

Die Tetraeder, deren Seitenflächen eine dem
Lehrsatz des Pythagoras entsprechend...

Buschmann, Fritz

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Volume 43 / 1934 / Article



Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digiZeitschriften@sub.uni-goettingen.de

51154
BUSCHMANN, F.
1934

Die Tetraeder, deren Seitenflächen eine dem Lehrsatz des Pythagoras entsprechend...

Buschmann, Fritz

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

Volume 43 / 1934 / Article



Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de

z. B. $[\cos^3 \alpha \sin \delta]$ ist die Tangente in $(\operatorname{tg} \alpha)$

$\left[\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\delta}{2}\right]$ ist die Tangente in $\left(\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}\right)$

$\left[\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\delta}{2}\right]$ ist die Tangente in $\left(\cot \frac{\alpha}{2}\right)$.

(Eingegangen am 7. 2. 33.)

Die Tetraeder, deren Seitenflächen eine dem Lehrsatz des Pythagoras entsprechende Beziehung erfüllen.

Von FRITZ BUSCHMANN, Hannover.

1. Aufgabe.

In den über dem gegebenen echten Dreieck $P_1P_2P_3$ aufgebauten Tetraedern $P_1P_2P_3P$ sollen die Flächeninhalte der Seitenflächen P_2P_3P , P_3P_1P , P_1P_2P und $P_1P_2P_3$ bezeichnet werden mit F_1 , F_2 , F_3 und F . Wir wollen untersuchen, wo der Punkt P liegen muß, um die Beziehung

$$(1) \quad F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$$

zu erfüllen. Daß in Tetraedern, deren Kanten und Flächen bei P unter rechten Winkeln zusammentreffen, die Beziehung (1) erfüllt ist, ist bekannt. Diese rechtwinkligen Tetraeder müssen deshalb in der Gesamtheit der zu untersuchenden Tetraeder enthalten sein.

2. Die Steinersche Ellipse.

Die einem Dreieck umbeschriebene flächenkleinste Ellipse wird nach Steiner benannt. Sie hat ihren Mittelpunkt im Schwerpunkt des Dreiecks. In diese Ellipse lassen sich aber unendlich viel Dreiecke einbeschreiben, die mit dem Ausgangsdreieck den Schwerpunkt und den Flächeninhalt gemeinsam haben. Alle diese Dreiecke gehen durch orthogonale Affinität aus den einem Kreise einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecken hervor, dessen Durchmesser mit einer Ellipsenachse identisch ist. Wählen wir die Achsen der Ellipse als Koordinatenachsen, so genügen die Koordinaten der Eckpunkte aller dieser Dreiecke den Beziehungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$(2) \quad y_1 + y_2 + y_3 = 0$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0.$$

Wir können setzen

$$(3) \quad \begin{aligned} x_1 &= A \cos \varphi_1, & y_1 &= B \sin \varphi_1 \\ x_2 &= A \cos \varphi_2, & y_2 &= B \sin \varphi_2 \\ x_3 &= A \cos \varphi_3, & y_3 &= B \sin \varphi_3 \\ \varphi_1 &= \varphi, \varphi_2 = \varphi + 120^\circ, & \varphi_3 &= \varphi + 240^\circ \end{aligned}$$

und finden

$$(4) \quad \begin{aligned} A^2 &= \frac{2}{3}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ B^2 &= \frac{2}{3}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \end{aligned}$$

Sind die Koordinaten der Ecken des Dreiecks $P_1P_2P_3$ beliebig gegeben, so läßt sich durch Parallelverschiebung und Drehung stets erreichen, daß die Gleichungen (2) erfüllt sind. Die gefundenen Koordinatenachsen und die Gleichungen (4) bestimmen die Achsen der Steinerschen Ellipse, und aus (3) finden wir den Winkel φ , der das der Ellipse einbeschriebene Dreieck charakterisiert. Wenn wir wollen, können wir immer erreichen, daß $A^2 \geq B^2$ wird. Die Steinersche Ellipse hat die Gleichung

$$x = A \cos \varphi, y = B \sin \varphi$$

oder

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - 1 = 0.$$

3. Hilfsformeln.

Wir bestimmen zunächst einige Summen von Koordinatenprodukten. Dabei soll unter $\sum x_i^\lambda y_k^\mu$ die Summe aller Produkte von der Form $x_i^\lambda y_k^\mu$ verstanden werden, wo ik bei $i \neq k$ irgendeine Variation der Zahlen 1, 2 und 3 bedeutet und λ und μ bestimmte Zahlen sind. Der Fall $i = k$ wird mit $\sum x_i^\lambda y_i^\mu$ bezeichnet. Unter Berücksichtigung der Formeln

$$(5) \quad \begin{aligned} \sin \varphi_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \\ \sin \varphi_3 &= -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cos \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi \\ \cos \varphi_2 &= -\frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \varphi \\ \cos \varphi_3 &= -\frac{1}{2} \cos \varphi + \frac{1}{2}\sqrt{3} \sin \varphi \\ \sin 3\varphi &= 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi \\ \cos 3\varphi &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \end{aligned}$$

erhalten wir

$$(6) \quad \begin{aligned} \sum x_i &= \sum y_i = \sum x_i y_i = \sum x_i y_k = 0 \\ \sum x_i^2 &= -2 \sum x_i x_k = \frac{3}{2} A^2, \quad \sum y_i^2 = -2 \sum y_i y_k = \frac{3}{2} B^2 \\ \sum x_i^2 y_k &= \sum x_i x_k y_i = -\frac{3}{4} A^2 B \sin 3\varphi \\ \sum x_i y_k^2 &= \sum x_i y_i y_k = \frac{3}{4} A B^2 \cos 3\varphi \\ \sum x_i^2 y_k^2 &= \frac{15}{8} A^2 B^2, \quad \sum x_i x_k y_i y_k = -\frac{3}{16} A^2 B^2. \end{aligned}$$

Werden die Seiten eines Dreiecks mit a , b und c und der Flächeninhalt mit I bezeichnet, so ist

$$(7) \quad 16I^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4.$$

4. Berechnung von F^2 .

Das Dreieck $P_1P_2P_3$ mit dem Flächeninhalt F geht aus einem dem Kreise mit dem Radius A einbeschriebenen gleichseitigen Dreieck durch orthogonale Affinität hervor. Die Charakteristik der Affinität ist $\frac{B}{A}$. Der Flächeninhalt des einem Kreise mit dem Radius A einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist aber $\frac{3}{4}\sqrt{3}A^2$. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ hat demnach die Fläche $\frac{3}{4}\sqrt{3}AB$, d. h. es ist

$$(8) \quad F^2 = \frac{27}{16}A^2B^2.$$

5. Die Summe der F_i^2 .

Durch Hinzunahme der im Anfangspunkt des in Abschnitt 2 gewählten ebenen Koordinatensystems auf seiner Ebene errichteten Senkrechte erhalten wir ein senkrechtes räumliches Koordinatensystem. Die Tetraedereckpunkte haben dann die Koordinaten

$$P_1 \equiv (x_1, y_1, 0), P_2 \equiv (x_2, y_2, 0), P_3 \equiv (x_3, y_3, 0), P \equiv (x, y, z).$$

Zur Vereinfachung des Druckes soll nicht $(P_kP_l)^2$, $(PP_k)^2$ und F_i^2 , sondern $(P_2P_3)^2$, $(PP_2)^2$ und F_1^2 berechnet werden. Durch zyklische Vertauschung der Indizes 1, 2 und 3 findet man die übrigen Quadrate.

Nach (7) ist

$$16F_1^2 = 2(P_2P_3)^2 \cdot (PP_2)^2 + 2(P_2P_3)^2 \cdot (PP_3)^2 + 2(PP_2)^2 \cdot (PP_3)^2 - (P_2P_3)^4 - (PP_2)^4 - (PP_3)^4.$$

Setzen wir ein

$$\begin{aligned} (P_2P_3)^2 &= (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \\ &= (x_2^2 + y_2^2) + (x_3^2 + y_3^2) - 2(x_2x_3 + y_2y_3) \\ (PP_2)^2 &= (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + z^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x x_2 + y y_2) \text{ usw.}, \end{aligned}$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} 16F_1^2 &= 4(x^2 + y^2 + z^2)(x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 + y_2^2 + y_3^2 - 2y_2y_3) \\ &\quad - 4(x x_2 + y y_2)^2 - 4(x x_3 + y y_3)^2 + 8(x x_2 + y y_2)(x x_3 + y y_3) \\ &\quad - 8(x x_2 + y y_2)(x_3^2 + y_3^2) - 8(x x_3 + y y_3)(x_2^2 + y_2^2) \\ &\quad + 8(x x_2 + y y_2)(x_2x_3 + y_2y_3) + 8(x x_3 + y y_3)(x_2x_3 + y_2y_3) \\ &\quad - 4(x_2x_3 + y_2y_3)^2 + 4(x_2^2 + y_2^2)(x_3^2 + y_3^2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 4F_1^2 = & x^2(y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2) + y^2(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) \\
 & + z^2(x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2) \\
 & + 2xy(x_2y_3 + x_3y_2 - x_2y_2 - x_3y_3) \\
 & + 2x(x_2y_2y_3 + x_3y_2y_3 - x_2y_3^2 - x_3y_2^2) \\
 & + 2y(y_2x_2x_3 + y_3x_2x_3 - y_2x_3^2 - y_3x_2^2) + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_2^2 - 2x_2x_3y_2y_3.
 \end{aligned}$$

Durch Addition folgt

$$\begin{aligned}
 4 \sum F_i^2 = & 2x^2(\sum y_i^2 - \sum y_i y_k) + 2y^2(\sum x_i^2 - \sum x_i x_k) \\
 & + 2z^2(\sum x_i^2 + \sum y_i^2 - \sum x_i x_k - \sum y_i y_k) + 2xy(\sum x_i y_k - 2 \sum x_i y_i) \\
 & + 2x(\sum x_i y_i y_k - \sum x_i y_k^2) + 2y(\sum x_i x_k y_i - \sum x_i^2 y_k) \\
 & + \sum x_i^2 y_k^2 - 2 \sum x_i x_k y_i y_k
 \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung der Formeln (6)

$$\begin{aligned}
 4 \sum F_i^2 = & 2x^2\left(\frac{3}{2}B^2 + \frac{3}{4}B^2\right) + 2y^2\left(\frac{3}{2}A^2 + \frac{3}{4}A^2\right) + 2z^2\left(\frac{9}{4}A^2 + \frac{9}{4}B^2\right) \\
 & + \frac{15}{8}A^2B^2 + \frac{3}{8}A^2B^2.
 \end{aligned}$$

Es ergibt sich schließlich

$$(9) \quad \sum F_i^2 = \frac{9}{16} \{ 2B^2x^2 + 2A^2y^2 + 2(A^2 + B^2)z^2 + A^2B^2 \}.$$

6. Das Ellipsoid.

Soll nun die Beziehung (1) erfüllt sein, so müssen die Koordinaten des Punktes P nach (8) und (9) der Bedingung

$$\frac{27}{16}A^2B^2 = \frac{9}{16} \{ 2B^2x^2 + 2A^2y^2 + 2(A^2 + B^2)z^2 + A^2B^2 \}$$

oder $B^2x^2 + A^2y^2 + (A^2 + B^2)z^2 - A^2B^2 = 0$ genügen.

Diese Gleichung eines Ellipsoids können wir noch in der Form schreiben

$$(10) \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{\frac{A^2B^2}{A^2 + B^2}} - 1 = 0$$

und erkennen, daß zwei Hauptachsen des Ellipsoids mit den beiden Achsen der Steinerschen Ellipse in Größe und Lage übereinstimmen und daß die dritte Hauptachse des Ellipsoids eine einfache Funktion der Ellipsenachsen ist. Schreiben wir die Gleichung des Ellipsoids in der Form

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1 = 0,$$

so besteht die Beziehung

$$\frac{1}{C^2} = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2}.$$

Das Ellipsoid kann deshalb als gewöhnliches Trägheitsellipsoid des Ausgangsdreiecks $P_1P_2P_3$ angesehen werden. Der Schnitt mit der xy -Ebene ergibt die Steinersche Ellipse, das Ellipsoid enthält also die Punkte P_1 , P_2 und P_3 . Gleichung (10) enthält den das Ausgangsdreieck charakterisierenden Winkel φ nicht, d. h. das Ellipsoid gehört zu jedem in die Steinersche Ellipse einbeschriebenen flächengrößten Dreieck $P_1P_2P_3$.

Wir wollen das Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Über jedem echten Dreieck $P_1P_2P_3$ lassen sich ∞^2 Tetraeder mit dem vierten Punkt P aufbauen, die die Bedingung $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ erfüllen. Der Punkt P liegt dabei auf einem Ellipsoid, das folgende Achsen besitzt: 1. und 2. die Achsen A und B der Steinerschen Ellipse des Grunddreiecks und 3. die im Mittelpunkt der Ellipse auf ihrer Ebene nach beiden Seiten errichtete Senkrechte, deren Länge (d. h. die der Halbachse) geometrisch als die Höhe im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten A und B gedeutet werden kann.

Zusatz: Für die Ebene läßt sich folgender Satz als Sonderfall aussprechen: Der geometrische Ort für den Punkt P einer Ebene $P_1P_2P_3$, der mit je zweien dieser drei Punkte Dreiecke bildet, deren Flächeninhaltsquadratsumme mit dem Quadrat der Dreiecksfläche $P_1P_2P_3$ übereinstimmt, ist die Steinersche Ellipse des Dreiecks $P_1P_2P_3$.

7. Rechtwinklige Tetraeder.

In jedem Tetraeder $P_1P_2P_3P$, dessen Kanten bei P unter rechten Winkeln zusammenstoßen, liegt P senkrecht über dem Höhenschnittpunkt des Dreiecks $P_1P_2P_3$, das spitzwinklig sein muß. Wir wissen weiter aus Abschnitt 1, daß P auf dem Ellipsoid (10) liegen muß.

Im Dreieck $P_1P_2P_3$ hat die Höhe h_1 die Gleichung

$$h_1 \equiv (x_2 - x_3)x + (y_2 - y_3)y - x_1(x_2 - x_3) - y_1(y_2 - y_3) = 0.$$

Nehmen wir die durch zyklische Vertauschung sich ergebende Gleichung für h_2 oder h_3 hinzu und rechnen wir die Höhenschnittpunktkoordinaten x_H und y_H aus, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (3) und (5)

$$(11) \quad \begin{aligned} x_H &= \frac{B^2 - A^2}{2A} \cos 3\varphi \\ y_H &= \frac{B^2 - A^2}{2B} \sin 3\varphi. \end{aligned}$$

Der Punkt P des rechtwinkligen Tetraeders habe die Koordinaten ξ , η , ζ . Es ist $\xi = x_H$ und $\eta = y_H$. ζ folgt aus der Gleichung des Ellipsoids. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \xi &= \frac{B^2 - A^2}{2A} \cos 3\varphi \\
 (12) \quad \eta &= \frac{B^2 - A^2}{2B} \sin 3\varphi \\
 \zeta &= \pm \frac{1}{2AB} \sqrt{B^4(3A^2 - B^2) - (A^2 - B^2)^3 \sin^2 3\varphi}.
 \end{aligned}$$

Das doppelte Vorzeichen für ζ weist darauf hin, daß es zwei bei P rechtwinklige Tetraeder $P_1P_2P_3P$ über $P_1P_2P_3$ gibt, die symmetrisch zur $P_1P_2P_3$ -Ebene liegen.

Der Ausdruck ζ in (12) läßt folgende Überlegungen zu: Wir erhalten nur dann ein reelles rechtwinkliges Tetraeder, wenn $\zeta^2 > 0$, d. h. wenn

$$\begin{aligned}
 \sin^2 3\varphi &< \frac{B^4(3A^2 - B^2)}{(A^2 - B^2)^3} && \text{oder} \\
 (13) \quad \sin^2 3\varphi &< \frac{B^4(3A^2 - B^2)}{B^4(3A^2 - B^2) + A^4(A^2 - 3B^2)}.
 \end{aligned}$$

Bei $A^2 \geq B^2$ und $A^2 < 3B^2$ gehören zu allen Winkeln φ rechtwinklige Tetraeder und im Falle $A^2 \geq 3B^2$ nur zu den Winkeln φ , die (13) erfüllen.

Aus dem bisher Gesagten können wir ferner nebenbei folgern, daß bei $A^2 \geq B^2$ und $A^2 < 3B^2$ alle der Steinerschen Ellipse einbeschriebenen flächengrößten Dreiecke spitzwinklig und bei $A^2 \geq 3B^2$ nur die spitzwinklig sind, deren charakterisierender Winkel φ die Ungleichung (13) erfüllt. Die Dreiecke, die zu

$$(14) \quad \sin^2 3\varphi = \frac{B^4(3A^2 - B^2)}{(A^2 - B^2)^3}$$

gehören, sind rechtwinklig.

Für jeden Winkel φ , also für jedes der Steinerschen Ellipse einbeschriebene flächengrößte Dreieck $P_1P_2P_3$ gibt es ∞^2 Tetraeder $P_1P_2P_3P$, die $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ erfüllen, aber nur zwei — symmetrisch zur Ebene $P_1P_2P_3$ liegende — sind bei P rechtwinklig. Die Gesamtheit der Punkte P , die zu den rechtwinkligen Tetraedern aller Dreiecke $P_1P_2P_3$ gehören, ist eine Raumkurve 4. Ordnung, die durch den Schnitt des Ellipsoids (10) mit dem Zylinder

$$\frac{x^2}{\left(\frac{A^2 - B^2}{2A}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{A^2 - B^2}{2B}\right)^2} - 1 = 0$$

entsteht, dessen Gleichung aus (11) gefunden wird. Der Schnitt dieses Zylinders mit der xy -Ebene ist eine Ellipse, die der Steinerschen ähnlich ist, deren Achsen aber in ihrer Ebene um 90° gedreht sind.

(Eingegangen am 19. 10. 1932.)