἶναι Βαβυλωνίων καὶ διὰ Πυθαγόρου πρῶτον εἰς Ἑλλάδα ἔλθειν [...] «Dicono che la media armonica sia una scoperta dei Babilonesi e che per primo Pitagora l'avrebbe introdotta in Grecia».

esprimono gli intervalli consonanti, in quanto 12:6 è equivalente a 2:1, vale a dire all'ottava; 12:8 (= 3:2) alla quinta e 8:6 (= 4:3) alla quarta.

Archita, un pitagorico — contemporaneo di Platone — del quale ci occuperemo più estesamente altrove, approfondì in modo sostanziale lo studio delle medietà, sia nel campo strettamente matematico, sia nell'applicazione alla teoria musicale, come si legge nel frammento tramandato da Porfirio, in *Ptol. harm.* p. 92 Düring (= DK 47 B 2), il cui testo è il seguente:

μέσαι δὲ ἐντι τρεῖς τῶ μουσικῇ, μία μὲν ἀριθμητικὰ, δευτέρα δὲ ἡ γεωμετρικὰ, τρίτη δ' ὑπεναντία, ἃν καλεῖν ἀρμονικὰν. ἀριθμητικὰ μὲν, ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὴν ἀνά λόγον· ὃ πρῶτος δευτέρου ὑπερέχει, τοῦτω δευτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύτῃ <τῇ> ἀναλογίᾳ συμπύπτει ἡμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μείον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μείζον. ἡ γεωμετρικὰ δὲ, ὅκκα ἔωντι ὁλος ὁ πρῶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους. ἡ δ' ὑπεναντία, ἃν καλοῦμεν ἀρμονικὰν, ὅκκα ἔωντι <τοῖσι> ὃ πρῶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τοῦτω ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύτῃ τῇ ἀναλογίᾳ τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μείζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μείον

«Ci sono tre medie nella musica: la prima è l'aritmetica, la seconda la geometrica, la terza la subcontraria, che chiamano armonica. Si ha la media aritmetica quando tre termini stanno tra loro in rapporto secondo una certa eccedenza: vale a dire, di quanto il primo supera il secondo, di tanto il secondo supera il terzo. In questa proporzione l'intervallo dei termini maggiori è minore, quello dei minori è maggiore. La media geometrica si ha quando i tre termini sono tali che il primo sta al secondo come il secondo sta al terzo. In questa proporzione l'intervallo dei termini maggiori è uguale a quello dei minori. La media subcontraria, che chiamiamo armonica, si ha quando i termini stanno tra loro così: di quanta parte di sé il primo supera il secondo, di altrettanta parte del terzo il medio supera il terzo. In questa proporzione l'intervallo dei termini maggiori è maggiore, quello dei minori è minore».

Riassumendo, dunque, dati due numeri razionali A e B, dei quali A sia il doppio di B, e designate con le lettere M, G e H rispettivamente la media aritmetica, la geometrica e l'armonica, si possono definire le suddette medietà con l'ausilio delle seguenti formule di uguaglianza:

$$A - M = M - B$$

$$A : G = G : B$$

$$(A - H) : A = (H - B) : B$$

Se si sostituiscono le lettere A e B con i numeri 12 e 6, si ottiene che la media aritmetica tra 12 e 6 è 9 (poiché $12 - 9 = 9 - 6$), e la media armonica è 8 [poiché $(12 - 8) : 12 = (8 - 6) : 6$]. Sulla base di queste sole due medie proporzionali, tra

loro combinate, si ottengono i rapporti di quarta e di quinta, a partire da quello di ottava, utilizzando le seguenti proporzioni:

$$A : H = M : B$$

$$A : M = H : B$$

Dal momento che abbiamo dato ad A il valore di 12, a B il valore di 6, e a H ed M rispettivamente i valori di 8 e 9, sostituendo le lettere con i numeri, si avrà:

$$12 : 8 = 9 : 6 = 3 : 2 \text{ (intervallo di quinta), e}$$

$$12 : 9 = 8 : 6 = 4 : 3 \text{ (intervallo di quarta).}$$

§ 3. Filolao e la suddivisione matematica del tono in semitoni

Ripreso ora il caso particolare del tono — a cui corrisponde nella scala di genere diatonico il rapporto epogdo, vale a dire 9:8 — Filolao fu il primo pitagorico a tentarne la suddivisione; il risultato di tale tentativo fu l'individuazione del semitono maggiore e del semitono minore⁽¹⁰⁾.

Filolao di Crotone o di Taranto, seguace della dottrina pitagorica, si rifugiò in Grecia dopo la rivolta democratica del 454 a.C. (cf. DK 44 A 1a, A 4). Verso la fine del V sec. fu attivo soprattutto a Tebe. Si occupò in particolare di matematica e astronomia; suoi discepoli furono Simmia e Cebete, che conosciamo dal *Fidone* platonico. Di Filolao restano numerose testimonianze indirette e alcuni frammenti, la cui genuinità è stata però talvolta messa in discussione. A proposito della questione filolaica, si veda il fondamentale lavoro del BOERKH, *Philolaos*, 1819. I giudizi fortemente critici espressi dal TANNERY (*Mém. Scient.* III, p. 223) e dal FRANK (*Plato und die sogenannten Pythagoreer*, 1923, p. 263-267) riguardo all'esistenza effettiva di tale Filolao e della sua opera, e — per quanto riguarda coloro che ne ammettono l'esistenza — circa la sua presunta totale dipendenza dal pensiero platonico, sono stati puntualmente ribatuti da R. MONDOLFO (in ZELLER-MONDOLFO, *La filosofia dei Greci*, 1964¹, II, p. 367-382 e *passim*). La tendenza ad ammettere l'esistenza di Filolao e a rivendicarne l'originalità del pensiero si rileva anche nel commento di TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 82 sgg. e in BERKERT, *Wissenschaft und Wirklichkeit*, 1962, p. 368 sgg.

In linea di massima, ritengo che R. Mondolfo sia nel giusto circa l'attribuzione dei frammenti a Filolao. Ma non affronterò nelle pagine successive la complessa questione filolaica, in quanto non strettamente rilevante ai fini del nostro lavoro: anche a voler negare l'esistenza del nostro Filolao, è un dato sicuro che i frammenti attribuiti dalla tradizione a questo autore rispecchiano dottrine della

corrente pitagorica precedente almeno il V secolo a.C. L'arcaicità della terminologia presente nei frammenti rappresenta comunque una testimonianza fondamentale sulla terminologia in uso nella scuola pitagorica più antica.

Esiste in Boezio un passo (*inst. mus.* III 5 = DK 44 A 26) nel quale il filosofo riferisce quale sarebbe stato il procedimento adottato da Filolao per suddividere il tono. Tale passo, peraltro, suscita notevoli perplessità a causa delle confusioni e degli errori matematici in esso presenti, e ai quali accenneremo in seguito, dopo aver riportato il testo, che è il seguente:

Philolaus vero Pythagoricus alio modo tonum dividere temptavit, statuens scilicet primordium toni ab eo numero, qui primus cybum a primo impari, quod maxime apud Pythagoricos honorabile fuit, efficeret. nam cum ternarius numerus primus sit impar, tres tertio atque id ter si duxeris, XXVII necessario exurgerent. qui ad XXIII numerum tono distat, eandem ternarii differentiam servans, ternarius enim XXIII summae octava pars est, quae eisdem addita primum a ternario cybum XX ac VII reddit. ex hoc igitur Philolaus duas efficit partes, unam quae dimidio sit maior, eamque apotomen vocat, reliquam quae dimidio sit minor eamque rursus diesin dicit, quam posterius semitonium minus appellavere; harum vero differentiam comma ac primum diesin in XIII unitatibus constare arbitratur eo, quod haec inter CCLVI et CCXLIII pervisa sit differentia, quodque idem numerus, id est XIII, ex novenario, ternario atque unitate consistat, quae unitas puncti obtineat locum, ternarius vero primae imparis lineae, novenarius primi imparis quadrati. ex his igitur causis cum XIII diesin ponat, quod semitonium nuncupatur, reliquam XXVII numeri partem, quae XIII unitatibus continetur, apotomen esse constituit. sed quoniam inter XIII et XXIII unitas differentiam facit, unitatem loco commatis censet esse ponendam. totum vero tonum in XXVII unitatibus locat eo quod inter CCXIV ab CCXLIII qui inter se distant tono, XXVII sit differentia

«Il pitagorico Filolao tentò di dividere il tono in un altro modo, stabilendo cioè come generatore del tono il primo numero che è cubo del primo numero dispari, proprietà che era tenuta in gran conto dai Pitagorici. Dato che il primo numero dispari è il 3, se lo si moltiplica per 3 e poi ancora per 3, si avrà necessariamente il 27, numero che forma con il 24 l'intervallo di un tono, conservando la medesima differenza di 3. Infatti, il 3 è l'ottava parte del 24, che aggiunta al 24 riproduce il primo cubo di 3, cioè 27. Di questo numero poi Filolao fa due parti, la prima che è più grande della metà, e che chiama 'apotome', la seconda che è minore della metà, e che chiama 'diesis', ma che in seguito chiamarono 'semitono minore'; chiamò 'comma' la differenza di queste due parti. Egli ritenne inoltre che il diesis consti di 13 unità, in primo luogo perché è tale la differenza tra 256 e 243, e poi perché questo stesso numero, vale a dire il 13, è formato dal 9, dal 3 e dall'1, tra i quali l'1 rappresenta il punto, il 3 la prima linea di valore dispari, il 9 il primo quadrato di valore dispari. Dopo aver posto per questi motivi il 13 come diesis — ora detto semitono — pose come apotome la parte rimanente del numero 27, che è composta da 14 unità. E poiché la differenza tra 13 e 14 è 1, egli ritenne che l'unità costituisca il comma. L'intero tono poi lo fa consistere in 27 unità, per il fatto che tra 216 e 243, che distano tra loro di un tono, la differenza è 27».

(10) Cf. *opra*, nota 8. La divisione in parti uguali di un rapporto epimorio — quale è quello corrispondente al tono, 9:8 — è ritenuta matematicamente impossibile dai Pitagorici. L'osservazione di RICHARD, *La musica greca*, 1976, p. 18, secondo la quale il tono, in realtà, essendo una entità fisica, potrebbe essere di fatto diviso in parti uguali, è valida dal punto di vista della nostra attuale concezione musicale, ma non ha ragion d'essere se la si pone — come fa Righini — a commento del pensiero musicale pitagorico, all'interno del quale la realtà fisica del tono e la sua conseguente divisibilità effettiva in parti uguali non hanno importanza alcuna. Per i Pitagorici, gli intervalli sono entità matematiche: da questo punto di vista, i rapporti epimorici che esprimono l'essenza invariante di tali intervalli non possono essere divisi in parti uguali, se non implicando i numeri irrazionali, i quali però non sono contemplati dall'autico pensiero matematico pitagorico.

Per riepilogare i dati offerti da questa testimonianza, può essere utile il seguente schema:

- tono: (27:24), (= 9:8), oppure solo 27
- diesis, o semitono minore: 13, cioè 256 — 243
- apotome: 14, cioè 27 — 13
- comma: 1, cioè 14 — 13
- tono: 243 — 216 = 27, poiché 243:216 = 9:8

Questi sono i risultati cui sarebbe pervenuta l'indagine di Filolao; tuttavia, il brano di Boezio presenta dei valori numerici ottenuti mediante procedimenti non solo oscuri, ma spesso matematicamente assurdi. Va detto subito, però, che le assurdità matematiche di cui il passo abbonda sono in larga misura da attribuire a Boezio o alle sue fonti, o all'uno e alle altre, come del resto è ammesso dagli studiosi che si sono occupati dell'argomento⁽¹¹⁾.

Ad ogni modo, il rapporto 27:24, che rappresenta il tono, è per noi comprensibile solo in quanto la sua semplificazione dà luogo al rapporto 9:8, vale a dire il rapporto epogdoo usuale presso i Pitagorici, ma i due numeri 27 e 24 sono assunti per motivazioni che non sono né musicali, né matematiche bensì mistico-matematiche: il 27 è il primo cubo del primo numero dispari, il 24 dista dal 27 di 3 unità, il 3 è l'ottava parte di 24 e aggiunto al 24 dà di nuovo il 27, etc.

Oltre che dal rapporto 27:24, per Filolao il tono sarebbe espresso anche dal solo numero intero 27, secondo quanto si afferma nella parte conclusiva del brano di Boezio, perché tale numero risulta dalla differenza tra i numeri 243 e 216, i quali insieme danno luogo al rapporto di un tono. Ora, se è ben vero che la semplificazione della frazione 243:216 riconduce al rapporto 9:8, dal punto di vista strettamente matematico non è possibile sottrarre il denominatore dal numeratore per ottenere un numero intero e razionale che rappresenti la risoluzione della frazione stessa.

Anche i numeri che vengono associati ai due semitoni sono fissati in modo arbitrario: al diesis, o semitono minore, è associato sia il rapporto 256:243, sia il numero 13, che corrisponde alla differenza tra il numeratore e il denominatore della frazione 256:243, secondo lo stesso procedimento adottato per il tono. Il 13, inoltre, è scelto anche per la sua caratteristica di essere composto dal 9, dal 3 e dall'1, numeri assunti a rappresentare rispettivamente il primo quadrato dispari, la prima linea dispari, e il punto.

Quanto al numero intero 14, che esprimerebbe l'apotome, o semitono maggiore, esso è ricavato mediante lo stesso procedimento matematicamente inadeguato: posto che il tono corrisponde al numero 27 (ovvero 243 — 216) e che il diesis corrisponde al 13 (ovvero 256 — 243), sottraendo dal tono il semitono minore si otterrà il semitono maggiore, ovvero 27 — 13 = 14.

Nel brano di Boezio non si spiega il motivo per cui viene assunta la frazione 256:243 per indicare il diesis, ma è probabile che la ragione per la quale viene assunto tale rapporto consista nel fatto che Boezio c/o le sue fonti avevano presente un passo del *Timeo* platonico (35a-36b), nel quale si tratta delle partizioni dell'anima del mondo secondo il principio delle medie proporzionali e nel quale compare appunto tale relazione numerica.

Ad ogni modo, il rapporto 256:243 indicante il diesis non è una innovazione platonica, poiché compare anche nella dottrina musicale di Archita (DK 47 A 16), dove designa propriamente il rapporto tra il Sol enarmonico e la nota corrispondente nel genere cromatico, che è di fatto un Fa diesis (di ciò parleremo più avanti, trattando dei diversi generi di scala musicale). È certo, però, che dalle testimonianze relative ad Archita emerge che la sua teoria musicale presuppone la conoscenza di un tetracordo diatonico composto da due toni e un diesis, i cui intervalli corrispondono nell'ordine rispettivamente a 9:8, 9:8 e 256:243, e che questa suddivisione del tetracordo risale a Pitagorici a lui precedenti. Platone, quindi, costruisce la sua scala nel *Timeo* su basi aprioristiche e metafisiche, ma utilizza altresì relazioni numeriche fissate precedentemente dai Pitagorici.

A proposito delle diverse interpretazioni offerte dagli studiosi con riguardo alla scala platonica e ai suoi rapporti con le dottrine pitagoriche, si veda in particolare il FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, 1923, p. 264 sgg. e BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft*, 1962, p. 365 sg.

Quanto al calcolo matematico mediante il quale si ottiene 256:243, lo si può individuare sulla base della seguente notizia di Boezio, *inst. mus.* III 8 (= DK 44 B 6).

Philolaus igitur haec atque his minora spatia talibus definitionibus includit: 'diesis', inquit, 'est spatium quo maior est sesquitercia proportio duobus tonis [...]'

«Filolao definisce questi intervalli e i minori di questi nel modo seguente: 'il diesis', egli dice, 'è quell'intervallo per cui la quarta è superiore di due toni [...]'»⁽¹²⁾.

Il diesis, dunque, rappresenta l'intervallo in ragione del quale la quarta è maggiore di due toni interi; il rapporto numerico che corrisponde al diesis, cioè 256:243, sarà quindi stato ottenuto "togliendo" due toni dalla quarta nel modo seguente:

$$(4 : 3) : [(9 : 8) \cdot (9 : 8)] = 256 : 243$$

Ciò che vi è di matematicamente incongruo nel brano di Boezio concernente Filolao (*inst. mus.* III 5), oltre a quanto abbiamo già segnalato e di cui dovrebbero essere responsabili Boezio o le sue fonti, è soprattutto il fatto che il tono, il diesis e l'apotome vengano definiti non solo da frazioni, ma anche da numeri interi

(12) Cf. Plutarco, *de an. prae. in Tim.*, c. 17 p. 1020 b: τῶν δὲ διαστημάτων ἐν ᾧ καλούμενος τόνος, ἢ τὸ διὰ πέντε μετρήσας ἐστὶ τοῦ διὰ τεσσάρων, τούτων οἱ μὲν ἀρμονικὰ διὰ τετράμενον ὄνται διὰ διαστήματα πλαιῖ, ὃν ἑκάτερον ἡμῶν καλοῦσιν, οἱ δὲ Πυθαγόρειοι τὴν μὲν εἰς ἴσα τομήν ἀπέγνωσαν αὐτοῦ, τῶν δὲ τριμμάτων ἄριστον ὄντων λεῖμμα τὸ ἐλαττον ἀναμάζουσιν, ὅτι τοῦ ἡμίσεος ἀπολείπει. «Uno degli intervalli è quello chiamato tono, la cui misura esprime di quanto la quinta è maggiore della quarta. Gli Armonici pensano di poterlo dividere a metà e di farne due intervalli, che chiamano ambedue semitoni. Ma i Pitagorici riconobbero impossibile la divisione in due parti uguali, e delle due parti disuguali chiamarono la minore 'leimma' [scil. 'resto'], perché resta al di sotto della metà».

(11) Cf. TASSURA, *Mém. Scient.*, III, p. 243 sgg.; BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft*, 1962, p. 365 sgg.; TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 126 sgg., note al testo.

(rispettivamente 27, 13 e 14), e che tali numeri interi siano ricavati tramite sottrazioni ed addizioni, laddove gli intervalli non possono che essere associati a rapporti numerici: assunto che il tono corrisponda al numero 27 — secondo le modalità sopra esaminate — e il diesis al 13, l'apotome si ricaverebbe sottraendo il 13 al 27 e, quindi, avrebbe il valore di 14. Analogamente, il comma corrisponderebbe al numero 1, poiché esprimerebbe di quanto l'apotome sia maggiore del diesis, e dunque si otterrebbe sottraendo il 13 dal 14.

Dal punto di vista matematico, tale modo di procedere è inadeguato, in quanto non solo gli intervalli devono corrispondere a rapporti numerici e non a singoli numeri, ma soprattutto perché dal punto di vista razionale la scomposizione di un intervallo maggiore in intervalli minori si ottiene sempre mediante la divisione, e non la sottrazione: ad esempio, come abbiamo visto nelle pagine precedenti, il tono si ottiene dividendo il rapporto di quinta per quello di quarta $[(3 : 2) : (4 : 3) = 9 : 8]$; analogamente, l'intervallo di ottava risulta dal prodotto, e non dalla somma, dei rapporti di quinta e di quarta $[(3 : 2) \cdot (4 : 3) = 2 : 1]$, etc.

Tuttavia, questo modo di concepire i rapporti tra gli intervalli come differenze e somme non compare solo nella testimonianza di Boezio: esso riaffiora anche in altre testimonianze, nelle quali si riferisce che i Pitagorici in generale, e anche Platone, ritenevano che il numero 13 corrispondesse al diesis, il semitono minore che i platonici chiamano "limma" (λεῖμμα), e il numero 27 al tono; si veda Plutarco, *de an. prae. in Tim.* 14, 1018 sg.: οἱ Πυθαγορικοὶ τὸν τόνον ἐν τούτῳ τῷ ἀριθμῷ [scil. 27] τὰ τττωσι [...] οἷς [scil. con il 13 e il 27] τὰ μελωδούμενα μετροῦσι εὐσμήως οἱ μαθηματικοὶ διαστήματα, τὸ μὲν δίεσιν, τὸ δὲ τόνον καλοῦντες «i Pitagorici fissano il tono in questo numero (cioè il 27); per mezzo del 13 e del 27 i matematici misurano evidentemente gli intervalli armonici, e chiamano il primo diesis, il secondo tono», e Plutarco, *ibid.* 12, 1017 sg.: τὰ δὲ τρισκαίδεκα λεῖμμα. καθάπερ Πλάτων [scil. οἱ Πυθαγορικοὶ ἐχάου] «i Pitagorici chiamavano il 13 limma, come Platone». Teone di Smirne, dopo aver riferito un rapporto diverso per il semitono minore, prende le distanze dal metodo con cui veniva ricavato il numero 13 sottraendo il denominatore dal numeratore nella frazione $256:243$: τινὲς δὲ φασὶ μὴ ἑρπῶς εἰληφθαι τούτους τοὺς ἀριθμούς· τὴν γὰρ ὑπεροχὴν [...] μὴ γίνεσθαι 13, ὅσα Πλάτων εἶρηκε δεῖν ἔχειν τὸ λεῖμμα, vale a dire che, se si utilizzano numeri diversi, che pure stiano tra loro nello stesso rapporto in cui si trovano il 256 e il 243, la differenza non sarà più 13, e quindi questo numero non può da solo esprimere il diesis o limma, in quanto un rapporto di numeri non equivale alla loro differenza; poco dopo, però, Teone sembra ricadere nell'equivoco (69, 12): τὸ διάστημα τὸ τῶν 256 πρὸς 243, τούτέστι τὰ 13 «l'intervallo tra 256 e 243, vale a dire 13».

§ 4. "Somme" e "sottrazioni" di intervalli

Per quanto riguarda Filolao, a prescindere dalle responsabilità di Boezio e/o delle sue fonti, non si può negare che a lui stesso debba attribuirsi il concetto di base

secondo il quale il tono consterebbe della somma di due semitoni minori e di un comma, e il semitono maggiore sarebbe ottenibile con la sottrazione del semitono minore dal tono intero. Tale concezione compare, infatti, oltre che nei due passi di Boezio sopra esaminati (*inst. mus.* III 1 e III 8), anche nel seguente frammento di Filolao (= DK 44 B 6):

περὶ δὲ φύσιος καὶ ἀρμονίας ὧδε ἔχει· [...] ἀρμονίας δὲ μέγεθος ἐστὶ συλλαβὰ καὶ δι' ὅξειαν· τὸ δὲ δι' ὅξειαν μεῖζον τὰς συλλαβὰς ἐπογδοῶ. ἐστὶ γὰρ ἀπὸ ὑπάτας ἐπὶ μέσσαν συλλαβὰ, ἀπὸ δὲ μέσσης ἐπὶ νεάταν δι' ὅξειαν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβὰ, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι' ὅξειαν· τὸ δ' ἐν μέσῳ μέσσης καὶ τρίτας ἐπόγδοον· ἡ δὲ συλλαβὰ ἐπίτρυτον, τὸ δὲ δι' ὅξειαν ἡμιόλιον, τὸ διὰ πασάν δὲ διπλόν. οὕτως ἀρμονία πέντε ἐπίγδοα καὶ δύο διέσεις, δι' ὅξειαν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίσεις, συλλαβὰ δὲ δυ' ἐπόγδοα καὶ δίσεις

«Riguardo alla natura e all'armonia le cose stanno così: [...] la grandezza armonica comprende gli intervalli di quarta e di quinta; la quinta è maggiore della quarta di un tono. Infatti, dalla corda più alta (*hypate*) alla media (*mesè*) c'è una quarta; dalla media all'ultima corda (*nete*) c'è una quinta; dall'ultima alla terza (*trite*) c'è una quarta; dalla terza alla più alta, c'è una quinta. L'intervallo tra la media e la terza è di un tono. La quarta corrisponde al rapporto epitrilo, la quinta al rapporto emiolio, l'ottava al rapporto del doppio. Così la scala armonica si compone di 5 toni e 2 semitoni minori, la quinta di 3 toni e 1 semitono minore, la quarta di 2 toni e 1 semitono minore»⁽¹⁾.

Filolao, dunque, intende gli intervalli come "differenze" o "somme" di altri intervalli; ciò è confermato anche dalla seguente testimonianza di Porfirio, *in Ptol. harm.* 1, p. 91 Düring (= DK 44 A 25):

ἀπὸ δὲ τοῦτου κινηθέντες τινὲς τῶν μετ' αὐτὸν [scil. Eratostene] διάστημα ἐκάλεσαν εἶνα ὑπεροχὴν, ὡς Ἀλιανὸς ὁ Πλατωνικός· καὶ Φιλόλαος δ' ἐπὶ πάντων τῶν διαστημάτων ταύτην εἴληφε τὴν προσηγορίαν

«Alcuni della scuola di Eratostene, partendo di qui, chiamarono l'intervallo 'eccedenza', come Eliano il Platonico. Filolao applicò tale denominazione a tutti gli intervalli».

Il termine greco ὑπεροχή, che in ambito pitagorico significa propriamente 'differenza (aritmica)' (cf. DK 46 A 4; DK 47 B 2; etc.), viene investito da Filolao anche del significato di 'intervallo', il quale invece è usualmente denominato διάστημα.

Il modo insoddisfacente di concepire gli intervalli come le differenze tra numeratore e denominatore delle frazioni che li esprimono deriva probabilmente a Filolao dal fatto che egli, come del resto tutti i Pitagorici antichi, aveva presente il modello delle corde musicali.

Abbiamo visto nella Nota precedente, analizzando una testimonianza relativa a Pitagora, che i numeri 12, 9, 8 e 6, con i quali venivano composti i rapporti numerici

(1) Per il significato dei nomi *hypate*, *nete* e *mesè*, cf. oltre, paragr. 5.

esprimenti gli intervalli principali (12:6 per l'ottava, etc.), sebbene vengano assunti per motivi di ordine geometrico-matematico (si veda il paragr. 2), si spiegano soltanto se supponiamo che essi, in sede di esperimenti musicali, corrispondano alla misura di lunghezze diverse. Le lunghezze, in quanto misure lineari, erano passibili di essere sottratte le une dalle altre. Dal momento che nelle indagini condotte dai Pitagorici i numeri vengono associati ai nomi delle corde in modo tale che non si può presumere altro se non che indichino lunghezze diverse, è molto probabile che l'essenza dell'intervallo fosse individuata da Filolao nella distanza lineare che costituisce la differenza di lunghezza tra le due corde interessate, o — che è lo stesso — l'eccezione ($\delta\pi\epsilon\rho\sigma\chi\eta$) della corda più lunga rispetto a quella più corta⁽¹⁴⁾.

L'inadeguatezza di questo ragionamento consiste principalmente nel fatto che ciò che è determinante per la produzione delle consonanze non è la misura della lunghezza delle corde che le generano, bensì il rapporto che viene istituito tra le corde stesse (2:1 per l'ottava, 4:3 per la quarta, etc.); tale rapporto è ciò che deve rimanere costante a prescindere dalla lunghezza delle corde, che può anche variare. La confusione di questi due fattori — lunghezza delle corde e rapporti numerici —, unita a considerazioni sui numeri di tipo simbolico e mistico, è la causa principale degli errori matematici presenti nelle testimonianze relative a Filolao.

Tuttavia, se Filolao è l'unico Pitagorico al quale le fonti attribuiscono l'idea che gli intervalli armonici possano essere rappresentati da un unico numero, ottenuto mediante i procedimenti matematicamente inaccettabili che abbiamo illustrato, la concezione degli intervalli come somme o differenze non è certo presente soltanto in Filolao, bensì in tutta la scuola pitagorica, nella quale usualmente si intende l'ottava come risultato della somma degli intervalli di quarta e di quinta, il tono come differenza tra la quinta e la quarta, etc.

Ciò dipende ancora una volta dal fatto che in tutti i Pitagorici agisce il modello degli strumenti a corda. La lunghezza delle corde, infatti, è una quantità lineare, sulla quale si opera aritmeticamente mediante somme e sottrazioni. Lo stesso termine che usualmente indica l'intervallo, cioè $\delta\iota\sigma\tau\eta\mu\alpha$, il cui significato è propriamente "distanza" in senso lineare, è una conferma di questo modo di vedere. A rafforzare questo modo di intendere deve aver contribuito anche un altro genere di considerazioni, che compaiono anche nel frammento di Filolao DK 44 B 6: dato il tono come unità di misura, l'intervallo di quarta comprende due toni e un semitono minore, l'intervallo di quinta comprende tre toni e un semitono minore, e l'intervallo di ottava cinque toni e due semitoni minori; pertanto, la relazione intercorrente tra la quarta e la quinta da un lato, e l'ottava dall'altro, viene intesa come un rapporto additivo di tipo aritmetico, cioè quarta + quinta = ottava, poiché 2 toni e 1 semitono minore + 3 toni e 1 semitono minore = 5 toni e 2 semitoni minori; analogamente, il tono è inteso come differenza aritmetica tra gli

intervalli di quinta e di quarta, poiché 3 toni e 1 semitono minore — 2 toni e 1 semitono minore = 1 tono.

Ma le consonanze, invece, derivano dalla composizione di suoni di altezza differente, le cui frequenze rispettive, quindi, si compongono in maniera geometrica, mediante divisioni e moltiplicazioni. I Pitagorici ovviamente non conoscono il concetto di frequenza, né quello di armoniche di un suono fondamentale: solo a partire da Archita — come vedremo in altra sede — si comincerà ad immettere nella prospettiva teorica l'aspetto numerico delle oscillazioni compiute dalle corde musicali sollecitate, in quanto si scopre il nesso tra numero delle oscillazioni e altezza del suono. Ad ogni modo, questo continuo trapasso dal piano geometrico a quello aritmetico non stupisce affatto nei Pitagorici, dato lo stretto legame per essi esistente tra le due discipline, tra i numeri e le figure geometriche, tra le medie proporzionali e i solidi, etc.

Ciò che però è importante notare, è il fatto che i Pitagorici giungono comunque a determinare esattamente i rapporti numerici esprimenti gli intervalli principali, mediante la semplificazione delle relazioni numeriche ottenute a partire dai numeri che indicano le lunghezze delle corde; come abbiamo ricordato sopra (paragr. 1), nella testimonianza relativa a Pitagora dai rapporti formati con i numeri 12, 9, 8 e 6 — che rappresentano lunghezze di corde — si ottengono mediante semplificazione i consueti rapporti numerici 2:1, 4:3, 3:2 e 9:8.

Un'ultima osservazione da fare riguardo alla presunta "confusione" che i Pitagorici avrebbero operato tra il piano aritmetico (somme e sottrazioni) e quello geometrico (moltiplicazioni e divisioni) è che in realtà esiste un rapporto preciso tra questi due ordini di operazioni, ed è il logaritmo. Certo i Pitagorici non potevano conoscere i logaritmi neperiani, però è interessante notare che secondo la terminologia matematica moderna — come osserva il BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft*, 1962, p. 248 — «[...] entsprechen die Intervalle als Strecken den Logarithmen der zugehörigen Zahlenverhältnisse». Infatti, i logaritmi soddisfano le seguenti relazioni fondamentali:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x.$$

In base a tali proprietà, l'uso dei logaritmi consente di ridurre prodotti, quozienti ed elevazioni a potenza ad operazioni di somma, differenza e prodotto.

Se si considerano due progressioni numeriche, una geometrica crescente di ragione a (cioè $a, a^2, a^3, a^4, \dots$) e una aritmetica, crescente di ragione r (cioè $r, 2r, 3r, 4r, \dots$), i termini della progressione aritmetica sono i logaritmi in base a dei corrispondenti termini della progressione geometrica. Pertanto, il logaritmo di x in base a si indica nel modo seguente: $\log_a x = y$; il valore di y si ottiene con la seguente equazione esponenziale: $x = a^y$.

Per passare al rapporto che esprime l'ottava, ossia 2:1, se moltiplichiamo per 2 tale rapporto avremo una serie del tipo: 2:1, 4:2, 8:4, 16:8, 32:16, etc. Dal momento

(14) A proposito del termine $\delta\pi\epsilon\rho\sigma\chi\eta$, cf. TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 181, nota al testo; RUFFINO ELER-ZAMBER, *Die Musik des Altertums*, 1989, p. 184 e p. 291.

che per i Pitagorici tali numeri rappresentano lunghezze, sottraendo in ogni rapporto la lunghezza minore da quella maggiore otteniamo la serie seguente: 1, 2, 4, 8, 16, etc. Questa serie costituisce una progressione geometrica (ovvero una successione di numeri tali che il rapporto tra un termine qualsiasi e il suo antecedente risulta costante).

Tale serie geometrica corrisponde alla serie aritmetica 0, 1, 2, 3, 4, etc., i cui termini rappresentano le potenze alle quali deve essere elevata la base 2 per ottenere i termini della serie geometrica precedente. Infatti, $\log_2 1 = 0$; $\log_2 2 = 1$; $\log_2 4 = 2$; $\log_2 8 = 3$; $\log_2 16 = 4$; etc.

Premesso ciò, l'affermazione pitagorica secondo la quale l'ottava (2:1) corrisponde alla somma di quinta (3:2) e quarta (4:3), può essere rivisitata in senso logaritmico mediante la formula seguente: $\log_2 (2:1) = \log_2 (3:2) + \log_2 (4:3)$. Questa formula di uguaglianza si risolve applicando al logaritmo di ogni rapporto la relazione sopra citata, ossia: $\log_2 (x:y) = \log_2 x - \log_2 y$. Ciò significa appunto che gli intervalli intesi come lunghezze sono i logaritmi dei corrispondenti rapporti numerici.

La soluzione di $\log_2 (2:1) = \log_2 (3:2) + \log_2 (4:3)$ è dunque:

$$\log_2 2 - \log_2 1 = \log_2 3 - \log_2 2 + \log_2 4 - \log_2 3$$

$$1 - 0 = -1 + 2$$

$$1 = 1$$

§ 5. *Suddivisione del tetracordo e dell'ottocordo secondo il genere diatonico*

Se riprendiamo il frammento di Filolao sopra citato (DK 44 B 6) e il passo di Boezio, *inst. mus.* III 5, si può tracciare il seguente schema⁽¹⁵⁾:

<i>hypate</i>	Mi 256	{	256	...	{	4
<i>parhypate</i>	Fa 243		243			
			9			
			8			
<i>lichanos</i>	Sol 216					3
			9			
			8			
<i>mese</i>	La 192		...			

(15) Questo schema della divisione dell'intervallo di quarta, così come il successivo, rappresenta la divisione dell'ottava, è tratto con alcune modifiche da FRANK, *Plato and the Pythagoreans*, 1923, p. 265.

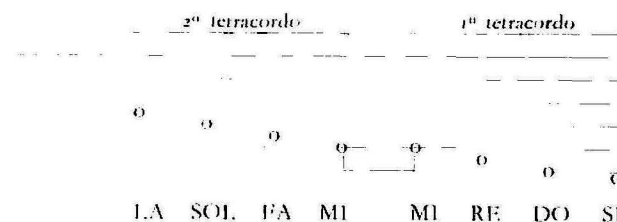
Per quanto riguarda, invece, la suddivisione dell'ottava, argomento centrale del frammento filolaico DK 44 B 6, si possono sintetizzare i dati offerti dal frammento per mezzo dello schema seguente:

<i>hypate</i>	Mi 256	{		{	2
			4		
			3		
<i>mese</i>	La 192	{		{	1
			9		
			8		
<i>paramese</i>	Si	{		{	2
(= <i>trite</i> per Filolao)					
			4		
			3		
<i>nete</i>	Mi 128	{			

Il primo schema rappresenta il sistema del tetracordo diatonico, composto da due roni interi (9:8) e da un semitono minore (256:243), i quali insieme formano l'estensione di un intervallo di quarta giusta.

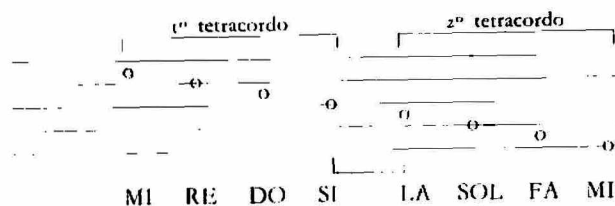
Il tetracordo costituisce la scala più piccola del sistema musicale greco. Delle quattro note di cui esso è composto, le due estreme (*hypate* e *mese*) sono dette "fisse", in quanto non mutano nei vari generi (diatonico, enarmonico e cromatico; cf. oltre, paragr. 6), mentre le due intermedie sono dette "mobili", poiché variano nel passaggio da un genere all'altro.

Nel secondo schema, invece, è rappresentata la suddivisione dell'intervallo di ottava, formato dall'unione di due tetracordi. Tale congiunzione poteva avvenire in due modi diversi: nel primo modo, detto *synaphe*, i due tetracordi venivano uniti mediante una nota in comune e, quindi, con l'esclusione di un suono; il sistema ottenuto era del tipo seguente:



Nel secondo modo, detto *diagenesis*, i due tetracordi venivano congiunti, invece,

mantenendo tra loro l'intervallo di un tono intero; il sistema ottenuto era del tipo seguente:



Nel primo caso, il tetracordo aggiunto era detto *synemmenon*; nel secondo caso, *diezeugmenon*. Nel frammento B 6 di Filolao è evidente che si fa riferimento al secondo tipo di congiunzione dei tetracordi.

I nomi delle note o corde (il termine *χορδή* 'corda' nel lessico musicale greco è sinonimo di 'nota, suono'; cf. Platone, *Filebo* 56a) si spiegano, secondo il Gevaert, in relazione alla posizione che veniva ad assumere lo strumento rispetto al suonatore: «L'exécutant tenait l'instrument sur le genou ou entre ses bras, les cordes les plus graves tournées vers le dehors, selon l'usage des violinistes et des harpistes modernes. Une semblable position explique d'une façon plausible la dénomination de *suprême* ou *supérieure* (*hypate*), donnée à la corde la plus grave, et, par contre-coup, celle d'*infime*, dernière (*nète*) dont on qualifiait la plus aiguë»⁽¹⁶⁾.

Una diversa interpretazione del significato dei nomi delle note è stata offerta recentemente da Zaminer, il quale rifiuta l'ipotesi del Gevaert — basata sulla posizione dello strumento rispetto all'esecutore — e propone di intendere i termini *hypate* e *nète* in relazione alla concezione cosmologica pitagorica circa l'"armonia delle sfere" (cf. Aristotele, *de caelo* 290^b12 = DK 58 B 36): «Man hat sich immer darüber gewundert, dass 'Hypate' zwar 'höchste' heisst, aber den tiefsten Ton des (Stamm-)Systems bezeichnet, und umgekehrt dass 'Nete' eigentlich 'unterste' bedeutet, aber den höchsten Ton meint. Schliessen die Benennungen doch die Vorstellung einer räumlich-vertikalen Ordnung in sich, derzufolge das gesamte Tonsystem gleichsam auf dem Kopf steht. Dass die Griechen so nicht empfunden haben, unterliegt heute keinem Zweifel. Vergleichbare sprachliche Bestätigungen sind nicht zu finden. [...] Es bleibt als Folgerung, dass wir es auch hier mit kosmologischen Benennungen von Pythagoras zu tun haben, die auf das harmonische Planetensystem gemünzt waren. Der 'höchste' Planet (Saturn) ist am weitesten von der Erde entfernt und entspricht daher dem längsten Abschnitt auf der senkrecht ausgespannten Saite, d.h. eben dem tiefsten Ton. Und der 'unterste' Planet (Mond) entspricht dem kürzesten Saitenabschnitt, nämlich dem höchsten Ton»⁽¹⁷⁾.

(16) GEVAERT, *La musique de l'antiquité*, 1881, II, p. 253.

(17) RUTHMUELLER ZAMINER, *Die Musik des Altertums*, 1989, p. 185 sgg.; cf. anche ZAMINER, *Hypate, Mese und Nete*, 1984, p. 18 sgg.

Quanto al termine *mese* (μέσση in Filolao), esso alluderebbe alla posizione che la corda corrispondente a tale nota avrebbe avuto nell'antica lira eptacorda. Secondo la tradizione letteraria, infatti, la lira a sette corde sarebbe stata introdotta da Terpandro (ca. 725 a.C.; cf. Strabone, *Geogr.* 13, 2, 4 p. 618 e Aristotele, *problemata* XIX 32 e 44); in seguito questo strumento si sarebbe trasformato nella lira ottocorda mediante l'aggiunta di una corda, aggiunta che sarebbe stata effettuata da Pitagora (cf. Nicomaco, *harmon. enchir.* 6 = JAN, *Mus. Script. Graeci*, 1895, p. 244, 22: *Πυθαγόρας παρενέθηκεν ὀγδοὸν τινα φθόγγον* [...])⁽¹⁸⁾.

Riguardo alla successione cronologica di questi stadi evolutivi della lira è lecito nutrire dei dubbi, soprattutto per il fatto che i dati archeologici non la confermano minimamente: già nelle raffigurazioni vascolari di epoca geometrica la *phorminx*, strumento assai simile alla lira, è rappresentata con un numero variabile di corde, da un minimo di tre a un massimo di otto. Nella ceramica dell'VIII secolo, anteriormente all'epoca di Terpandro, si hanno già, inoltre, raffigurazioni di strumenti a sette corde⁽¹⁹⁾.

Se, in generale, il numero delle corde della lira nella pittura vascolare è prevalentemente il sette, ci sembra azzardata l'ipotesi avanzata da Maas-Snyder, secondo le quali la lira avrebbe avuto sempre e soltanto sette corde, dal tempo della guerra di Troia a quello di Alessandro Magno⁽²⁰⁾. Ci sembra più probabile ritenere che i Greci abbiano proceduto per tentativi successivi, aumentando e diminuendo il numero delle corde: ciò sarebbe più in linea con le testimonianze archeologiche.

Ciò che è certo, è che nella musica greca antica si conoscevano due tipi di scale con l'estensione di un'ottava, dei quali il primo era l'eptacordo, o scala di sette note, nella quale dunque era assente una nota, e il secondo era l'ottocordo, o scala di otto note. Il sistema dell'eptacordo corrisponde a due tetracordi uniti per *synaphe*, l'ottocordo a due tetracordi uniti per *dizeugsis*.

Sulla base del sistema dell'eptacordo è possibile spiegare il termine *τρίτη* usato da Filolao: esso indica, infatti, nell'eptacordo la terza nota della serie discendente dei suoni. Nell'ottocordo, invece, che è probabilmente il sistema più recente tra i due, la *trite* venne chiamata *paramese*, e venne ad occupare il quarto posto nella serie discendente dei suoni; cf. Nicomaco, *harmon. enchir.* 9 = JAN, *Mus. Script. Graeci*, 1895, p. 253, 6: *τρίτην νῦν καλεῖ τὴν ἐν τῇ ἐπταχορδῷ παραμέσσην*.

(18) Sui problemi relativi a quale fosse la nota aggiunta nell'ottocordo, cf. GEVAERT, *La musique de l'antiquité*, II, 1881, p. 253 sgg.; e BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft*, 1962, p. 369 sgg., con ulteriore bibliografia. Cf. anche DURING, *Studies in musical Terminology*, 1954, p. 191, e ZAMINER, *Hypate, Mese und Nete*, 1984, p. 18 sgg.

(19) Cf. PAQUETTE, *L'instrument de musique*, 1984, p. 86 sg., e p. 146.

(20) Cf. MAAS-SNYDER, *Stringed Instruments*, 1989, p. 203: «The number of strings of the lyre-type instruments, from Minoan lyres before the eleventh century B.C. down to the kithara, chelys-lyra, and barbitos of the fifth and fourth centuries B.C., probably remained constant. [...] in essence the seven-stringed lyre remained seven stringed from before the days of the Trojan War to the time of Alexander the Great and probably beyond».

Anche la terminologia vistosamente arcaicizzante presente nel frammento B 6 di Filolao e, in particolare, il termine τρίτη, hanno costituito una prova a favore della tesi degli studiosi che sostengono l'inautenticità dei frammenti di Filolao; cf. TANNERY, *Mém. Scient.* III, p. 240 e sgg.: «[...] il semble singulier qu'au temps de Philolaos l'heptacorde dorien fût encore en usage courant, et, si son écrit est supposé, il est à craindre que l'auteur n'ait trop archaïsé en substituant le terme *tritè* à celui de *paramèse*»; il FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, 1923, p. 274 sg., in opposizione al Boeckh (*Philolaos*, 1819, p. 70), il quale riguardo alla τρίτη = παραμέση di Filolao, osservava che si trattava di un punto «der so tief gelehrt ist, dass er keinem Liridichter von gewöhnlichem Schlage zugetraut werden kann», ribatte che si tratta invece di un luogo comune: «Denn dass die Oktave des Pythagoras und der Pythagoreer ein Heptachord war, das ist ein Gemeinplatz, der fast bei keinem populären Musikschriststeller der späteren Zeit fehlt [...]». Al contrario, il BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft*, 1962, p. 372, dopo un particolareggiato e dotto excursus sulla evoluzione del sistema musicale greco, conclude nel seguente modo: «Also hat, im Zusammenhang mit der sicher altertümlichen übrigen Terminologie, das Philolaosfragment B 6 als eines der ältesten Zeugnisse griechischer Musik zu gelten»; analogamente, la TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 209 sg., nota al testo, rivaluta la testimonianza di Filolao: «A parte la questione se l'heptacorde potesse ancora o no essere in uso, non è strana la permanenza di un termine antico [scil. τρίτη] accanto al neologismo. Del resto, si sa che la lira eptacorda, anche dopo l'istituzione dell'octocordo, rimase in uso nelle cerimonie religiose, e ne sono prova anche le numerose raffigurazioni vascolari».

§ 6. Archita e i tre generi di scale musicali

Con Archita di Taranto, filosofo contemporaneo di Platone e vissuto tra il V e il IV secolo a.C.⁽²¹⁾, le acquisizioni in campo musicale ed acustico si incrementano notevolmente. Archita, sulla base degli studi relativi alle medietà, distinse infatti altri due generi di scale musicali (l'enanarmonica e la cromatica), che si aggiungono a quella già in uso presso i Pitagorici, ovvero la scala diatonica. Inoltre, Archita perviene alla individuazione di due nuovi intervalli, la terza maggiore e la terza minore, i cui rapporti numerici sono rispettivamente 5:4 e 6:5.

La fonte principale per le innovazioni di Archita nel campo della teoria musicale è un brano di Tolomeo, *harmon.* I 13, p. 30 Düring (= DK 47 A 16), il cui testo è il seguente:

Ἀρχίτας δὲ ὁ Ταραντῖνος μάλιστα τῶν Πυθαγορείων ἐπιμεληθεὶς μουσικῆς περὶ τὰς μὲν τὸ κατὰ τὸν λόγον ἀκρόατον διασφίζειν οὐκ ἐν ταῖς συμφωνίαις μόνον ἀλλὰ

(21) Per i rapporti tra Archita e Platone e le rispettive dottrine musicali, cf. FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, 1923, p. 161-167. Ciò che Platone non condivide dell'approccio musicale di Archita, e dei Pitagorici in genere, è l'interesse per l'aspetto empirico e fenomenico della musica (cf. *Resp.* 530 d - 531 d). Platone nel *Timeo* (35 a sgg.) ha elaborato una scala musicale del tutto aprioristica, basata sullo studio dei numeri come espressioni per se stessi le consonanze. Nei passi dei dialoghi platonici in cui si polemizza con lo studio pitagorico dell'armonia musicale, Archita non viene espressamente nominato, ma alcuni riferimenti molto precisi, contenuti in tali passi, non lasciano dubbi sul fatto che spesso Platone intende proprio riferirsi ad Archita e alla sua cerchia. La principale fonte a proposito dei rapporti personali tra Archita e Platone è la famosa settima lettera di Platone (*Ep.* VII = DK 47 A 3).

καὶ ταῖς τῶν τετραχόρδων διαίρεσιν, ὥς οἰκείου τῇ φύσει τῶν ἐμμελῶν ὄντος τοῦ συμμέτρου τῶν ὑπεροχῶν [...] τρία μὲν τοῖνυν οὗτος ὑφίσταται γένη, τὸ τε ἐναρμόνιον καὶ τὸ χρωματικὸν καὶ τὸ διατονικόν· ἐκάστου δὲ αὐτῶν ποιεῖται τὴν διαίρεσιν οὕτως· τὸν μὲν γὰρ ἐπόμενον λόγον ἐπὶ τῶν τριῶν γενῶν τὸν αὐτὸν ὑφίσταται καὶ ἐπὶ 27 [$\frac{28}{27}$]. τὸν δὲ μέσον ἐπὶ μὲν τοῦ ἐναρμονίου ἐπὶ 35 [$\frac{36}{35}$], ἐπὶ δὲ τοῦ διατονικοῦ ἐπὶ 7 [$\frac{8}{7}$], ὥστε καὶ τὸν ἡγούμενον τοῦ μὲν ἐναρμονίου γένους συνάγεσθαι ἐπὶ 4 [$\frac{5}{4}$], τοῦ δὲ διατονικοῦ ἐπὶ 8 [$\frac{9}{8}$]. τὸν δὲ ἐν τῷ χρωματικῷ γένει δεύτερον ἀπὸ τοῦ ὀξυτάτου φθόγγου λαμβάνει διὰ τοῦ τὴν αὐτὴν θέσιν ἔχοντος ἐν τῷ διατονικῷ· φησὶ γὰρ λόγον ἔχειν τὸν ἐν τῷ χρωματικῷ δεύτερον ἀπὸ τοῦ ὀξυτάτου πρὸς τὸν ὅμοιον τὸν ἐν τῷ διατονικῷ τὸν τῶν 256 πρὸς τὰ 243. συνίσταται δὲ τὰ τοιαῦτα τετραχόρδα κατὰ τοὺς ἐκκειμένους λόγους ἐν πρώτοις ἀριθμοῖς τοῖτοις· ἐν γὰρ τοῖς μὲν ὀξυτάτους τῶν τετραχόρδων ὑποστησάμεθα, 1512, τοὺς δὲ βαρυτάτους κατὰ τὸν ἐπίτρίτον λόγον τῶν αὐτῶν, 2016, ταῦτα μὲν ποιήσει ἐπὶ 27 πρὸς τὰ 1944· καὶ τοσούτων ἔσονται πάλιν ἐν τοῖς τρισὶ γένεσιν οἱ δεύτεροι [scil. λόγοι] ἀπὸ τῶν βαρυτάτων· τῶν δ' ἀπὸ τοῦ ὀξυτάτου δευτέρων ὁ μὲν τοῦ ἐναρμονίου γένους ἔσται 1890. ταῦτα γὰρ πρὸς μὲν τὰ 1944 ποιῶν τὸν ἐπὶ 35 λόγον, πρὸς δὲ τὰ 1512 τὸν ἐπὶ 4· ὁ δὲ τοῦ διατονικοῦ γένους τῶν αὐτῶν ἔσται 1701· καὶ ταῦτα γὰρ πρὸς μὲν τὰ 1944 τὸν ἐπὶ 7 ποιῶν λόγον· πρὸς δὲ τὰ 1512 τὸν ἐπὶ 8· ὁ δὲ τοῦ χρωματικοῦ καὶ αὐτὸς ἔσται τῶν αὐτῶν 1792· ταῦτα γὰρ λόγον ἔχει πρὸς τὰ 1701, ὅν τὰ 256 πρὸς τὰ 243.

«Archita di Taranto, che più tra i Pitagorici si è occupato di musica, si propone di mantenere la continuità secondo un criterio di proporzionalità non solo nelle consonanze, ma anche nelle divisioni dei tetracordi, poiché riteneva che connaturata alla natura della musica fosse la commensurabilità degli intervalli [...]. Stabilisce pertanto tre generi, l'enanarmonico, il cromatico, il diatonico, e di ciascuno di essi fa la divisione in tal modo: in tutti e tre i generi suppone l'intervallo ultimo uguale nel rapporto epimorio 28:27; l'intervallo medio, nell'enanarmonico lo fa di 36:35, nel diatonico di 8:7, di conseguenza, l'intervallo iniziale, nel genere enarmonico è di 5:4, nel diatonico di 9:8. Nel genere cromatico poi, Archita forma il secondo suono a partire dal più acuto, mediante il suono che occupa la stessa posizione nel genere diatonico; dice infatti che il secondo suono nel genere cromatico, partendo dal più acuto, sta al suo corrispondente nel diatonico nel rapporto di 256:243. Compone pertanto tali tetracordi secondo i rapporti esistenti tra questi numeri primi: quindi, se rappresenteremo i suoni più acuti dei tetracordi con il numero 1512, ai più gravi, che stanno con quelli nel rapporto di 4:3, daremo il numero 2016; quest'ultimo numero, diviso per 28:27, darà il numero 1944. A sua volta tale numero rappresenterà in tutti e tre i generi il secondo suono a partire dal suono più grave. Quanto poi ai secondi suoni a partire dai più acuti, quello nel genere enarmonico sarà dato dal numero 1890, che con il numero 1944 sta nel rapporto di 36:35, e con il 1512 nel rapporto di 5:4; quello nel genere diatonico sarà il numero 1701, che con il 1944 è nel rapporto di 8:7, e con il 1512 nel rapporto di 9:8; infine, quello del genere cromatico sarà dato da 1792, che sta a 1701 come 256 sta a 243». Ecco la tabella di questi numeri, secondo un modo vulgato di rappresentarli:

	ἐναρμόνιον	χρωματικόν	διατονικόν
[la]	1512	1512	1512
	$\left. \begin{array}{l} 5 \\ 4 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 32 \\ 27 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 9 \\ 8 \end{array} \right\}$
[sol]	1890	1792	1701
	$\left. \begin{array}{l} 36 \\ 35 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 243 \\ 224 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 8 \\ 7 \end{array} \right\}$
[fa]	1944	1344	1944
	$\left. \begin{array}{l} 28 \\ 27 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 28 \\ 27 \end{array} \right\}$	$\left. \begin{array}{l} 28 \\ 27 \end{array} \right\}$
[mi]	2016	2016	2016
	$\frac{5}{4} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$	$\frac{32}{27} \cdot \frac{243}{224} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$	$\frac{9}{8} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{28}{27} = \frac{4}{3}$

La tabella di Tolomeo appena riportata rappresenta un tetracordo singolo, quello già considerato nel frammento di Filolao concernente la suddivisione del tono, e che più tardi verrà denominato *meson*; esso ha l'estensione di un intervallo di quarta. Dal confronto tra questa tabella e quella da noi offerta precedentemente per Filolao, si può notare che già per quanto riguarda la scala diatonica la suddivisione di Archita differisce da quella filolaica:

	FILOLAO A 26 (= <i>Timeo</i> 36 a-b)	ARCHITA A 16
<i>mesē</i>	La	> 9:8
<i>lichanos</i>	Sol	> 9:8
<i>parhypatē</i>	Fa	> 8:7
<i>hypatē</i>	Mi	> 28:27

Sempre nell'ambito del genere diatonico, esistono infatti differenti tipi di suddivisione, come ci riferisce Tolomeo, *harmon.* 16, p. 36 sgg. Düring. Il tipo che compare in Filolao e nel *Timeo* [(9:8) · (9:8) · (256:243) = 4:3] è chiamato *diatonon ditonaion*; quello che compare nel passo relativo ad Archita [(9:8) · (8:7) · (28:27) = 4:3] è denominato, invece, *diatonon tonaion*. La differenza principale di quest'ultimo tipo rispetto al primo consiste nel fatto che in esso compaiono due diversi generi di tono intero, espressi rispettivamente dai rapporti numerici 9:8 e 8:7, dei quali il primo è il già noto rapporto epogdoe che designa il tono maggiore, mentre il secondo rappresenta un nuovo intervallo, introdotto da Archita stesso, e che verrà successivamente individuato come "tono massimo".

Se torniamo ad esaminare lo schema relativo ai tre generi teorizzati da Archita, vale a dire l'enaarmonico, il cromatico e il diatonico, si può notare che i numeri interi 1512, 1944 e 2016, esprimenti come di consueto le lunghezze delle corde e corrispondenti rispettivamente alle note La, Fa e Mi, rimangono sempre costanti nei

tre generi, mentre l'unico numero che varia è quello associato alla nota Sol. Al variare di questo valore numerico mutano conseguentemente i rapporti tra il Sol e il La iniziale da un lato, e quelli tra il Sol e il Fa dall'altro, mentre rimane costante il rapporto 28:27 tra il Mi e il Fa.

Pertanto i tre generi, per ciascuno dei quali il prodotto degli intervalli deve sempre essere pari a un intervallo di quarta e, quindi, deve sempre comprendere due toni e un semitono, vengono caratterizzati secondo Archita dalle seguenti ripartizioni⁽²²⁾:

a) diatonico: tono (maggiore), tono (massimo), semitono;

ovvero: La — Sol — Fa — Mi
 1 1 1/2

b) cromatico: un tono e mezzo, semitono, semitono;

ovvero: La — Fa_# — Fa — Mi
 1 e 1/2 1/2 1/2

c) enarmonico: doppio tono, quarto di tono, quarto di tono;

ovvero: La — Fa (= Sol *bb*) — Mi⁺ — Mi
 2 1/4 1/4

Per quanto riguarda i rapporti numerici stabiliti da Archita per i tre generi, occorre affrontare la questione relativa a quale sia stato il metodo adottato per individuarli. Ciò è tanto più interessante in quanto tale metodo ha condotto Archita a riconoscere nuovi intervalli, primo fra tutti quello di terza maggiore, espresso dal rapporto numerico 5:4 e corrispondente al primo intervallo a partire dalla nota più acuta nel genere enarmonico, intervallo che non era stato riconosciuto come tale dai Pitagorici precedenti, e che in seguito verrà escluso anche dalla dottrina musicale esposta nel *Timeo* platonico (36 a-b)⁽²³⁾.

(22) Poi senza impiegare il pentagramma, per comodità espositiva utilizziamo i seguenti simboli convenzionali: ♯ = diesis; ♭ = doppio bemolle; + = nota incrementata di un quarto di tono. I numeri sottostanti le note indicano: 1 = un tono intero; 1/2 = mezzo tono; 1 e 1/2 = un tono e mezzo; 1/4 = un quarto di tono; 2 = due toni. Benché sia noto, ricordiamo che nella scala musicale consueta Do Re Mi Fa Sol La Si Do, le note sono separate dall'intervallo di un tono, tranne che nel caso di Mi ... Fa e di Si ... Do, in cui l'intervallo è soltanto di mezzo tono. Si ricorda, inoltre, che il bemolle corrisponde alla diminuzione di mezzo tono, contrariamente al diesis, che rappresenta l'incremento di mezzo tono.

(23) Cf. DK 47 A 16. Cf. TANNERY, *Mémoires Scientifiques*, 1889-1913, III, p. 105 sgg. e p. 110; FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, 1923, p. 173; TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 317 sgg., nota al testo. L'intervallo di terza non era stato riconosciuto dai Pitagorici precedenti, e sarà escluso in seguito anche dalla dottrina musicale esposta nel *Timeo* platonico, in quanto tale intervallo era considerato dissonante; cf. GRAF, *Akustik im griech. Altertum*, 1894, p. 8 sgg., il quale però a torto nega che Archita abbia potuto determinare gli intervalli di terza maggiore e di terza minore, basandosi soltanto sul fatto che tali intervalli sono assenti nella scala platonica esposta nel *Timeo*. Questo non è l'unico caso in cui la dottrina di Archita viene considerata in relazione a quella platonica: anche per quanto riguarda la confusione tra la velocità di propagazione e la velocità di vibrazione — come

La spiegazione più convincente è quella proposta dal TANNERY, *Mémoires Scientifiques*, III, p. 68 e sgg., che viene accolta tra gli altri anche da VAN DER WAERDEN, *Harmonielehre*, 1943, p. 184 sgg. e da TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici*, 1962, II, p. 317 sgg. Secondo il Tannery è da supporre che al di sotto dell'ultima nota del tetracordo ne fosse aggiunta un'altra, la nota Re, che con il Mi forma l'intervallo di un tono maggiore, e con il La iniziale l'intervallo di una quinta; tale nota Re era prodotta dalla corda detta *hyperhypate*. Archita, dunque, avrebbe fissato per primo l'intervallo 28:27, che rimane costante nei tre generi, a partire dal genere diatonico, dopo aver stabilito tra il La e il Sol l'usuale rapporto epogdoo (9:8) del tono maggiore; in seguito, avrebbe suddiviso la quarta Re... Sol secondo la formula $4:3 = (7:6) \cdot (8:7)$, ottenendo i due nuovi intervalli del tono massimo (8:7) e della terza minima (7:6). Il rapporto 8:7 costituisce infatti l'intervallo medio, nel genere diatonico, tra la *lichanos* e la *parhypate*, cioè tra le note Sol e Fa. La differenza tra la terza minima Re... Fa (7:6) e il tono inferiore aggiunto Re... Mi costituisce l'intervallo di base tra la *parhypate* e la *hypate*, ovvero tra le note Fa e Mi, in quanto $(7:6) : (9:8) = 28:27$.

Dati i due intervalli 28:27 e 8:7, nonché i numeri corrispondenti alle lunghezze delle due corde fisse, vale a dire 1512 per il La e 2016 per il Mi, potevano a questo punto essere ricavati i numeri esprimenti la lunghezza delle due corde mobili, applicando successivamente una proporzione aritmetica del tipo $a:b = x:c$, dove a è la lunghezza di una corda, b e c i due termini del rapporto numerico; quindi, sempre per quanto riguarda il genere diatonico, dato 1512 come lunghezza del La, x come lunghezza del Sol e 9:8 come rapporto tra il La e il Sol, si otterrà il valore di x nel modo seguente:

$$1512 : 8 = x : 9 \\ x = 1701.$$

Analogamente, dopo aver attribuito il numero 1701 alla *lichanos*, si otterrà il valore numerico della *parhypate*, ovvero del Fa, sulla base del loro rapporto reciproco di 8:7, nel modo seguente:

$$1701 : 7 = x : 8 \\ x = 1944.$$

Tale procedimento è applicato anche ai restanti due generi, cromatico ed enarmonico.

Per quanto riguarda il genere cromatico, infatti, Tannery ipotizza che Archita abbia fissato la seconda nota, ovvero quella prodotta dalla *lichanos*, togliendo un tono dalla quarta Re... La, nel modo seguente:

$$(4:3) : (9:8) = 32 : 27$$

vedremo altrove – il fatto che essa fosse presente nella dottrina platonica ha indotto molti studiosi a ritenere che pure Archita, in quanto ispiratore di Platone in campo acustico-musicale, confondesse le due velocità.

In tal modo Archita avrebbe ottenuto non proprio il Sol, ma il Fa diesis; tuttavia, secondo la spiegazione data da Tolomeo, il procedimento impiegato da Archita per fissare la *lichanos*, ovvero la prima corda mobile, sarebbe consistito nello stabilire prima l'intervallo medio 243:224 tra la *lichanos* e la *parhypate* in funzione dell'intervallo corrispondente nel genere diatonico, vale a dire 8:7, in modo che il primo intervallo si trovasse con quest'ultimo nel rapporto di un semitono minore (cioè 256:243); quindi, $(8:7) : (256:243) = 243 : 224$. Secondo la testimonianza di Tolomeo, Archita in seguito avrebbe sottratto dalla quarta Mi... La i due intervalli medio ed inferiore, ovvero 243:224 e 28:27, ottenendo così l'intervallo più alto, cioè 32:27, secondo l'operazione seguente:

$$(4:3) : [(243:224) \cdot (28:27)] = 32 : 27$$

Dati gli intervalli 32:27 tra *tese* e *lichanos* e 243:224 tra *lichanos* e *parhypate*, mediante l'applicazione delle proporzioni aritmetiche sopra menzionate, si otterranno quindi i valori delle lunghezze delle corde, cioè 1792 per la *lichanos* e 1944 per la *parhypate*.

Per quanto riguarda il genere enarmonico, il Tannery ritiene che l'intervallo di 5:4 (terza maggiore) sia stato ricavato da Archita mediante la divisione della quinta Re... La, ovvero il tetracordo più la nota Re aggiunta, nei due intervalli di terza maggiore e minore, secondo la formula $3:2 = (5:4) \cdot (6:5)$; in tal modo Archita sarebbe giunto anche alla individuazione di due nuovi intervalli. Di questi, quello di terza maggiore (5:4) sarebbe stato assunto come intervallo tra la *tese* e la *lichanos* e, di conseguenza, secondo la proporzione $1512 : 4 = x : 5$, si sarebbe fissata la lunghezza 1890 per la prima corda mobile. Il secondo intervallo del genere enarmonico, tra la *lichanos* e la *parhypate*, ovvero 36:35, sarebbe stato ricavato sottraendo dalla quarta La... Mi i due intervalli 5:4 e 28:27, secondo la formula seguente:

$$x = (4:3) : [(5:4) \cdot (28:27)] \\ x = 36:35.$$

Riepilogo conclusivo

A conclusione di questa Nota, riassumiamo brevemente i risultati salienti dell'indagine fin qui condotta.

La "perfezione" della consonanza di ottava – in quanto capace di ingenerare una sensazione uditiva vicina a quella dell'unisono – è motivata per i Pitagorici dalla perfezione intrinseca che essi attribuiscono tanto al rapporto numerico che rappresenta tale consonanza, quanto ai numeri stessi che entrano in tale rapporto (cioè 2:1).

La determinazione numerica degli intervalli principali si sviluppa parallelamente allo studio delle medie proporzionali; tale studio rende ragione del perché siano stati prescelti determinati numeri per costituire i rapporti intervallari. In altri

termini, i Pitagorici stabiliscono corrispondenze tra il piano della geometria, il piano dell'aritmetica, e il piano della teoria musicale: i numeri assunti nei rapporti esprimenti gli intervalli principali sono — nelle fonti pitagoriche — o i numeri 12, 9, 8 e 6, cioè i numeri che descrivono le quantità degli elementi costitutivi di alcune figure geometriche solide, oppure i numeri 1, 2, 3 e 4, cioè i numeri che compongono la *tetraktys*. I rapporti impostabili sulla prima serie numerica sono riconducibili a quelli impostabili sulla seconda serie, per semplificazione.

Emerge così chiaramente come per i Pitagorici i numeri rappresentino il *trait d'union* che congiunge tutti gli aspetti del reale — musica compresa — attraverso un'unica *ratio*.

Sulla base dei ragionamenti matematici appena ricordati, e tenuto conto dell'esclusione dogmatica da parte della scuola pitagorica dei numeri irrazionali, Filolao si inserisce negli studi musicali che mirano a quantificare intervalli più piccoli del tono; tali intervalli venivano già utilizzati empiricamente nella prassi musicale, ma non erano divisibili in due parti uguali se non incorrendo appunto nei numeri irrazionali, che Filolao comunque evita, adottando procedimenti di calcolo che si rivelano però inadeguati.

La grande importanza che i presupposti teorico-matematici dei Pitagorici hanno avuto nella cultura musicale greca è ravvisabile ancora in fonti tarde (Boczio), nelle quali i procedimenti matematici di stampo pitagorico sono descritti minuziosamente, anche se spesso in modo oscuro e con fraintendimenti.

La teoria musicale pitagorica si è evoluta nel tempo, giungendo alla suddivisione dell'ottava non più soltanto secondo il genere diatonico, ma anche secondo i generi enarmonico e cromatico; con ciò è pervenuta a definire la *ratio* matematica dei tre generi, già utilizzati da tempo nella prassi musicale greca. Conseguenza di tale operazione è stata l'individuazione e la quantificazione di nuovi intervalli.

Il metodo matematico pitagorico, largamente impiegato per analizzare in prima istanza le relazioni tra i suoni musicali, ha posto i primi fondamenti per gli studi ulteriori condotti dall'antichità ad oggi sulle caratteristiche sia percettive sia fisico-acustiche sia obiettive del suono in generale e quindi, in particolare, anche degli aspetti sonori del linguaggio umano.

BIBLIOGRAFIA

- O. BECKER, *Frühgriechische Mathematik und Musiklehre*, «Archiv für Musikwissenschaft» 14 (1957), pp. 156-164.
- A. BECKH, *Philolaos des Pythagoreers Lehren nebst den Bruchstücken seines Werkes*, Berlin 1819.
- W. BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft: Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*, Nürnberg 1962.
- H. DIELS - W. KRANZ, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, Hildesheim 1985⁶, 3 voll.
- I. DURING, *Ptolemaios und Porphyrios über die Musik*, Göteborgs Högskolas Årsskrift, 40, 1934.
- I. DURING, *Studien in musical Terminology in 5th Century Literature*, «Eranos» 43 (1945), pp. 176-197.
- E. FRANK, *Plato und die sogenannten Pythagoreer*, Halle 1923.
- K. VON FRITZ, *Der Ursprung der Wissenschaft bei den Griechen*, Berlin-New York 1971; trad. it. Bologna 1988.
- F.A. GEVAERT, *Histoire et théorie de la musique de l'antiquité*, Gand 1875-1881, 2 voll.
- E. GRAE, *Die Theorie der Akustik im griechischen Altertum*, Programm Gumbinnen 1894.
- K. VON JAN, *Musici Scriptores Graeci*, Lipsiae 1895; rist. Hildesheim 1962 (trad. it. L. ZANONCELLI, *La manualistica musicale greca*, Milano 1990).
- J. LOHMANN, *Die griechische Musik als mathematische Form*, «Archiv für Musikwissenschaft» 14 (1957), pp. 147-153.
- M. MAAS - J. M. INTONIS SNYDER, *Stringed Instruments of Ancient Greece*, New Haven and London 1989.
- M. MEIBOM, *Antiquae musicae auctores septem*, Amstelodami 1652.
- D. PAQUETTE, *L'instrument de musique dans la céramique de la Grèce antique*, Paris 1984.
- A. RICHSMÜLLER - F. ZAMMER, *Die Musik des Altertums*, in *Neues Handbuch der Musikwissenschaft*, Band I, Laaber 1989.
- P. RIGHINI, *La musica greca*, Padova 1976.
- A. SZABO, *Anfänge der griechischen Mathematik*, München 1969.
- P. TANNERY, *Mémoires scientifiques*, Toulouse-Paris 1912-1929, 3 voll.
- M. TIMPANARO CARDINI, *Pitagorici. Testimonianze e frammenti*, Firenze 1958-1964, 3 voll.
- B.L. VAN DER WAURDEN, *Die Harmonielehre der Pythagoreer*, «Hermes» 78 (1943), pp. 163-199.
- F. ZAMMER, *Hypate, Mese und Nete im frühgriechischen Denken*, «Archiv für Musikwissenschaft» 41 (1984), pp. 1-26.
- E. ZIEGLER - R. MONDOLFO, *La filosofia dei Greci nel suo sviluppo storico*, ed. it., vol. I 2, Firenze 1964¹.