

4724

GRIECH. M

Mathematik in Antike und Orient

1984

2. Griechische Mathematik

2.1 Quellen

Originale der Werke der griechischen Mathematiker – wie der griechischen Schriftsteller überhaupt – sind nicht erhalten, mit Ausnahme einiger Papyri aus der Zeit um 200 n. Chr., also etwa zur Zeit oder kurz vor Diophant. Sie sind allerdings besonders wichtig, weil sie uns Einblick in das damalige Rechnen geben, und weil in ihnen ein Zeichen für die Unbekannte vorkommt, das auch Diophant benutzt (s. S. 143).

Vollständige Abschriften der Werke gibt es in der Philosophie erst von Platon, in der Mathematik erst von Euklid an. Die ältesten noch vorhandenen Platon-Handschriften und die ältesten Euklid-Handschriften stammen aus dem 9. Jh. nach Chr.

Die Elemente von Euklid sind im 4. Jh. n. Chr. von Theon von Alexandria bearbeitet worden, so daß manchmal unklar war, was von Euklid selbst und was von Theon stammt. Jedoch ist im vorigen Jahrhundert eine Handschrift entdeckt worden, die auf eine vor-theonische Vorlage zurückgeht.

Die Werke von Archimedes, Apollonios, Heron, Nikomachos, Diophant und Pappos sind (natürlich in Abschriften) unvollständig erhalten, arabische Übersetzungen bieten wesentliche Ergänzungen. Die Werke der genannten Autoren sind verhältnismäßig leicht zugänglich, die meisten auch in deutscher Übersetzung, alle in französischer oder englischer Übersetzung.

Wie erfahren wir etwas über die Mathematik vor Euklid?

Platon und Aristoteles zitieren oft mathematische Definitionen und Sätze und deuten manchmal Beweismethoden an. Das läßt Schlüsse auf den Stand der Mathematik zu ihrer Zeit zu.

Solche Andeutungen wurden von den Kommentatoren manchmal näher erklärt. So finden sich mathematik-historische Bemerkungen z. B. bei Alexander von Aphrodisias (2.–3. Jh. n. Chr.), Simplicios (6. Jh. n. Chr.), Philoponos (6. Jh. n. Chr.) u. a. Eine Hauptquelle für ihre Kenntnisse ist eine Geschichte der Geometrie von Eudemos (um 300 v. Chr., also etwa zur Zeit Euklids), die leider nicht erhalten ist, aber oft zitiert wird.

Auch Kommentare zu mathematischen Schriften enthalten historische Angaben, insbesondere der Kommentar von Proklos zum 1. Buch der Elemente Euklids (geschrieben um 450 n. Chr.) und die Kommentare des Eutokios (um 500 n. Chr.) zu Archimedes und Apollonios (sie sind in den von Heiberg herausgegebenen Werken von Archimedes und Apollonios enthalten).

Aus dem Werk von Euklid selbst kann manches Ältere rekonstruiert werden. Die „Elemente“ sind ein Sammelwerk, eine Zusammenfassung der Grundlagen und Grundkenntnisse der Mathematik (sie umfassen keineswegs die ganze damals bekannte Mathematik). Der Sinn eines solchen Werks ist nicht Originalität, sondern die logische Ordnung, zu der natürlich eine erhebliche geistige und schöpferische Leistung gehört. Das so geordnete Wissen kann dann als Grundlage für die weitere Forschung benutzt werden und ist auch bereits in der Antike so benutzt worden. Euklid hat offenbar einige seiner Vorlagen oberflächlich oder gar nicht, andere recht gründlich überarbeitet. Mit philologischen und mathematischen Methoden läßt sich bei vielen Teilen feststellen, woher sie stammen.

In dem historisch-geographischen Werk von Herodot (ca. 484 – nach 430 v. Chr.) finden sich einige Angaben über Thales. Aus einem populären Werk von Diogenes Laertius „Leben und Meinungen der großen Philosophen“, geschrieben etwa um 300 n. Chr., erfahren wir einige Lebensdaten und Anekdoten, aber auch einiges über die Lehre der behandelten Philosophen; dies ist allerdings für die Naturwissenschaften etwas ergiebiger als für die Mathematik.

Es ist ähnlich wie bei den Babyloniern und Ägyptern: Was wir gut kennen, ist die fertige griechische Mathematik; die Entwicklung dorthin muß aus späteren Mitteilungen und kurzen Zitaten erschlossen werden; das gelingt bei den Griechen aber erheblich besser als bei den früheren Völkern.

2.2 Die Entwicklung der deduktiven Methode

Vorbemerkung. Der folgende Abschnitt hat einen doppelten Zweck:

1) Es soll die Entwicklung der deduktiven Methode verfolgt werden, die bei Euklid fertig vorliegt, und die in den drei vorangegangenen Jahrhunderten von Thales an Schritt für Schritt erarbeitet wurde. Wegen des Fehlens direkter Quellen müssen hier Andeutungen ausgewertet werden, was manchmal etwas mühsam ist. K. von Fritz und A. Szabó haben dazu umfangreiche sorgfältige Arbeiten veröffentlicht, auf die ich mich natürlich stütze.

2) Es sollen diejenigen in diesen Jahrhunderten erzielten Ergebnisse erwähnt werden, auf die später zurückgegriffen werden muß, allerdings ohne Anspruch auf Vollständigkeit. Hier sei auf die Bücher von Th. Heath und B. L. van der Waerden verwiesen.

Methode und Ergebnisse sind nicht unabhängig voneinander. Die einfache Möglichkeit, zu beweisen, d. h. die Gültigkeit eines Satzes auf die Gültigkeit anderer (einfacherer) Sätze zurückzuführen, führt bereits ohne tiefere Analyse der Methode zu schönen Ergebnissen, und kompliziertere Ergebnisse regen zur Verfeinerung und theoretischen Begründung der Methode an.

2.2.1 Der Anfang: Thales

1. Biographisches

Nach Herodot, der Thales von allen, die über ihn berichtet haben, zeitlich am nächsten steht, war er „von den Ahnen her nach seiner Herkunft Phönizier“ [I, 72]. Er ist wahrscheinlich im Jahre 624 v. Chr. in Milet geboren. Er „war zunächst politisch tätig und wandte sich dann der Naturwissenschaft zu“ [Diog. L. I, 1, 23]. Wie war die politische Lage? Der König von Lydien, Alyattes, lag von 590 an im Krieg mit den Medern. Am 28. Mai 585 kam es während einer Schlacht zu einer Sonnenfinsternis. Die Schlacht wurde abgebrochen und Frieden geschlossen. Diese Sonnenfinsternis hatte Thales vorhergesagt, allerdings nur das Jahr. Welche Grundlagen Thales für diese Vorhersage gehabt haben könnte, ist mehrfach untersucht worden, insbesondere von van der Waerden [Astr. S. 122–123].

Die Lyder wandten sich dann gegen die ionischen Städte. Alyattes eroberte 575 Smyrna und zerstörte es. 560 wurde Kroisos König von Lydien. Er eroberte Ephesus; von den ionischen Städten blieb nur Milet frei. 550 wurde Medien von dem Perserkönig Kyros erobert. Die Lyder hatten nun statt der Meder die anscheinend gefährlicheren Perser als Nachbarn. Kroisos griff sie 546 an, wurde aber geschlagen; sein Reich wurde persische Provinz.

Die politische Tätigkeit des Thales dürfte darin bestanden haben, daß er Ratgeber der regierenden Persönlichkeiten in Milet war. Vor dem Untergang der ionischen Städte soll er einen engen Zusammenschluß empfohlen haben, eine gemeinsame Ratsversammlung auf der zentral gelegenen Insel Teos [Herodot I, 170]. Daß er dem Kroisos geholfen habe, den Halys zu überschreiten, indem er den Fluß ableitete, berichtet Herodot nur mit Vorbehalt [I, 75]. Er soll verhindert haben, daß Milet den Kroisos gegen Kyros unterstützte. „Das rettete später, nach dem Siege des Kyros, den Staat“ [Diog. L. I, 25].

Daß Thales auf Reisen auch in Ägypten war, wird mehrfach bezeugt. Er hat den ionischen Seeleuten beigebracht, sich auf See nicht nach dem großen Bären, sondern nach dem kleinen Bären zu orientieren. (So dürfte eine etwas unklare Mitteilung von Diogenes Laertius zu interpretieren sein [Heath: Aristarch, S. 23].) Bei anderen astronomischen Erkenntnissen, die Diogenes Laertius dem Thales zuschreibt, ist diese Zuschreibung unsicher.

Nach Aristoteles [Politik A 11 = 1259a 6–17] soll Thales gezeigt haben, daß man mit der Wissenschaft auch reich werden könne. Er habe nämlich auf Grund seiner astronomischen Kenntnisse eine gute Ölernnte vorausgesehen und schon im Winter alle Ölpresen in Milet und auf Chios gemietet und auf diese Weise nachher einen großen Gewinn erzielt.

Platons Erzählung, Thales sei einmal bei der Betrachtung des Sternenhimmels in einen Brunnen gefallen [Theaitetos 174a], paßt eigentlich schlecht zu dem Bild dieses anscheinend durchaus nicht wirklichkeitsfremden Mannes; sie könnte freilich auch die völlige Hingabe an eine forschende Betrachtung ausdrücken.

Thales starb in der 58. Olympiade, d. h. zwischen 548 und 545. [Diog. L. I, 1, 38].

2. Philosophisches und Naturwissenschaftliches

Aristoteles [Met. A 3 = 983b 17–32]: „Es muß einen natürlichen Stoff geben, einen oder mehrere, aus dem das andere entsteht, während er selber erhalten bleibt. Freilich über Zahl und Art dieses Grundstoffs waren sie sich nicht einig: Thales, der Begründer dieses Gedankenganges, behauptete, es sei das Wasser. Deswegen lehrte er auch, die Erde schwimme auf dem Wasser. Vielleicht kam er zu dieser Auffassung durch die Beobachtung, daß überall die Nahrung flüssig ist und daß selbst die Wärme aus dem Wasser komme und von ihm lebe; das aber, woraus etwas entsteht, muß ja immer sein Urgrund sein. Dies also veranlaßte ihn zu seiner Lehre und weiter der Umstand, daß der Same überall feucht ist und das Wasser der natürliche Ursprung alles Feuchten ist. Manche meinen sogar, daß schon in grauer Vorzeit lange vor unserm Geschlecht die Schöpfer der Theogonien dieselbe Auffassung über die Natur vertreten hätten. Denn sie haben ja Okeanos und Tethys zu Stammeltern der Entwicklung gemacht, und der Eidzeuge der Götter ist das Wasser, das jene Dichter selbst „Styx“ nennen.“

Nietzsche schreibt dazu [4.4]: „Die griechische Philosophie scheint mit einem ungereimten Einfalle zu beginnen, mit dem Satze: daß das Wasser der Ursprung und der Mutterschoß aller Dinge sei. Ist es wirklich nötig, hierbei stille zu stehen und ernst zu werden? Ja, und aus drei Gründen: erstens weil der Satz etwas vom Ursprung der Dinge aussagt; zweitens weil er dies ohne Bild und Fabel tut; und endlich drittens, weil in ihm, wenngleich nur im Zustande der Verpuppung, der Gedanke enthalten ist „alles ist eins“. Der erstgenannte Grund läßt Thales noch in der Gemeinschaft mit Religiösen und Abergläubischen, der zweite aber nimmt ihn aus dieser Gesellschaft und zeigt uns ihn als Naturforscher, aber vermöge des dritten Grundes gilt Thales als der erste griechische Philosoph.“

Vor Thales dachte man sich die Entstehung der Welt als Zeugung und Geburt von Göttern oder als handwerkliche Herstellung durch einen Schöpfergott, verstand man Naturerscheinungen (z. B. Gewitter) als Ausdruck der Stimmung von Göttern – ein Weltverständnis auf der Grundlage dessen, was der Mensch täglich erlebte. Thales sucht ein Weltverständnis „ohne Bild und Fabel“ – wie ist das möglich und wie kann ein solches Weltverständnis aussehen?

Wenn man die Vermutungen des Aristoteles als richtig annimmt, hat Thales nach natürlichen Ursachen der Erscheinungen gefragt. Das wird vielleicht deutlicher, wenn wir die Lehren seiner Schüler und Nachfolger ansehen. Anaximander (ca. 610–545) lehrte [Diels 12 A 9]: „Ursprung und Urgrund der seienden Dinge ist das Grenzenlos-Unbestimmbare (*τὸ ἄπειρον*). Er meint als Ursprungsstoff aber weder Wasser noch irgendein anderes von den sogenannten Elementen, sondern eine andere, unbestimmbare Substanz, aus der alle Himmel und die Welten unter ihnen entstünden. ... Aus dem Einen sonderten sich

die in ihm enthaltenen Gegensätze aus. Gegensätze sind Warmes und Kaltes, Trockenes und Feuchtes und so fort.“

[Diels 13 A 5]: „Anaximenes, ein Schüler des Anaximander, lehrt auch wie jener, die Substanz der Natur sei grenzenlos, aber nicht wie jener, unbestimmbar, sondern bestimmt: Luft nennt er sie. ... Gelockert werde sie Feuer, verdichtet Wind, dann Wolke, weiter durch noch stärkere Verdichtung Wasser, dann Erde, dann Steine; alles übrige aber entstehe aus diesen.“

[Diels 13 B 2]: „Wie unsere Seele, die Luft ist, uns beherrschend zusammenhält, so umfaßt auch die ganze Weltordnung Hauch und Luft.“

Anaximander und Anaximenes bedenken also die Art und Weise, wie die Dinge aus dem Urstoff entstanden sein können; der eine meint: durch Trennung des Entgegengesetzten, der andere konkreter, physikalischer: durch Verdünnung und Verdichtung. Und Anaximenes denkt auch an eine ordnende und lenkende Kraft.

Den nächsten Schritt, den Schritt zur Erfassung des Begriffs „Naturgesetz“ scheint Heraklit getan zu haben. Wir zitieren zunächst Nietzsche [a.a.O. 5]: „Das Werden schaue ich an, ruft er (Heraklit), und niemand hat so aufmerksam diesem ewigen Wellenschlage und Rhythmus der Dinge zugesehen. Und was schaute ich? Gesetzmäßigkeiten, unfehlbare Sicherheiten, immer gleiche Bahnen des Rechtes, hinter allen Überschreitungen der Gesetze richtende Erinnyen, die ganze Welt das Schauspiel einer waltenden Gerechtigkeit und dämonisch allgegenwärtiger, ihrem Dienste untergebener Naturkräfte.“ Dazu zwei Sprüche von Heraklit [Diels 22 B 30]: „Diese Weltordnung, dieselbige für alle Wesen, schuf weder einer der Götter noch der Menschen, sondern sie war immer und ist und wird sein ewig lebendiges Feuer, erglühend nach Maßen und erlöschend nach Maßen.“ Und [Diels 22 B 94]: „Helios wird seine Maße nicht überschreiten; sonst werden ihn die Erinnyen, der Rechtsgöttin Schergen, ausfindig machen.“

Das also war „im Zustand der Verpuppung“ im Ansatz des Thales enthalten: die Aufgabe, das Weltgeschehen auf der Grundlage allgemeiner Naturgesetze zu verstehen. Wie weit Thales selbst diesen Ansatz ausgearbeitet hat, bleibt für uns unbestimmt. Jedenfalls hat er auch bei einzelnen Naturerscheinungen nach natürlichen Ursachen gefragt. [Aristoteles: De anima I, 7=405a 19-21]: „Soweit man sich erinnert, scheint auch Thales die Seele als Bewegungsursprung (*κίνητικόν τι* = etwas, was Bewegung erzeugen kann) betrachtet zu haben, wenn er dem Magnetstein eine Seele zuspricht, weil er das Eisen bewege.“ Hier geht es einerseits um die Bedeutung, die man dem Wort „Seele“ beilegt, andererseits aber darum, daß Thales bei einer Bewegung eine im Gegenstand selbst liegende physikalische Ursache, eine bewegende Kraft, sucht oder postuliert.

Nach einer Ursache fragte Thales auch bei den regelmäßigen Überschwemmungen des Nil; er vermutete, daß die Etesienwinde den Abfluß des Wassers ins Meer verhinderten [Herodot II, 20].

3. Mathematisches

Auch in der Mathematik hat Thales allgemeine Sätze aufgestellt und gelegentlich nach den Ursachen ihrer Gültigkeit gefragt. Die folgenden mathematischen Leistungen werden von ihm berichtet:

[Diog. L. I, 1,27]: „Hieronymos berichtet, er habe die Höhe der Pyramiden gemessen vermitteltst ihres Schattens, den er genau in dem Zeitpunkt abmaß, wo unser Schatten und unser Leib die gleiche Länge haben.“

Diese Mitteilung gibt zu einigen Bedenken Anlaß:

- 1) Die Böschungswinkel der älteren Pyramiden von Gizeh betragen etwa 52° , während einige jüngere Pyramiden Böschungswinkel von etwa 42° haben. Das Verfahren war also bei den älteren Pyramiden nur bei günstigem Sonnenstand, bei den jüngeren überhaupt nicht anwendbar.
- 2) Wenn die Spitze des Pyramidenschattens nicht senkrecht über einer Pyramidenkante lag, erforderte die Bestimmung der Schattenlänge eine zusätzliche Rechnung (Abb. 2.1). Die günstige Lage dürfte nur an einem bestimmten Tag im Jahr vorhanden sein.

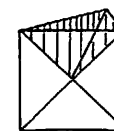


Abb. 2.1

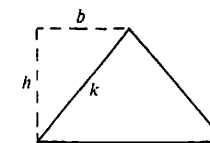


Abb. 2.2

- 3) In einigen Aufgaben des Papyrus Rhind wird die Höhe der Pyramide aus dem Rücksprung und der Länge der Kante berechnet. Weshalb war es dann erwähnenswert, daß Thales die Höhe der Pyramiden bestimmen konnte? Sah man das Verfahren des Thales als eine direkte Messung und somit als eine Probe auf die Richtigkeit der Rechnung an? Oder war, wie Hertwig vorschlägt [Anh. 1, S. 57-60], mit der Bezeichnung *pr-m-ws* gar nicht die senkrechte Höhe h , sondern die schräg liegende Höhe der Seitenfläche (k) gemeint, also der Rücksprung nicht $r = \frac{b}{h}$, sondern $r = \frac{b}{k}$ (Abb. 2.2)? Dann hätte Thales vielleicht zum ersten Male eine Messung der unzugänglichen senkrechten Höhe angegeben.
- 4) Gerade die Tatsache, daß die Ägypter mit dem Rücksprung zu rechnen verstanden, läßt die Frage aufkommen, ob Thales vielleicht doch auf die Forderung der Gleichheit der Länge von Gegenstand und Schatten verzichten konnte, also einen einfachen Ähnlichkeitssatz benutzt, der doch unmittelbar evident ist.

[Diog. L. I, 1,24]: „Er hat, wie Pamphile berichtet, zuerst das rechtwinklige Dreieck in den Kreis eingezeichnet.“

Pamphile war eine Schriftstellerin zur Zeit des Kaisers Nero, von der mathematische Leistungen nicht bekannt sind. Der griechische Text läßt nach F.

Krafft [G. d. N. I, S. 90/91] die Übersetzung und Interpretation zu: er habe das zum Kreis gehörige, d.h. das zum Kreis flächengleiche Dreieck gezeichnet. Auch wenn man diese Interpretation nicht annehmen möchte, so ist doch die Interpretation der genannten Stelle als „Satz des Thales“ recht unsicher.

Deutlichere Angaben über mathematische Leistungen enthält der Kommentar des Proklos zum 1. Buch von Euklids Elementen, der sich, manchmal ausdrücklich, auf die Mathematikgeschichte des Eudemos stützt.

[Proklos, S. 250]: Thales hat „erkannt und ausgesprochen“ (*ἐπιστῆσαι καὶ εἰπεῖν*), daß die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck gleich sind. Dabei habe er in altertümlicher Weise die gleichen (*ἴσας* d.h. maßgleichen) Winkel „ähnlich“ (*ὁμοίως* d.h. gestaltgleich) genannt [v. Fritz, Gl.]. Diese letzte Bemerkung gilt als Anzeichen dafür, daß der Gewährsmann von Proklos sogar die Bezeichnungsweise von Thales genau gekannt hat.

[Proklos, S. 299]: Daß Scheitelwinkel gleich sind, „habe, wie Eudemos berichtet, Thales zuerst gefunden, einen Beweis habe aber erst Euklid für erforderlich gehalten.“

[Proklos, S. 352], zum Satz: Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel und eine Seite gleich haben, dann sind auch die übrigen Seiten und der übrige Winkel einander gleich. „Eudemos führt in seiner Geschichte der Geometrie diesen Lehrsatz auf Thales zurück. Denn bei der Art und Weise, auf die er die Entfernung der Schiffe auf See bestimmt haben soll, erklärt Eudemos die Heranziehung desselben für unerlässlich.“

Leider sagt Eudemos nicht, wie Thales die Messung gemacht hat. In der Vermessungslehre wird (später) öfter die Aufgabe behandelt, die Entfernung von einem Standpunkt *A* zu einem unzugänglichen Punkt *B* zu messen. Heron [Dioptra VIII = Op. Bd. 3, S. 220] beschreibt das folgende Verfahren: Man wähle auf der Verlängerung von *BA* willkürlich einen Punkt *C*, errichte auf *AC* in *C* eine Senkrechte *CE* von beliebiger Länge, visiere von *E* aus den Punkt *B* an und gehe auf der Geraden *EB* bis zu dem Punkt *D*, der von *A* aus im rechten Winkel zu *BC* gesehen wird. Dann gilt

$$AB:DF = AD:FE \text{ oder } AB = \frac{AD \cdot DF}{CE - AD}.$$

Die Messung erfordert als Gerät nur die Groma, ein Meßband und ein paar Stangen.

Heron wendet das Verfahren auf die Messung der Breite eines Flusses an; man wählt dann als *B* einen markanten Punkt am anderen Ufer. Für die Messung der Entfernung eines Schiffes auf See (die vielleicht zwischen 500 und 1000 m beträgt) dürfte es weniger geeignet sein, weil man eine ebene Fläche *ACED* braucht, die mit Rücksicht auf die Genauigkeit nicht zu klein sein darf, und weil die Messung einige Zeit braucht, während der das Schiff wahrscheinlich nicht still steht.

Außerdem wird nicht der Kongruenzsatz, sondern ein Ähnlichkeitssatz gebraucht.

Die Möglichkeit, daß man auf der Geraden $AD \perp AB$ bis zu einem Punkt geht, von dem aus *B* unter einem Winkel von 45° gesehen wird, erwähnt Heron

nicht. Mit der Groma wäre das auch nicht zu machen, wohl aber mit der Dioptra, die Heron gerade in diesem Werk beschreibt.

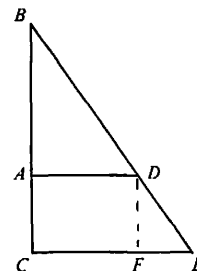


Abb. 2.3

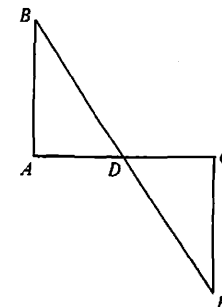


Abb. 2.4

Wir würden heute nur das Dreieck *BAD* benutzen und die Strecke *AD* und die beiden Winkel bei *A* und *D* messen, wobei der Winkel bei *A* kein rechter zu sein braucht (Vorwärts-Einschneiden). Die gesuchten Größen würden wir entweder trigonometrisch berechnen – das war z. T. von Heron und erst recht zur Zeit von Thales nicht möglich – oder das Dreieck verkleinert aufzeichnen und die Figur ausmessen. Ich möchte Thales dieses Verfahren zutrauen. Planzeichnungen in verkleinertem Maßstab sind in Ägypten schon in früher Zeit nachweisbar.

Aber wo tritt der Kongruenzsatz auf? Er besagt: Wenn in einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel gegeben sind, so sind die anderen Seiten eindeutig bestimmt. Das braucht man zur Rechtfertigung des Verfahrens. Die Verkleinerung könnte man vielleicht als unproblematisch ansehen.

Es gibt aber in der Antike auch ein Verfahren, bei dem der Kongruenzsatz ausdrücklich benutzt wird. Es stammt von dem römischen Landmesser Marcus Iunius Nipsus [s. unter Iunius]: Man gehe (Abb. 2.4) von *A* aus im rechten Winkel zu *BA* zum Punkt *D* und weiter zum Punkt *C* mit $DC = AD$. Von dort gehe man senkrecht zu *AC* bis zu demjenigen Punkt *E*, von dem aus gesehen die Punkte *D* und *B* in einer Geraden liegen. Dann ist $CE = AB$.

Auch dieses Verfahren wird von Nipsus zur Messung der Breite eines Flusses vorgeschlagen. Für die Messung der Entfernung eines Schiffes auf See dürfte es noch weniger geeignet sein als das von Heron. [Heath, Gr. Math. I, S. 132].

Heath gibt noch weitere mögliche Verfahren an; wir haben diejenigen ausgewählt, die unabhängig von Thales etwas über das griechische und römische Vermessungswesen aussagen.

Hat Thales Sätze nicht nur „erkannt und ausgesprochen“, sondern auch bewiesen? Proklos berichtet [S. 157]: „Daß der Kreis durch den Durchmesser halbiert wird, soll zuerst Thales bewiesen haben (*ἀποδείξαι φασιν*); der Grund für die Halbierung liegt aber darin, daß die Gerade ohne jede Ablenkung durch den Mittelpunkt geht. Denn da sie durch die Mitte geht und in allen ihren Tei-

len immer die gleiche Bewegungsrichtung einhält, ohne nach der einen oder anderen Seite auszubiegen, schneidet sie zur Kreisperipherie hin beiderseits das Gleiche ab. – Will man dies auch auf mathematischem Wege beweisen, so denke dir den Durchmesser gezogen und die eine Kreishälfte auf die andere gelegt (Abb. 2.5). Ist sie nicht gleich, so wird sie entweder innerhalb oder außerhalb zu liegen kommen. In beiden Fällen wird sich die Folgerung ergeben, daß die kürzere Strecke der längeren gleich ist. Denn alle Strecken vom Mittelpunkt zur Peripherie sind gleich. Es wird nun die zu einem äußeren Punkt gehende Strecke der zu einem inneren Punkt gehenden gleich sein. Das ist aber unmöglich.“

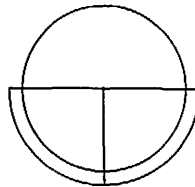


Abb. 2.5

Anm.: Simplicios hat [nach al-Nayrizi, S. 20f.] auch die Möglichkeit berücksichtigt, daß die eine Kreishälfte teilweise innerhalb, teilweise außerhalb der anderen zu liegen kommt. Daß nur ein Punkt der Peripherie des einen Halbkreises im Innern des anderen Halbkreises liegen muß, bemerkt Leibniz [4.4].

Proklos gibt hier zwei Beweise wieder. Den ersten würden wir eher als Plausibilitätsbetrachtung bezeichnen. Es ist eine ohne jede Methode entwickelte Überlegung, die erklären soll, warum das so ist. Der zweite Beweis ist durch die Worte „Will man dies auch auf mathematische Weise beweisen ...“ scharf vom ersten abgesetzt. Er benutzt die Methode des Aufeinanderlegens und die genaue Definition des Kreises, nimmt das Gegenteil der Behauptung an und leitet daraus einen Widerspruch ab.

Stammen diese Beweise von Thales? Zunächst sei festgehalten: Proklos sagt: „Man sagt, daß Thales ... bewiesen habe.“ Proklos wußte also nicht, ob Thales den Satz überhaupt bewiesen hat. Also kann er nicht gewußt haben, wie Thales den Satz bewiesen hat. Ich könnte mir vorstellen, daß Thales die Plausibilitätsbetrachtung angestellt hat; das wäre dann der erste bekannte Versuch, einen mathematischen Satz zu begründen. Das zum „mathematischen“ Beweis erforderliche Rüstzeug wurde meiner Ansicht nach erst in den folgenden Jahrhunderten entwickelt.

4. Zusammenfassung

Mit Thales beginnt die griechische Mathematik, sich von der ägyptischen und babylonischen Mathematik abzusetzen und ihren eigenen Weg zu gehen. Kann man das wirklich behaupten? Wissen wir vielleicht immer noch zu wenig von der vorgriechischen Mathematik? Und sind die Nachrichten über Thales vielleicht dadurch verfälscht, daß z. B. Eudemos vielleicht ganz unabsichtlich die Leistungen des Thales in der Sprech- und Denkweise seiner, des Eudemos,

Zeit wiedergibt? Weil das alles so wichtig und so unsicher ist, haben wir die Nachrichten über Thales so ausführlich wiedergegeben. Wir schließen daraus:

- 1) Thales hat ebenso wie frühere Mathematiker Vorschriften zur Berechnung geometrischer Größen angegeben.
- 2) Er hat aber auch allgemeine Sätze angegeben, und er hat die Gültigkeit von Vorschriften durch solche allgemeinen Sätze begründet (wenn das nicht eine anachronistische Annahme von Eudemos ist). – Nun ist das zunächst eine Formsache. Ob ich sage: „In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten“ oder ob ich sage: „Wenn du die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ausrechnen willst, mußt du ... usw.“, das scheint ungefähr dasselbe zu sein. Aber eine Vorschrift wird dadurch gerechtfertigt, daß sie richtige Ergebnisse liefert, und das merkt man bei der praktischen Anwendung. Ein Satz verlangt eine logische Begründung.
- 3) Thales hat wenigstens in einem Falle eine Begründung eines Satzes angegeben, freilich wohl in der Form einer ohne Methode erfundenen Plausibilitätsbetrachtung. Anders kann ich mir den ersten Versuch, einen Satz zu begründen, auch nicht recht vorstellen. Dabei paßt die mathematische Denkweise des Thales zu seinen physikalischen Vorstellungen, bei denen er, wenn auch nur in Ansätzen, Begründungen im Sinne allgemeiner Gesetzmäßigkeiten gesucht hat.
- 4) Inhaltlich bewegen sich die Aussagen des Thales zumeist im Umkreis des Winkelbegriffs, den er wohl in die Geometrie eingeführt hat. Gegenüber dem Rücksprung, der sich nur auf die Neigung einer Ebene gegen die Vertikale bezog, ist jetzt der Winkel die Neigung zweier Linien gegeneinander, wenn auch nicht bekannt ist, ob Thales diese genaue Definition schon angegeben hat. Es ist auch nichts darüber gesagt, ob oder wie Thales Winkel *gemessen* hat. Es ist nicht unbedingt nötig, einen Winkel durch den zugehörigen Kreisbogen zu messen (was sich allerdings aus guten Gründen als praktisch erwiesen hat), man kann ihn auch in der Art des Rücksprungs durch die Strecke messen, die auf einer zu einem Schenkel senkrechten Geraden in bestimmter Entfernung vom Scheitel abgeschnitten wird. Wenn Thales gleiche Winkel „ähnlich“, d. h. gestaltgleich, genannt hat, so kann vielleicht daraus geschlossen werden, daß er an das Messen von Winkeln zunächst gar nicht gedacht hat.
- 5) Die Sätze des Thales sind sehr einfache, aber grundlegende Sätze. Dabei müssen wir berücksichtigen, daß wir sie aus dem Kommentar des Proklos zum ersten Buch von Euklids Elementen kennen. Wenn uns Kommentare zu den übrigen Büchern der Elemente erhalten wären (falls Proklos überhaupt solche geschrieben hat), würden wir vielleicht einen ganz anderen Eindruck von der Mathematik des Thales haben. Z. B. müßte der „Satz des Thales“ in einem Kommentar zum dritten Buch behandelt werden.

2.2.2 Pythagoras und die Pythagoreer

1. Biographisches

Pythagoras ist in Samos geboren, nach verschiedenen antiken Quellen entweder 600 v. Chr. oder um 570 v. Chr. Nach Reisen nach Ägypten und Babylon ging er um 529 nach Unteritalien und gründete dort einen Orden, in dem es vor allem um harmonische Lebensführung ging. Die Pythagoreer hatten – vielleicht auf Grund ihres engen Zusammenschlusses – auch starken politischen Einfluß, der von ihren Mitbürgern nicht immer gern gesehen wurde. Um 510 wurde Pythagoras aus Kroton vertrieben, ging nach Metapont und starb dort. Bei Unruhen in den Jahren zwischen 460 und 440 wurden die Pythagoreer aus Süditalien vertrieben, viele von ihnen ermordet. Eine Ausnahme bildete Tarent, wo der Pythagoreer Archytas (Blütezeit zwischen 400 und 360) sogar mehrfach zum Strategen gewählt wurde.

Pythagoras hat wahrscheinlich viel mathematisches Wissen aus Ägypten und Babylon mitgebracht und seinen Schülern vermittelt. Ob ihm eigene wissenschaftliche Leistungen zugeschrieben werden können, ist unsicher. Zum „Satz des Pythagoras“ [Euklid El. 1, § 47] schreibt Proklos [S. 426]: „Schenken wir denjenigen Gehör, die das Altertum erforschen wollen, so werden wir finden, daß sie dies Theorem auf Pythagoras zurückführen und berichten, er habe der Entdeckung halber einen Stier geopfert.“ Da Pythagoras Tieropfer ablehnte, ist mindestens der letzte Teil dieses Berichts ungläubwürdig. Die neuen mathematischen Leistungen dürften zumeist von seinen Schülern stammen, die ihre Entdeckungen gern dem Meister zuschrieben. Platon und Aristoteles sprechen nur von „den Pythagoreern“.

2. Harmonie von Tonintervallen

Iamblichos berichtet [V. P. § 115, S. 121] (hier gekürzt): „Pythagoras ging einmal an einer Schmiede vorbei, als er gerade darüber nachdachte, ob man für das Gehör ein Gerät als Hilfsmittel ersinnen könne wie für den Tastsinn die Waage oder die Maße (also ob man Töne messen könne wie Gewichte und Ausdehnungen). Da hörte er, wie die Hämmer das Eisen auf dem Amboß schlugen und im Wechsel die Klänge einander in harmonischen Intervallen antworten ließen. Er erkannte darin Oktav, Quint und Quart. Voll Freude lief er in die Schmiede und fand durch mancherlei Versuche heraus, daß der Unterschied in der Tonhöhe von der Masse des Hammers abhängt und nicht von der Gewalt des Hämmernden oder von der Gestalt des Hammers oder der Lage des geschlagenen Eisens. Da stellte er das Gewicht der Hämmer aufs genaueste fest, kehrte nach Hause zurück und untersuchte den Klang von Saiten, die durch verschiedene Gewichte gespannt waren usw.“

Gegen diesen Bericht ist eingewandt worden, daß gar nicht der Hammer, sondern der Amboß in Schwingungen gerät. Aber O. Hertwig hat festgestellt, daß dieser Einwand nur für die heutige Konstruktion von Hammer und Amboß gilt, aber nicht für die griechische. Der griechische Amboß bestand aus ei-

nem Holzklotz, dem eine Metallhaube aufgesetzt war; dieses System konnte nicht schwingen. Dagegen hatten die Hämmer oft Metallstiele und waren in diesen so befestigt, daß sie schwingen konnten.

Schwerer wiegt der Einwand, daß die angegebenen Gewichtsverhältnisse für die durch Gewichte gespannten Saiten (ich habe sie hier nicht wiedergegeben – s. van der Waerden, Pyth. S. 369) nicht die angegebenen Tonintervalle ergeben. Es werden dem Pythagoras aber auch korrekte Versuche am Monochord zugeschrieben, anderen Pythagoreern Versuche an Vasen, die bis zu einer bestimmten Höhe mit Wasser gefüllt waren.

Hier werden also alte physikalische Experimente beschrieben, und zwar solche, bei denen die verursachenden Faktoren systematisch getrennt werden. Das Ergebnis dieser Versuche ist ein durch Zahlenverhältnisse ausgedrücktes physikalisches Gesetz.

3. Zahlenlehre

Aristoteles schreibt [Metaph. A 5, 985 b 31 – 986 a 3, Übers. van der Waerden, Pyth. S. 365]: „Da sie (die Pythagoreer) erkannten, daß die Eigenschaften und Verhältnisse der musikalischen Harmonie auf Zahlen beruhen und da auch alle anderen Dinge ihrer ganzen Natur nach den Zahlen zu gleichen schienen, so meinten sie, die Elemente der Zahlen seien die Elemente aller Dinge und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl“.

Die Pythagoreer haben daher eine Theorie der Zahlenverhältnisse und eine darauf gegründete Harmonielehre entwickelt, außerdem aber auch Eigenschaften von Zahlen und so etwas wie die Struktur des Bereichs der ganzen Zahlen untersucht. Ich kann hier nur über ein kleines Stück davon berichten und verweise insbesondere auf die ausführlichen Darstellungen von van der Waerden in E. W. und Pyth.

Eine Quelle für die pythagoreische Zahlenlehre ist die Arithmetik von Nikomachos von Gerasa; sie ist zwar um 100 n. Chr. geschrieben, enthält aber altes Gedankengut. Dort steht [Buch 1, Kap. 7,1]: „Die erste Einteilung der Zahlen ist die in gerade und ungerade“. Die zugehörigen Definitionen lauten bei Euklid [VII, Def. 6]: „Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt“, [Def. 7]: „und ungerade die, die sich nicht halbieren läßt, oder die sich um eine Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet.“ Über das Alter dieser Definition gibt es einen Hinweis in einem Fragment aus einer Komödie des Epicharm, der um 480 in Syrakus schrieb. [Diels 23 B 2]: „Wenn einer zu einer ungeraden Zahl, meinethalben auch zu einer geraden, einen Stein zulegen oder auch von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bleibe noch dieselbe?“ Um diese Zeit muß diese Definition also bekannt gewesen sein (außerdem war es offenbar damals üblich, Zahlen durch Steinchen darzustellen). Euklid definiert freilich vorher, was eine Zahl ist, nämlich [Def. 2] „eine aus Einheiten zusammengesetzte Menge“ – und davor definiert er noch was Einheit ist, nämlich [Def. 1] „das, wonach jedes Ding eines genannt wird.“ Wie alt diese Definitionen sind, wage ich nicht zu sagen. Den Begriff der abstrakten Einheit möchte ich für den spätesten halten. Er könnte aus der Begriffswelt des

Parmenides stammen; Platon spricht darüber im Staat [525 d – 526 a]. Proklos schreibt den Pythagoreern die Definition des Punktes als „Einheit mit Lage“ zu [S. 95], dabei könnte aber „Einheit“ als undefinierter Begriff benutzt sein.

Die Definition der Zahl soll nach Iamblichos [Nik. S. 10] Thales schon bei den Ägyptern vorgefunden haben. Iamblichos ist nicht unbedingt zuverlässig, aber eine Zahl ist in allen alten Kulturen eine Zusammenstellung von Einzelsymbolen, seien es nun Kerben in Knochen oder Griffeleindrücke in Ton oder Striche oder auch ausgelegte Steinchen. Nun weiß jeder Mensch, was eine Zahl ist, das braucht man nicht zu erklären. Aber eine wissenschaftliche Einteilung der Zahlen in gerade und ungerade muß genau festgelegt werden.

Hier tritt eine neue Auffassung von „Zahl“ auf. Eine Zahl ist nicht nur ein Hilfsmittel, mit dem man zählt, mißt und rechnet, sondern sie ist selbst Gegenstand der Untersuchung, sie hat Eigenschaften, sie kann z. B. gerade oder ungerade sein, sie kann Teiler haben, Primzahl oder zusammengesetzte Zahl sein usw.

4. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden

Am Ende des IX. Buches von Euklids Elementen steht eine Reihe von Sätzen, die mit den vorangegangenen keinen Zusammenhang haben. O. Becker hat gezeigt [G. u. U.], daß dieses Stück wahrscheinlich altpythagoreisch ist. Es beginnt „§ 21. Setzt man beliebigviele gerade Zahlen zusammen, so ist die Summe gerade.“

A B C D E

Beliebig viele gerade Zahlen AB, BC, CD, DE seien zusammengesetzt. Ich behaupte, daß die Summe AE gerade ist.

Jede der Zahlen AB, BC, CD, DE hat, da sie gerade ist, einen Teil, der die Hälfte ist. Folglich hat auch die Summe AE einen Teil, der die Hälfte ist.“

Nach Becker kann man sich diesen Satz durch Hinlegen von Steinchen sofort klarmachen, etwa so:

oooo oo ooo ooooo
oooo oo ooo ooooo

Der Satz ist ein Spezialfall des Satzes [El. VII, § 5]: „Wenn eine Zahl $\langle a \rangle$ von einer Zahl $\langle b \rangle$ ein Teil ist und eine weitere Zahl $\langle c \rangle$ von einer weiteren $\langle d \rangle$ derselbe Teil, dann muß auch die Summe von der Summe derselbe Teil sein, wie die eine Zahl von der entsprechenden.“

Hier liegt die Definition zugrunde [El. VII, Def. 3]: „Teil einer Zahl ist eine Zahl, die größere von der kleineren, wenn sie die größere genau mißt.“

Da eine Zahl eine aus Einheiten zusammengesetzte Menge ist, bedeutet das in der Sprache der Mengenlehre: b ist die Vereinigung von endlich vielen Mengen der Mächtigkeit von a :

$$b = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_n \dots$$

Dabei sind alle a_k gleichmächtig und elementfremd. (Daß Mengen von Einheiten elementfremd sind, kann man durch Anhängen verschiedener Indizes erreichen. In Lehrbüchern der Mengenlehre wird das genauer besprochen.) Ebenso sei

$$d = c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_n \dots$$

Dann wird gebildet

$$b \cup d = (a_1 \cup c_1) \cup (a_2 \cup c_2) \cup \dots \cup (a_n \cup c_n) \dots$$

Daraus ist die Behauptung abzulesen.

Das ist der Gedankengang von Euklids Beweis. Euklid spricht natürlich nicht in der Sprache der Mengenlehre, aber sein Beweis kommt darauf hinaus, daß er das kommutative und das assoziative Gesetz für die Vereinigung von endlichen Mengen stillschweigend als selbstverständlich voraussetzt und daraus das distributive Gesetz für Zahlen ableitet.

Im Spezialfall $n=2$ ist der Sachverhalt noch leichter anschaulich einzusehen.

In Buch IX folgt § 22: „Setzt man beliebigviele ungerade Zahlen zusammen und ist ihre Anzahl gerade, so muß die Summe gerade sein.“

... Da nämlich jede der Zahlen AB, BC, CD, DE ungerade ist, muß, wenn man von jeder die Einheit wegnimmt, jeder der Reste gerade sein, so daß auch deren Summe gerade sein muß. Auch die Anzahl der Einheiten ist aber gerade; also ist auch die Summe AE gerade.“

Dieser Satz wird also korrekt aus der Definition und dem vorangegangenen Satz abgeleitet. Und so wird es auch bei allen folgenden Sätzen gemacht. Sie lauten abgekürzt [s. van der Waerden, Pyth. 396/7]:

23. Eine Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.
24. Gerade minus gerade ergibt gerade.
25. Gerade minus ungerade ergibt ungerade.
26. Ungerade minus ungerade ergibt gerade.
27. Ungerade minus gerade ergibt ungerade.
28. Ungerade mal gerade ergibt gerade.
29. Ungerade mal ungerade ergibt ungerade.
30. Eine ungerade Zahl, die eine gerade Zahl teilt, teilt auch die Hälfte dieser Zahl.

Hier sei einmal der Beweis angedeutet: Die ungerade Zahl a teile die gerade Zahl b , es sei also $b = a \cdot c$. Dann kann c nicht ungerade sein, sonst wäre nach § 29 auch b ungerade.

31. Wenn eine ungerade Zahl mit einer Zahl teilerfremd ist, so auch mit dem Doppelten dieser Zahl.
32. Eine Zahl, die durch (wiederholte) Verdoppelung von 2 entsteht, ist ausschließlich gerade mal gerade.

gerade mal gerade bedeutet: zerlegbar in zwei gerade Faktoren. Die übrigen einschlägigen Begriffe dürften leicht verständlich sein. Die Definitionen stehen bei Euklid am Anfang von Buch VII.

33. Eine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist ausschließlich gerade mal ungerade.
 34. Eine Zahl, die nicht zu den unter 32 und 33 genannten gehört, ist sowohl gerade mal gerade als auch gerade mal ungerade.
 Diese Sätze hat u. a. Bachet wieder aufgegriffen [4.4]. Sie bilden den Anfang einer feineren Einteilung der Zahlen als nur in gerade und ungerade, ungefähr im Sinne der Restklassen mod 4.

Es folgt ein Satz, der in dieses alte Stück eigentlich nicht hineinpaßt, von dem auch nur ein Spezialfall gebraucht wird: „§ 35. Hat man beliebigviele Zahlen in geometrischer Reihe (*ἐξ ἑνὸς ἀνάλογον*, d. h. in stetiger Proportion) und nimmt man sowohl von der zweiten als auch von der letzten der ersten gleiche weg, dann muß sich wie der Überschuß der zweiten zur ersten, so der Überschuß der letzten zur Summe der ihr vorangehenden verhalten.“

Sei $a_0 = a$, $a_1 = a \cdot q$, $a_2 = a \cdot q^2$, ..., $a_{n+1} = a \cdot q^n$ die geometrische Folge und $s = a_0 + a_1 + \dots + a_n$, so besagt der Satz

$$(1) \quad \frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{a_{n+1} - a_0}{s}, \quad \text{also } s = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

(Ich schreibe Verhältnisse als Quotienten).

Euklids Beweis verläuft so: Nach der Definition der geometrischen Folge ist

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \dots = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Daraus folgt

$$(2) \quad \frac{a_1 - a_0}{a_0} = \frac{a_2 - a_1}{a_1} = \dots = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n}.$$

Nun gilt bei einer solchen stetigen Proportion [El. VII, § 12]: Es verhält sich die Summe der Vorderglieder zur Summe der Hinterglieder wie ein Vorderglied zu einem Hinterglied.

(Andeutung des Beweises: Wenn $a_{k+1} - a_k = c \cdot a_k$ ist, so ist

$$\Sigma(a_{k+1} - a_k) = c \cdot \Sigma a_k)$$

Aus (2) folgt daher (1).

Für den folgenden Satz § 36 wird nur der Spezialfall $a_0 = 1$, $q = 2$ gebraucht, also

$$1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Diesen Spezialfall, der wahrscheinlich schon den Babyloniern bekannt war, kann man nach Becker (durch Auslegen von Steinchen) so einsehen: Man geht von 1 aus und fügt immer die schon vorhandene Summe (Menge von Steinchen) noch einmal hinzu, also:

$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 1 + 2 = 4, \quad 1 + 1 + 2 + 4 = 8 \quad \text{usw.}$$

Dabei ist die Summe jeweils das Doppelte des letzten Summanden,

$$\text{also} \quad 1 + 1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1}.$$

Mit Hilfe dieses Satzes wird bewiesen: § 36 (durch moderne Formulierung gekürzt):

Wenn $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 = p$ eine Primzahl ist, so ist $v = 2^n p$ eine vollkommene Zahl, d. h. gleich der Summe ihrer Teiler, wobei 1 mitgezählt wird, v selbst aber nicht.

Die Teiler von v sind offenbar

$$1, 2, \dots, 2^n, \quad \text{ihre Summe ist } p$$

$$p, 2p, \dots, 2^{n-1}p, \quad \text{ihre Summe ist } p \cdot (2^n - 1).$$

Daß es keine weiteren Teiler gibt, folgt aus den vorangegangenen Sätzen; insbesondere folgt aus Satz 30: Wenn u ein ungerader Teiler von v ist, so muß u auch Teiler von $v/2$, $v/4$, ... usw. sein; also muß $u = p$ sein.

Die Summe aller Teiler von v ist also $p + p \cdot (2^n - 1) = 2^n p$.

Damit ist ein recht tiefliegender Satz erreicht. Die hier angegebenen sind tatsächlich *alle* geraden vollkommenen Zahlen. Das hat erst Euler bewiesen [4.4]. Ob es ungerade vollkommenen Zahlen gibt, ist bis heute unbekannt.

Ist dieses Stück nun wirklich alt? Offenbar hat doch Euklid mindestens redaktionelle Eingriffe vorgenommen. Die zugehörigen Definitionen und ein „Beweis“ für den Anfangssatz stehen an anderer Stelle, und wahrscheinlich wurde in § 35 der ursprüngliche Spezialfall durch den allgemeinen Satz ersetzt, der auch von den Pythagoreern stammen könnte, aber vielleicht erst aus späterer Zeit. Trotzdem ist die Methode, die hier zum ersten Mal sichtbar wird, wohl den älteren Pythagoreern zuzuschreiben: Jeder Satz ist aus den vorangegangenen logisch abgeleitet, und man kommt auf diese Weise von einfachen Ausgangssätzen zu tiefliegenden Resultaten. Der Anfangssatz wird unmittelbar aus der Definition gewonnen, enthält aber von unserem Standpunkt aus gesehen ein Axiom (das distributive Gesetz), das nicht ausgesprochen wird. Es läßt sich aus dem Arbeiten mit endlichen Mengen (Steinchen) gewinnen, und dieses wurde offenbar als evident angesehen.

Descartes hat in den *Regulae ad directionem ingenii* (1629) [4.4] ausgeführt, daß der Mensch zwei Möglichkeiten hat, zu sicheren Erkenntnissen zu kommen: Intuition und Deduktion. Unter Intuition versteht Descartes „ein so einfaches und distinktes Begreifen des reinen und aufmerksamen Geistes, daß über das Erkannte weiterhin kein Zweifel übrigbleibt ... So kann jeder durch Intuition mit dem Geist erfassen, daß er existiert, daß er Bewußtsein hat, daß das Dreieck bloß durch drei Seiten begrenzt wird, die Kugel durch eine einzige Oberfläche und dergl.; welcher Sätze es bei weitem mehr gibt, als man gemeinlich denkt.“ Zur Deduktion sagt er, daß „man von den meisten Dingen, wenn gleich sie nicht von sich aus evident sind, doch ein sicheres Wissen hat, wenn

sie nur von wahren und (durch Intuition) klar erkannten Prinzipien aus durch eine kontinuierliche und nirgendwo unterbrochene Bewegung des intuitiv jeden Einzelschritt hervorbringenden Denkens abgeleitet werden.“ [Regel 3].

Dieses Verfahren haben, meine ich, die Pythagoreer für die Mathematik entdeckt. Jetzt muß nicht mehr jeder Schlußsatz intuitiv gesichert werden, sondern nur die Ausgangssätze und jeder einzelne Schritt der Herleitung. Das eröffnet der Mathematik großartige Möglichkeiten, die bereits hier an dem Satz über vollkommene Zahlen sichtbar werden.

5. Anfänge der Logik bei den Eleaten

Etwa zur gleichen Zeit, um 500 und etwas später, wurden in der eleatischen Schule die Anfänge der Logik entwickelt. Von den Ideen dieser Denker kann ich hier nur eine sehr grobe Skizze, fast eine Karikatur geben. Es beginnt mit Xenophanes (ca. 570–475/70), dessen Denken einen religiösen Einschlag hat. Er sagt, man dürfe sich die Götter nicht nach menschlichem Bilde vorstellen, sondern es sei „Ein einziger Gott, unter Göttern und Menschen am größten, weder an Gestalt den Sterblichen ähnlich noch an Gedanken. Er ist ganz Auge, ganz Geist, ganz Ohr (Ganz sieht er, ganz denkt er, ganz hört er). Und stets am selben Ort verharret er, sich gar nicht bewegend.“ [Diels 21 B 23, 24, 26]. [Diels 21 A 33]: „Er (Xenophanes) lehrt, eins sei das All, und sagt, die Gottheit sei ewig, eins, überall gleich, begrenzt, kugelförmig und in allen ihren Teilen voll Wahrnehmung.“

Parmenides (ca. 515–445 v. Chr.) hat diese Gedanken mehr rational ausgearbeitet. Er geht davon aus, daß Denken nichts anderes ist als „das Seiende vorliegen lassen und in die Acht nehmen“ [nach Heidegger]. Das Nicht-Seiende kann demnach nicht einmal gedacht werden. Deshalb kann das Seiende nicht entstanden sein. Denn aus Seiendem kann es nicht entstanden sein, sonst wäre es ja vorher schon vorhanden gewesen. Und aus Nicht-Seiendem kann es nicht entstanden sein, weil das Nichtseiende ja nicht einmal denkbar ist. Das Seiende muß auch Eines und Unveränderlich sein, weil es sonst irgendwie am Nicht-Seienden Anteil haben würde. Es kann keine Vielheit und keine Bewegung geben.

Natürlich gab es Gegner, die meinten, daß aus dieser Auffassung viel Ungereimtes folge. Ihnen trat Zenon (Blütezeit etwa 464–461) entgegen mit der Absicht, nachzuweisen, daß aus der Annahme, es gäbe Vieles oder es gäbe Bewegung, ebenfalls Widersprüche folgen. Die Paradoxien des Zenon sind so bekannt, daß ich sie hier nicht noch einmal erzählen möchte. Bemerken möchte ich: Aus einer Art mystisch-religiösen Schau des Xenophanes folgt eine sehr ernst gemeinte Auseinandersetzung des Parmenides mit dem nur scheinbar trivialen Satz „Das Seiende ist und das Nichtseiende ist nicht“, und dann folgen logische Beweiskunststückchen, die Zenon selbst als eine Art Jugendsünde bezeichnet [Platon, Parmenides 128]. Aus dieser Situation ergab sich die Forderung, daß ein Beweis absolut zwingend sein müsse und daß er sich nicht auf die Anschauung stützen dürfe. Denn Zenon wollte ja Aussagen beweisen, die der Meinung und der Anschauung seiner Gegner widersprachen.

6. Die Lehre vom Flächeninhalt

Ich erzähle zunächst, wie ich mir die Entstehung der Inhaltslehre vorstellen könnte, natürlich nicht ohne zu berücksichtigen, was wir historisch wissen.

Grundfigur für die Flächenmessung ist das Rechteck; seine Fläche ist das Produkt aus den Längen der Seiten.

Die nächste Aufgabe ist die Bestimmung der Fläche eines Dreiecks. Eine Möglichkeit dazu ist: man denkt sich das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt; die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks ist die Hälfte des zugehörigen Rechtecks. Bei einer axiomatischen Auffassung würde hier der Satz (als Axiom) gebraucht werden:

(R) *Ein Rechteck wird durch eine Diagonale in zwei flächengleiche (sogar kongruente) Dreiecke zerlegt.*

Diese anschaulich evidente Tatsache haben schon die Babylonier bei ihren Rechnungen benutzt.

Will man den Flächeninhalt eines beliebigen Vielecks bestimmen, so zerlegt man es in Dreiecke und verwandelt diese in Rechtecke. („Verwandeln“ soll die Herstellung einer flächengleichen Figur bedeuten). Dann sind Rechtecke verschiedener Größe zusammenzufassen. Dazu gibt es zwei Wege:

1) Man verwandelt jedes Rechteck in ein Quadrat und addiert die Quadrate mittels des Satzes von Pythagoras. Das letztere wird in den Śulbasūtras gelehrt. Wir besprechen hier nur den zweiten Weg:

2) Man verwandelt alle Rechtecke in solche mit einer vorgeschriebenen Seite. Das ist der einfachste Fall einer „Flächenanlegung“. Wie sie gemacht wird, zeigt Abb. 2.6. $ABCD$ ist das gegebene Rechteck, AB' oder AD' die gegebene Seite, an die angelegt wird. Wie die Konstruktion durchgeführt wird, braucht wohl nicht beschrieben zu werden.

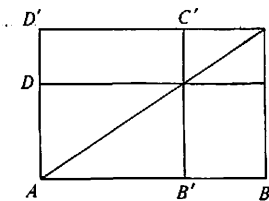


Abb. 2.6

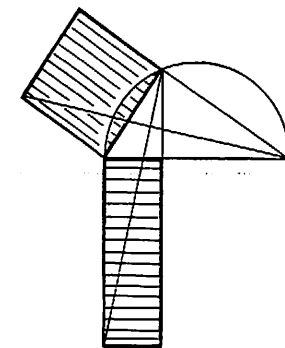


Abb. 2.7

Zum Beweis der Richtigkeit der Konstruktion braucht man den Satz (R).

Auch dieses Verfahren könnte praktisch schon den Babyloniern bekannt gewesen sein (s. den Text IM. 55357, hier S. 23). Nach „der Schule des Eudemos“ sind nicht nur diese einfache Flächenanlegung, sondern auch die „Flächenanlegung mit Überschuß“ und die „Flächenanlegung mit Fehlen“, „Errun-

enschaften der Pythagoreer [Proklos, S. 419]. Gemeint sind die Aufgaben: An eine gegebene Strecke ist eine gegebene Fläche so anzulegen, daß ein Quadrat überschießt bzw. fehlt. Wir sprechen davon später bei den quadratischen Gleichungen.

Man kann also jedes Polygon in ein Rechteck verwandeln. Will man zwei oder mehrere solche Rechtecke geometrisch vergleichen, so müßte man jedes Rechteck (wieder) an eine festgelegte Strecke anlegen. Eine solche Normierung kann man vermeiden, wenn man jedes Rechteck in ein Quadrat verwandelt. In beiden Fällen liegt die kleinere Fläche ganz in der größeren.

Die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat könnte gemäß Abb. 2.7 ausgeführt werden. Benötigt wird dazu

- 1) der Satz, daß die Fläche eines Dreiecks halb so groß ist wie die des Rechtecks mit gleicher Grundlinie und Höhe; er ergibt sich aus (R) in diesem Falle durch Subtraktion;
- 2) ein Kongruenzsatz;
- 3) zur Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks der Satz des Thales.

Es würde hier also gerade der Satz auftreten, den Euklid zu seinem Beweis des Satzes des Pythagoras benutzt. Bei Euklids Beweis ist aber das Dreieck bereits vorhanden, man braucht also den Satz des Thales dabei nicht.

Euklid gibt für die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat ein anderes Verfahren an [El. II, § 14], bei dem der Satz des Thales nicht benutzt wird, dafür aber der Satz des Pythagoras.

Wann könnte der Satz (R) problematisch geworden sein? Wann könnte der Gedanke aufgekommen sein, daß man ihn beweisen muß? Ich meine: dann, wenn man zu der Auffassung kommt, daß die Geometrie nicht auf willkürlich zusammengesuchten Aussagen aufgebaut werden soll, sondern daß ihre Grundlagen systematisch bestimmt werden sollen. Ist eine solche systematische Bestimmung möglich?

Sehen wir uns zunächst einmal die Naturphilosophie an. An dem Satz des Parmenides, daß das Seiende nicht entstanden sein und nicht vergehen kann – denn aus nichts wird nichts – kam man nicht vorbei. Da es nun aber in der Welt Entstehen und Vergehen gibt, kam man auf den Gedanken, daß alle Dinge aus Elementen bestehen, die selbst unveränderlich und unvergänglich sind, aber sich in verschiedener Weise vereinigen und trennen können.

Anaxagoras (ca. 500–425) dachte sich, daß jedes der kleinsten Teilchen alle Entfaltungsmöglichkeiten enthalten müsse, ähnlich den Keimen der Lebewesen. Empedokles („nicht viel später als Anaxagoras geboren“) dachte an die vier Elemente Feuer, Luft, Wasser, Erde. Leukipp und Demokrit nahmen Atome verschiedener geometrischer Formen an. Es würde zu weit führen, die Auffassungen von Platon und Aristoteles hier zu erläutern, die auch die vier Elemente zu Grunde legten, sie aber in gewisser Weise als „Formen“ einer Urmaterie ansahen.

Auch in der Geometrie fand man Elemente, aus denen man sich alle Figuren zusammengesetzt denken kann: Gerade und Kreis. Platon hat diesen Gedanken energisch vertreten [Philebos 51c]. Er „tadelte die Leute um Eudoxos und Archytas und Menaichmos, weil sie es unternommen hatten, die Würfel-

verdoppelung auf mechanische Einrichtungen zurückzuführen, Dadurch wird nämlich das Gute an der Geometrie zugrunde gerichtet und zerstört ...“ Lösungen geometrischer Aufgaben mit anderen Hilfsmitteln als Lineal und Zirkel verfehlen den Sinn der Geometrie, der gerade darin besteht, zu zeigen, wie alle Figuren aus Geraden und Kreisen entstehen [vgl. A. D. Steele: Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik].

War Platon der Erste, der Gerade und Kreis als die Grundfiguren der Geometrie angesehen hat? Proklos berichtet in seinem Kommentar zu der Aufgabe, auf eine Gerade von einem nicht auf ihr liegenden Punkt das Lot zu fallen, daß Oinopides (um 450) sich mit diesem Problem beschäftigt habe. Nun ist es erstaunlich, daß zu einer so einfachen Konstruktion ein Urheber genannt wird. Ein Lot auf eine Gerade fallen konnte man schon lange. Aber vielleicht hat man es früher mit einem besonderen Gerät gezeichnet, z. B. mit einem rechtwinkligen Dreieck aus Holz, und Oinopides hat herausgebracht, wie man es mit Zirkel und Lineal machen kann. Das könnte bedeuten, daß schon zu dieser Zeit Gerade und Kreis als die Grundfiguren der Geometrie angesehen wurden.

Wenn das der Fall war, durften die Ausgangssätze der Geometrie nur Sätze über Geraden und Kreise sein, der Satz (R) mußte bewiesen werden. Zunächst muß sogar bewiesen werden, daß es überhaupt ein Rechteck gibt; denn nur die Existenz der Grundfiguren Gerade und Kreis darf als (anschaulich oder axiomatisch) gesichert gelten, die Existenz aller übrigen Figuren muß durch Konstruktion bewiesen werden (s. S. 109).

Wie kann ein Rechteck, speziell das zu dem rechtwinkligen Dreieck ABC gehörige, gezeichnet werden? Man wird auf AB in A und auf BC in C die Senkrechten errichten (Abb. 2.8). Schneiden sich diese beiden Senkrechten? Das konnte nicht bewiesen werden. Euklid forderte daher als unbeweisbares Postulat: Wenn zwei Geraden von einer dritten (hier AC) so geschnitten werden, daß $\varphi + \psi < 2R$ sind, so schneiden sich die Geraden auf derjenigen Seite von AC , auf der die Winkel φ, ψ liegen. (Man weiß nach Konstruktion, daß $\varphi < 1R$ und $\psi < 1R$ ist; mehr weiß man nicht!).

Nimmt man dieses Postulat an, so läßt sich beweisen: Die Dreiecke ABC und CDA sind kongruent, also entsteht in D ein rechter Winkel.

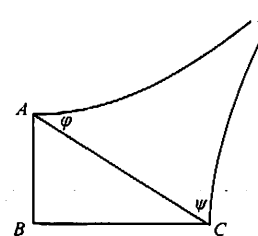


Abb. 2.8

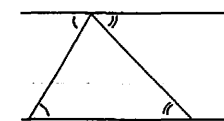


Abb. 2.9

Ich möchte nicht behaupten, daß das Parallelenspostulat auf diesem Wege gefunden worden ist. Es wäre z. B. denkbar, daß der Begriff des Parallelismus und insbesondere die Sätze über die Winkel, die beim Schnitt von zwei paralle-

len Geraden mit einer dritten auftreten, schon bekannt waren, als man einen Beweis für Satz (R) suchte. Jedenfalls haben nach Proklos bzw. Eudemos die Pythagoreer den Satz von der Winkelsumme im Dreieck mittels der Gleichheit der Wechselwirkung an Parallelen bewiesen [S. 379] (Abb. 2.9).

Euklid bringt folgerichtig die Lehre vom Flächeninhalt im I. Buch erst nach § 29, dem Satz über die Winkel an Parallelen, bei dessen Beweis zum ersten Mal das Parallelenpostulat gebraucht wird. Statt von Rechtecken spricht er allgemeiner von Parallelogrammen; die Existenz von Parallelogrammen beweist er in § 33: „Strecken, welche gleiche und parallele Strecken auf denselben Seiten verbinden, sind auch selbst gleich und parallel.“

2.2.3 Aus der Mathematik des 5. und 4. Jahrhunderts

1. Zur Lage der Mathematik

Der Leser wird inzwischen den roten Faden vermissen. Das liegt – abgesehen von der Ungeschicklichkeit des Autors – daran, daß wir keine unmittelbaren Quellen haben. Wir können niemals behaupten „So ist es gewesen“, sondern wir können nur aus Indizien schließen „So könnte es gewesen sein“. Die Aussagen von Indizien sind nicht immer eindeutig, also müssen Einzelheiten genau besprochen werden. Dabei können verschiedene Autoren zu verschiedenen Schlüssen kommen. Ich möchte einige Thesen hier zusammenfassen:

Bei Thales meine ich den Übergang von Vorschriften zu allgemeinen Sätzen zu sehen. Anscheinend hat er sich gelegentlich (wenigstens einmal) Begründungen für die Gültigkeit solcher Sätze überlegt, aber noch ohne eine bestimmte Methode.

Die Pythagoreer haben die Möglichkeit entdeckt, schrittweise Sätze aus anderen Sätzen abzuleiten. Die notwendigen Ausgangssätze werden unmittelbar aus Definitionen abgeleitet, anscheinend bei Zahlen mittels anschaulich evidenter Operationen an endlichen Mengen.

Zu den Voraussetzungen dieser Art Mathematik zu treiben, gehört es, daß Zahlen und Figuren als selbständige Gegenstände der Untersuchung angesehen werden. Sie dienen nicht nur als Hilfsmittel, um die für ein Heer benötigte Menge an Verpflegung auszurechnen oder die Fläche eines Ackers oder die bei einem Kanalbau zu bewegenden Erdmassen, sondern Zahlen haben selbst Eigenschaften: sie sind gerade oder ungerade, teilbar oder Primzahlen usw. Auch Figuren haben Eigenschaften, ihre Teile stehen in Beziehungen zueinander: Punkte liegen auf Linien, Linien schneiden sich, berühren sich, haben eine bestimmte Neigung gegeneinander, Figuren sind inhaltsgleich oder ähnlich oder beides usw.

Die Pythagoreer brachten Ordnung in die Menge der (ganzen) Zahlen, indem sie sie nach bestimmten Gesichtspunkten in Arten einteilten, z. B. wie gesagt in gerade und ungerade usw.; sie untersuchten auch, wie die Zahlen zusammengesetzt sind, z. B. als gerade mal ungerade, oder die vollkommenen Zahlen als $2^n \cdot p$.

Ähnliches spielt sich in der Geometrie ab. Zunächst werden Arten von Figuren erklärt: Gerade, Kreis, Dreieck, Viereck, Quadrat usw. Ganz im Sinne der allgemeinen Tendenz, Komplizierteres durch Zusammensetzung aus Einfachem zu verstehen, zeigt sich, daß aus und mit Gerade und Kreis die übrigen Figuren konstruiert werden können. Es entsteht eine geordnete Theorie der geometrischen Konstruktionen; ich meine, daß auch das etwas Neues ist, was die Griechen geschaffen haben. Dabei liegt die Betonung auf „geordnete Theorie“, denn konstruiert haben sicher schon die Erbauer der Pyramiden, und bestimmte Konstruktionen werden in den Šulbasūtras beschrieben; diese scheinen allerdings die einzige vorgriechische Quelle zu sein, in der Konstruktionen in Worten beschrieben werden.

Im 5. Jh. fanden einige Konstruktionsaufgaben besonderes Interesse: die Teilung eines Winkels in drei gleiche Teile – nachdem die Teilung in zwei gleiche Teile leicht zu konstruieren war; die Verdoppelung des Würfels – nachdem die Verdoppelung des Quadrats leicht zu leisten war [Platon, Menon 82–83]; die Konstruktion eines zum Kreis flächengleichen Quadrats – nachdem diese Aufgabe für ein Polygon gelöst war. Wir werden uns dabei vorstellen dürfen, daß die „elementaren“ Konstruktionen bereits in einem Grundkanon festgelegt waren oder vielleicht von Hippokrates lehrbuchmäßig zusammengestellt worden sind.

Bis zu welcher Strenge dabei die Grundlagen (Definitionen, Axiome) entwickelt wurden, ist für mich nicht erkennbar. Ich würde eher an ein tastendes Suchen als an eine ausgearbeitete Systematik denken. Leider kennen wir die „Elemente“ nicht, die Hippokrates und Theudios geschrieben haben; bei Rekonstruktionen aus Aristoteles und Euklid dürfte es schwer sein, die frühere Denkweise von der späteren zu trennen.

2. Die Dreiteilung des Winkels

Dafür fand Hippias von Elis (ein Sophist des späten 5. Jh.) eine ganz neuartige Methode: die Konstruktion einer geeigneten Kurve, die er durch eine doppelte Bewegung erzeugte. [Pappos Buch 4, XXX, Hultsch S. 252 ff.] (Abb. 2.10). Im Quadrat $ABCD$ bewege sich die Gerade DC mit konstanter Geschwindigkeit nach unten, gleichzeitig drehe sich der Strahl AD bzw. AP mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Der Schnittpunkt Q beschreibt eine Kurve, die später $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\iota\zeta\omicron\upsilon\sigma\alpha$ (γραμμή) = Quadratrix genannt wurde.

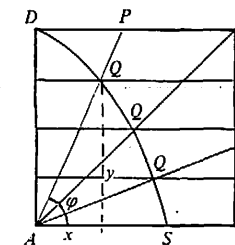


Abb. 2.10. Quadratrix

Die wesentliche Eigenschaft dieser Kurve ist, daß y proportional zu φ ist. Damit ist die Aufgabe, einen gegebenen Winkel φ in 3 oder n gleiche Teile zu teilen, darauf zurückgeführt, die Strecke y so zu teilen.

Einzelne Kurvenpunkte sind leicht zu zeichnen. Man braucht nur den rechten Winkel DAB und die Strecke CB zu halbieren und kann das beliebig oft fortsetzen.

Später hat Deinostratos (ein Bruder des Menaichmos, um 350) entdeckt, daß man mit dieser Kurve auch den Kreis quadrieren kann. An Stelle des griechischen Beweises sei hier das Resultat in modernen Formeln verifiziert:

Wir setzen $BC=1$. Da y proportional zu φ ist und dem Wert $\varphi=\pi/2$ der Wert $y=1$ entspricht, ist

$$y = \frac{1}{\pi/2} \cdot \varphi.$$

Ferner ist

$$x = \frac{y}{\tan \varphi} = \frac{1}{\pi/2} \frac{\varphi}{\tan \varphi},$$

also

$$AS = \lim_{\varphi \rightarrow 0} x = \frac{1}{\pi/2}.$$

Auch die später viel benutzte Methode der Einschiebung ($\nu\epsilon\upsilon\sigma\iota\varsigma$, lat. *inclinatio*, engl. *verging*) wurde bereits im 5. Jh. von Hippokrates angewandt. Pappos beschreibt sie etwa so [VII, 26, Hultsch S. 670]: Gegeben seien zwei Kurven g, h , ein Punkt A und eine Strecke s . Durch den Punkt A soll eine Gerade so gelegt werden, daß die Strecke zwischen g und h gleich s wird (Abb. 2.11). Die Anwendung bei Hippokrates zu schildern, würde etwas längere Ausführungen erfordern. Ich beschreibe deshalb ein Verfahren von Archimedes zur Dreiteilung des Winkels [Liber assumptorum VIII, Op. Bd. 2, S. 518], auf das später u. a. Viète zurückgegriffen hat.

Sei $\varphi = \angle AMB$ (Abb. 2.12) in drei gleiche Teile zu teilen. Man schlägt um den Scheitel M einen Kreis mit dem beliebigen Radius r und legt durch A eine Gerade so, daß $CD=r$ wird. Dann ist $\angle ADB = \alpha = \varphi/3$. Der Beweis durch mehrmalige Anwendung des Außenwinkelsatzes an gleichschenkligen Dreiecken ist aus der Abb. 2.12 abzulesen.

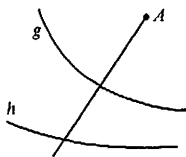


Abb. 2.11

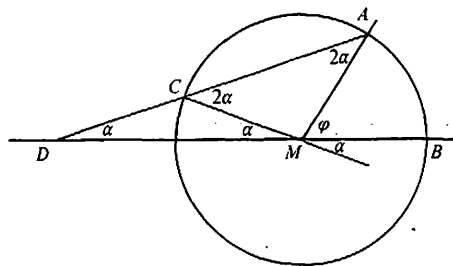


Abb. 2.12

3. Die Verdoppelung des Würfels

Diese Aufgabe, d. h. die Bestimmung von $\sqrt[3]{2}$, hat viele Bearbeiter gefunden. Eutokios (um 500 n. Chr.) hat in seinem Kommentar zu Archimedes' „Kugel und Zylinder“ ausführlich darüber berichtet [Archimedes Op. Bd. 3, S. 54–107. Die Geschichte des Problems beschreibt er dort S. 88 f.]. Hippokrates von Chios (um 440 v. Chr.) hat dazu einen wichtigen Schritt getan: Es gilt

$$1:x=x:x^2=x^2:x^3.$$

Setzen wir $x^2=y$, $x^3=2$, so wird daraus

$$(1) \quad 1:x=x:y=y:2.$$

Die Aufgabe ist also: zwischen 1 und 2, allgemeiner zwischen a und b zwei mittlere Proportionale einzuschalten. In dieser Form ist das Problem stets behandelt worden.

Ich bespreche hier nur die Lösung des Menaichmos. Aus (1) folgt

$$x^2=y, \quad y^2=2x, \quad xy=2.$$

Jede dieser drei Gleichungen ist von den beiden anderen abhängig, d. h. wenn zwei dieser Gleichungen erfüllt sind, ist auch die dritte erfüllt. Das sind aber die Gleichungen von zwei Parabeln und einer Hyperbel. Die Werte x, y können also als die Koordinaten der Schnittpunkte dieser Kurven bestimmt werden.

So hat Menaichmos das natürlich nicht ausgedrückt. Aber wie er es ausgedrückt hat, das können wir auch bei Eutokios nicht finden, denn dieser hatte ja bereits das Werk von Apollonios zur Verfügung, zu dem er auch einen Kommentar geschrieben hat. Versuchen wir also wieder einmal, zu phantasieren, wie es vielleicht gewesen sein könnte. Wir schreiben die Proportion (1), damit der Faktor 1 nicht verlorengeht, so:

$$(1') \quad a:x=x:y=y:b.$$

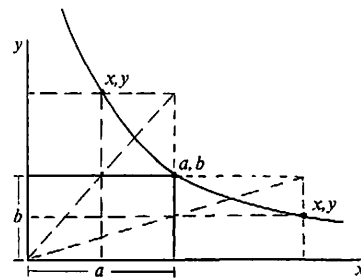
Aus dem ersten und letzten Glied folgt

$$xy=ab,$$

d. h. es sind alle zu dem gegebenen Rechteck ab flächengleichen Rechtecke zu konstruieren. Die Konstruktion mittels der „Gnomonfigur“ (s. S. 87) ist bekannt. Man kann sie für beliebige Werte von x durchführen und erhält eine Kurve, die später von Apollonios Hyperbel genannt wurde (s. Abb. 2.13).

Aus den beiden ersten Gliedern der Proportion (1') erhält man

$$x^2=ay.$$

Abb. 2.13. $xy = ab$

Geht man von x (als unabhängiger Variable) aus, so hat man jeweils zu dem Quadrat über x das Rechteck mit der Seite a zu zeichnen, das dieselbe Fläche hat. Die Konstruktion könnte ebenfalls mit der Gnomonfigur ausgeführt werden.

Statt hier nun auch y als unabhängige Variable anzusehen, gehen wir von den beiden letzten Gliedern der Proportion aus; sie besagen: y ist die mittlere Proportionale zwischen b und x . Sie kann z.B. als Höhe des rechtwinkligen Dreiecks mit den Hypotenusenabschnitten b und x konstruiert werden (s. Abb. 2.14).

Die Namen Ellipse, Parabel und Hyperbel hat erst Apollonios eingeführt; Archimedes benutzt sie noch nicht. Es ist möglich, daß Menaichmos nur die Parabel und Hyperbel gekannt hat, und zwar noch nicht als Schnitte eines Kegels mit einer Ebene, sondern als geometrische Örter, vielleicht so wie hier skizziert oder ähnlich.

Die Aufgabe, zwischen zwei gegebenen Strecken zwei mittlere Proportionale einzuschalten, kann auch durch Einschiebungsverfahren gelöst werden. Verschiedene Verfahren sind von Nikomedes, Apollonios, Heron, Sporos und Pappos angegeben worden [s. Eutokios a.a.O., Heath, Gr. M. Bd. 1, S. 263–268].

4. Die Quadratur des Kreises

Wir wissen seit etwa 100 Jahren, daß π eine transzendente Zahl ist, d.h. keiner algebraischen Gleichung genügt. Die Kreisquadratur – etwa die Konstruktion der Seite des zum Kreis flächengleichen Quadrats oder der zum Umfang gleichen Strecke – kann daher nicht in der Weise geleistet werden, daß man algebraische Kurven (z.B. Kegelschnitte) zum Schnitt bringt, auch nicht durch ein Einschiebungsverfahren (s. S. 92), solange man dabei nur algebraische Kurven benutzt – und meistens wurden nur Kreise und Geraden benutzt. Man muß also entweder eine transzendente Kurve zu Hilfe nehmen wie z.B. die Quadratrix, oder ganz andere Wege finden.

Plutarch berichtet, Anaxagoras (ca. 500–425) habe „im Gefängnis die Quadratur des Kreises aufgeschrieben (oder: gezeichnet, griech. *ἐγραφε*).“ [Diels

59 A 38]. Anaxagoras wurde um 430 wegen Gottlosigkeit angeklagt, weil er behauptet hatte, die Sonne sei ein glühender Stein. Er mußte dann Athen verlassen und ging nach Lampsakos, wo er – hochgeehrt – etwa 425 gestorben ist. Von seiner Kreisquadratur ist weiter nichts überliefert.

Ferner haben sich Hippokrates von Chios (wohl um 440), Antiphon (spätes 5. Jh.) und Bryson mit der Kreisquadratur beschäftigt. Bryson war Schüler des Eukleides von Megara (ca. 450–370), der einer der ältesten Schüler des Sokrates war und später manchmal mit dem Verfasser der Elemente verwechselt wurde. Eine zeitliche Reihenfolge ist also nicht sicher festzustellen, und somit auch keine zeitliche Entwicklung der Ideen. Auch die Berichte über die Gedanken dieser Männer sind unsicher. Wir kennen sie nur aus Kommentaren zu Aristoteles, weil dieser gelegentlich die Kreisquadratur als Beispiel für logische Probleme erwähnt. Über die Kreisquadratur haben berichtet:

Alexander von Aphrodisias. Er lehrte etwa seit 198 n. Chr. in Athen. Sein Kommentar zur 2. Analytik des Aristoteles, auf den es für uns ankommt, ist nicht erhalten, wurde aber von Themistios und Philoponos benutzt und zitiert. Themistios, ca. 317–388 n. Chr., wirkte in Konstantinopel.

Proklos, ca. 411–485 n. Chr. in Athen. Hier kommt nicht sein Euklid-Kommentar in Frage, sondern sein Kommentar zur Analytik des Aristoteles, der nicht erhalten ist. Die in Frage kommenden Stellen sind von Philoponos wiedergegeben.

Ammonios, geb. vor 445 n. Chr., gest. zwischen 517 und 526, war Schulhaupt in Alexandria. Zu seinen Schülern gehören

Philoponos; seine Aristoteles-Kommentare sind weiter ausgebaut und mit eigenen Zusätzen versehene Skripten nach den Vorlesungen von Ammonios [Böhm, S. 28], und

Simplikios, der in Athen wirkte, nach der Schließung der Platonischen Akademie (529 n. Chr.) nach Persien ging (wohl 531), nach zwei Jahren nach Athen zurückkehrte.

Simplikios stützt sich ausdrücklich, die Anderen wahrscheinlich auf die Mathematik-Geschichte des Eudemos.

Alle unsere Nachrichten sind also aus zweiter, dritter oder vierter Hand und sind sicher nicht immer wörtlich wiedergegeben. [s. O. Becker, Hipp.].

Philoponos schreibt: Nach Proklos habe Bryson gesagt: „Der Kreis ist größer als jedes eingeschriebene und kleiner als jedes umgeschriebene Polygon. (Im Vergleich) wozu es aber Größeres und Kleineres gibt, dazu gibt es auch Gleiches. Es gibt aber größere und kleinere Polygone als der Kreis, also gibt es auch ein ihm gleiches.“

Hier wird ein „Stetigkeitsprinzip“ bzw. ein „Zwischenwertsatz“ ausgesprochen, der in der Folgezeit viel diskutiert worden ist. Seine allgemeine Gültigkeit wurde in Frage gestellt. Als Beispiel dafür dienten die „hornförmigen“ Winkel. Nach Euklids Definition [El. I, Def. 8] ist ein Winkel die Neigung zweier Linien gegeneinander, also gibt es auch Winkel zwischen zwei sich berührenden Kreisen oder einem Kreis und seiner Tangente (Berührungswinkel). Dieser Winkel ist kleiner als jeder von 0 verschiedene geradlinige Winkel, aber nach der damaligen Auffassung größer als der geradlinige Winkel 0; und es gibt keinen geradlinigen Winkel, der dem Berührungswinkel gleich ist. Denkt

man sich in Abb. 2.15 den Strahl AB so gedreht, daß der Winkel BAC die Werte von 90° bis 0° durchläuft, so wird er dabei niemals gleich dem Berührungswinkel. Damit bekommt der negierte Zwischenwertsatz die Form: „Der Übergang vom Größeren zum Kleineren geschieht nicht immer durch das Gleiche“ [Proklos, K. Eukl., S. 234]. Beide Formen sind später von Campanus, Clavius [4.4], Peletier, Wallis und Anderen diskutiert worden, wobei meist Bryson ausdrücklich genannt wird. Bolzano bewies den Zwischenwertsatz 1817, nachdem er den Begriff „stetige Funktion“ erklärt hatte [4.4].

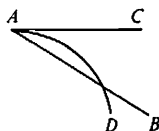


Abb. 2.15

Man kann auch fragen: Unter welchen Bedingungen gilt der Satz „Wozu es ein Größeres und ein Kleineres gibt, dazu gibt es auch ein Gleiches“? Man hat wohl gesagt, daß er nur für „homogene“ Größen gilt. Wann sind Größen homogen? Eudoxos sagt [Euklid, El. V, Def. 4]: wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können, also wenn das sog. Archimedische Axiom gilt. In diesem Sinne sind der hornförmige und der geradlinige Winkel nicht homogen; aber das scheint sogar für Proklos noch fraglich gewesen zu sein; er meint anscheinend, daß alle ebenen Winkel homogen sein müßten [S. 121 ff.]. Aristoteles sagt, daß eine Strecke und eine Kreislinie nicht kommensurabel sind und lehnt deshalb die Anwendung des Zwischenwertsatzes hier ab [Physik, VII, 4 = 248 b 2–6].

Tatsächlich haben die Griechen von diesem Satz nie Gebrauch gemacht. Selbst wenn seine Gültigkeit gesichert gewesen wäre, hätte das für die Kreisquadratur keinen Nutzen gebracht, denn, wie Ammonios sagt, „die den Kreis Quadrierenden forschten nicht danach, ob es möglich sei, daß ein dem Kreis flächengleiches Quadrat existiere, sondern in der Meinung, daß es so sein (existieren?) könne, versuchten sie, ein dem Kreis flächengleiches Quadrat (konstruktiv) zu erzeugen“ [zitiert nach Becker, Eud. II – wie fast alles in diesem Abschnitt].

Ein reiner Existenzsatz war also nicht gefragt. Dazu kommt wohl, daß ein Leitgedanke der Euklidischen (oder sollen wir sagen: der Platonischen?) Geometrie dieser war: Die Existenz von Gerade und Kreis wird durch Postulate festgelegt; für alle übrigen Figuren muß die Existenz durch Konstruktion nachgewiesen werden. (Davon wird noch zu sprechen sein.) Das war zur Zeit des Ammonios wohl ein bei den Mathematikern anerkannter Grundsatz, wahrscheinlich mindestens seit Euklid, aber vermutlich noch nicht zur Zeit des Bryson.

Themistios beschreibt den Gedankengang von Bryson etwas anders: „Der Kreis ist größer als alle eingeschriebenen und kleiner als alle umschriebenen Polygone. Dasselbe gilt für das zwischen diese beschriebene Polygon. Dieses ist also (flächen-)gleich dem Kreis.“ Dabei benutzt Bryson (nach Themistios)

das Axiom: „Sind zwei Größen gegenüber denselben Größen stets größer bzw. kleiner, so sind sie gleich.“ Was gemeint ist, wird besser an der Definition des Eudoxos für die Gleichheit zweier Größenverhältnisse klar [Euklid, El. V, Def. 5].

Zwei Größenverhältnisse $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ sind gleich, wenn für jedes Verhältnis ganzer Zahlen m, n gilt:

$$\text{Wenn } \frac{A}{B} > \frac{m}{n}, \text{ so ist auch } \frac{C}{D} > \frac{m}{n},$$

$$\text{wenn } \frac{A}{B} = \frac{m}{n}, \text{ so ist auch } \frac{C}{D} = \frac{m}{n},$$

$$\text{wenn } \frac{A}{B} < \frac{m}{n}, \text{ so ist auch } \frac{C}{D} < \frac{m}{n}.$$

So drückt Euklid das nicht aus, sondern (natürlich in Worten) so:

$$\text{Wenn } n \cdot A > m \cdot B, \text{ so ist auch } n \cdot C > m \cdot D \text{ usw.}$$

Dieser Satz ist keine Existenz-, sondern eine Eindeutigkeitsaussage. Bei Bryson erscheint er als Axiom, bei Eudoxos als Definition.

Wie mag sich Bryson das „dazwischen beschriebene Polygon“ vorgestellt haben? Jedenfalls mußte es nicht unbedingt mit dem Kreis zusammenfallen, es sollte ihm nur flächengleich sein. Ob Bryson versucht hat, die Fläche dieses Polygons zu berechnen, ist nicht überliefert. Das war damals auch gar nicht verlangt; verlangt war die geometrische Konstruktion eines dem Kreis flächengleichen Polygons.

Antiphon hat diese Konstruktion etwas bestimmter angegeben. Er ging vom ein- und umbeschriebenen Dreieck (nach Themistios) oder dem Quadrat (nach Simplicios) aus und verdoppelte jeweils die Seitenzahlen [Diels 87 B 13]. Er hat gemeint, daß die Seiten des Polygons schließlich „wegen ihrer Kleinheit die Peripherie des Kreises bedecken“. Das dabei verwendete Wort *ἐφαρμόσσειν* ist dasselbe wie in Euklids Axiom [El. I, Ax. 7 (8)]: „Was einander deckt, ist einander gleich.“ Eine Rechnung ist auch von Antiphon nicht überliefert.

Die Arbeit von Hippokrates ist u. a. von Simplicios überliefert, der angibt, daß er die Darstellung von Eudemos wörtlich wiedergegeben habe, mit Ausnahme einiger aus Euklid übernommener Zusätze. Dieses Stück ist daher neben der oben besprochenen Lehre vom Geraden und Ungeraden als das älteste zusammenhängend erhaltene Stück der griechischen Mathematik anzusehen.

Hippokrates hat sich darum bemüht, zunächst einige von Kreisbogenstücken begrenzte Flächen zu quadrieren. In Abb. 2.16 sind die Kreissegmente A , A , C ähnlich. Hippokrates ging von dem Satz (S) aus: Die Flächen ähnlicher Kreissegmente verhalten sich wie die Quadrate über ihren Sehnen. Da für die Sehnen gilt

$$2a^2 = c^2,$$

gilt für die Flächen

$$2A = C.$$

Fügt man zu dem Dreieck PQR einerseits $2A$ hinzu und nimmt andererseits C weg, so erhält man: Die Fläche des „Mondes“ zwischen den Kreisbögen ist gleich der Fläche des Dreiecks. Hippokrates hat mehrere solcher Mönchen verschiedener Form in ähnlicher Weise quadriert. Die Quadratur des Kreises ist damit aber nicht zu erreichen. Im Zuge dieser Konstruktionen kommt auch einmal eine Einschiebung vor.

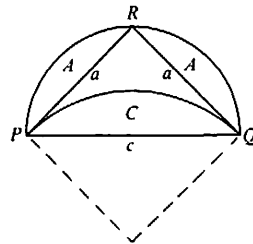


Abb. 2.16

Den Satz S leitet Simplicios mit den Worten ein: „Hippokrates legte sich einen Ausgangspunkt zurecht (*ἀρχὴν ἐποιήσατο*) und wählte als einen der dazu nützlichen Sätze“ den Satz S . Ein strenger Beweis dieses Satzes würde infinitesimale Methoden erfordern. Aus der altbabylonischen Konstantentabelle ST III möchte ich schließen, daß der Sachverhalt damals bereits bekannt war. Zeile 2 dieses Textes lautet:

5 ist die Konstante des Kreises.

Wie aus Aufgabentexten bekannt ist, bedeutet das: Wenn man die Fläche des Kreises erhalten will, muß man *das Quadrat* des Umfangs mit 5 multiplizieren. (Da sexagesimal $5 = 5/60 = 1/12$ zu rechnen ist, bedeutet das: $F = u^2/12$, das entspricht dem Wert 3 für π). Zeile 26 lautet:

1,40 ist die Konstante des Fünfecks.

Das würde entsprechend bedeuten: Die Fläche des regelmäßigen Fünfecks erhält man, wenn man *das Quadrat* der Seite mit 1,40 d. h. $1\frac{2}{3}$ multipliziert.

Einige weitere dieser Konstanten sind ähnlich zu interpretieren; auch Kreissegmente treten dabei auf.

Hippokrates könnte also hier eine altbekannte Tatsache als Ausgangspunkt seiner Untersuchung gewählt haben. Daraus wäre zu schließen, daß man zwar

wußte, daß für geometrische Sätze unbewiesene Ausgangssätze gebraucht wurden, daß diese Ausgangssätze aber noch nicht in ein System gebracht waren.

Diese Überlegung wird dadurch in Frage gestellt, daß Simplicios dem Hippokrates einen Beweis des Satzes S zuschreibt, den er so skizziert: Es gilt der Satz [Euklid, El. XII, § 2]: „Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate der Durchmesser“. Dieser Satz wird auf gleiche Teile von zwei Kreisen, also ähnliche Kreissektoren übertragen, und weiter auf die zugehörigen Segmente.

Der Satz [El. XII, 2] wird bei Euklid mittels der von Eudoxos entwickelten Exhaustionsmethode bewiesen; der Beweis wird später (S. 117) wiedergegeben. Dieser Beweis war dem Simplicios bekannt und konnte vielleicht auch dem Eudemos bekannt sein, aber kaum dem Hippokrates. Also konnte Hippokrates diesen Satz allenfalls an Stelle von S als unbewiesenen Ausgangspunkt benutzt haben. Aber warum sagt Simplicios dann, Hippokrates habe sich S als Ausgangspunkt zurechtgelegt?

Simplicios hat aber auch gesagt, daß er Zusätze aus Euklid eingefügt hat. Ich meine: Simplicios will seinen Lesern zeigen, daß das Ergebnis von Hippokrates richtig ist; deshalb muß er für den Ausgangspunkt des Hippokrates einen Beweis auf der Grundlage von Euklids Elementen geben. Simplicios will außerdem zeigen, daß die Überlegung von Hippokrates einwandfrei ist; deshalb muß er diesen Beweis dem Hippokrates zuschreiben. (Ich bitte den Leser, sich eine eigene Meinung zu bilden. Lit.: O. Becker [Hipp.], Rudio, Heath [Gr. M. Bd. 1, S. 173, 183 ff.]

Nach dem Mathematikerverzeichnis von Proklos [S. 66/67] hat „Hippokrates als Erster ‚Elemente‘ zusammengestellt“ (*στοιχεῖα συνέγραψεν*). „Reichhaltigere und nach Brauchbarkeit der Beweise bessere ‚Elemente‘ schrieb Leon“, der etwas jünger als Eudoxos war. Schließlich hat Theudios „die ‚Elemente‘ in ein gut geordnetes System gebracht“ (*καλῶς συνέταξεν*). Aus diesem Werk von Theudios könnte Aristoteles die Geometrie gelernt haben.

Was zur Zeit des Hippokrates naheliegend und fast notwendig war, war eine Kodifizierung oder lehrbuchmäßige Darstellung der elementaren Konstruktionen: Halbieren von Strecke und Winkel, Errichten von Senkrechten, Fällen von Loten usw. Diese Konstruktionen mußten gerechtfertigt werden, man mußte z. B. zeigen, daß der nach der Vorschrift konstruierte Punkt wirklich der Mittelpunkt der Strecke war usw. Es ist anzunehmen, daß Hippokrates sich auch hier wie bei der Quadratur der Mönchen Ausgangspunkte, also Axiome, zurechtlegte. Aus den Elementen Euklids läßt sich auf Grund von antiken Hinweisen eine Gruppe von Axiomen und Sätzen herauschälen, die aus einer älteren Quelle und also vielleicht von Hippokrates stammen könnten [van der Waerden, Postulate]. Aber wie die Elemente von Hippokrates wirklich ausgesehen haben, und wie sie sich über die Verbesserungen von Leon zu den „schön geordneten“ von Theudios entwickelt haben, wissen wir leider nicht. Heiberg hat versucht, die Elemente des Theudios oder wenigstens Teile davon aus den Äußerungen von Aristoteles zu erschließen [Mathematisches zu Aristoteles]; aber auf diese Weise kann man natürlich nicht feststellen, was von Theudios und was von Aristoteles stammt.

5. Inkommensurable Größen

Es gibt Strecken, die kein gemeinsames Maß haben. Wie diese Entdeckung zustande gekommen ist, ist nicht überliefert. In Platons Dialog Theaitetos wird eine Verallgemeinerung besprochen, aus der hervorgeht, daß die Grundtatsache vorher bekannt war. Die Überlieferung schreibt die Entdeckung dem Pythagoreer Hippasos von Metapont zu, der sie etwa in der Mitte des 5. Jh. gemacht haben könnte [von Fritz, Ink.]. Knorr setzt sie noch etwas später an, etwa 430 [S. 42 ff.].

Euklid bringt [El. X, § 115 a] den bekannten Beweis dafür, „daß in jedem Quadrat die Diagonale (d) der Seite (s) linear inkommensurabel ist“: Es ist $d^2 = 2s^2$. Wären sie kommensurabel, so hätten sie ein Verhältnis wie eine (ganze) Zahl (p) zu einer (ganzen) Zahl (q): $d:s = p:q$. Es kann vorausgesetzt werden, daß p und q nicht beide gerade Zahlen sind. Aus $d^2 = 2s^2$ folgt $p^2 = 2q^2$. Daraus folgt nach der Lehre vom Geraden und Ungeraden [Euklid El. IX, § 29, s. hier S. 83] daß p nicht ungerade sein kann; es ist also $p = 2p'$. Dann ist aber $q^2 = 2p'^2$, also auch q eine gerade Zahl.

Ist dieser Beweis auch der Weg, auf dem die Erkenntnis gewonnen wurde? Ein indirekter Beweis geht von der zu beweisenden Tatsache aus, um aus der Annahme des Gegenteils einen Widerspruch herzuleiten. Die zu beweisende Tatsache muß also vorher bekannt sein oder wenigstens vermutet werden [Knorr, S. 24].

Man kann sich etwa vorstellen, daß zunächst ein gemeinsames Maß durch „Wechselwegnahme“ gesucht worden ist (Abb. 2.17). Man zieht die Seite s von der Diagonale d ab; haben d und s das gemeinsame Maß e , so ist auch $r = d - s$ durch e meßbar, also auch $s_1 = r$, $d_1 = s - r$, also die Seite und Diagonale des kleineren Quadrats. Durch Fortsetzung des Verfahrens kann man (offenbar) erreichen, daß s_n und d_n immer noch das gemeinsame Maß e haben, aber beliebig klein, insbesondere $< e$ werden.

Ein Beweis dafür könnte so aussehen: Es ist

$$s_{n+1} = d_n - s_n < \frac{1}{2} s_n, \quad \text{denn } d_n = \sqrt{2} s_n.$$

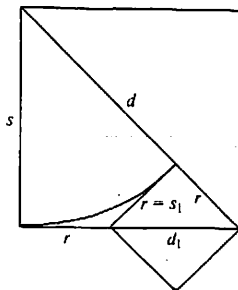


Abb. 2.17

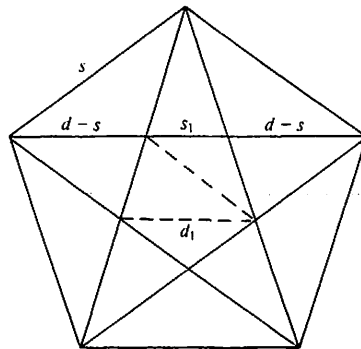


Abb. 2.18

Nun gilt: Sind zwei Größen, hier s und e , gegeben, und nimmt man von der größeren mehr als die Hälfte weg, vom Rest wieder mehr als die Hälfte usw., so erhält man nach endlich vielen Schritten eine Größe, die kleiner ist als die kleinere der gegebenen Größen, hier also $s_n < e$. Diesen Satz [Euklid El. X, § 1] kannte der Überlieferung nach Eudoxos; vielleicht war er auch schon früher bekannt. Aber auch ohne diesen Beweis kann die vorangegangene Überlegung dazu genügen, die Inkommensurabilität zu vermuten und sich dann den indirekten Beweis zu überlegen.

Auch beim regelmäßigen Fünfeck ist ein Beweis für die Inkommensurabilität der Diagonale d und der Seite s leicht und anschaulich zu führen. Die Diagonalen des Fünfecks erzeugen ein kleineres Fünfeck, dessen Diagonale mit d_1 und dessen Seite mit s_1 bezeichnet seien (Abb. 2.18). Man sieht verhältnismäßig leicht:

$$\begin{aligned} (*) \quad d_1 &= d - s \\ s_1 &= d - 2(d - s) = 2s - d. \end{aligned}$$

Man muß nur feststellen, daß jede Diagonale zu einer Seite parallel ist, und benutzen, daß parallele Strecken zwischen Parallelen gleich lang sind.

Aus (*) folgt: Haben d und s ein gemeinsames Maß e , so haben d_1 und s_1 dasselbe gemeinsame Maß e . Daß bei Fortsetzung des Verfahrens d_n und s_n kleiner als e gemacht werden können, folgt daraus, daß $d_{n+1} = d_n - s_n < \frac{1}{2} d_n$ ist.

Dafür, daß Hippasos den Beweis am Fünfeck geführt haben könnte, sprechen die Argumente:

- 1) Es ist überliefert, daß Hippasos sich mit dem regelmäßigen Dodekaeder beschäftigt hat, dessen Seitenflächen bekanntlich Fünfecke sind.
- 2) Das Fünfeck bzw. das Pentagramm war das Erkennungszeichen der Pythagoreer; das wäre ein Motiv dafür, sich mit dieser Figur besonders gründlich zu beschäftigen.
- 3) Für einen geometrischen Satz wird man zunächst nach einem geometrischen Beweis suchen, nicht nach einem zahlentheoretischen.

Dagegen spricht, daß der Beweis am Quadrat überliefert ist, der am Fünfeck nicht. (Ich möchte übrigens nicht behaupten, daß der hier angegebene Beweisgang für das Fünfeck der einzig mögliche ist.)

Wir wollen uns insbesondere vergegenwärtigen, welche Voraussetzungen erfüllt sein mußten, damit diese Erkenntnis gewonnen werden konnte:

Es ist ein logischer Beweis nötig; denn daß etwas *nicht* existiert (hier: ein gemeinsames Maß), kann nicht anschaulich aufgezeigt werden. Notwendig ist also die Erkenntnis, daß es so etwas wie logische Beweise gibt.

Für den Beweis am Quadrat braucht man einen Spezialfall des Satzes von Pythagoras, der schon lange bekannt war und auch an einer einfachen Figur aufzuzeigen ist. Ferner braucht man etwas von der Lehre vom Geraden und Ungeraden, aber nur den Satz: Wenn p^2 gerade ist, ist p selbst gerade. Ich meine: notwendig ist ein klein wenig Beweistechnik, aber nicht ein ausgearbeitetes Axiomensystem.

Der Fünfecksbeweis scheint mir etwas mehr geometrische Kenntnisse vorauszusetzen. In der von mir angedeuteten Form wird etwas Parallelentheorie benutzt; dazu kommt die hier notwendige Überlegung, daß die Fünfecke beliebig klein werden.

2.2.4 Die logische Analyse

1. Sophistik

Das logische Argumentieren spielt auch in der Rhetorik eine Rolle, und die Rhetorik muß in den damaligen griechischen Demokratien wichtig gewesen sein, um Volksversammlungen und auch Gerichtshöfe zu beeinflussen. Die Stadt Leontinoi wird gewußt haben, warum sie ihren bedeutendsten Redner Gorgias im Jahre 427 als Führer einer Gesandtschaft nach Athen sandte.

Natürlich mußte ein Redner nicht nur logisch argumentieren, er mußte auch Emotionen zu wecken verstehen und anderes mehr. Aber die logische Argumentation hatte immerhin den Vorzug, daß sie zwingend war. Nur: so ganz sicher war das nicht; auch sie ließ sich – wenigstens scheinbar – manipulieren.

Als Beispiel sei ein Stück einer Rede des Gorgias wiedergegeben, allerdings nicht wörtlich, sondern nach der Inhaltsangabe von Gomperz [S. 18]. Die Schrift hat den Titel „Über die Natur“. Aber Gorgias will beweisen: „1. Es existiert nichts; 2. wenn auch etwas existiert, so ist es doch für den Menschen unerkennbar; 3. ist es aber auch erkennbar, so ist es doch unaussprechlich und nicht mitteilbar. I. Es existiert nichts. Denn wenn etwas existiert, so muß dies entweder Seiendes sein oder Nichtseiendes oder Seiendes *und* Nichtseiendes. Allein jede dieser drei Möglichkeiten läßt sich widerlegen. A) Nichtseiendes kann nicht existieren. Erster Beweis: Wenn Nichtseiendes existiert, so kommt demselben Subjekt zugleich Sein und Nichtsein zu. Denn sofern das existierende Nichtseiende als Nichtseiendes gedacht wird, *ist* es nicht, sofern es aber als existierend gedacht wird, *ist* es wiederum. Dasselbe kann aber nicht zugleich sein und nicht sein.

Zweiter Beweis: Wenn das Nichtseiende existiert, so existiert das Seiende nicht. Denn Entgegengesetztes hat entgegengesetzte Eigenschaften. Das Seiende kann aber nicht ein Nichtseiendes sein. Folglich existiert das Nichtseiende nicht. Allein: B) auch Seiendes kann nicht existieren. Erster Beweis: Wenn Seiendes existiert, so muß es entweder ewig sein oder entstanden oder ewig *und* entstanden. Alle drei Möglichkeiten aber lassen sich widerlegen. ...“

Es sei bemerkt, daß hier einige Verfahren und Sätze der Logik benutzt werden, z. B. das Verfahren der Fallunterscheidung, der Satz vom Widerspruch (dasselbe kann nicht zugleich sein und nicht sein), die Regel „Entgegengesetztes hat entgegengesetzte Eigenschaften“ (die zwar falsch ist, aber plausibel klingt), die Schlußregel:

Wenn A dann B (wenn das Nichtseiende existiert, dann existiert das Seiende nicht).

Nun aber non B (das Seiende kann nicht ein Nichtseiendes sein).

Also non A (folglich existiert das Nichtseiende nicht).

Hier wird als selbstverständlich vorausgesetzt: Das Seiende kann nicht ein Nichtseiendes sein. Und unmittelbar danach wird bewiesen: Seiendes kann nicht existieren. Rechnet Gorgias damit, daß die Zuhörer den vorigen Satz schon vergessen haben? Hat Gorgias mit dem komplizierten Aufbau die Zuhörer einfach überfahren?

Inhaltlich waren solche Reden offenbar nicht ernst zu nehmen. Gorgias, Protagoras und die weiteren sogenannten „Sophisten“ waren Lehrer der Rhetorik, die herumreisten, oft Gäste in reichen und bildungsbeflissenen Häusern waren und gegen Honorar Kurse gaben – übrigens nicht nur in Rhetorik; sie vermittelten auch andere Kenntnisse. Sie mußten demonstrieren, wie man eine Rede geschickt anlegt, und die Probe ihres Könnens bestand gerade darin, daß sie möglichst unsinnige Behauptungen „beweisen“ konnten. Gomperz schreibt [S. 27]: „Überall, wo der Fortschritt einer Kunst von der Eroberung neuer Kunstmittel ausgeht, äußert sich die Freude an dieser Erweiterung des Könnens in einem zunächst spielerischen Gebrauch der neuerschlossenen technischen Behelfe.“ In diesem Sinne sehe ich das Einüben logischer Verfahren, deren Berechtigung vorerst nicht untersucht wurde, als einen wichtigen Beitrag der Sophisten zur Entwicklung der Logik an.

In der Mathematik hat damals die Möglichkeit der Deduktion zu vielen neuen Ergebnissen geführt, ohne daß es zunächst nötig gewesen wäre, dieses Verfahren zu systematisieren oder theoretisch zu begründen. Möglich wäre freilich, daß die Pythagoreer oder etwa Hippokrates solche Systematisierung oder theoretische Begründung in Angriff genommen hätten.

2. Die Definition

Wenn das Argumentieren in Form einer Diskussion zwischen zwei Kontrahenten stattfand, kam es darauf an, zu wissen, wie man in einer solchen Diskussion gewinnen konnte. Sokrates kam auf den Gedanken, daß man die Ausgangsposition genau festlegen mußte. Das bedeutete zunächst, daß man die Begriffe, über die man sprechen wollte, genau definierte. Xenophon berichtet [Mem. IV, 6, 13–15]: Wenn jemand mit Sokrates darüber diskutieren wollte, ob A oder B der bessere Politiker sei, so verlangte Sokrates, zunächst festzulegen, welche Eigenschaften und Fähigkeiten ein guter Politiker haben muß: Er muß die Stadt reicher an Geld machen, er muß sie im Kriege den Gegnern überlegen machen, er muß in der Volksversammlung Streit schlichten und die Einheit wiederherstellen. Hat man sich darauf geeinigt, so ist leicht festzustellen, ob A oder B diesen Anforderungen besser entspricht.

Die Definition wird hier dadurch gewonnen, daß Merkmale des guten Politikers zusammengesucht werden, wie sie einem gerade einfallen. (Ich vermute, daß Sokrates sie so ausgesucht hat, daß der von ihm Favorisierte sich als der bessere erwies.)

Sokrates wollte aber wohl noch etwas mehr. Aristoteles sagt [Metaph. M, 4 = 1078 b 17–19]: „Sokrates war der erste, der auf dem Gebiete der ethischen Tugenden seine Betrachtungen anstellte und für sie die Allgemeinbegriffe zu definieren suchte“, z. B. nach Xenophon den Begriff der Frömmigkeit. M.a.W. es ging ihm nicht um beliebige Begriffe, sondern um eine Begründung der Ethik.

Für Platon ist die Definition ein wesentlicher Bestandteil der Erkenntnis. Statt „Definition“ möchte ich hier lieber „Begriffsbestimmung“ sagen, aber beides hängt gerade für Platon sehr eng zusammen. Im 7. Brief schreibt er [342 a–c]: „Bei jedem Ding gibt es drei Momente, durch die die Erkenntnis notwendig zustandekommen muß; das vierte ist sie selbst; als fünftes ist das zu setzen, was (durch die Vernunft) erkennbar und das wahrhaft Seiende ist. Das eine ist der Name (*ὄνομα*), das zweite der Begriff (*λόγος* = die sprachlich ausgedrückte Begriffsdefinition), das dritte das (mit den Sinnen wahrnehmbare) Bild (*εἶδωλον*), das vierte die Erkenntnis (*ἐπιστήμη*).“

Wenn du das jetzt Gesagte verstehen willst, so fasse es an einem (Beispiel) und denke dir dann die Sache bei allen Dingen entsprechend. „Kreis“ ist ein angesprochenes Ding, das den eben von uns ausgesprochenen Namen hat. Das zweite ist die Begriffsdefinition, die aus Nenn- und Aussagewörtern zusammengesetzt ist, nämlich „das von seinen äußersten Punkten bis zum Mittelpunkt überall gleich weit Entfernte“ ... Das dritte ist, was da hingemalt und ausgelöscht, gedreht und zerstört werden kann. Von diesem allen widerfährt dem Kreise an sich, um den sich unsere ganze Rede dreht, ... nichts. Das vierte ist das wissenschaftliche Erkennen.“

Was folgt aus dieser Einschätzung der Definition für die Mathematik? Platon schreibt [Staat, 6. Buch, 510c]: „Du weißt ja doch, daß die, welche sich mit Geometrie und Arithmetik und dergleichen abgeben, den Begriff von Gerade und Ungerade (griech. nur: das Gerade und Ungerade) von Figuren und den drei Arten von Winkeln und sonst dergleichen bei jedem Beweisverfahren voraussetzen, als hätten sie über diese Begriffe ein Wissen; sie machen sie zu Hypothesen (Grundlagen) und halten es nicht für nötig, sich oder andern noch irgend eine weitere Rechenschaft davon zu geben als über etwas, das jedermann klar ist; diese (Hypothesen) nehmen sie als Ausgangspunkt und durchlaufen dann das Übrige (die mathematischen Beweise) bis sie zu dem gelangen, auf dessen Untersuchung sie ausgegangen sind.“ [S. von Fritz: Archai. Grundpr. S. 361].

(„Hypothesen“ sind das, was man bei einer Diskussion zugrundelegt, das, worüber man sich bei Beginn der Diskussion mit seinem Kontrahenten verständigt. „Rechenschaft geben“ ist die Übersetzung von *λόγον διδόναι*; *λόγος* bedeutete im 7. Brief die Begriffsdefinition.)

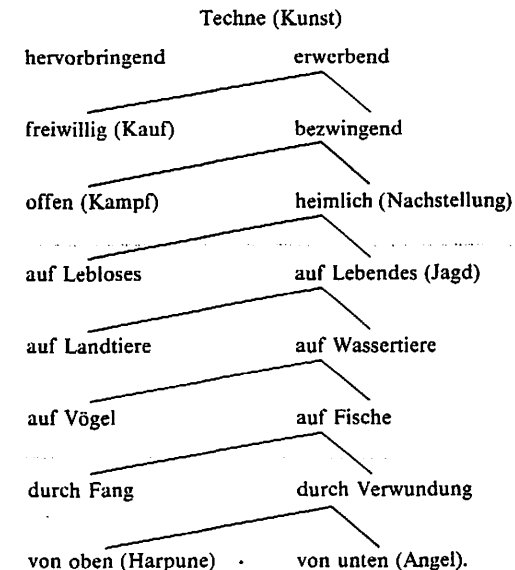
Was Platon vermißt, sind also Definitionen. Und es sieht so aus, als würden Definitionen allein als die Grundlage von Beweisen angesehen. Dazu paßt es, daß in der Lehre vom Geraden und Ungeraden allein die Definition dieser Begriffe als Ausgangspunkt genommen wurde. Das 5. Buch von Euklids Elementen, das nach der Überlieferung von Eudoxos stammt, enthält nur Definitionen, keine Axiome; insbesondere ist auch das sog. Archimedische Axiom hier als Definition gefaßt. In den arithmetischen Büchern 7–9, die wahrschein-

lich von den Pythagoreern stammen, stehen nur Definitionen und keine Axiome. Erst in der lateinischen Ausgabe von Campanus (ca. 1260 n. Chr.) finden sich Axiome zum 7. Buch. (Eingesehen wurde der Druck aus dem Jahre 1482). Freilich kann Euklid der Ansicht gewesen sein, daß die von ihm am Anfang des 1. Buches angegebenen Postulate und Axiome für das ganze Werk ausreichend seien. Die Vermutung, daß bis zur Zeit von Platon Definitionen allein als ausreichende Grundlagen einer beweisenden Wissenschaft angesehen wurden, ist also nicht besonders gut gesichert. Außerdem hat ja Hippokrates sich einen Satz als Ausgangspunkt und Grundlage seiner Untersuchung zurechtgelegt.

3. Wie muß eine Definition aussehen?

Wenn die Definition eine so große Bedeutung hat, darf man sich nicht darauf beschränken, die Merkmale auf gut Glück zusammenzusuchen, sondern muß sich um Regeln zur systematischen Aufstellung von Definitionen bemühen. Platon hat das im Dialog Sophistes besonders ausführlich erörtert. Er will eine Definition des Sophisten erarbeiten und führt als Übungsbeispiel zunächst eine Definition der Angelfischerei vor. Sie wird zunächst einem recht allgemeinen Begriff untergeordnet, dem Begriff *τέχνη*. Dieses Wort bedeutet etwa: auf Erfahrung und Wissen gegründetes Können. Das deutsche Wort „Kunst“ hat eine engere Bedeutung; wir wollen es trotzdem hier verwenden. Platon teilt die Künste in erwerbende und hervorbringende, die erwerbenden

Tabelle 2.1. Platons Definition der Angelfischerei. Sophistes 218 e



„Nun also sind wir von der Angelfischerei nicht nur über den Namen einig, sondern haben auch die Erklärung über die Sache selbst zur Genüge erlangt“.

Tabelle 2.2. *Der Baum des Porphyrios* nach Gregor Reisch [4.4]:

Substantia	
Corporea	Incorporea
Corpus	
Animatum	Inanimatum
Corpus animatum	
Sensibile	Insensibile
Animal	
Rationale	Irrationale
Homo	Equus
Ioannes, Petrus	Brunellus, Grisellus
Nicholaus	Spadicinus

in solche auf freiwilliger Basis und gewaltsame usw. und erreicht nach vielen Einteilungen die Angelfischerei (s. die schematische Darstellung auf S. 105).

Dabei entsteht eine Ordnungsrelation zwischen Begriffen, die Aristoteles durch die Worte „Gattung“ und „Art“ beschrieben hat. Die schematische Darstellung, präzisiert durch exakte Zweiteilungen, wurde unter dem Namen „Baum des Porphyrios“ bekannt. (Porphyrios schrieb im 3. Jh. n. Chr. eine Einteilung in die Kategorienlehre des Aristoteles.) Diese Ordnungsrelation ist auch der Grund dafür, daß logisches Schließen möglich ist: Was von der Gattung ausgesagt werden kann, kann auch von jeder ihrer Arten ausgesagt werden.

Um einen Begriff zu definieren, muß man nicht den ganzen Baum des Porphyrios angeben, es genügt die nächsthöhere Gattung und die charakterisierende Differenz (*Definitio fit per genus proximum et differentiam specificam*).

Es zeigt sich aber auch, daß die in dem Schema obersten Begriffe so nicht definiert werden können. Platon sagt [Theaitetos 202 b]: „Denn Verflechtung von Namen sei das Wesen der Erklärung. So wären die Urbestandteile (*στοιχεῖα*) unerklärbar (*ἄλογα*) und unerkennbar (*ἄγνωστα*), wahrnehmbar aber seien sie.“

4. Der Begriff „Größe“

Das ist der Begriff, mit dem es die Mathematik zu tun hat. Er gehört zu den „Kategorien“, die Aristoteles so einführt [Kat. 4 = 1 b 25–27]: „Jedes ohne Verbindung gesprochene Wort bezeichnet entweder eine Substanz oder eine Größe (*ποσόν*) oder eine Qualität oder eine Relation oder ein Wo oder ein Wann oder eine Lage oder ein Haben oder ein Wirken oder ein Leiden.“ Das Wort „Größe“ kann in zweifachem Sinne gebraucht werden: wir können sagen: etwas *ist* eine Größe, oder: etwas *hat* eine (bestimmte) Größe. Diese Zweideutigkeit scheint mir auch bei Aristoteles vorhanden zu sein.

Als einer der obersten Begriffe kann „Größe“ nicht in der gewöhnlichen Weise definiert werden. Aristoteles beginnt mit der Angabe einer charakteristischen Eigenschaft [Met. Δ, 13 = 1020 a 7 ff.]:

„Größe (*ποσόν*) heißt, was in Bestandteile zerlegbar ist, von denen jeder seiner Natur nach ein Eines und Dieses ist.“

Das dürfte bedeuten, daß jeder Teil für sich existieren kann, im Gegensatz zu den Teilen eines Organismus, und daß jeder Teil von der gleichen Art ist wie das Ganze. Ein Teil einer Länge ist selbst eine Länge; allerdings haben die Griechen ein einzelnes Schaf kaum als Schafherde und eine einzelne Einheit nicht als eine Zahl bezeichnet.

Aus dieser Erklärung darf abgeleitet werden: Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile. Das steht z. B. bei Clavius als Axiom [4.4].

Aristoteles teilt nun die Größen in zusammenhängende und nicht-zusammenhängende. Der Begriff „zusammenhängend“ ist in der früher entstandenen Schrift über die Physik definiert. Die Definition setzt die Definition von „Grenze“ voraus. Diesen Begriff bespricht Platon [Menon 75 d, e]: „Du nennst doch etwas „Ende“, ich meine etwa das, was die Grenze und das Äußerste ist.“ (Anschließend erklärt Platon, was „Figur“ ist, nämlich „was den Körper begrenzt“. Vgl. Euklid: El. I, Def. 14: „Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.“) Platon gibt hier keine Definition von „Grenze“. Der Sprecher versucht nur, festzustellen, daß er und der Partner dasselbe unter diesem Wort verstehen. Euklid sagt [El. I, Def. 13]: „Eine Grenze ist das, worin etwas endigt.“ Aristoteles mag vielleicht diese Erklärung als bekannt vorausgesetzt haben, bevor er etwas genauer ausführte [Met. Δ, 17 = 1022 a 4]: „Grenze wird das Äußerste von jedem (Ding) genannt, außerhalb dessen zuerst nichts mehr von ihm angetroffen wird, innerhalb dessen zuerst alles liegt.“ (Man bedenke, welche (topologischen) Begriffe zu einer modernen Definition von „Grenzpunkt“ erforderlich sind und wann diese Begriffe konzipiert worden sind.)

Aristoteles' Definition von „zusammenhängend“ lautet [Phys. V, 3 = 227 a 11]: „Ich sage, es sei etwas zusammenhängend (*συνεχές*, lat. continuum), wenn die Grenze eines jeden von zwei Dingen, mit welcher sie sich berühren, eine und dieselbe wird.“

Leibniz definiert [4.4 (gekürzt)]: Ein Kontinuum ist ein Ganzes, von dem je zwei Teile, die zusammen das Ganze überdecken, etwas Gemeinsames haben, d. h.: wenn sie keinen gemeinsamen Teil haben, so haben sie wenigstens eine gemeinsame Grenze.

Continuum est totum, cujus duae quaevis partes cointegrantes (seu quae simul sumtae toti coincidunt) habent aliquid commune, et quidem si non sint redundantes seu nullam partem commune habeant, sive si aggregatum magnitudinis eorum aggregato totius aequale est, tunc saltem habent communem aliquem terminum.

Im 19. Jh. wurde die Definition im Rahmen der Mengenlehre neu formuliert. Während nach Aristoteles ein Kontinuum ins Unendliche teilbar ist und eben deshalb nicht aus unteilbaren Teilen (Punkten) bestehen kann, wird im 19. Jh., beginnend mit Bolzano 1847/48 [4.4], ein Kontinuum als Punktmenge mit bestimmten Eigenschaften definiert. Daß das möglich ist, kann anschaulich vielleicht so verstanden werden: Eine Strecke kann selbstverständlich nicht mit endlich vielen Punkten ausgefüllt werden; aber unendlich viele Punkte können vielleicht doch so dicht liegen, daß man von etwas Zusammenhängendem, einem Kontinuum sprechen kann. Die Schwierigkeit liegt für Aristoteles wie für uns darin, daß man sich unendlich viele Punkte nicht vorstellen kann.

Um bei einer Punktmenge *M* von „zusammenhängend“ sprechen zu können, braucht man einen Begriff, der die Lage eines Punktes gegenüber anderen Punkten von *M* beschreibt. Das leistet z. B. (es gibt auch andere Möglichkeiten) der Begriff „Umgebung“. Denken wir z. B. an

eine Punktmenge in der euklidischen Ebene, so sind Umgebungen eines Punktes p diejenigen Teilmengen von M , die eine Kreisscheibe um p enthalten. In einer beliebigen Punktmenge lassen sich Umgebungen axiomatisch (d. h. durch ihre Eigenschaften) beschreiben. Eine Punktmenge M , in der ein solcher Umgebungsbegriff erklärt ist, heißt „topologischer Raum“.

Der Begriff „Umgebung“ ermöglicht die Definition des „Häufungspunktes“: p heißt Häufungspunkt einer Teilmenge A von M , wenn jede Umgebung von p mindestens einen von p verschiedenen Punkt von A enthält. Ein Häufungspunkt von A braucht nicht zu A zu gehören. Wenn A alle Häufungspunkte enthält, heißt A „abgeschlossen“.

Nun kann definiert werden, wann ein topologischer Raum M (oder eine Teilmenge eines topologischen Raumes) als „zusammenhängend“ bezeichnet werden soll, nämlich dann, wenn je zwei nicht leere, abgeschlossene Mengen, die ihn überdecken, mindestens einen Punkt gemeinsam haben.

Ein zusammenhängender topologischer Raum ist z. B. die Menge der reellen Zahlen mit der Topologie, die daraus abgeleitet ist, daß $|a - b|$ als Abstand von a, b erklärt wird. Hier gibt es unendliche Teilmengen, die keinen Häufungspunkt haben. Es ist, z. B. für die Anwendungen in der Analysis, zweckmäßig, dieses Vorkommnis auszuschließen. Frechet hat Mengen, in denen ein Limes-Begriff erklärt ist und in denen es zu jeder unendlichen Menge von Elementen ein Limes-Element gibt, „kompakt“ genannt [Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rendiconti Circ. Matem. Palermo 22, 1906, S. 4]. Auf die weitere Entwicklung und Präzisierung dieses Begriffes kann ich hier nicht eingehen.

Damit haben wir die Merkmale, durch die heute ein Kontinuum definiert wird, nämlich als ein zusammenhängender kompakter topologischer Raum.

Was unterscheidet diese Definition von der des Aristoteles? Die Definition von „zusammenhängend“ ist inhaltlich ungefähr die gleiche. Auch für die Forderung der Kompaktheit kann man mit einiger Gewalttätigkeit eine Andeutung bei Aristoteles finden. Eine Teilmenge eines euklidischen Raumes ist dann und nur dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist; und Aristoteles führt zunächst die in einer oder zwei oder drei Richtungen zusammenhängenden Größen ein, die er Länge, Breite, Tiefe nennt, danach die begrenzten Größen, die Linie, Fläche, Körper heißen. In der modernen Definition ist genauer analysiert, welche Eigenschaften ein „Ganzes“ (als Punktmenge aufgefaßt) haben muß, damit es Kontinuum genannt werden kann, und damit diese Definition einerseits möglichst gut das erfaßt, was wir uns anschaulich unter einem Kontinuum vorstellen, und andererseits für eine mathematische Verwendung brauchbar ist.

Wir kehren zur Einteilung der Größen [Metaph. Δ , 13] zurück:

„Was der Möglichkeit nach in nicht-zusammenhängende Teile zerlegbar ist, heißt *Menge* ($\pi\lambda\eta\theta\omicron\varsigma$), was in zusammenhängende Teile zerlegbar ist, heißt *Ausdehnung* ($\mu\epsilon\gamma\epsilon\theta\omicron\varsigma$)“.

Das Wort $\pi\lambda\eta\theta\omicron\varsigma$ hängt etymologisch mit $\pi\omicron\lambda\upsilon$ = viel zusammen, ebenso wie das Wort *Menge* mit dem alten Wort *manec* = viel, das noch in *manch-*, *mannigfaltig* erhalten ist. – Auch $\pi\lambda\eta\theta\omicron\varsigma$ hat die doppelte Bedeutung von *Menge* und *Maß einer Menge* = Mächtigkeit = Kardinalzahl. Beide Bedeutungen kommen bei der mathematischen Anwendung dieses Begriffes bei den Griechen vor.

Die Definition des Aristoteles „Menge ist ein aus nicht-zusammenhängenden Teilen bestehendes Ganzes“ hat auch eine gewisse Ähnlichkeit mit der Definition von Cantor: „Menge ist eine Zusammenfassung wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung und unseres Denkens zu einem Ganzen“ [Math. Ann. 46, 1895, S. 481 = Ges. Abh. S. 282].

„Von der Ausdehnung heißt die, die nach einer Richtung zusammenhängt, Länge, nach zwei Richtungen Breite, nach drei Richtungen Tiefe. Von diesen wieder heißt die begrenzte Menge „Zahl“, die (begrenzte) Länge „Linie“, die Breite „Fläche“ und die Tiefe „Körper“.

Aristoteles führt hier also das ein-, zwei- und dreidimensionale Kontinuum ein. Die Einheit bzw. der Punkt als das, was keine Teile hat, fällt nicht unter diesen Begriff der Größe. Die Einheit hat Aristoteles bereits in Metaph. Δ , 6 = 1015 b 16 ff. besprochen.

Euklids Definitionen haben mit diesen Erklärungen des Aristoteles so viel Ähnlichkeit, daß ein Zusammenhang angenommen werden muß. Es ist möglich, daß Euklid bewußt die Geometrie in das System des Aristoteles einordnen wollte. Es ist auch möglich, daß Aristoteles seine Theorie an einem mathematischen Werk seiner Zeit, etwa an den „Elementen“ des Theudios, die leider nicht erhalten sind, abgesehen hat.

5. Gerade und Kreis

Euklid geht nun weiter: Er definiert zusätzlich Gerade und Kreis und bringt damit in die n -dimensionale Mannigfaltigkeit (hier mit $n \leq 3$) eine bestimmte Struktur hinein. Riemann ist (1854) wieder auf die n -dimensionale Mannigfaltigkeit zurückgegangen und hat die Struktur durch eine Metrik eingeführt [4.4].

Daß Gerade und Kreis als Grundfiguren angesehen werden, dafür kann man sich auf eine Äußerung Platons [Philebos 51c] berufen: „Als Schönheit von Figuren versuche ich jetzt nicht das zu bezeichnen, was die Menge dafür nehmen dürfte, wie z. B. die von lebenden Wesen oder Gemälden, sondern ich verstehe darunter ... Gerade und Kreis und die von diesen aus durch Zirkel und Lineal und Winkel entstehenden ebenen und räumlichen (Figuren).“

Dieser Text würde eine sorgfältige Interpretation erfordern, die ich nicht zu geben beabsichtige. Meines Wissens ist es die einzige Stelle in Platons Dialogen, aus der auf die Beschränkung der Konstruktionsmittel auf Zirkel und Lineal geschlossen werden kann.

Im Dialog Hippias maior [287c, d] erklärt Platon, Schönheit sei das, weswegen schöne Gegenstände schön genannt werden. (Man vergleiche Euklid El. VII, Def. 1: Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.) Vielleicht will Platon im Philebos sagen, daß die Schönheit einer Figur dann verstanden ist, wenn ihre Konstruktion aus Gerade und Kreis erkannt ist.

Im Dialog Parmenides [137d, e] zeigt Platon, daß das Eins ohne Gestalt ist, weil es weder gerade noch rund sein kann. Darin steckt wieder die Vorstellung, daß „gerade“ und „rund“ die Elemente jeder Form sind. (Es folgen die Definitionen: „Rund ist dasjenige, dessen Enden von der Mitte überall gleich weit abstehen, gerade ist das, dessen Mitte die Enden deckt.“ (Dabei könnte an das Entlangvisieren an einem Lineal gedacht sein.) Da das Eins keine Teile, also keine Mitte und keine Enden hat, kann es weder gerade noch rund sein.)

6. Postulate und Axiome

Für Sokrates war es ein Ziel der Erkenntnis, genau zu erklären, was z. B. Frömmigkeit ist [Xenophon, Mem. IV, 6]. Platon wollte wissen, was Schönheit ist, was wissenschaftliche Erkenntnis ist, wie ein Sophist zu kennzeichnen ist

und anderes mehr. Aristoteles fragt z. B. in der Physik: Was ist Bewegung? Was ist „Ort“, was ist das Leere, das Unendliche usw. Wenn Begriffsbestimmungen das Ziel sind und Begriffe aus einfachen Begriffen zusammengesetzt gedacht werden, dann sind die Definitionen der einfachen Begriffe die Grundlage solcher Wissenschaft.

Der Mathematiker will aber nicht (nur) verstehen, was ein Kreis ist, sondern er will Aussagen über den Kreis machen und sich von der Richtigkeit dieser Aussagen dadurch überzeugen, daß er sie auf gewisse Grundaussagen zurückführt, die ihrerseits „wahr“ sein sollen. Jedenfalls reichen Definitionen als Grundlage nicht aus, selbst dann nicht, wenn man die Regeln der Logik als selbstverständlich nicht besonders erwähnt.

Aristoteles beschreibt die Grundlagen (Prinzipien) einer beweisenden Wissenschaft in der 2. Analytik, Buch 1, Kap. 2 und 10. Ich gebe die Umschreibung von von Fritz [Archai 21] wieder: „Das (2.) Kapitel beginnt mit einer Definition des Wissens: man weiß etwas, wenn man den Grund erkennt, warum es so ist, und damit die Gewißheit hat, daß es nicht anders sein kann. Eine Art, auf diese Weise etwas zu wissen, ist durch einen Beweis. Ein Beweis ist ein wissenschaftlicher, d. h. im oben angegebenen Sinn zum Wissen führender, logischer Schluß (Syllogismus). Auf Grund dieser ersten und allgemeinsten Bestimmungen sucht Aristoteles dann festzustellen, welche Eigenschaften diejenigen Prämissen haben müssen, aus denen jede bewiesene Wissenschaft letztendlich abgeleitet wird: sie müssen wahr (*ἀληθεῖς*), erste (*πρώται*), unvermittelt (*ἀμέσσοι*), einsichtiger (*γνωριμώτεροι*) als das aus ihnen Geschlossene, früher (*πρότεροι*), und das aus ihnen Geschlossene begründend sein (*αἰτιαί*).“

Was versteht Aristoteles darunter, daß die Prinzipien „wahr“ sein sollen? In der Topik [I, 1 = 100a 30–b 20] sagt er: „Wahre und erste Sätze sind solche, die nicht erst durch anderes, sondern durch sich selbst glaubhaft sind (*δι' αὐτῶν ἔχοντα τὴν πίστιν*). Denn bei den Prinzipien der Wissenschaften darf man nicht nach dem Warum fragen.“ Er sagt nicht, daß sie anschaulich evident sein sollen oder aus der Erfahrung zu abstrahieren sind. Vielleicht kann das, was er meint, durch die Worte „denkmöglich“ oder „denknotwendig“ umschrieben werden. Es würde damit in die Nähe von „widerspruchsfrei“ kommen.

Daß die Prinzipien „begründend“ sein sollen, entspricht der Forderung der Vollständigkeit: Die Prinzipien sollen ausreichen, um alles das, was bewiesen werden soll, wirklich zu beweisen.

Außerdem verlangt Aristoteles, daß die Prinzipien „einsichtiger“ und „früher“ sein sollen als das aus ihnen Geschlossene. Das bedeutet offenbar, daß die Auswahl dessen, was als erstes Prinzip genommen, und dessen, was daraus abgeleitet wird, nicht freisteht, sondern durch das Verhältnis der beiden zueinander bestimmt wird, und zwar so, daß das als Prinzip angenommene in sich einsichtiger, einfacher und abstrakter sein muß als das, was daraus abgeleitet wird. [v. Fritz, Archai 23 = Gr. Pr. 346].

Aristoteles unterscheidet drei Arten von Prinzipien [72 a 14–24]: „Von den unvermittelten Prinzipien eines Schlusses nenne ich *Thesen* (Setzungen, Festsetzungen, Annahmen) diejenigen, die man nicht beweisen kann und die nicht jeder schon inne zu haben braucht, der etwas wissenschaftlich begreifen will;

dagegen nenne ich die Prinzipien, die jeder, der etwas wissenschaftlich begreifen will, inne haben muß, *Axiome*. Denn es gibt einige solche Sätze ([Kap. 10 = 76 a 41]: z. B. daß Gleiches von Gleichem abgezogen, Gleiches läßt). Von den Thesen sind diejenigen, die ... annehmen, daß etwas ist oder nicht ist, *Hypothesen*, diejenigen, die das nicht tun, *Definitionen*. Denn die Definition ist zwar eine These – denn der Arithmetiker setzt, daß Einheit das der Größe nach Unteilbare ist – aber keine Hypothese. Denn es ist nicht dasselbe, zu sagen, was Einheit ist, und daß Einheit ist.“ (Hier wird „Hypothesen“ in einem etwas engeren Sinne gebraucht als z. B. in Platons Staat (s. S. 104).)

Im 10. Kap. nennt Aristoteles eine andere Einteilung, die praktisch ungefähr, aber nicht vollständig mit dieser Einteilung in Axiome und Thesen zusammenfällt [76 a 37–38]: „Es sind aber von den Prinzipien, die man in den beweisenden Wissenschaften verwendet, die einen der jeweiligen Wissenschaft eigentümlich, die anderen allgemein.“ Tatsächlich handeln die Definitionen und Postulate im 1. Buch von Euklids Elementen von geometrischen Gegenständen, während die Axiome (sie heißen bei Euklid *κοινὰ ἔννοια*, bei Campanus „communes animi conceptiones“) allgemein für Größen gelten. Das gilt sogar von dem Axiom 7: „Was einander deckt, ist einander gleich“. Es wird z. B. von Albert von Sachsen ausdrücklich auch auf Mengen angewandt [4.4].

Die Postulate fordern aber nicht nur die Existenz der begrifflich definierten Gegenstände Gerade und Kreis, sondern auch die Existenz von Beziehungen zwischen diesen und Punkten und zwischen Winkeln. Man müßte die Worte von Aristoteles „daß etwas ist“ in diesem weiteren Sinne auslegen, d. h. sie auch für Relationen gelten lassen.

Andererseits fordern die Postulate nur die Existenz von Geraden und Kreisen, evtl. Punkten, aber nicht die Existenz anderer Figuren; deren Existenz muß durch Konstruktionen aus der von Geraden und Kreisen abgeleitet werden.

Das Postulat 5 (Parallelenpostulat) gibt an, unter welchen Bedingungen zwei Geraden einen Schnittpunkt haben. Es ist eigentlich klar, daß ein solches Postulat gebraucht wird. Aber man fand wohl, daß es nicht der Forderung entsprach, daß die Prinzipien „einsichtiger“ und „früher“ sein sollten als das aus ihnen Geschlossene. Die Kritiker dieses Postulats haben sich lange Zeit darum bemüht, es durch ein einleuchtenderes zu ersetzen.

Anm. Die Darstellung dieses Abschnitts beruht weitgehend auf der mehrfach zitierten Arbeit „Archai“ von K. von Fritz. Dort ist vieles ausführlicher und gründlicher behandelt.

2.2.5 Zusammenfassung

Die Griechen sind von Rechenvorschriften zu allgemeinen Sätzen übergegangen. Da ein Theorem oft zahlreiche Vorschriften ersetzt, die aus ihm abgeleitet werden können, bedeutet das eine große Vereinfachung des Stoffes, so daß Kräfte für neue Entdeckungen frei werden.

Wir können uns schwer vorstellen, wie die Ägypter und Babylonier zu ihren Vorschriften gekommen sind, ohne allgemeine Sätze zu kennen und zu benutzen. Das Stichwort „Rezept“, das oft auf die alten Vorschriften angewandt

wird, kann da vielleicht hilfreich sein. Ein Koch- oder Backrezept ist keineswegs immer einfach. Gefunden wird es aber nicht auf Grund von Kenntnissen in der organischen Chemie, sondern durch Probieren. Das geschieht nicht ganz unsystematisch: der Bäcker weiß, was passiert, wenn er ein Ei mehr oder einen Löffel Mehl weniger nimmt.

Überliefert werden solche Rezepte bekanntlich durch Abschreiben. Dabei denkt der Abschreiber gar nicht mehr darüber nach, warum es so oder so gemacht wird, es muß nur ein guter Kuchen herauskommen.

Es ist nicht leicht, aber wohl nicht unmöglich, sich vorzustellen, daß mathematische Vorschriften in ähnlicher Weise entstanden sein könnten. Manche uns noch unverständliche Texte der Babylonier könnten mißlungene Versuche sein.

Das Ergebnis kann man oft praktisch prüfen. So ist es möglich, daß die Ägypter die Vorschrift für den Pyramidenstumpf korrigiert haben, weil die einfache Mittelbildung zu oft nicht stimmte (s. S. 64); sie hatten oft mit Steinen solcher Form zu tun. Auch bei den Babyloniern sind Korrekturen, hier für den Wert der Quadratdiagonale und den Kreis, bekannt (s. S. 35, 41). Eine Rechnung konnte durch eine Probe kontrolliert werden. Das haben die Ägypter oft getan; bei den Babyloniern hat das Variieren der Daten einer Aufgabe einen ähnlichen Erfolg.

Die Frage, *warum* eine Vorschrift richtig ist, wurde jedenfalls in den bisher bekannten Texten nicht gestellt. Das hat wohl Thales zum ersten Mal getan, wenn er, wie Eudemos sagt, die Messung der Entfernung von Schiffen auf See durch einen Kongruenzsatz gerechtfertigt hat.

Dazu muß man aber zunächst bemerken, daß es so etwas wie „Sätze“ gibt. Das steht – meine ich – im Zusammenhang damit, daß man die Weltentstehung und einzelne physikalische Erscheinungen als naturgesetzlich, nicht als Tätigkeiten persönlicher Götter zu verstehen versucht.

Es setzt außerdem voraus, daß man Zahlen und Figuren als *Gegenstände* der Untersuchung ansieht, deren Eigenschaften und Relationen in Aussagen, Sätzen, erfaßt werden.

Zu all dem finden sich Ansätze bei Thales, Ansätze, aus denen im Lauf der Jahrhunderte allmählich wie aus einem Nebel scharfe Konturen heraustreten.

Pythagoras entdeckt, daß die Harmonie der Töne durch Zahlenverhältnisse bestimmt ist. Ein Vorgang der Wirklichkeit, noch dazu ein so ungreifbarer wie eine musikalische Harmonie, ist durch ein ganz strenges Zahlengesetz beherrscht.

Heraklit sieht in dem Vorgang des Werdens und Vergehens, das so flüchtig ist wie das Aufflammen und Erlöschen des Feuers, eine Gesetzmäßigkeit, aus der selbst der Sonnengott nicht ausbrechen kann.

Parmenides begründet die Unentrinnbarkeit des logischen Schließens: Das Seiende ist und das Nichtseiende ist nicht. Sein Schüler Zenon beginnt mit der Ausarbeitung von Methoden des formal-logischen Argumentierens. Daß dabei zuerst indirekte Schlüsse auftreten, dürfte daran liegen, daß sie besonders einfach sind; sie bedürfen keiner ausgearbeiteten Axiomatik (s. S. 101).

Ob die altpythagoreischen Gedankengänge, also die Lehre vom Geraden und Ungeraden und die Lehre vom Flächeninhalt, älter oder jünger sind als die Arbeiten von Zenon, scheint mir nicht sicher zu sein.

Nun stellt sich sowohl in der Mathematik der Pythagoreer und des Hippokrates wie auch in der Sophistik heraus, daß man gesicherte Ausgangspositionen braucht, um zu „wahren“ Ergebnissen zu kommen. Sokrates und Platon haben die Definition als grundlegend herausgestellt, wobei auch herauskam, daß die ersten Grundbegriffe nicht definierbar sind. Daß man in der Mathematik außer den *Grundbegriffen* auch *Grundsätze* braucht, scheint Hippokrates bemerkt zu haben.

Aristoteles hat durchdacht, welche Grundlagen für eine beweisende Wissenschaft erforderlich sind, und hat das systematisch dargestellt. Ob er es an vielleicht schon vorhandenen „Elementen“ der Mathematik abgelesen hat, ist wohl kaum mit Sicherheit festzustellen.

Nachdem klargestellt war, von welcher Art die Grundlagen der beweisenden Wissenschaft sein müssen, war festzulegen, welches die Grundbegriffe und Grundsätze der Mathematik sein sollen. Das ist nicht als zeitliche Reihenfolge zu verstehen; die Mathematiker haben schon vorher Gerade und Kreis als Grundfiguren der Geometrie und „teilbar“ und „Primzahl“ usw. als Grundbegriffe der Zahlenlehre behandelt. Jetzt kommt das in eine systematische Ordnung. Aus der Kategorie der Größe, die nicht eigentlich definiert, sondern beschrieben wird, ergibt sich der Begriff der Zahl einerseits und des 1-, 2-, 3-dimensionalen Kontinuums andererseits. Dieser wird durch die Begriffe Gerade und Kreis spezialisiert. Axiome werden als allgemeine Aussagen über Größen, Postulate als Aussagen über Gerade und Kreis formuliert.

Zusammen mit der Methode machte auch der Inhalt der Mathematik große Fortschritte. Ich erinnere an die Quadratrix, also die Erfindung einer speziellen Kurve zur Lösung eines speziellen Problems (der Dreiteilung des Winkels), an die Erfindung der Einschiebungsmethode, an das Auftauchen von Zwischenwert- und Stetigkeitssätzen bei der Kreisquadratur, an die Entdeckung oder Erfindung der Kegelschnitte, vielleicht zuerst als geometrische Örter, aber bei Aristaos oder Euklid, deren Schriften darüber verloren sind, als Schnitte des Kreiskegels mit einer Ebene usw. usw.

Als besonders folgenreich erwies sich die Entdeckung inkommensurabler Strecken. Natürlich wird man sagen wollen, daß die Seite und die Diagonale eines Quadrats ein Verhältnis zueinander haben, auch wenn es nicht das Verhältnis einer ganzen Zahl zu einer ganzen Zahl ist. Dazu mußte eine neue Definition und Theorie allgemeiner Größenverhältnisse geschaffen werden. Sie erhielt im 4. Jh. durch Eudoxos ihre endgültige Gestalt.

2.3 Größenverhältnisse und Exhaustionsmethode

2.3.1 Zahlen- und Größenverhältnisse

Unter „Zahlen“ verstehen wir in diesem Abschnitt stets positive ganze Zahlen. Man hat gelegentlich gefragt, warum die Griechen die Begriffe der rationalen und der reellen Zahl nicht geschaffen haben. Ich möchte dagegen fragen, warum wir natürliche, ganze, rationale, reelle und komplexe Zahlen alle mit

dem gemeinsamen Namen „Zahlen“ bezeichnen. Wie würde eine Definition aussehen, die genau diese Gegenstände umfaßt? Die Griechen hatten die Definition [El. VII, 2]: Zahl ist eine Zusammenfassung von Einheiten. Diese Definition erfaßt die natürlichen Zahlen (außer der 1); andere Dinge wurden nicht „Zahlen“ genannt.

Man kann allerdings Brüche in diesem Sinne als Zahlen auffassen, wenn man die ursprüngliche Einheit in kleinere Einheiten aufteilt, wie das ja beim Messen (etwa einer Strecke) in der Praxis ständig geschieht. Vielleicht haben schon die Ägypter so gedacht (s. S. 51). Platon sagt [Staat 525 d]: „Du weißt doch, daß die echten Meister in dieser Kunst einen auslachen und es nicht zulassen würden, wenn jemand es unternehmen würde, die Einheit in Gedanken zu zerschneiden, und wenn du sie zerteilen wolltest, so würden sie sie vervielfältigen und es nie geschehen lassen, daß die Einheit nicht als Einheit, sondern als viele Teile erschiene.“ Das scheint darauf hinzudeuten, daß auch die Griechen beim praktischen Rechnen die Einheit in Gedanken in kleinere Einheiten eingeteilt haben. In der Theorie aber ist der Begriff der Einheit mit dem Begriff der Unteilbarkeit verbunden, eine Vorstellung, die wahrscheinlich auf die Eleaten, Xenophanes und Parmenides, zurückgeht.

Also kann Euklid Brüche nicht als Zusammenfassungen kleinerer Einheiten erklären, sondern muß die Teile einer Zahl als das behandeln, was sie sind, nämlich eben Teile einer Zahl.

Natürlich kann ein Teil einer Zahl wieder eine Zahl sein. Euklid definiert [VII, Def. 3]: „Teil einer Zahl ist eine Zahl, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere genau mißt.“ Wir werden hier eine Definition von „genau messen“ vermissen; wir würden definieren: a ist Teil von b , geschrieben $a = b/n$, wenn es eine (ganze) Zahl n gibt, für die $b = n \cdot a$ ist. Euklid definiert aber das Produkt erst in Definition 15.

Es gibt Zahlen, die aus mehreren solchen Teilen einer anderen Zahl bestehen. Wir würden $a = m \cdot (b/n)$ schreiben, aber das dürfen wir nicht als Produkt auffassen, sondern als Zusammenfassung mehrerer solcher Teile b/n , die aber auch nicht als kleinere Einheiten bezeichnet werden dürfen. Euklid bezeichnet eine solche Zahl a durch den Plural „Teile“ von b ; Thaer übersetzt „Menge von Teilen“ (s. Kap. 4.2 unter „Euklid“). In etwas freier Wiedergabe lautet die Definition 4: Eine Zahl a heißt „einige Teile“ von b , wenn a die Zahl b nicht genau mißt.

Diese Definition bringt offenbar nicht das zum Ausdruck, was Euklid eigentlich meint. Sonst brauchte er nicht in § 4 zu beweisen: „Jede kleinere Zahl ist von jeder größeren Zahl entweder ein Teil oder eine Menge von Teilen.“ Zum Beweis benutzt Euklid das in §§ 2, 3 dargestellte „Euklidische Teilerverfahren“, d. h. er bestimmt den größten gemeinsamen Teiler, der allerdings (dieser Fall wird besonders besprochen) auch 1 sein kann.

Offenbar meint Euklid in Def. 4, daß a eine eindeutig bestimmte Menge von Teilen von b sein soll, d. h. in unserer Darstellung, daß m und n teilerfremd sein sollen.

Nachdem festgestellt ist, daß zwischen zwei Zahlen a, b immer eine Beziehung der Form $a = m \cdot (b/n)$ mit eindeutig bestimmten Zahlen m, n besteht, kann erklärt werden, wann zwei Zahlenpaare a, b und c, d „dem Verhältnis

nach gleich“ sind (Thaer übersetzt: in Proportion stehen), nämlich wenn zugleich mit $a = m \cdot (b/n)$ auch $c = m \cdot (d/n)$ gilt. (Trotzdem steht diese Definition 20 bei Euklid vor dem Satz von § 4, weil Definitionen grundsätzlich am Anfang stehen müssen.)

Es sei bemerkt, daß Euklid nicht definiert, was ein Verhältnis zweier Zahlen ist, sondern wann zwei Verhältnisse einander gleich sind.

Für geometrische Größen ist diese Definition nicht brauchbar, weil kein Analogon zu dem Satz § 4 gilt. Das kann den Grund haben, daß die Größen A, B von verschiedener Art sind, wie z. B. Strecken und Flächen. Aber auch bei Größen gleicher Art kann es vorkommen, daß sie kein gemeinsames Maß haben, d. h. daß es keine zwei Zahlen m, n gibt, für die $A = m \cdot (B/n)$ ist. Trotzdem wird man sagen wollen, daß z. B. in einem Dreieck eine Parallele zu einer Seite auf den beiden anderen Seiten Strecken abschneidet, die im gleichen Verhältnis stehen. Wie kann man zwei Größenpaare dem Verhältnis nach vergleichen?

Man kann sich vielleicht zunächst einmal n als fest vorstellen und der Reihe nach $m = 1, 2, 3, \dots$ setzen. Man wird ein m erhalten, für das

$$m \cdot (B/n) < A < (m+1) \cdot (B/n)$$

ist. Es kann sein, daß für dasselbe n und dasselbe m auch

$$m \cdot (D/n) < C < (m+1) \cdot D/n$$

gilt. Wenn dieser Fall für alle n eintritt, wird man die Verhältnisse $\frac{A}{B}$ und $\frac{C}{D}$ als gleich erklären können. Euklid sagt das etwas allgemeiner [Buch V, Def. 5]: $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, wenn für alle Zahlenpaare m, n

$$\begin{array}{ll} \text{aus } n \cdot A < m \cdot B \text{ stets } n \cdot C < m \cdot D, \\ \text{aus } n \cdot A = m \cdot B & n \cdot C = m \cdot D \\ \text{und aus } n \cdot A > m \cdot B & n \cdot C > m \cdot D \text{ folgt.} \end{array}$$

[S. auch Fowler (unter Eudoxos)].

Nach einem antiken Scholium soll das Buch V der Elemente Euklids, also diese Theorie der Größenverhältnisse, von Eudoxos stammen [Euklid, Op. Bd. 5, S. 280, 282].

Man braucht noch ein Kriterium dafür, wann zwei Größen von gleicher Art sind. Dieses Kriterium wird so formuliert, daß es genau das aussagt, was gebraucht wird, nämlich: Zwei Größen heißen „von gleicher Art“ (homogen), wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können. (In dieser Form steht die Definition bei al-Nayrizi, S. 162. Euklid sagt [El. V, Def. 4]: „Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können“).

Anm. Der Name „Archimedisches Axiom“ scheint 1880 von O. Stolz eingeführt worden zu sein [Math. Ann. 22, 1883, S. 504; hier wird auf eine frühere Arbeit verwiesen]. „Bei Archimedes begegnet man einer ausdrücklichen Annahme, welche mit diesem Grundsatz überein-

stimmt [z. B.: K. u. Z. I., Postulat 5]. Derselbe mag daher kurz als das Axiom des Archimedes bezeichnet werden. – Fußnote: Archimedes sagt in der Vorrede zur Schrift de quad. parabolae ausdrücklich, daß den in Rede stehenden Grundsatz schon frühere Geometer benutzten. Dazu gehört, wie aus dem Anfange des I. B. von der Kugel und dem Cylinder hervorgeht, unzweifelhaft Eudoxos. Wahrscheinlich ist er noch älter.“ – Eben aus diesem Grunde möchte ich eine Umbenennung in „Axiom des Eudoxos“ nicht befürworten. Sinnvoll erscheint mir die Bezeichnung „Axiom des Messens“, die sich z. B. bei O. Becker findet [Eud. III, S. 243 f.].

Bei der Definition von $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ist es nicht nötig, daß alle vier Größen von gleicher Art sind; es genügt, wenn A und B von gleicher Art und C und D von gleicher Art sind.

Def. 7 erklärt, wann $\frac{A}{B} > \frac{C}{D}$ ist, nämlich wenn es ein Zahlenpaar m, n gibt, für das $n \cdot A > m \cdot B$ und $n \cdot C < m \cdot D$ ist. Wir würden dafür auch schreiben: $\frac{A}{B} > \frac{m}{n} > \frac{C}{D}$.

Jetzt ist es auch möglich, Größenverhältnisse mit Zahlenverhältnissen zu vergleichen, und, wenn eine Gleichheit nicht existiert, ein Größenverhältnis zwischen zwei Zahlenverhältnissen einzuschließen, sogar beliebig eng. Archimedes hat das bekanntlich für das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser getan. Er schreibt [Kr., Op. Bd. 1, S. 242/3 = Op. d., S. 377]: „Der Umfang des Kreises ist demnach dreimal so groß wie der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als $1/7$, aber um mehr als $10/71$ desselben.“ Er rechnet also mit Brüchen, wie das im täglichen Leben allgemein üblich gewesen sein dürfte.

Für Euklid sind sowohl Zahlen- wie Größenverhältnisse etwas anderes als Zahlen. Deshalb sind auch die Rechenoperationen für sie neu zu erklären. Euklid erklärt das „Zusammensetzen“ von Verhältnissen so [El. VIII, § 5]:

- 1) $\frac{A}{B} * \frac{B}{D} = \frac{A}{D}$.
- 2) $\frac{A}{B} * \frac{C}{D}$ erhält man, indem man durch Erweiterung ein gleiches Zwischen-

glied herstellt: $\frac{A}{B} * \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} * \frac{B \cdot C}{B \cdot D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$.

Anm. Sind z. B. A, B, C, D Strecken, so sind $A \cdot C$ usw. Rechtecke.

Das griechische Fachwort *συντιθέναι* bedeutet auch addieren, und man hat diese Zusammensetzung auch lange Zeit als Addition aufgefaßt. Andererseits hat man schon in griechischer Zeit jedem Verhältnis einen „Wert“ (*πηλικότης*, Thaeer übersetzt „Abmessung“) zugeordnet. Aus den wenigen Andeutungen geht nicht klar hervor, ob man diesen „Wert“ als eine, möglicherweise irrationale, Zahl aufgefaßt hat. Im Kommentar des Theon von Alexandria (4. Jh. n. Chr.) zum Almagest des Ptolemaios steht: „Ein Verhältnis heißt aus zwei oder mehreren Verhältnissen zusammengesetzt, wenn die Werte der Verhältnisse miteinander vervielfacht den Wert eines Verhältnisses ergeben“ [zitiert nach Tropfke (4.0.2.2.), S. 334]. Im Mittelalter kann man sogar finden: „Addere est multiplicare“ – nämlich bei Verhältnissen.

2.3.2 Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate der Durchmesser

Dieser Satz trat bei der Mönchenquadratur des Hippokrates auf. Wir wollen sehen, wie sorgfältig bei Euklid jeder einzelne Schritt des Beweises durchgeführt ist.

- (1) [El. I, § 38]: „Auf gleichen Grundlinien zwischen denselben Parallelen gelegene Dreiecke sind (flächen-)gleich.“
- (2) [El. VI, § 1]: „Dreiecke sowie Parallelogramme unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundlinien.“

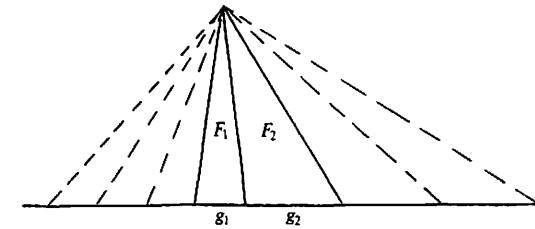


Abb. 2.19

Zum Beweis wird die Definition der Gleichheit von Größenverhältnissen benutzt. Seien g_1, g_2 die Grundlinien, F_1, F_2 die Flächen der beiden Dreiecke (Abb. 2.19). Man betrachte irgendwelche Vielfache der Grundlinien: $m \cdot g_1, n \cdot g_2$. Dann sind nach (1) die zugehörigen Flächen $m \cdot F_1, n \cdot F_2$. Wenn zwei Dreiecke mit gleicher Höhe verschiedene Grundlinien haben, hat das Dreieck mit der größeren Grundlinie die größere Fläche; das folgt aus (1). Also gilt: Wenn $m \cdot g_1 > n \cdot g_2$ ist, dann ist auch $m \cdot F_1 > n \cdot F_2$. Das gleiche gilt für $=$ und $<$. Daraus folgt (2). Wenn g_1 und g_2 kommensurabel sind, ist der Beweis natürlich etwas einfacher.

- (3) Einige Mühe, aber (außer der Ähnlichkeit) keine neuen Begriffsbildungen erfordert der Satz

[El. VI, § 19]: Ähnliche Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Seiten.

- (4) Der entsprechende Satz gilt auch für ähnliche Polygone, wie man durch Zerlegung in Dreiecke sieht [El. VI, § 20].

- (5) Man muß noch bei Polygonen, die in einen Kreis eingeschrieben sind, die Seite durch den Durchmesser des Kreises ersetzen. [El. XII, § 1]: „Ähnliche Polygone in Kreisen verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern.“

- (6) Schließlich muß man von den Polygonen zum Kreis übergehen. Dazu braucht man als Hilfssatz [El. X, § 1]: „Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.“

Dieser Satz folgt aus dem Axiom des Messens. Man hat ihn „die divisive Form des Axioms des Messens“ genannt. Ich möchte die Bezeichnung „Exhaustionslemma“ vorschlagen.

Jetzt endlich kommen wir zum Beweis des Satzes [El. XII, § 2]: „Kreise verhalten sich wie die Quadrate über den Durchmessern.“ Mit K_1, K_2 bezeichne ich sowohl die beiden Kreise wie ihre Flächen, mit d_1, d_2 ihre Durchmesser.

Aus der Annahme

$$(1) \quad K_1 : K_2 \neq d_1^2 : d_2^2$$

soll ein Widerspruch hergeleitet werden.

Wenn (1) gilt, müßte es eine Fläche $F \neq K_2$ geben, für die

$$(2) \quad K_1 : F = d_1^2 : d_2^2$$

ist. Daß es eine solche Fläche gibt, ist allerdings problematisch; ich gehe darauf nicht weiter ein.

Sei zunächst $F < K_2$ angenommen. Aus dem Kreis K_2 schneide man ein einbeschriebenes Quadrat heraus; das ist mehr als die Hälfte, denn das einbeschriebene Quadrat ist die Hälfte des umbeschriebenen Quadrats. Sodann schneide man die in Abb. 2.20 schraffierten Dreiecke heraus; sie bilden mehr als die Hälfte des Restes, denn jedes Dreieck ist die Hälfte des gezeichneten Rechtecks. So kann man ein solches Polygon P_2 erhalten, daß die Restfläche $K_2 - P_2 < K_2 - F$ ist; es ist also $P_2 > F$.

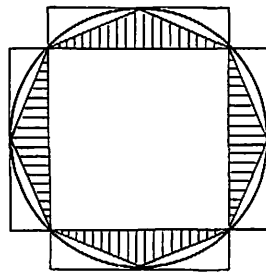


Abb. 2.20

In den Kreis K_1 zeichnet man ein zu P_2 ähnliches Polygon P_1 ein. Dann gilt nach (5)

$$(3) \quad P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2.$$

Es ist aber $P_1 < K_1$ und $P_2 > F$. Daraus folgt

$$P_1 : P_2 < K_1 : F,$$

während nach (2) und (3) beide Verhältnisse gleich sind.

Hätte man $F > K_2$ angenommen, so gäbe es eine Fläche F' mit $K_1 : F' = K_2 : d_1^2 : d_2^2$, und dabei wäre $F' < K_1$. Damit ist dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

2.3.3 Eine Parabelquadratur des Archimedes

Archimedes hat mehrere Verfahren zur Bestimmung des Flächeninhalts eines Parabelsegments angegeben. Wir wählen die folgende, nicht nur, weil sie ein schönes Beispiel für die Exhaustionsmethode ist, sondern auch, weil darin die Summe einer geometrischen Reihe vorkommt. [Qu. P. § 18–24]. Die Fläche des Parabelsegments sei p . Es wird zunächst das Dreieck ABC mit der Fläche d , die $> p/2$ ist, herausgeschnitten, sodann die Dreiecke ACS_1, BCS_2 ; sie sind so konstruiert, daß P_1, P_2 die Mitten von AM bzw. MB sind und $P_1S_1 \parallel CM \parallel P_2S_2$ ist. Aus den Eigenschaften der Parabel folgt, daß diese beiden Dreiecke zusammen die Fläche $d/4$ haben. Durch Fortsetzung des Verfahrens entsteht ein Polygon mit der Fläche

$$p_n = d \cdot (1 + 1/4 + (1/4)^2 + \dots + (1/4)^n).$$

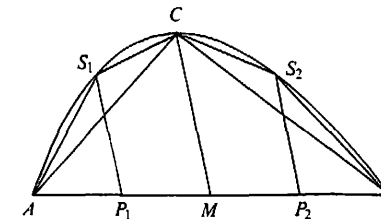


Abb. 2.21

Da jedesmal mehr als die Hälfte des Parabelsegments bzw. des Restes weggenommen ist, kann erreicht werden, daß $p - p_n$ kleiner als eine beliebig gegebene Größe wird.

Nun gilt, wenn $1 + 1/4 + \dots + (1/4)^n = s_n$ gesetzt wird,

$$s_n + (1/3) \cdot (1/4)^n = 4/3.$$

Dieser Satz lautet in den Worten des Archimedes: „Wenn Größen im vierfachen Verhältnis aufeinanderfolgen, so ist ihre Summe vermehrt um den dritten Teil des kleinsten Gliedes gleich 4/3 des größten.“ [Qu. P. § 19].

Der Beweis des Archimedes verläuft ungefähr (!) so: Es ist $a_i = 4 \cdot a_{i+1}$, also

$$4 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3,$$

$$3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3) + 4a_4 = a_0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \frac{1}{3}a_4 = \frac{1}{3}a_0$$

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \frac{1}{3}a_4 = \frac{4}{3}a_0 \quad \text{w.z.b.w.}$$

Der Beweis ist leicht auf eine geometrische Reihe mit einem beliebigen Quotienten $q < 1$ zu übertragen. Hat Archimedes also die Summenformel für

die unendliche geometrische Reihe gefunden? Vielleicht hat er heuristisch damit gearbeitet, aber zum Beweis durfte so etwas damals nicht benutzt werden.

Übrigens läßt sich der Satz auch aus Euklid, El. IX, § 35 (s. S. 84) ableiten; der Beweis von Archimedes scheint mir aber einfacher zu sein.

Archimedes hat festgestellt

(1) n kann so groß gewählt werden, daß

$$p - p_n = p - d \cdot s_n$$

beliebig klein wird;

(2) n kann auch so groß gewählt werden, daß

$$\frac{4}{3}d - d \cdot s_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n d$$

beliebig klein wird.

Dabei ist (3) $p > p_n$ und (4) $\frac{4}{3}d > d \cdot s_n$.

$d \cdot s_n$ kommt den beiden Größen p und $\frac{4}{3}d$ beliebig nahe, also muß $p = \frac{4}{3}d$ sein. Archimedes beweist das sehr sorgfältig:

Fall 1: Angenommen, es sei $p > \frac{4}{3}d$, etwa $p = \frac{4}{3}d + u$.

$$\begin{array}{c} | \text{-----} u \text{-----} | \\ \hline \frac{4}{3}d \quad \uparrow \quad p \\ \quad d \cdot s_n \end{array}$$

Man wähle n nach (1) so groß, daß $p - d \cdot s_n < u$ ist. Dann wäre $d \cdot s_n > p - u = \frac{4}{3}d$ im Widerspruch zu (4).

Fall 2: Die Annahme $p < \frac{4}{3}d$ ist entsprechend mit Hilfe von (2) zu widerlegen.

2.3.4 Archimedes' Abhandlung über die Spirale

1. Definition

Archimedes definiert [Sp. Def. 1 (nach § 11)]: „Wenn sich ein Halbstrahl in einer Ebene um seinen Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, nach einer beliebigen Zahl von Drehungen wieder in die Anfangslage zurückkehrt und sich auf dem Halbstrahl ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit, vom Endpunkt des Halbstrahls beginnend, bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Spirale“.

Wir betrachten hier nur die erste Umdrehung. Wir halten uns auch nicht wörtlich an Archimedes, sondern benutzen auch modernere Schreibweisen.

In Polarkoordinaten ist die Gleichung der Spirale

$$r = c \cdot \varphi.$$

Wenn wir den zum Winkel $\varphi = 2\pi$ gehörigen Radius mit R bezeichnen, erhalten wir

$$(1) \quad r = \frac{R}{2\pi} \cdot \varphi$$

Bei Archimedes heißt R „Radius des ersten Kreises“, d. h. des Kreises durch den nach dem ersten Umlauf erreichten Punkt. Aus (1) folgt für eine endliche Differenz

$$(2) \quad \Delta r = \frac{R}{2\pi} \cdot \Delta \varphi.$$

Es lassen sich leicht beliebig viele Punkte der Spirale zeichnen: zu den Winkeln $\varphi = 2\pi/2^k$ gehören die Radien $r = R/2^k$.

Die Gleichung (1) hat Ähnlichkeit mit der Gleichung der Quadratrix, bei der die Ordinate proportional dem Winkel ist: $y = \frac{1}{\pi/2} \cdot \varphi$ (s. S. 92).

Entsprechend läßt sich auch die Spirale zur Teilung eines beliebigen Winkels in beliebig viele gleiche Teile benutzen: man braucht statt des Winkels nur den zugehörigen Radiusvektor zu teilen. Daß das in der Antike bereits bemerkt wurde, berichten Pappos [Coll. IV, Prop. 35 = Hultsch, S. 286–289] und Proklos [S. 272].

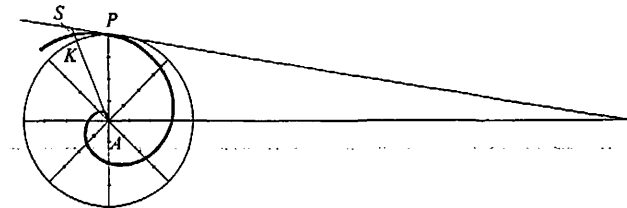


Abb. 2.22

2. Die Tangente

Die einzige aus der Antike bekannte Definition einer Tangente ist die der Kreistangente [Euklid, El. III, Def. 2]: „Daß sie den Kreis berühre, sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet.“ Diese Definition wurde sinngemäß für alle Kurven benutzt, und zwar bis ins 17. Jh. Erst damals kam der Gedanke auf, die Tangente als Grenzlage der Sekante zu definieren. Man faßte das auch so auf: Eine Kurve besteht

aus unendlich vielen unendlich kleinen Strecken; die Tangente ist die Verlängerung einer dieser Strecken.

Man kann die Tangente an die Spirale mit einer kinematischen Methode finden: Die Bewegung des Spiralenpunktes $P=(r, \varphi)$ ist zusammengesetzt aus einer radialen Bewegung (etwa in der Zeit Δt um die Strecke $\Delta r=PQ$) und einer Bewegung auf der Kreisperipherie, d. h. in Richtung der Kreistangente (um die Strecke $r \cdot \Delta \varphi=PK$). Die Richtung der zusammengesetzten Bewegung, also die Richtung der Spiralentangente, ist PS . Wegen (1) und (2) gilt

$$\frac{PK}{PQ} = \frac{r \cdot \Delta \varphi}{\Delta r} = \varphi.$$

Die Abb. 2.23 zeigt: $AT=AP \cdot \frac{PK}{PQ} = r \cdot \varphi$, d. h. die Strecke AT , die die Tangente auf der Senkrechten zu AP abschneidet, ist gleich der Länge des (kurz gesagt) zu P gehörigen Kreisbogens, für $\varphi=2\pi$ der Umfang des „ersten Kreises“ (Abb. 2.22). Dieser Gedankengang findet sich z. B. bei Sluse und Newton [4.4].

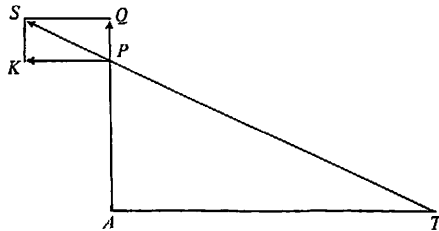


Abb. 2.23

Ob Archimedes auf diese Weise zu der Beziehung

$$(3) \quad AT = 2\pi R$$

gekommen ist, sagt er nicht. Das Parallelogramm der Geschwindigkeiten kommt in der Schrift *Mechanika* (Bewegungsfragen) vor, die von Aristoteles oder aus seiner Schule stammt [Aristoteles 848 b 1–25], es war also zur Zeit des Archimedes bekannt. Bei seinem Beweis geht Archimedes von (3) aus. Wir nehmen statt dessen die allgemeinere Gleichung

$$AT = r\varphi$$

und wählen der bequemeren Zeichnung wegen $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (Abb. 2.24). Im übrigen können wir uns genau an Archimedes halten. Er zeigt: Wählt man auf der Geraden AT einen Punkt U so, daß $AU > AT$ oder $AU < AT$ ist, so enthält in beiden Fällen die Gerade UP einen Punkt, der innerhalb der Spirale liegt.

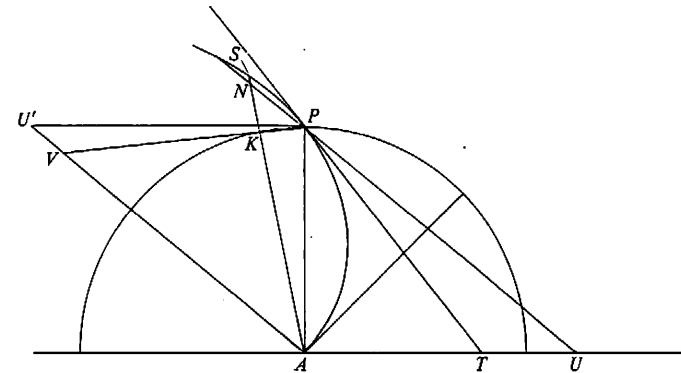


Abb. 2.24

Sei zunächst $AU > AT$.

Man zeichne in P die Senkrechte auf AP . Man verbinde U mit P und zeichne zu UP die Parallele durch A . Sie trifft die Senkrechte in U' . Es ist $PU' = AU > AT$.

Nun drehe man die Gerade PU' um P solange, bis $KV = AT$ wird. Das ist möglich, da KV von $PU' = AU > AT$ bis zu Null abnimmt.

Man verbinde A mit K ; die Verlängerung schneide die Verlängerung von UP in N und die Spirale in S .

Behauptung: N liegt im Innern der Spirale, d. h. es ist $KN < KS$.

Beweis: Der zur Sehne KP gehörige Kreisbogen werde mit (KP) bezeichnet.

$$\text{Es ist } \frac{KN}{(KP)} < \frac{KN}{KP}.$$

Da die Dreiecke PKN und VKA ähnlich sind, ist dies

$$\frac{KN}{(KP)} < \frac{KN}{PK} = \frac{KA}{KV} = \frac{1}{2\pi}.$$

Für den Punkt S auf der Spirale ist

$$\frac{KS}{(KP)} = \frac{\Delta r}{R \cdot \Delta \varphi} = \frac{1}{2\pi}.$$

Vergleich mit der vorigen Gleichung zeigt:

$$KN < KS, \text{ w.z.b.w.}$$

Natürlich beweist Archimedes das Entsprechende auch für $AU < AT$ [s. z. B. Heath, *Gr. M.*, Bd. 2, S. 70–72, 556–561].

Iamblichos (um 300 n. Chr.) berichtet, daß Archimedes mit Hilfe der Spirale die Rektifikation des Kreises geleistet habe (wiedergegeben im Kommen-

tar des Simplicios zu den „Kategorien“ des Aristoteles p. 192. Zitiert nach Heath, Gr. M., Bd. 1, S. 225). Archimedes selbst hat das nicht behauptet. Das Problem wäre ja auch nur auf die Konstruktion der Spirale und ihrer Tangente zurückgeführt, und diese Konstruktionen sind auch nicht mit Zirkel und Lineal ausführbar. Sie sind allerdings näherungsweise recht einfach und mit recht großer Genauigkeit ausführbar. Die Konstruktion der Punkte mit $\varphi = 2\pi/2^k$ erwähnten wir schon. Eine Tangentenkonstruktion hat Viète angegeben (s. Abb. 2.25): Man trage an AD nach beiden Seiten gleiche Winkel an und halbiere den Winkel zwischen den beiden Sehnen [4.4].

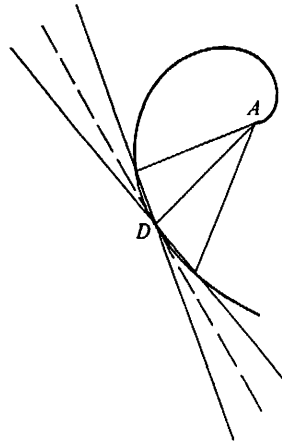


Abb. 2.25

3. Der Flächeninhalt

Während der ersten Umdrehung des erzeugenden Strahls, d. h. für $\varphi \leq 2\pi$, ist der Inhalt F der von der Spirale begrenzten Fläche ein Drittel des Inhalts des zugehörigen Kreissektors: $F = r^2 \varphi / 6$. Archimedes beweist das für $\varphi = 2\pi$ [Satz 24].

Beweis: Teilt man φ in n gleiche Teile, so ist F größer als der Inhalt der eingeschriebenen Kreissektoren und kleiner als der der umschriebenen; wir wollen von der Untersumme S_u und der Obersumme S_o sprechen. Archimedes schätzt die Differenz $S_o - S_u$ ab: denkt man sich die in der Abb. 2.26 schraffierten Stücke durch Drehen um A zusammengeschoben, so füllen sie gerade einen der Kreissektoren aus, und man kann n so groß wählen, daß dessen Inhalt kleiner als eine beliebig klein vorgegebene Größe wird.

S_u besteht aus $n-1$ Kreissektoren mit den Zentriwinkeln $\frac{\varphi}{n}$ und den Radien $\frac{r}{n}, 2 \cdot \frac{r}{n}, \dots, (n-1) \cdot \frac{r}{n}$. Es ist also

$$S_u = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \left(\frac{r}{n} \right)^2 \frac{\varphi}{n} = \frac{1}{2} \frac{r^2 \varphi}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2$$

Bei der Obersumme kommt genau ein Kreissektor (der letzte) hinzu:

$$S_o = \frac{1}{2} \frac{r^2 \varphi}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^n k^2.$$

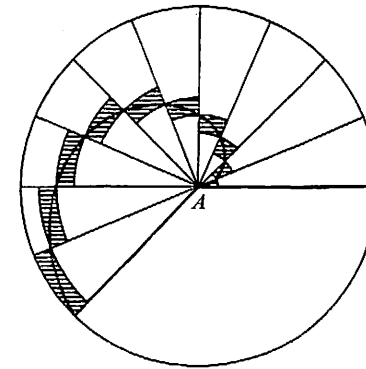


Abb. 2.26

Archimedes beweist durch geschicktes Rechnen

$$(1) \quad 3 \cdot \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < n^3 < 3 \cdot \sum_{k=1}^n k^2.$$

Wir (!) können das leicht durch vollständige Induktion bestätigen.

Aus (1) folgt

$$S_u < \frac{1}{6} r^2 \varphi < S_o.$$

Es gilt aber auch

$$S_u < F < S_o.$$

Da $S_o - S_u$ beliebig klein gemacht werden kann, folgt

$$F = \frac{1}{6} r^2 \varphi.$$

Archimedes beweist wieder sorgfältig, daß die Annahme $F \neq \frac{1}{6} r^2 \varphi$ zu einem Widerspruch führt.

Die Spiralenabhandlung enthält mehr als das, worüber hier berichtet wurde.

Archimedes hat noch andere Methoden zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten erfunden und benutzt. In der „Methodenlehre“ denkt er sich z. B. ein Parabelsegment und das einbeschriebene Dreieck aus Strecken bestehend [Op. Bd. 2, S. 436 = Op. d., S. 385] und hängt diese Strecken in verschiedenen Kombinationen an einen Wagebalken. Dieses Verfahren hat er allerdings nicht als beweiskräftig angesehen. In der „Quadratur der Parabel“ nimmt er statt der Strecken Trapeze, die der Parabel ein- und umbeschrieben sind.

Die Leistungen des Archimedes sind in der Literatur so oft und gut besprochen worden, daß ich mich hier mit diesen Beispielen aus seinem Schaffen begnüge.

2.3.5 Zur Berechnung der Längen von Kurven und der Oberfläche gekrümmter Flächen

Daß der Flächeninhalt der Spirale größer ist als der der einbeschriebenen und kleiner als der der umbeschriebenen Kreissektoren, kann damit begründet werden, daß das Ganze größer ist als der Teil. Anders ist es bei der Länge von Kurven. Nun fragt man damals nicht, ob eine Kurve überhaupt eine Länge hat oder wie etwa eine solche Länge zu definieren sei. Allenfalls fragt man, ob die Länge eines Kreisbogens mit einer geraden Strecke kommensurabel oder gar gleich sein kann [Aristoteles, Phys. VII, Kap. 4 = 248 b 4–6].

Archimedes hat einen Weg gefunden, die Länge einer gekrümmten Kurve zwischen den Längen von Streckenzügen einzuschließen (deren Länge ist natürlich unproblematisch). Die ähnliche Behandlung von gekrümmten Oberflächen bespreche ich hier nicht; man findet sie z. B. bei van der Waerden [E. W., S. 367] oder bei Heath [Gr. M., Bd. 2, S. 34 ff.] oder natürlich bei Archimedes selbst [K. u. Z.].

Dazu muß Archimedes den Begriff der Konkavität einführen [K. u. Z. I, Def. 2]: „Nach einer Seite konkav nenne ich ein Kurvenstück von der Eigenschaft, daß, wenn man zwei beliebige Punkte des Kurvenstücks geradlinig verbindet, die zwischen diesen beiden Punkten liegenden Kurvenpunkte alle auf dieser Seite der Geraden liegen oder allenfalls auf der Geraden selbst, keinesfalls aber auf der anderen Seite.“

Dann postuliert er:

[Post. 1]: „Von allen Linienstücken, die gleiche Endpunkte haben, ist die gerade Linie die kürzeste.“

[Post. 2]: „Die übrigen Linien aber, die in einer und derselben Ebene liegen und dieselben Endpunkte haben, sind einander ungleich, wenn sie nach der gleichen Seite konkav sind und die eine ganz von der anderen und der geraden Verbindungslinie der Endpunkte umfaßt wird oder teilweise umfaßt wird, teilweise mit einer der beiden Linien identisch ist. Und zwar ist diejenige, welche umfaßt wird, die kleinere.“

Wenn man eine Definition der Bogenlänge einer Kurve zur Verfügung hat, muß man diese Postulate natürlich beweisen; für Archimedes ersetzen sie aber gerade eine Definition. Aus ihnen folgt, daß der Umfang U eines Kreises vom Durchmesser d kleiner ist als der jedes umbeschriebenen und größer als der jedes einbeschriebenen Polygons. Er läßt sich also mit beliebiger Genauigkeit zwischen zwei Grenzen einschließen. Archimedes hat bekanntlich berechnet:

$$3\frac{10}{71} \cdot d < U < 3\frac{1}{7} \cdot d.$$

2.4 Geometrische Konstruktionen

2.4.1 Geometrische Algebra. Quadratische Gleichungen

In den beiden vorangehenden Abschnitten stand die Entwicklung der allgemeinen Methoden im Vordergrund: der Methode der Deduktion und der Methode des Umgangs mit Grenzwerten (dieses Wort ist hier als Andeutung und Erinnerung gemeint). Dabei wurde etwas zu wenig betont, daß sich gleichzeitig die Kunst des Konstruierens entwickelte, nicht nur in der Geometrie (von der hier allerdings vorzugsweise gesprochen wird), sondern auch in der Zahlentheorie, z. B. bei der Konstruktion vollkommener Zahlen oder bei der Konstruktion des größten gemeinsamen Teilers mittels des (schon vor Euklid bekannten) „Euklidischen Teilerverfahrens“. Diese Kunst des Konstruierens mußte sich parallel zur Kunst des Deduzierens entwickeln; das Deduzieren als Zurückführen auf einfachere Sätze hängt geradezu davon ab, daß man komplizierte Figuren auf einfache zurückführen kann; und daß eine Axiomatik der Geometrie möglich ist, hängt davon ab, daß sich in allen Figuren einfache Grundelemente finden lassen, etwa Gerade und Kreis.

Sicher hat man auch in vorgriechischer Zeit konstruiert. Man denke etwa an die Sülbasütras oder an die aus Megalithen hergestellten Heiligtümer in England und Schottland. Jeder Architekt eines größeren Bauwerks sowohl in Ägypten wie in Mesopotamien wird Konstruktionszeichnungen gemacht haben; Reste davon sind auch erhalten. Aber es gibt keinen Hinweis darauf, daß das Konstruieren zum Gegenstand einer Theorie gemacht wurde, wie das bei den Griechen geschehen ist. Die Grundlagen dieser Theorie sind im ersten Teil des ersten Buches von Euklids Elementen zusammengestellt.

Der zweite Teil dieses Buches enthält die oben besprochene Lehre vom Flächeninhalt. Das zweite Buch hat man „geometrische Algebra“ genannt. Es enthält algebraische Formeln in geometrischer Form. Eine dabei oft auftretende Figur ist der Gnomon [Def. 2]: „In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um seine Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen ein Gnomon heißen.“

§ 1 gibt das distributive Gesetz in der Form: „Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den

beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.“

§ 5: „Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in ungleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich“ (Abb. 2.27). Algebraisch kann man das durch die Formel ausdrücken

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Diese Beziehung wurde von den Babyloniern oft benutzt; sollten diese sie vielleicht schon geometrisch gedeutet oder begründet haben?

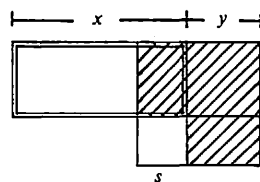


Abb. 2.27

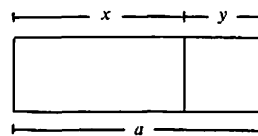


Abb. 2.28

Euklids Beweis beruht darauf, daß das doppelt umrandete Rechteck gleich dem schraffierten Gnomon ist.

Da der Gnomon höchstens gleich $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ ist, folgt daraus (geometrisch!)

$$xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Dieser Satz spielt bei der Flächenanlegung eine Rolle. Die einfache Flächenanlegung (*παράβολή*, lat. *adplicatio*, Parabel) ist die Aufgabe, eine gegebene Fläche F an eine gegebene Strecke a anzulegen, d. h. ein Rechteck mit der Seite a und der Fläche F zu bestimmen, also algebraisch: die Gleichung $F = ax$ zu lösen.

Ich zeichne überall in diesem Abschnitt Rechtecke statt der von Euklid angegebenen Parallelogramme und ersetze auch im Text „Parallelogramm“ durch „Rechteck“.

Die Flächenanlegung mit Fehlen (*ἐλλειψις*, Ellipse) ist die Aufgabe [El. VI, § 28]: An eine gegebene Strecke (a) eine gegebene Fläche (F) so anzulegen, daß ein Quadrat fehlt (Abb. 2.28). Es ist also die Aufgabe zu lösen

$$x + y = a$$

$$xy = F$$

oder

$$x \cdot (a - x) = F.$$

Aus [El. II, § 5] folgt, daß die Aufgabe nur lösbar ist, wenn $F \leq (a/2)^2$ ist. Euklid bringt vor dieser Aufgabe den Satz [El. VI, § 27]: Von allen Flächen, die man an eine feste Strecke so anlegen kann, daß ein Quadrat fehlt, ist das Quadrat über der halben Strecke die größte. (Text vereinfacht.) Und er fügt in § 28 die Bedingung hinzu, die wir durch $F \leq (a/2)^2$ ausdrücken.

Der Lösungsweg ist: Man verschafft sich $\frac{x-y}{2}$ nach [II, 5], indem man die Fläche $(a/2)^2 - F$ konstruiert und in ein Quadrat verwandelt; dessen Seite ist dann

$$s = \sqrt{(a/2)^2 - F}.$$

Nach Abb. 2.27 ist dann $x = (a/2) + s$.

Da x und y in der Aufgabe gleichberechtigt sind, hat man die zweite Lösung

$$y = (a/2) - s.$$

Im Hinblick auf die Einführung der komplexen Zahlen im 16. Jh. sei bemerkt: Setzt man, wie das bis ins 16. Jh. üblich war, alle Größen als positiv voraus, so muß man die folgenden Typen quadratischer Gleichungen unterscheiden:

$$(1) \quad x^2 + ax = F$$

$$(2) \quad x^2 + F = ax$$

$$(3) \quad x^2 = ax + F.$$

Die Typen (1) und (3) haben genau eine positive reelle Lösung, und eine negative, die damals nicht interessierte. Der Typ (2) ist der hier behandelte. Wir haben gesehen: Diese Gleichung hat

zwei (positive reelle) Lösungen, wenn $F < (a/2)^2$ ist,
eine (positive reelle) Lösung, wenn $F = (a/2)^2$ ist,
keine (positive reelle) Lösung, wenn $F > (a/2)^2$ ist.

Dieser Sachverhalt wird von al-Hwārizmī ausdrücklich beschrieben (s. S. 199).

Die quadratischen Gleichungen bieten daher keinen Anlaß zur Einführung komplexer Zahlen, denn in dem einzigen Fall, in dem sie auftreten würden, wußte man, daß die Gleichung „unmöglich“ ist, und zwar bevor man anfangen zu rechnen. Erst bei der Lösung kubischer Gleichungen beschäftigte man sich mit komplexen Zahlen.

Euklid behandelt dann in [El. VI, § 29] die Aufgabe der Flächenanlegung mit Überschuß (*ὑπερβολή*, Hyperbel): An eine gegebene Strecke (a) eine Fläche (F) so anzulegen, daß ein Quadrat überschießt (Abb. 2.29). Er löst sie geo-

metrisch, ähnlich wie die vorangehende Aufgabe. Algebraisch ist das Gleichungssystem $x - y = a$, $xy = F$ zu lösen. Elimination von y ergibt:

$$x(x - a) = F, \text{ also } x^2 = ax + F.$$

Elimination von x ergibt

$$y(y + a) = F, \text{ also } y^2 + ay = F;$$

das sind die Typen (3) und (1).

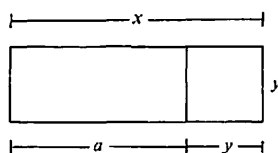


Abb. 2.29

Nach Proklos (bzw. Eudemos) [S. 419] stammt die Theorie der Flächenanlegung von den Pythagoreern. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß diese an sich etwas seltsamen Aufgaben die Übersetzung babylonischer algebraischer Ideen in geometrische Konstruktionen sind.

Warum die Griechen algebraische Aussagen in geometrische übersetzt haben, ist oft besprochen worden. Geometrische Aussagen umfassen auch inkommensurable Größen, also Verhältnisse, die nicht durch Zahlenverhältnisse dargestellt werden können. Außerdem waren die Grundlagen der Arithmetik und Algebra nicht so klar wie die der Geometrie. Anscheinend hat man auf Grund der Definition der Zahl als Menge die Grundgesetze der Arithmetik auf Gesetze über endliche Mengen zurückgeführt, aber hier fehlte die klare begriffliche Erfassung.

2.4.2 Zur Geschichte der Kegelschnittslehre

Die Kunst des Konstruierens dürfte sich etwa im 5. Jh. voll entfaltet haben (z. B. bei Hippokrates), so daß u. a. die Konstruktion der regelmäßigen Polyeder (abschließend ausgearbeitet wahrscheinlich von Theaitetos) und dann auch die Konstruktion und Untersuchung der Kegelschnitte möglich geworden ist.

Pappos berichtet [Coll. VII, 30 = Hultsch S. 672]: „Die vier Bücher Euklids über die Kegelschnitte hat Apollonios so vervollständigt, daß er vier Bücher hinzugefügt, also acht Bücher herausgegeben hat. Aristaios, der die bis jetzt überlieferten fünf Bücher über körperliche Örter im Zusammenhang mit den Kegelschnitten geschrieben hat, nennt sie den Schnitt mit dem spitzwinkligen, dem rechtwinkligen und dem stumpfwinkligen Kegel.“

Ein geometrischer Ort ist eine Punktmenge, deren Elemente durch eine gegebene Bedingung bestimmt sind, z. B.: die Menge derjenigen Punkte, von denen aus eine gegebene Strecke unter gleichen Winkeln gesehen wird.

Die Griechen unterschieden ebene, körperliche und linienhafte Örter. Ebene Örter sind Gerade und Kreis, körperliche Örter sind solche, zu denen räumliche Konstruktionen erforderlich sind, insbesondere die Kegelschnitte, linienhafte Örter erfordern spezielle Kurvenkonstruktionen wie z. B. die Quadratrix. Das ist ein Ansatz dazu, geometrische Aufgaben und Kurven nach der Stufe der Schwierigkeit einzuteilen, eine Vorstufe zur Einteilung nach dem Grad der Gleichung, die natürlich erst nach Einführung der Koordinaten möglich war.

Bei Menaichmos dachten wir an die Möglichkeit, daß seine Kurven nur durch gewisse Bedingungen definiert und auf Grund dieser Definition gezeichnet sein könnten. Eine Äußerung von Eutokios [Kommentar zu Archimedes, dessen Op. Bd. 3, S. 96] scheint dem zu widersprechen. Es heißt dort: wer den Würfel verdoppeln wolle, brauche sich u. a. nicht darum zu sorgen, daß die Triaden (drei Kurven) des Menaichmos den Kegel schneiden,

μηδὲ Μεναιχμείους κανοτομεῖν τριάδας διζήσῃ,

er könne vielmehr das Verfahren des Eratosthenes anwenden. Die Äußerung stammt also aus einer Zeit nach Eratosthenes. Jedenfalls hat entweder schon Menaichmos oder Aristaios den Zusammenhang zwischen solchen Bedingungen und den Schnitten eines Kegels gesehen.

Euklid definiert [XI, Def. 18]: „Ein Kegel ist der Körper, der umschlossen wird, wenn ein rechtwinkliges Dreieck, während eine der Seiten um den rechten Winkel fest bleibt, durch Herumführen wieder in dieselbe Lage zurückgebracht wird, von der es ausging.“

Man betrachtete also zunächst nur gerade Kreiskegel; man schnitt sie mit Ebenen senkrecht zu einer Mantellinie. Deshalb brauchte man für die drei Arten von Kegelschnitten drei verschiedene Kegel. Archimedes benutzt noch dieselben Namen wie Aristaios. Die Überschrift „Quadratur der Parabel“ *Τετραγωνισμὸς παραβολῆς*, stammt sicher nicht von ihm; im Text der Arbeit kommt das Wort „Parabel“ nicht vor.

Pappos berichtet [Coll. VII, 34 = S. 676–679], daß Euklid die Priorität des Aristaios anerkannt habe. Nach Hultsch soll diese Stelle von einem Scholiasten stammen, der über die alten Mathematiker gut Bescheid wußte. Euklid hätte danach auch hier, wie in den Elementen, Ergebnisse seiner Vorgänger übernommen und wahrscheinlich geordnet und erweitert. Die Werke von Euklid und Aristaios sind verloren; es ist verständlich, daß spätere Abschreiber sich nur für das modernste Werk, das des Apollonios, interessiert haben.

Apollonios ließ auch schiefe Kreiskegel zu. Er definiert [K. I, Def. 1]: „Wenn ein Punkt mit einem Punkte der Peripherie eines Kreises, welcher mit jenem Punkt nicht in einer Ebene liegt, geradlinig verbunden wird, die Verbindungslinie nach beiden Seiten verlängert wird und unter Beibehaltung jenes ersten Punktes längs der Kreisperipherie bewegt wird, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so nenne ich die durch die Gerade beschriebene Fläche,

die aus zwei im Scheitel aneinander grenzenden Flächen zusammengesetzt ist, deren jede bei Verlängerung der erzeugenden Geraden ins Unendliche reicht, eine Kegelfläche. ...“

Während Euklid den Kegel als Körper definiert, definiert also Apollonios die Kegel/fläche. Dabei liegt die Auffassung zugrunde, daß eine Fläche durch Bewegung einer Linie entsteht, während für Euklid die Fläche Grenze eines Körpers ist.

Apollonios fand alle Kegelschnitte an demselben Kegel, indem er verschiedene Neigungen der Schnittebene zuließ. Er führte die Namen Parabel, Hyperbel, Ellipse ein; der Grund dafür wird im folgenden Abschnitt erkennbar werden.

2.4.3 Die „Scheitelgleichungen“ der Kegelschnitte

Apollonios definiert [K. I, Def. 4]: „Als Durchmesser einer ebenen Kurve bezeichne ich eine Gerade, die irgendeine Schar paralleler Sehnen halbiert, als Scheitel der Kurve bezeichne ich den auf der Kurve liegenden Endpunkt des Durchmessers; jede der Parallelen aber bezeichne ich als zum Durchmesser geordnet gezogen.“

„Geordnet“ heißt *τεταγμένως*, lateinisch *ordinatim*. Das ist der Ursprung des Wortes „Ordinate“.

Die Kennzeichnung der Parabel [K. I, § 11].

„Es werde ein Kegel durch die axiale Ebene $\langle ABC \rangle$ geschnitten (Abb. 2.30), außerdem durch eine zweite $\langle ZED \rangle$ die die Grundfläche des Kegels in einer Geraden schneidet, die senkrecht stehe auf der Grundlinie des durch die erste Ebene erzeugten axialen Dreiecks. Es sei ferner der Durchmesser des Kegelschnitts $\langle ZH \rangle$ der einen Seite $\langle AC \rangle$ des axialen Dreiecks parallel. Dann wird das Quadrat jeder von einem Punkt des Kegelschnitts bis zum Durchmesser gezogenen Parallelen zu der Geraden, in welcher die schneidende Ebene die Grundebene schneidet (y^2), gleich sein einem Rechteck, dessen eine Seite gleich der durch diese Parallele vom Durchmesser abgeschnittenen Strecke (x) ist, und dessen andere Seite eine konstante Strecke q ist ($y^2 = qx$), wobei q dadurch bestimmt ist, daß es sich zu der Entfernung zwischen der Spitze des Kegels und dem Scheitel des Kegelschnitts $\langle AZ \rangle$ verhält wie das Quadrat über der Basis des Grundkreises zum Rechteck, das aus den beiden anderen Seiten des Achsendreiecks gebildet ist. Ein solcher Kegelschnitt werde Parabel genannt.“

$$\left\langle \frac{q}{AZ} = \frac{BC^2}{AC \cdot AB} \right\rangle$$

Beweis: Es gilt

$$(1) \quad y^2 = uv \quad (\text{Gleichung des Kreises über } MN);$$

$$(2) \quad \frac{u}{x} = \frac{BC}{AC} \quad \text{denn } \triangle MLZ \sim \triangle BCA;$$

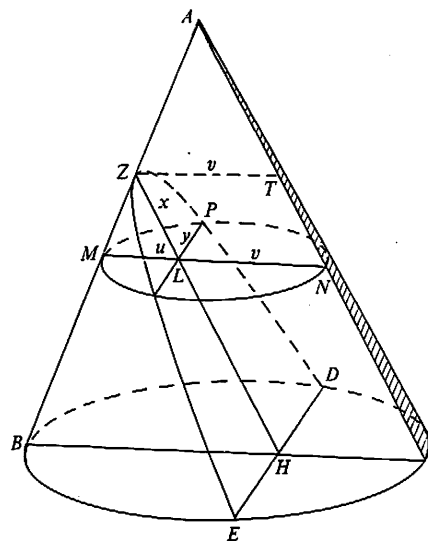


Abb. 2.30. Parabel.
Es ist $ZH \parallel AC$.

$$ML = u, \quad LN = v, \\ ZL = x, \quad LP = y.$$

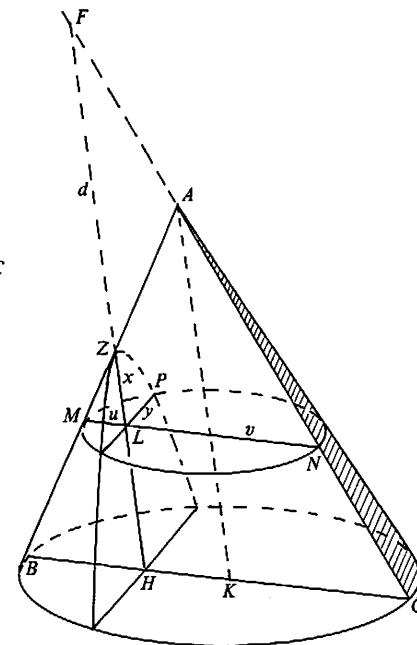


Abb. 2.31. Hyperbel.
Es wird $AK \parallel ZH$ gezeichnet.

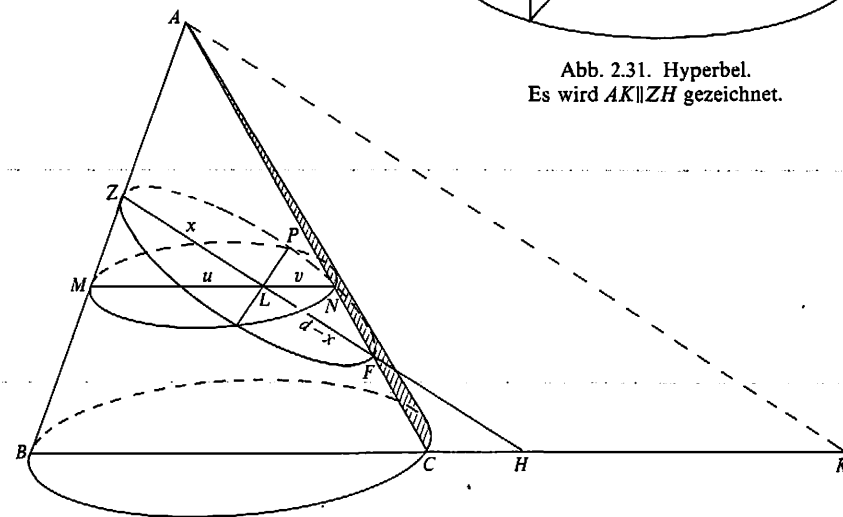


Abb. 2.32. Ellipse.
Es wird $AK \parallel ZH$ gezogen.

Wäre $z < y'$, so wäre

$$\left(\frac{x+x'}{2x}\right)^2 < \frac{y'^2}{y^2} = \frac{x'}{x}.$$

Daraus würde folgen $\left(\frac{x+x'}{2}\right)^2 < xx'$ im Widerspruch zu einem bekannten Satz (s. S. 128).

Diesen Beweis findet man noch bei Galilei [4.4].

§ 34: „Es werde auf einer Hyperbel, Ellipse oder einem Kreise ein Punkt angenommen und durch ihn eine Sehne geordnet zum Durchmesser gezogen. Sie teilt den Durchmesser nach einem gewissen Verhältnis außen oder innen. Wenn nun der Durchmesser nach dem gleichen Verhältnis innen oder außen (also harmonisch) geteilt wird und durch diesen Teilpunkt die Verbindungslinie mit dem Kurvenpunkt gezogen wird, so berührt diese Verbindungslinie die Kurve.“ (Abb. 2.34, 2.35).

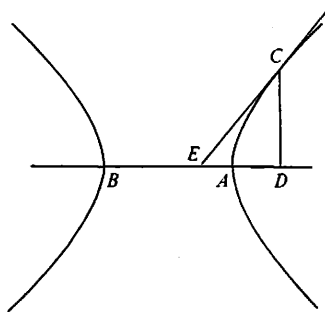


Abb. 2.34

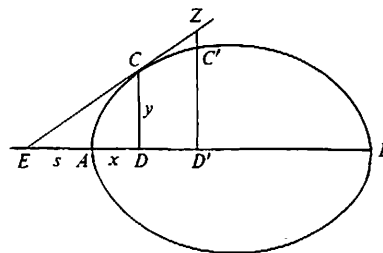


Abb. 2.35

$$\begin{aligned} AB &= d \\ EA &= s \\ AD &= x, DC = y \\ AD' &= x', D'C' = y' \\ D'Z &= z. \end{aligned}$$

Beweis für die Ellipse: Vorausgesetzt wird

$$(1) \quad \frac{EA}{EB} = \frac{DA}{DB}, \quad \text{also} \quad \frac{s}{s+d} = \frac{x}{d-x}.$$

(Die Längen der Strecken werden ohne Rücksicht auf die Richtung positiv gerechnet.)

Es soll gezeigt werden, daß $z > y'$ ist.

Apollonios erreicht das durch geschicktes Rechnen mit Streckenverhältnissen mit einigen Hilfslinien. Der Beweis ist so ausführlich dargestellt, daß jeder Schritt leicht nachvollzogen werden kann. Ich skizziere hier einen Weg, der vielleicht als eine Übersetzung des Grundgedankens von Apollonios ins Algebraische angesehen werden kann.

Zur Verfügung stehen die Gleichungen

$$(2) \quad \frac{z}{y} = \frac{x'+s}{x+s}$$

$$(3) \quad \frac{y^2}{y'^2} = \frac{(d-x)x}{(d-x')x'}.$$

Daraus kann man ausrechnen

$$\frac{z^2}{y'^2} = \frac{(x'+s)^2}{(x+s)^2} \cdot \frac{(d-x)x}{(d-x')x'};$$

mit Hilfe von (1) läßt sich feststellen, daß der Zähler größer ist als der Nenner.

Mit diesem Satz ist Apollonios schon dem Satz über Pol und Polare recht nahe, den er in [K. III, § 37] ausspricht: „Zieht man durch den Schnittpunkt zweier Tangenten eines Kegelschnitts, eines Kreises oder zweier zugehöriger Hyperbeln eine Gerade, die die Kurve in zwei Punkten schneidet, so wird diejenige Strecke auf ihr, die zwischen diesen Punkten liegt, durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte der Tangenten und den Tangentenschnittpunkt im gleichen Verhältnis geteilt.“

2.4.5 Einige Beispiele aus der „Sammlung“ des Pappos

Pappos lebte in Alexandria um 300 n. Chr., und wir sind mit unserer Darstellung noch im 3. Jh. v. Chr. Trotzdem seien einige Beispiele aus seiner „Sammlung“ hier angefügt, weil er in diesem Werk meist über ältere Ergebnisse berichtet und sie kommentiert, allerdings manchmal auch ergänzt.

Ein Abschnitt in Buch III [12–16, S. 70–83] handelt „von den drei Mitteln“. Die Definitionen sind (gekürzt, in moderner Schreibweise):
 b ist arithmetisches Mittel zwischen a und c ($a > b > c$), wenn

$$a - b = b - c \quad \text{oder} \quad a : a = (a - b) : (b - c) \quad \text{ist,}$$

geometrisches Mittel, wenn $a : b = b : c$ oder $a : b = (a - b) : (b - c)$ ist,

harmonisches Mittel, wenn $a : c = (a - b) : (b - c)$ ist. (Für das harmonische Mittel gilt auch $b = \frac{2ac}{a+c}$, ferner: $\frac{1}{b}$ ist das arithmetische Mittel zwischen $\frac{1}{a}$ und $\frac{1}{c}$.)

In der „harmonischen Reihe“ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ist also jedes Glied das harmonische Mittel zwischen den beiden benachbarten Gliedern.)

Nun werden die Mittel geometrisch konstruiert. Eine Konstruktion des arithmetischen Mittels erwähnt Pappos verständlicherweise nicht. Das geome-

trische Mittel erhält er gemäß Abb. 2.36: BD ist das geometrische Mittel zwischen AB und BC .

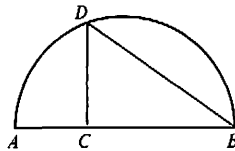


Abb. 2.36

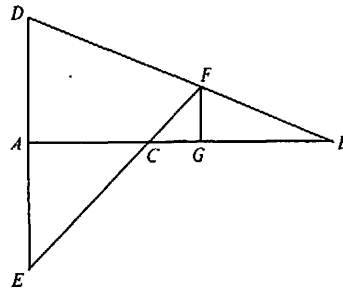


Abb. 2.37

Das harmonische Mittel zwischen $AB=a$ und $BG=c$ wird so konstruiert (s. Abb. 2.37): Zeichne senkrecht zu AB die Gerade DAE und mache $AD=AE$. Verbinde D mit B und errichte in G die Senkrechte auf AB . Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden sei F . Verbinde E mit F ; die Verbindungsgerade schneide AB in C . Dann ist $AC=b$ das gesuchte harmonische Mittel.

Beweis: $a:c=AB:BG=AD:FG=AC:CG=(a-b):(b-c)$.

(Die vorletzte Gleichung besagt: $AB:BG=AC:CG$, d.h. die Strecke AG wird von B und C außen und innen im gleichen Verhältnis geteilt, C ist also der vierte harmonische Punkt zu A , G und B .)

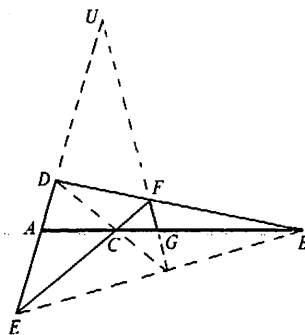


Abb. 2.38

Im Lichte der projektiven Geometrie kann man die Konstruktion so sehen: Auf einer von AB verschiedenen Geraden durch A verschafft man sich vier harmonische Punkte E, D, A, U . Bei der Konstruktion des Pappos ist der vierte harmonische Punkt zu D, E und A der uneigentliche Punkt der Geraden, in Abb. 2.38 der Punkt U . Man projiziert E, A, D, U von B aus auf die Gerade UG , sodann von E aus auf AB .

Pappos konstruiert jeweils nicht nur das Mittel, sondern zu je zwei Größen in der Proportion die dritte. Er sagt, daß er diese Konstruktion „gemäß den Al-

ten“ berichtet habe [S. 80]. Wir dürfen dabei wohl an die Pythagoreer denken. Er selbst fügt eine Konstruktion hinzu, mit der alle drei Mittel in einer Zeichnung hergestellt werden können.

Im Buch VII berichtet Pappos u. a., daß Euklid drei Bücher „Porismen“ geschrieben habe. Was „Porismen“ sind, erläutert er ausführlich, ohne daß es dadurch klar wird. Es sollen Zwischendinge zwischen Problemen (Konstruktionsaufgaben) und Theoremen sein. Während ein Problem das Finden einer Konstruktion verlangt, und ein Theorem einen Beweis, soll bei einem Porisma beides nötig sein. U. a. schreibt Pappos [S. 652]: *πόρισμα ἐστὶν τὸ λείπον ὑποθέσει τοπικοῦ θεωρήματος*. „Ein Porisma ist das, was an der Voraussetzung für einen Satz über einen Ort fehlt.“ Man könnte auf den Gedanken kommen, daß es sich um Aussagen über unterbestimmte geometrische Orte handelt, d. h. über Kurvenscharen, die von einem oder mehreren noch unbestimmten Parametern abhängen.

Leider gibt Pappos nur Hilfssätze oder Erläuterungen zu den Porismen Euklids an, nicht die Porismen selbst. Diese Hilfssätze haben durchaus selbstständiges Interesse; und wenn man von ihnen auf die Porismen selbst schließt, muß das ein bedeutendes Werk gewesen sein. [Coll. VII, S. 648–661, 866–919], [Heath, Gr. M. Bd. 1, S. 431–438].

[Coll. VII, Prop. 129, S. 870–873] (Buchstaben geändert) Abb. 2.39. „Werden durch die drei Geraden SB, SC, SD von einem beliebigen Punkt A aus die Geraden $ABCD, AB'C'D'$ gezogen, so gilt:

$$AB \cdot CD : CB \cdot AD = AB' \cdot C'D' : C'B' \cdot AD'.$$

(Behauptet wird also die Invarianz des Doppelverhältnisses bei einer (speziellen) perspektiven Abbildung.)

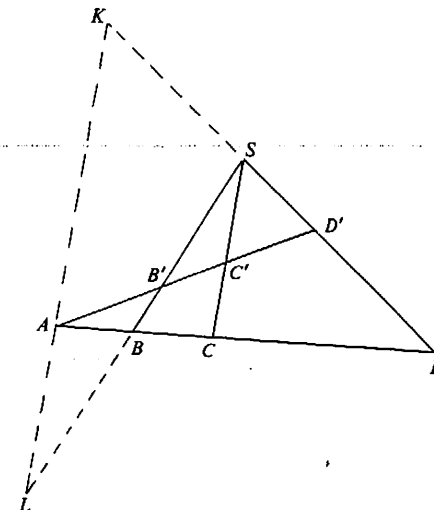


Abb. 2.39

Beweis: Man zeichne durch A die Parallele zu SC ; sie schneide DS in K und SB in L .

Es ist $\triangle BAL \sim \triangle BCS$, also $\frac{AB}{CB} = \frac{AL}{CS}$.

Da $SC \parallel KA$ ist, gilt $\frac{CD}{AD} = \frac{CS}{AK}$.

Zusammensetzen der Verhältnisse ergibt $\frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{AL}{AK}$.

Ebenso ergibt sich $\frac{AB' \cdot C'D'}{C'B' \cdot AD'} = \frac{AL}{AK}$.

$\frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD}$ heißt nach Jacob Steiner „Doppelverhältnis“ [4.4]; wir schreiben dafür (AC, BD) .

Eine Umkehrung von Prop. 129 ist Prop. 136: Wenn die Punkte A, B, C, D und A', B', C', D' auf je einer Geraden liegen, S der Schnittpunkt der Geraden BB' und DD' ist und

$$(1) \quad (AC, BD) = (AC', B'D')$$

ist, so liegen die Punkte C, S, C' auf einer Geraden.

Wenn nämlich die Gerade CS die Gerade AB' in C'' schneidet, gilt

$$(2) \quad (AC, BD) = (AC'', B'D').$$

Aus (1) und (2) folgt $C' = C''$. Das hat erst von Staudt 1847 bewiesen [4.4]. Pappos beweist den Satz mit Hilfskonstruktionen und mittels ähnlicher Dreiecke.

Der sog. Satz von Pappos-Pascal erscheint in Prop. 139 ungefähr in der Form (Abb. 2.40): Die Geraden AEC und DBF mögen sich in N schneiden. Es sei

R der Schnittpunkt von AB, DE ,

S der Schnittpunkt von BC, EF

T der Schnittpunkt von CD, FA .

Dann liegen R, S, T auf einer Geraden.

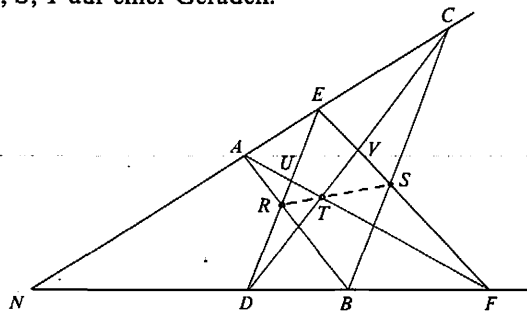


Abb. 2.40

Nach Prop. 136 muß bewiesen werden, daß $(ER, UD) = (ES, FV)$ ist.

Beweis: Man projiziere die Gerade ED von A aus auf die Gerade ND . Nach Prop. 129 ist dann $(ER, UD) = (NB, FD)$.

Projektion der Geraden EF von C aus auf die Gerade NB ergibt $(ES, FV) = (NB, FD)$.

Daraus folgt die Behauptung.

2.5 Aus Arithmetik und Algebra

2.5.1 Aus der Zahlentheorie

1. Primzahlen

Die Arithmetik wurde hauptsächlich im Kreis der Pythagoreer gepflegt, in deren Weltbild oder – wenn man so sagen soll – Religion ja die (ganzen) Zahlen eine große Rolle spielten. Die auf die Pythagoreer zurückgehenden sog. „arithmetischen Bücher“ von Euklids Elementen (VII–IX) enthalten nicht nur ausführliche Untersuchungen über Zahlenverhältnisse, sondern auch einige grundlegende Sätze über Teilbarkeit und Primzahlen, z. B.:

[VII, § 30] (gekürzt): „Wenn eine Primzahl ein Produkt mißt, muß sie auch einen der Faktoren messen.“

[VII, § 32]: „Jede Zahl ist entweder Primzahl oder wird von irgendeiner Primzahl gemessen.“

[IX, § 14]: „Die kleinste Zahl, die von gewissen Primzahlen gemessen wird, läßt sich durch keine andere Primzahl messen außer den ursprünglich messenden.“

[IX, § 20]: „Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgelegte Anzahl von Primzahlen.“

2. Pythagoreische Zahlentripel

Ein systematisches Verfahren zum Auffinden solcher Tripel haben vielleicht schon die Babylonier gehabt – wenn die Interpreten des Textes Plimpton 322 die Gedanken des Verfassers richtig erraten haben.

Euklid, dessen Bezeichnungsweise hier etwas vereinfacht wird, geht [El. X, § 28a] von der Beziehung aus:

$$(1) \quad ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Damit ganze Zahlen entstehen, müssen a und b beide gerade oder beide ungerade sein. Sodann muß man a, b so wählen, daß ab eine Quadratzahl wird. Das ist der Fall, wenn a und b ähnliche ebene Zahlen sind.

Ebene Zahlen sind solche, die in zwei Faktoren zerlegbar sind, etwa $a=pq$, $b=uv$. Ähnlich sind sie, wenn es eine ganze Zahl k gibt, so daß $p=ku$, $q=kv$ wird. Dann wird

$$ab=k^2 u^2 v^2.$$

Ist uv gerade, so kann die Gleichung durch $(uv/2)^2$ dividiert werden, und man erhält

$$(2) \quad 4k^2 + (k^2 - 1)^2 = (k^2 + 1)^2.$$

Ist $b=uv$ ungerade, so muß auch $a=k^2 uv$ ungerade, also k ungerade sein. Dann erhält man durch Division durch uv

$$(3) \quad k^2 + \left(\frac{k^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{k^2 + 1}{2}\right)^2.$$

Nach Proklos [S. 428] stammt die Vorschrift (2) von Platon, (3) von Pythagoras.

3. Figurierte Zahlen

Stellt man Zahlen durch ausgelegte Steinchen dar, so kann man aus ihnen Figuren legen und aus solchen Figuren auch Sätze ablesen. Das ist wahrscheinlich schon in sehr früher Zeit geschehen. Man hat Dreieckszahlen, Quadratzahlen, Fünfeckszahlen usw., im Raum Pyramidenzahlen mit dreieckiger oder quadratischer Basis, Kubikzahlen. Außer vereinzelt Hinweisen, z. B. bei Aristoteles [Phys. III, 4 = 203 a 13–15], finden wir zusammenhängende Darstellungen in der Arithmetik des Nikomachos von Gerasa und in der Schrift über Polygonalzahlen des Diophant. Nach Diophant soll Hypsikles (2. Jh. vor Chr.) den Satz gekannt haben: Die n -te p -ecks-zahl ist die Summe der ersten n Glieder der arithmetischen Reihe mit dem Anfangsglied 1 und der Differenz $d=p-2$ (s. Abb. 2.42). [Diophant Op. Bd. 1, S. 460].

Boetius (um 500 nach Chr.) hat die Arithmetik des Nikomachos lateinisch bearbeitet; dadurch kam sie in den Lehrplan der abendländischen Universitäten.

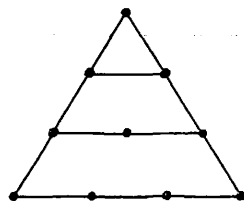


Abb. 2.41. Dreieckszahlen

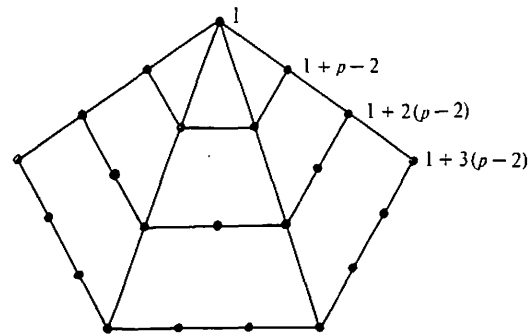


Abb. 2.42. Fünfeckszahlen

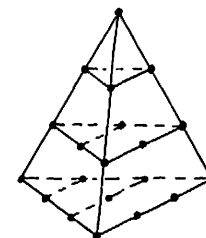


Abb. 2.43. Pyramidenzahlen

ten. Wir finden sie z. B. in dem Lehrbuch von Gregor Reisch [4.4]. Das Interesse an diesen Zahlen ist auch in der Neuzeit nicht erloschen, z. B. hat Fermat bemerkt, daß sich jede ganze Zahl als Summe von höchstens p p -ecks-zahlen darstellen läßt [4.4].

2.5.2 Aus der Algebra

Es hat bei den Griechen sicher einen elementaren praktischen Rechenunterricht gegeben [K. Vogel, Griech. Logistik], aber wenn es dazu Lehrbücher gegeben haben sollte, so sind sie nicht erhalten.

Bei Gelegenheit der Alexanderzüge sind astronomische Daten, wahrscheinlich auch algebraische Aufgaben und Lösungen nach Griechenland gekommen. Erkennbar ist das allerdings nur an der Ähnlichkeit, die manche Stellen bei Euklid, mehr noch bei Heron und Diophant mit babylonischen Problemen haben.

Diophants „Arithmetik“ beginnt mit einer Aufzählung von Arten (*εἶδη*) von Zahlen, für die Bezeichnungen eingeführt werden:

$\Delta^Y = \delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$	(= Quadrat = x^2)
$K^Y = \kappa\upsilon\beta\omicron\varsigma$	(= Kubus = x^3)
$\Delta^Y \Delta = \delta\upsilon\nu\alpha\mu\omicron\delta\upsilon\nu\alpha\mu\iota\varsigma$	(= Quadratoquadrat = x^4)
$\Delta K^Y = \delta\upsilon\nu\alpha\mu\omicron\kappa\upsilon\beta\omicron\varsigma$	(= Quadratokubus = x^5)
$K^Y K = \kappa\upsilon\beta\omicron\kappa\upsilon\beta\omicron\varsigma$	(= Kubokubus = x^6)

Eine unbekannte Größe, die keine Potenz einer Zahl ist, heißt *ἀριθμός* (Zahl) und wird durch ein Zeichen ausgedrückt, das Ähnlichkeit mit einem griechischen Schluß- ς hat und als Ligatur von $\alpha\rho$ aufgefaßt werden kann. Dieses Zeichen tritt (mit Varianten) nicht nur in Diophant-Handschriften auf, die aus späterer Zeit stammen, sondern auch in einem Papyrus aus der Zeit Diophants [Pap. Michigan 620]. Wir schreiben dafür s .

Die reziproken Potenzen heißen ἀριθμοστόν $\left\langle = \frac{1}{x} \right\rangle$, δυναμοστόν $\left\langle = \frac{1}{x^2} \right\rangle$

usw. Sie werden durch ein Symbol bezeichnet, das Ähnlichkeit mit einem (etwas gebogenen) $\times$ hat: $\varsigma^\times$, $\Delta^{Y\times}$ usw.

Diophant stellt die Multiplikationsregeln für die Potenzen, auch die reziproken Potenzen, zusammen. Dazu kommt weiter die Regel: Das Produkt zweier abzuziehender Größen ist positiv, das Produkt einer abzuziehenden mit einer positiven Größe ist eine abzuziehende Größe. Die Übersetzung ist wegen der nicht zu vermeidenden Fachwörter problematisch; der griechische Text lautet:

Λεῖψις ἐπὶ λεῖψιν πολλαπλασιασθεῖσα ποιεῖ ὑπαρξιν,
λεῖψις δὲ ἐπὶ ὑπαρξιν ποιεῖ λεῖψιν.

Es sind nicht negative Zahlen gemeint, sondern die „abzuziehenden“ Zahlen etwa bei der Ausrechnung von $(a-b)(c-d)$; insgesamt müssen die Zahlen positiv sein. Maximus Planudes sagt in einem Scholion [Diophant Op. Bd. 2, S. 139]: Diophant „spricht von etwas Positivem, das eine Wegnahme enthält.“

Diophant benutzt auch ein Minuszeichen: Λ . Heath hält es für wahrscheinlich, daß dieses Zeichen nicht, wie bei Diophant steht, ein umgekehrtes ψ ist, sondern eine Kombination aus Λ und ι , den Anfangsbuchstaben des Stammes $\lambda\iota\pi$ von $\lambdaείπειν$ [Gr. M. Bd. 2, S. 459].

εἶδος, das wir hier mit „Art“ übersetzt haben, heißt lateinisch *species*; vielleicht ist das der Grund dafür, daß Viète seine Buchstabenrechnung „Logistica speciosa“ nennt [4.4].

Für die Lösung von Gleichungen, in denen nur zwei Potenzen der Unbekannten vorkommen, gibt Diophant die Regel, daß sie auf die Form $a \cdot x^p = b \cdot x^q$ gebracht werden sollen; $p=0$ oder $q=0$ ist zugelassen: „Wenn bei einem Problem gewisse Arten denselben Arten gleich sind, aber nicht gleichviel, so muß man auf beiden Seiten Gleichartiges von Gleichartigem wegnehmen (ἀφαιρεῖν, abziehen), bis eine Art einer Art gleich ist. Wenn aber auf einer Seite oder auf beiden Seiten Subtrahenden stehen, so muß man auf beiden Seiten des Fehlende zusetzen (προσθεῖναι, addieren), so daß auf beiden Seiten nur Positives steht, und alsdann von beiden Seiten wieder Gleiches wegnehmen, bis auf beiden Seiten nur je eine Art übrigbleibt.“

προσθεῖναι entspricht arabisch *al-ğabr* = Einrichten, Ergänzen
ἀφαιρεῖν entspricht arabisch *al-muqābala* = Ausgleichen.

Ein Werk von al-Ḥwārizmī (9. Jh. n. Chr.) heißt: *Al-kitāb al-muḥtasar fī ḥisāb al-ğabr w'al-muqābala* = ein kurzgefaßtes Buch über die Rechenverfahren des *al-ğabr* und *al-muqābala*. Das ist der Ursprung des Wortes „Algebra“.

Was bisher von Diophant berichtet wurde, steht in der Einleitung zum I. Buch. Im übrigen ist das Werk eine Sammlung von Aufgaben; sie sind zwar nach der Art der Probleme geordnet, aber eine allgemeine Theorie wird nicht geboten.

Beispiele:

Buch I, Aufg. 16: „Drei Zahlen von der Beschaffenheit sind zu finden, daß die Summen zu je zweien gegebenen Zahlen gleich sind. – Es ist dabei notwendig,

daß die halbe Summe der drei gegebenen Zahlen größer ist als jede der gegebenen Zahlen.“

Die Aufgabe ist also in unserer Schreibweise:

$$\begin{aligned} x+y &= a \quad (\text{Diophant: } 20) \\ y+z &= b \quad (30) \\ x+z &= c \quad (40). \end{aligned}$$

Die Nebenbedingung erhält man so: Addition der drei Gleichungen ergibt $x+y+z=(a+b+c)/2$, und das muß $>x+y=a$ usw. sein.

Diophant führt das System auf eine Gleichung mit einer Unbekannten zurück, indem er

$$x+y+z=s$$

setzt. Dann ist

$$s=(a+b+c)/2, \quad x=s-b, \quad y=s-c, \quad z=s-a.$$

Diophant gibt die Lösung in Worten und mit den angegebenen bestimmten Zahlen, benutzt aber auch die verfügbaren Symbole.

I, 17 ist dieselbe Aufgabe mit vier Gleichungen und vier Unbekannten. 1484 hat Nicolas Chuquet die Aufgabe behandelt: [4.4] [Tropfke (unter 4.0.2.2) S. 147]: „Gesucht sind fünf Zahlen von der Art, daß sie zusammen ohne die erste 120 ergeben, ohne die zweite 180, ohne die dritte 240, ohne die vierte 300 und ohne die fünfte 360“, also

$$\begin{aligned} x_2+x_3+x_4+x_5 &= s-x_1=a_1=120 \\ s-x_2 &= a_2=180 \\ s-x_3 &= a_3=240 \\ s-x_4 &= a_4=300 \\ s-x_5 &= a_5=360. \end{aligned}$$

Aus $4s=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ würde sich hier die Bedingung

$$\frac{s}{4} > a_i \text{ für alle } i$$

ergeben. Sie ist für a_4 und a_5 nicht erfüllt. In der Lösung

$$x_1=180, \quad x_2=120, \quad x_3=60, \quad x_4=0, \quad x_5=-60$$

tritt daher 0 und eine negative Zahl auf. Das ist das erste Auftreten einer negativen reinen Zahl als Lösung einer Gleichung im Abendland; als „Schulden“ kommt eine negative Lösung bereits bei Leonardo von Pisa (1225) vor [4.4].

V, 1 als ein Beispiel (mittlerer Schwierigkeit) für die Art von Aufgaben, die Diophant hauptsächlich behandelt: „Es sind drei Zahlen $\langle A, B, C \rangle$ in geometrischer Proportion zu finden, so daß jede, vermindert um eine gegebene Zahl, ein Quadrat ergibt. Die gegebene Zahl sei 12.

Wenn die Zahlen in geometrischer Proportion stehen, so ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem Quadrat des mittleren ($A \cdot C = B^2$). Ich frage nun, welches Quadrat, vermindert um 12, ein Quadrat ist. Das ist leicht, eine solche Zahl ist $42\frac{1}{2}$.“

Diophant bestimmt also zunächst eine Zahl k mit

$$k^2 - 12 = \text{Quadrat.}$$

Man kann den speziellen Ansatz machen

$$k^2 - 12 = (k - 1)^2$$

und findet $k = 6\frac{1}{2}$.

Diophant setzt nun $A = k^2$; dann ist die erste Bedingung, nämlich $A - 12 = \text{Quadrat}$, erfüllt.

Ferner setzt er $C = s^2$; dann folgt aus $A \cdot C = B^2$:

$$B = ks.$$

Nun müssen $s^2 - 12 = p^2$ und $ks - 12 = q^2$ Quadratzahlen sein. Diophant bildet

$$p^2 - q^2 = s(s - k),$$

vergleicht dies mit

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = a \cdot b$$

und setzt $a = s$, $b = s - k$; also

$$p = \frac{1}{2}(2s - k), \quad q = \frac{1}{2}k = \frac{13}{4}.$$

Aus der Gleichung

$$ks - 12 = q^2 = \frac{169}{16}$$

ergibt sich $s = \frac{361}{104}$ und somit $A = 42\frac{1}{2}$, $B = \frac{2346\frac{1}{2}}{104}$, $C = \frac{130321}{10816}$.

Bemerkte sei: Obwohl Diophant stets verlangt, „Zahlen“ zu finden, läßt er auch Brüche als Lösungen zu, jedoch keine irrationalen Zahlen.

2.6 Aus der Entwicklung der Naturwissenschaft

Wir haben oben (2.2.1) darzulegen versucht, daß die Art der griechischen Mathematik zusammen mit der griechischen Philosophie und Naturwissenschaft entstanden ist und daß dieser Entwicklung eine gemeinsame Einstellung zugrunde liegt: Das Weltgeschehen soll nicht als Analogie zu menschlichen Erlebnissen, sondern „rational“ verstanden werden. Was „rational“ heißen soll, muß dabei erst erarbeitet werden.

Was verstanden werden soll, ist der Himmel, die Sonne, der Mond, die Sterne, ihre Bewegungen, ihre Auf- und Untergänge – und die Erde, ihre Größe und Gliederung, das Wetter, dann insbesondere das Werden und Vergehen der irdischen Dinge.

Wie soll das alles verstanden werden?

2.6.1 Astronomie

1. Entwicklung der Vorstellungen

Eine gewisse Ordnung am Himmel hatten auch die Babylonier und Ägypter beobachtet und zur Zeitmessung und zu Vorhersagen benutzt. Auf- und Untergänge der Sterne wurden beobachtet, auch Finsternisse, aber Vorstellungen über die Natur der Sterne (natürlich sind sie Götter) oder über die Bahnen finden wir nicht.

Thales stellte sich die Erde als eine Scheibe vor, die auf dem Wasser schwimmt [Aristoteles, Über den Himmel II, 13 = 294 a 28–32]. Anaximander dachte sie sich als eine Säulentrommel, deren Höhe $\frac{1}{3}$ ihres Durchmessers ist, die in der Mitte der Welt schwebt. „Die Gestirne seien radförmige Verdichtungen von Luft, die von Feuer erfüllt seien und an gewissen Öffnungen Flammen aushauchten“ [Diels 12 A 18]. Die Mondfinsternis erfolge dadurch, daß das Feuerloch verstopft wird [Diels 12 A 22]. Diogenes Laertius berichtet [II, Kap. 1], Anaximander habe eine Erdkarte gezeichnet und eine „Sphäre“, d.h. einen Himmelsglobus hergestellt. Ferner habe er den Gnomon (Schattenstab, Sonnenuhr) erfunden und einen solchen in Sparta aufgestellt. Herodot berichtet jedoch [II, 109], daß die Griechen die Sonnenuhr von den Babyloniern übernommen haben. – Anaximander könnte diese Kenntnis in Griechenland verbreitet haben.

Der Gnomon ist als Beobachtungsinstrument interessant. Mit seiner Hilfe kann man z. B. die Nord-Süd-Richtung und die Ost-West-Richtung feststellen (s. S. 66). Damit wäre es möglich, den Meridiandurchgang von Sternen zu beobachten, nicht nur ihre Auf- und Untergänge. Es ist aber schwer festzustellen, wann das geschehen ist.

Anaximenes lehrte, „die Erde sei flach und schwimme auf der Luft“. „Die Gestirne bewegten sich nicht unter der Erde durch, sondern um die Erde herum, gerade wie sich auf unserem Kopf der Filzhut dreht.“ „Die Sonne würde

während der Nacht von den höheren Gegenden der Erde verdeckt“. [Diels 13 A 7].

Andere Denker, so Heraklit und Xenophanes, meinten, daß Sonne und Sterne täglich neu entzündet werden.

Wer zuerst die Kugelgestalt der Erde angenommen hat, ist unbekannt. Vielleicht war es einer der Pythagoreer, und vielleicht beruhte diese Annahme nicht auf Beobachtungen, sondern darauf, daß man die Kugel als den vollkommensten Körper ansah. Man kann die Kugelgestalt der Erde daraus erschließen, daß bei einer Mondfinsternis der Erdschatten stets kreisförmig erscheint. Aber erst Anaxagoras hat bemerkt, daß der Mond sein Licht von der Sonne erhält und daß eine Mondfinsternis dadurch entsteht, daß die Erde zwischen Sonne und Mond tritt [Platon, Kratylos 409 a, b; weitere Quellen bei Heath: Aristarchus, S. 78–85].

Erstaunlich ist die reiche Phantasie dieser Männer des 6. Jh. Man macht sich Vorstellungen davon, wie das alles sein könnte; dann – erst dann – hat man die Möglichkeit, durch gezielte Beobachtungen diese Vorstellungen und ihre Konsequenzen zu überprüfen. Das ist im 5. Jh. geschehen. Besonders eingehend haben sich die Pythagoreer mit den Vorgängen am Himmel beschäftigt, die sie mit einer „Harmonie der Sphären“ in Verbindung brachten.

Spätestens im Laufe dieses 5. Jh. muß bekannt geworden sein, daß die Fixsterne sich in Kreisen parallel zum Himmelsäquator bewegen, daß die Planeten – immer einschließlich Sonne und Mond – sich außerdem in der Ekliptik bewegen (die Babylonier kannten bereits vor 700 v. Chr. „Sterne im Weg des Mondes“ und wußten, daß auch die Sonne und die übrigen Planeten sich auf diesem Wege bewegten [S. van der Waerden, Astr. S. 77]),

daß die Planeten dabei Schleifen und Rückläufe ausführen,
daß die Planeten verschiedene Abstände von der Erde haben.

Über eine dieser Erkenntnisse gibt es eine antike Notiz: Theon von Smyrna schreibt [zitiert nach Diels 41 A 7]: „Eudemos erzählt in seiner Geschichte der Astronomie, daß Oinopides als erster den Gürtel des Tierkreises gefunden habe.“ Ob er die Schiefe der Ekliptik als Kreisbogen über der Seite des regelmäßigen 15-ecks ($=24^\circ$) ermittelt hat, ist nicht sicher. Proklos schreibt [Eukl. K., S. 269]; daß Euklid die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks eben wegen dieser astronomischen Bedeutung in seine Elemente aufgenommen habe. Demnach muß dieser Wert jedenfalls vor Euklid bekannt gewesen sein. Man könnte ihn mittels eines Gnomons, dessen Schatten auf eine Halbkugel fließt, leicht feststellen (Abb. 2.44).

Nach Vitruv [IX, 8] soll Aristarch von Samos (um 280 v. Chr.) ein solches Gerät erfunden haben. Ich möchte aber eine frühere Kenntnis davon nicht ausschließen. Nach Kleomedes [M. C. (d), I, 10] hat Eratosthenes es bei seiner Methode zur Messung des Erdumfangs benutzt, um aus dem Sonnenstand den Breitenunterschied zwischen Alexandria und Syene zu bestimmen. Diese Methode sei kurz skizziert (Abb. 2.45):

- 1) Alexandria und Syene liegen ungefähr auf dem gleichen Meridian. Die Entfernung ist $AS = 5000$ Stadien.

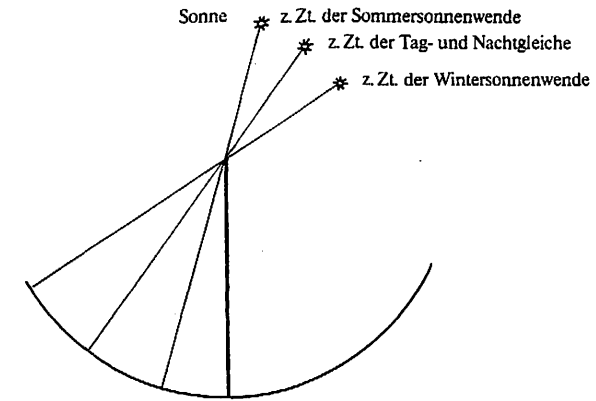
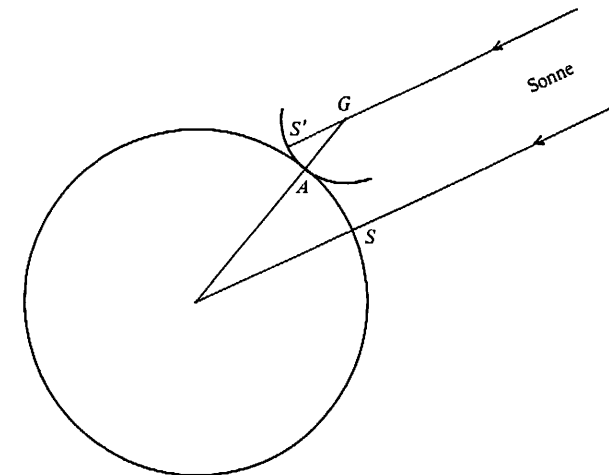


Abb. 2.44



A: Alexandria
S: Syene (Assuan)
S': Ende des Schattens des Schattenstabs AG

Abb. 2.45

- 2) Am Tag der Sommersonnenwende steht die Sonne in Syene mittags im Zenith; ein Schattenstab wirft keinen Schatten; der Boden eines tiefen Brunnens ist beleuchtet.
- 3) Zu gleicher Zeit wird in Alexandria mit einem Schattenstab mit Halbkugelschale die Länge des Schattens gemessen: $AS' = 1/50$ des Kreisumfangs.

Also ist $AS = 1/50$ des Erdumfangs $= 5000$ Stadien, also der Erdumfang $= 250000$ Stadien.

2. Entwicklung mathematischer Modelle

Wir kehren zur Lage der Astronomie gegen Ende des 5. Jh. zurück. Es lag die Aufgabe vor, die erwähnten Beobachtungstatsachen zu erklären und mathematisch zu erfassen. Das war bei den Fixsternen verhältnismäßig leicht: sie sind an einer Kugel befestigt, die sich täglich um die Erde dreht, ihre Auf- und Untergänge werden in einer bestimmten Ebene, der Horizontebene, beobachtet. Zur mathematischen Erfassung brauchte man die Geometrie der bewegten Kugel. Werke darüber sind erst aus dem Ende des 4. Jh. erhalten: die Werke des Autolykos von Pitane „Über die sich bewegende Kugel“ und „Über die Auf- und Untergänge“ und Euklids „Phainomena“, die etwas später geschrieben sind.

Weitaus schwieriger war es, Modelle für die Planetenbewegung zu finden. Dabei hat schon der Pythagoreer Philolaos (etwa in der Zeit von 440 bis 400) nicht die Erde, sondern ein Zentralfeuer in den Mittelpunkt der Welt gestellt. Van der Waerden führt auch Argumente dafür an, daß man bereits an eine Epizykeltheorie dachte, d.h. man nahm an, der Planet bewege sich auf einem Kreis (dem Epizykel), dessen Mittelpunkt sich seinerseits auf einem Kreis (dem Deferenten) bewegt. Diese Theorie konnte jedoch zunächst in ihrer ersten Form die Beobachtungen nicht befriedigend wiedergeben. Mag man nun eine solche frühe Epizykeltheorie annehmen oder nicht, die Situation um 400 war etwa diese: Gesucht wird eine Modellvorstellung, die

- 1) die Beobachtungen, und zwar verhältnismäßig genaue Beobachtungen, befriedigend wiedergibt,
- 2) die scheinbar unregelmäßigen Bewegungen der Planeten als regelmäßige Bewegungen erklärt.

Nun wußte man (schon in Babylon), daß die Planetenbewegungen trotz der scheinbaren Unregelmäßigkeiten periodisch sind, d.h. daß die Planeten nach bestimmten Zeiten wieder an der gleichen Stelle am Himmel stehen. Regelmäßige periodische Bewegungen waren damals nur als Kreisbewegungen vorstellbar. Außerdem konnte man aus dem System des Philolaos (oder auch aus einem, wenn auch noch unvollkommenen, Epizykellmodell) die Zuversicht gewinnen, daß eine Erklärung der Planetenbewegung durch Kreise möglich sein könnte. Platon schreibt [Gesetze VII, S. 822a]: „Es ist keine richtige Ansicht von Sonne, Mond und den anderen Sternen, daß sie in der Irre herumziehen; gerade das Gegenteil ist der Fall: jeder von ihnen wandelt den gleichen Weg – nicht viele Wege, sondern nur einen einzigen, im Kreise; daß er viele Bahnen hat, ist nur Schein.“

Daß die Planeten überhaupt geordnete Bahnbewegungen ausführen, und zwar Kreisbewegungen, war zur Zeit Platons eine ziemlich neue Einsicht und zunächst mehr ein Programm als eine gesicherte Erkenntnis. Ich halte aber die Aufstellung eines solchen Programms für einen wichtigen Schritt in der Geschichte der Astronomie, auch wenn die mathematische Durchführung zunächst nicht gelang und schließlich überhaupt nicht gelingen konnte. Erst Kepler hat das Postulat, daß die Planetenbahnen durch Kreise beschrieben werden müssen, aufgegeben; er beschrieb sie auf Grund der Beobachtungen und Messungen, wurde aber dabei von dem Gedanken geleitet, daß die Bahnen durch

Kräfte zwischen der Sonne und den Planeten bestimmt sein müssen; das ist eigentlich das neue Erklärungsprinzip.

Eudoxos erdachte für die Planetenbewegung ein Modell, das aus konzentrischen Sphären besteht, von denen jede in der nächsten befestigt ist, aber sich um eine andere Achse dreht. Damit können die Schleifen und Rückläufe erklärt werden, aber nicht die bei Mars und Venus beobachteten Änderungen der Helligkeit, die nur durch veränderliche Abstände von der Erde erklärbar sind.

Herakleides Pontikos (nach 388–315/310) hatte den Gedanken, daß die Erde sich in einem Tag um ihre Achse dreht und die Himmelskugel ruht. Ferner nahm er an, daß Venus und Merkur sich in Kreisen um die Sonne bewegen und mit dieser um die Erde. Der etwa 75 Jahre jüngere Aristarch von Samos stellte sogar die Sonne in den Mittelpunkt des Planetensystems.

Diese Gedanken setzten sich nicht durch. Gründe dafür bespricht Ptolemaios [Almagest I, Kap. 7]:

- 1) Die leichtesten Substanzen, nämlich die Himmelskörper, würden ruhen, während die schwere Erde sich bewegt. – Dagegen schreibt Kepler [4.4]: „Was ist leichter zu denken, daß sich jenes Pünktchen, die Erde, nach einer Seite hin dreht, oder aber daß die ganze Welt in zehn verschiedenen Bewegungen mit unerhörter Geschwindigkeit sich nach der anderen Seite hinkehrt?“
- 2) Bei der schnellen Bewegung der Erdoberfläche würde alles, was nicht fest mit ihr verbunden ist, zurückbleiben. – Noch Galilei hat die Frage besprochen, ob unbefestigte Gegenstände durch die Zentrifugalkraft von der Erde weggeschleudert werden könnten. Erst durch die Mechanik von Galilei und Newton konnte der Sachverhalt verstanden werden.

Die physikalischen Vorstellungen zur Zeit des Aristoteles sprachen objektiv für eine ruhende Erde.

Für die mathematische Erfassung der Planetenbewegung entstand neben der Epizykeltheorie eine Exzentertheorie, d.h.: der Planet bewegt sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt nicht die Erde ist, und evtl. bewegt sich dieser Kreis noch als feste Scheibe um den Erdmittelpunkt. Nach Ptolemaios [Almagest XII, 1] hat Apollonios die Gleichwertigkeit beider Hypothesen erkannt, allerdings die Exzenterhypothese nur bei den äußeren Planeten für anwendbar gehalten.

Hipparch, der in den Jahren zwischen 141 und 127 teils in Alexandria, teils auf Rhodos sorgfältige Beobachtungen durchgeführt und neben anderen Leistungen einen Fixsternkatalog aufgestellt hat, wußte z.B. daß die Jahreszeiten verschieden lang sind, d.h. daß die Sonne in den verschiedenen Quadranten der Ekliptik verschieden lange verweilt.

Sei $ABCD$ der Kreis der Ekliptik, E sein Mittelpunkt, die Erde, A der Frühlingspunkt, B die Sommersonnenwende, C der Punkt der Herbsttag-undnachtgleiche, D die Wintersonnenwende (Abb. 2.46).

Die Sonne braucht	von A bis B	$94\frac{1}{2}$ Tage
	von B bis C	$92\frac{1}{2}$ Tage
	von C bis A	$178\frac{1}{4}$ Tage.

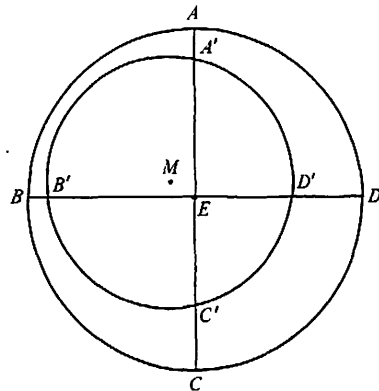


Abb. 2.46

Das erklärt Hipparch dadurch, daß die Sonne sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M nicht mit E zusammenfällt, mit konstanter Geschwindigkeit bewegt (Abb. 2.46). Dann müssen die Bögen

$$A'B' = 93^\circ 9', \quad B'C' = 91^\circ 11', \quad C'A' = 175^\circ 40'$$

sein. Daraus läßt sich die Lage des Mittelpunktes M berechnen. Ptolemaios führt die Rechnung durch, und zwar, wie er ausdrücklich sagt, „in Übereinstimmung mit den Darlegungen Hipparchs“ [Almagest III, Kap. 4].

(Man kann sich die Aufgabe geometrisch so klarmachen: Man denke sich den Kreis $A'B'C'D'$ beweglich, markiere die Punkte A', B', C' gemäß den bekannten Bögen und verschiebe den Kreis so, daß die Punkte A', C' auf AC und B' auf BD zu liegen kommen.)

Bei der Theorie der Planetenbewegung sagt Ptolemaios, dieses Unternehmen sei „aus vielen Gründen mit großen Schwierigkeiten verbunden und begreiflicherweise noch von niemand vorher mit Erfolg in Angriff genommen worden“ [Alm. IX, Kap. 2]. Ptolemaios kombiniert die Exzenter- und die Epizykelhypothese. Für den Mars, dessen Bahnrechnung Kepler zu seiner „Neuen Astronomie“ führte, sieht das etwa so aus (Abb. 2.47): Der Planet bewegt sich auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt M sich auf einem Kreis um O bewegt. O ist verschieden vom Weltmittelpunkt S , der für Ptolemaios die Erde, für Kepler die Sonne ist. Außerdem wird ein „Ausgleichspunkt“ A benötigt, von dem aus gesehen die Bewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erfolgt. A wird so angenommen, daß O in der Mitte der Strecke AS liegt. Diese Annahme scheint bei Ptolemaios die Beobachtungen mit hinreichender Genauigkeit wiederzugeben; bei Kepler ist das nicht mehr der Fall.

Wenn der Planet in Opposition zur Sonne steht, d. h. wenn Sonne, Erde und Planet in einer Geraden stehen, ist es gleichgültig, ob von der Erde oder von der Sonne aus beobachtet wird; der Planet erscheint an der gleichen Stelle der Ekliptik. Bei Ptolemaios bedeutet das, daß es gleichgültig ist, ob man den Planeten oder den Mittelpunkt des Epizykels betrachtet.

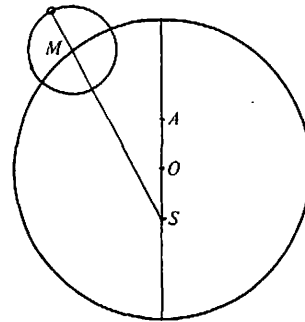


Abb. 2.47

Die Aufgabe ist nun (Abb. 2.48): Es sind drei Stellungen M_1, M_2, M_3 des Planeten bezüglich der Ekliptik beobachtet, d. h. es sind die Winkel $M_1SM_2, M_2SM_3, M_3SM_1$ bekannt. Ferner sind die Zeiten dieser Beobachtungen bekannt, d. h. die Winkel $M_1AM_2, M_2AM_3, M_3AM_1$. Denkt man sich die drei Strahlen von S aus gezeichnet und die drei Strahlen von A aus etwa auf einer beweglichen Folie gezeichnet, so ist diese Folie solange zu verschieben, bis der Mittelpunkt des durch die drei Schnittpunkte bestimmten Kreises in der Mitte der Strecke AS liegt.

(Diese Skizze des Problems stützt sich auf die Beschreibung von Kepler [Astronomia nova, 2. Teil, 16. Kap.] und die Erläuterungen von Max Caspar in der deutschen Übersetzung.)

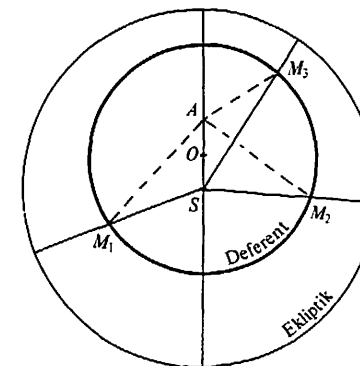


Abb. 2.48

3. Anfänge der Trigonometrie

Als mathematische Hilfsmittel für astronomische Rechnungen werden Kugelgeometrie und Trigonometrie benötigt. Ich bespreche hier nur die Anfänge der ebenen Trigonometrie, und zwar die Aufstellung einer Sehnentafel, die die Länge $S(\alpha)$ der zum Zentriwinkel α gehörigen Sehne angibt. Eine solche Tafel muß schon Hipparch berechnet haben; jedenfalls erwähnt Theon von Alexandria ein Werk von ihm „über die Sehnen im Kreise“. Von dieser Tafel ist nichts erhalten. Toomer hat sich überlegt, wie sie ausgesehen und wie Hipparch sie berechnet haben könnte.

Der Durchmesser des Kreises sei d . Dann ist $S(90^\circ) = \frac{d}{2} \cdot \sqrt{2}$ und

$$S(60^\circ) = \frac{d}{2}.$$

Mit $S(\alpha)$ ist auch $S(180^\circ - \alpha) = C(\alpha)$ bekannt; denn es ist

$$S^2(\alpha) + C^2(\alpha) = d^2.$$

Ferner läßt sich nach einem Satz, der Archimedes zugeschrieben wird, bei gegebenem $S(\alpha)$ auch $S\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ berechnen:

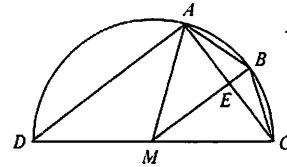


Abb. 2.49

In Abb. 2.49 sei $\angle AMC = \alpha$. Dann ist

$$S^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = BC^2 = EC^2 + EB^2$$

und

$$EC = \frac{1}{2} S(\alpha),$$

$$EB = MB - ME = \frac{d}{2} - \frac{AD}{2} = \frac{d}{2} - \frac{1}{2} C(\alpha).$$

Mit diesen Hilfsmitteln läßt sich eine Sehnentafel mit der Schrittweite $7\frac{1}{2}^\circ$ berechnen. In der von Toomer angegebenen Tabelle 2.3 bedeutet ein senkrechter Pfeil den Übergang von α zu $\alpha/2$, ein waagerechter Pfeil den Übergang zu $180^\circ - \alpha$. Toomer vermutet danach, daß die Sehnentafel von Hipparch eine Schrittweite von $7\frac{1}{2}^\circ$ hatte. Dafür spricht auch, daß die Inder, die von der Sehne zum Sinus übergingen, eine sin-Tafel mit der Schrittweite $3\frac{1}{2}^\circ$ aufgestellt haben (Āryabhaṭa, s. S. 185); es ist ja

$$(1) \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} S(\alpha).$$

Tabelle 2.3. Herstellung der Sehnentafel mit der Schrittweite $7\frac{1}{2}^\circ$ nach Toomer

	90°				
	↓	45° →	135°		
	↓	157½° →	22½°	↓	67½° → 112½°
	↓	120° →	60°		
	↓	30°	→	150°	
	↓	165° →	15°	↓	75° →
	↓	82½°	↓	7½° →	172½°
	↓	97½°	↓	37½° →	142½°
			↓	105°	↓
				52½° →	127½°

Weiter kommt man, wenn man aus $S(\alpha)$ und $S(\beta)$ auch $S(\alpha+\beta)$ und $S(\alpha-\beta)$ ausrechnen kann. Das erreicht Ptolemaios mit dem Satz [I, Kap. 10]: „Es sei in den Kreis ein beliebiges Viereck $ABCD$ einbeschrieben, in welchem man die Diagonalen AC und BD ziehe. Dann ist das aus den Diagonalen gebildete Rechteck gleich der Summe der aus den einander gegenüberliegenden Seiten gebildeten Rechtecke.“

$$(2) \quad AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

Beweis (s. Abb. 2.50): Man zeichne BE so, daß $\angle DBC = \angle ABE$ ist. Dann ist $\triangle BCE \sim \triangle BDA$; denn $\angle ECB = \angle ABD$ nach Konstruktion, $\angle BCE = \angle BDA$ als Peripheriewinkel über dem demselben Bogen. Also ist $AD:EC = BD:BC$ oder

$$(3) \quad AD \cdot BC = EC \cdot BD.$$

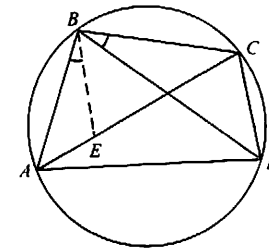


Abb. 2.50

Ferner ist $\triangle BAE \sim \triangle BDC$, also $AB:AE = BD:DC$ oder

$$(4) \quad AB \cdot DC = AE \cdot BD.$$

Addition von (3) und (4) ergibt die Behauptung.

Es sei nun (Abb. 2.51) der Bogen $AB = \alpha$, der Bogen $AC = \gamma$, also der Bogen $BC = \gamma - \alpha$. Dann wird aus (2)

$$S(\gamma) \cdot C(\alpha) = S(\alpha) \cdot C(\gamma) + d \cdot S(\gamma - \alpha).$$

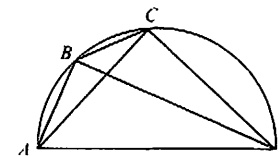


Abb. 2.51

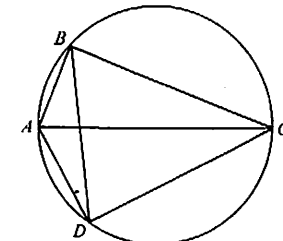


Abb. 2.52

Damit haben wir eine Formel für $S(\gamma - \alpha)$. Eine Formel für $S(\alpha + \beta)$ könnten wir hieraus durch Umrechnung erhalten. Man kann aber auch ein Viereck mit den Diagonalen $S(\alpha + \beta)$ und d zeichnen (Abb. 2.52). Es sei der Bogen $AB = \alpha$, der Bogen $AD = \beta$; dann liefert (2)

$$d \cdot S(\alpha + \beta) = S(\alpha) \cdot C(\beta) + S(\beta) \cdot C(\alpha).$$

Anm.: Mittels (1) erhält man daraus das Additionstheorem der sin-Funktion. Trotzdem würde ich es nicht für richtig halten, wenn man sagen wollte, Ptolemaios habe das Additionstheorem des Sinus gefunden.

Außer $S(90^\circ)$ und $S(60^\circ)$ läßt sich auch $S(36^\circ)$ berechnen, nämlich als Seite des Zehnecks durch Lösung einer quadratischen Gleichung. Mit den angegebenen Formeln erhält man dann $S(6^\circ)$, $S(3^\circ)$, $S(1\frac{1}{2}^\circ)$, $S(\frac{3}{4}^\circ)$. Ptolemaios setzt $d = 120$ Teile (*partes*, abgekürzt: *p*) und erhält

$$S(1\frac{1}{2}^\circ) = 1^\circ 34' 15'', \quad S(\frac{3}{4}^\circ) = 0^\circ 47' 15''.$$

Nun berechnet er $S(1^\circ)$ durch Interpolation. Dazu beweist er

$$(5) \quad \text{Wenn } \beta > \alpha \text{ ist, so ist } \frac{S(\beta)}{S(\alpha)} < \frac{\beta}{\alpha}.$$

(Ziehen wir die Formel (1) heran, so bedeutet das:

Aus $\beta > \alpha$ folgt $\frac{\sin \beta}{\beta} < \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, d.h. $\sin x$ wächst langsamer als x . Es scheint mir bemerkenswert zu sein, wie Ptolemaios das beweist.)

Es sei der Bogen $AB = \alpha$, der Bogen $BC = \beta$ (Abb. 2.53). Man halbiere den Winkel bei B , die Winkelhalbierende treffe den Kreis in D . Von D falle man das Lot auf AC , sein Fußpunkt sei F . Um D schlage man mit DE den Kreis, der AD in H und die Verlängerung von DF in G trifft. (Man überlege sich, daß $DH < DA$ und $DF < DG$ ist.)

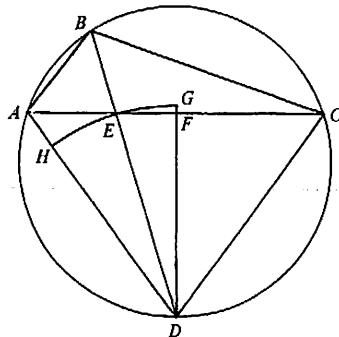


Abb. 2.53

Die Abkürzung Ks bedeute „Kreissektor“. Es ist

$$Ks \ GDE > \Delta FDE$$

$$Ks \ EDH < \Delta EDA,$$

also $\frac{Ks \ GDE}{Ks \ EDH} > \frac{\Delta FDE}{\Delta DEA}$. Die Kreissektoren verhalten sich wie die Winkel, die Dreiecksflächen (da die Höhen der Dreiecke gleich sind) wie die Grundlinien, also gilt

$$(6) \quad \frac{\sphericalangle GDE}{\sphericalangle EDH} > \frac{EF}{EA}.$$

Man ermittelt aus der Figur

$$\sphericalangle GDE = \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)$$

$$\sphericalangle EDH = \frac{\alpha}{2}.$$

Somit wird (6) zu

$$\frac{\beta - \alpha}{2\alpha} > \frac{EF}{EA}.$$

Wir addieren beiderseits $1 = \frac{2\alpha}{2\alpha} = \frac{EA}{EA}$:

(Diese Operation wird in der griechischen Proportionsrechnung sehr oft ausgeführt.)

$$\frac{\beta + \alpha}{2\alpha} > \frac{AF}{EA}.$$

Wir multiplizieren mit 2: $\frac{\beta + \alpha}{\alpha} > \frac{AC}{AE}$

Wir subtrahieren $1 = \frac{\alpha}{\alpha} = \frac{AE}{AE}$: $\frac{\beta}{\alpha} > \frac{EC}{AE}$.

Nach einem Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck gilt

$$\frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AB} = \frac{S(\beta)}{S(\alpha)}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus (5) folgt

- 1) für $\beta = \frac{1}{2}$, $\alpha = 1$: $S(1^\circ) > \frac{2}{3} S(\frac{3}{2}^\circ) = 1^\circ 2' 50''$
- 2) für $\beta = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$: $S(1^\circ) < \frac{2}{3} S(\frac{3}{2}^\circ) = 1^\circ 2' 50''$.

Bei dieser Rechengenauigkeit ist also kein Unterschied mehr vorhanden; damit ist $S(1^\circ)$ bestimmt. Bei dieser Genauigkeit ist $S(\frac{1}{2}^\circ) = \frac{1}{2} S(1^\circ) = 0^\circ 31' 25''$. Damit kann Ptolemaios nun eine Sehnentafel mit der Schrittweite $\frac{1}{2}^\circ$ ausrechnen.

Hiermit kann man auch den Wert von π ausrechnen. Ptolemaios hat das nicht getan, aber später z. B. al-Birunī. Auf Grund der letzten Bemerkung können wir von $S(1^\circ)$ ausgehen. Das ist die Sehne des regelmäßigen 360-ecks. Wenn wir dessen Umfang als eine genügend gute Näherung für den Kreisumfang ansehen, erhalten wir

$$\pi = \frac{U}{d} = \frac{360}{120} \cdot 1^\circ 2' 50'' = 3^\circ 8' 30''.$$

Diesen Wert benutzt auch Ptolemaios, erklärt ihn aber als angenäherten Mittelwert zwischen $3\frac{1}{4} (3^\circ 8' 34'')$ und $3\frac{10}{11} (= 3^\circ 8' 27'')$ [Alm. d., Bd. 1, S. 385].

2.6.2 Struktur der Materie

Wir knüpfen an S. 86 und 88 an. Nach dem unbestrittenen Grundsatz des Parmenides, daß Seiendes nicht aus Nicht-seiendem entstehen und nicht in Nicht-seiendes vergehen kann, mußte angenommen werden, daß die Stoffe aus Teilchen bestehen, die sich vereinigen und trennen können.

Wie man sich diese Teilchen vorzustellen hat, das versucht man aus der Erfahrung abzuleiten. Anaxagoras bemerkt: Es muß erklärbar sein, daß aus der Nahrung, die wir zu uns nehmen, sich Haar, Vene, Arterie, Fleisch, Sehnen, Knochen usw. bilden. In der Nahrung müssen also Teilchen sein, die Erzeuger von all diesem sind. [Aristoteles, W. u. V. I, 1 = 314a 18]. Weitere Belege s. Diels 59 A.

Empedokles denkt an die Qualitäten der Stoffe und hat die Vorstellung, daß diese aus den vier Grundqualitäten, die durch Feuer, Luft, Wasser, Erde charakterisiert werden, zusammengesetzt sind, wie wenn ein Maler Farben mischt [Diels 31 B 6, 21, 22].

In der nächsten Generation werden die Vorstellungen bestimmter; dabei bilden sich zwei Richtungen aus, die lange Zeit nebeneinander und gegeneinander bestanden.

Leukipp und Demokrit schreiben den kleinsten Teilen nur geometrische Eigenschaften zu; sie unterscheiden sich wie Buchstaben durch Form (wie A und N), Anordnung (wie AN und NA) und Lage (wie N und Z). Aus ihren geometrischen Eigenschaften müssen die Möglichkeiten der Zusammensetzung und die Qualitäten der Stoffe abgeleitet werden [Aristoteles, Metaph. A 4 = 985b 4-22].

Platon setzt einen qualitätslosen Grundstoff voraus, dem die geometrischen Formen der regelmäßigen Körper aufgeprägt werden. Dabei kommt der Erde der Würfel zu, dem Feuer das Tetraeder, der Luft das Oktaeder, dem Wasser das Ikosaeder. Die Oberflächen der drei letztgenannten bestehen aus gleichseitigen Dreiecken; das ist entscheidend für die Umwandelbarkeit dieser Stoffe ineinander. Aus zwei Teilen Feuer kann ein Teil Luft entstehen, aus $2\frac{1}{2}$ (!) Teilen Luft ein Teil Wasser. Man kann sich denken, daß sozusagen die Oberflächen abgezogen und anders zusammengesetzt werden. Aus Erde kann hierbei kein Stoff anderer Art werden. Das gleiche gilt für das Dodekaeder, dessen Oberfläche aus Fünfecken besteht. Dieser Gestalt „bediente sich Gott für das Weltganze“ [Timaios 53 c-57 c].

Aristoteles geht davon aus, daß aller Veränderung etwas zugrunde liegt, an dem die Veränderung stattfindet, das sich aber selbst nicht verändert, wie z. B. ein Mensch Mensch bleibt, wenn er aus einem Ungebildeten zu einem Gebildeten wird. [Phys. I, 7 = 189 b ff.]. Diesem allen Dingen „Zugrundeliegenden“ (*ὑποκείμενον*, später lat. *substantia*) wird eine „Form“ (*εἶδος*, später lat. *forma*) aufgeprägt. Diese Form ist aber nicht geometrisch zu verstehen, sondern ergibt sich für die Urkörper (Elemente) aus den Gegensatzpaaren von Qualitäten:

kalt und trocken ergibt die Form „Erde“

kalt und feucht ergibt die Form „Wasser“

warm und feucht ergibt die Form „Luft“

warm und trocken ergibt die Form „Feuer“. [W. u. V. II, 2 = 329 b].

Wenn nun die vorgefundenen Körper aus einfacheren Körpern und schließlich aus den Elementen zusammengesetzt sind, so ist zu fragen, in welcher Weise die Form der Bestandteile in der Form des Zusammengesetzten erhalten bleibt. Diese Frage wird von Aristoteles nur kurz angeschnitten [W. u. V. I, 10 = 327 b 23-31]; sie ist im Mittelalter ausführlich durchdacht worden [Anneliese Maier: An der Grenze von Scholastik und Naturwissenschaft. Essen 1943]. Da dabei die Qualitäten nicht vollständig von einem Körper in den anderen übergehen, mußte man den Qualitäten auch Quantitäten zuschreiben. (Betrachten wir etwa die Wärme in einem Stab), so ist zu unterscheiden: 1) die *intensio*, die Intensität (z. B. die Temperatur) in jedem Punkt, 2) die *extensio*, die Verteilung der Intensität über den Stab. Da die *intensio* vom Ort abhängig ist, führt das auf den Begriff der Funktion und bei Nicole Oresme (14. Jh. n. Chr.) zur graphischen Darstellung von Funktionen [4.4].

2.6.3 Theorie der Bewegung

Schon Thales hatte in Einzelfällen gefragt, warum etwas geschieht, z. B. warum der Nil regelmäßig das Land überschwemmt, oder warum der Magnetstein das Eisen in Bewegung setzt. Aristoteles erklärt das Wissen um die Ursachen geradezu zu einem Kennzeichen wissenschaftlicher Erkenntnis. [Phys. I, 1 = 184 a 10-14]. Warum also geschieht Werden und Vergehen, Veränderung und speziell Ortsveränderung, d. h. Bewegung? Empedokles hatte Liebe und

Streit als die Kräfte genannt, die das Weltgeschehen bewirken (wir würden Anziehung und Abstoßung sagen). [Diels 31 B 17]. Anaxagoras hatte eine Art göttlicher Vernunft (*νοῦς*) angenommen. Aristoteles sieht das etwas nüchterner. Die vier Elemente haben ihren natürlichen Ort, die Erde in der Mitte der Welt, das Feuer am Rande der Sphäre unter dem Mond, Wasser und Luft dazwischen. Jeder Körper strebt nach seinem natürlichen Ort. Das erklärt die Fallbewegung als eine natürliche Bewegung, für die keine weitere Ursache erforderlich ist. Der Himmelskörper selbst ist ein fünfter Stoff, der Äther, und ihm kommt als natürliche Bewegung die Kreisbewegung zu [Üb. d. Himmel I, 3 = 270 b 20–31].

Alle übrigen Bewegungen bedürfen einer Ursache, und zwar nicht nur um in Gang gesetzt, sondern auch um aufrechterhalten zu werden. Diese Ursache kann im Körper selbst liegen, nämlich dann, wenn er eine Seele hat. Zu anderen Bewegungen ist eine äußere Ursache, eine „Kraft“ erforderlich. [Metaph. $\Delta 12 = 1019a 15$]. Die Beziehung dieser Ursache zur Wirkung läßt sich mathematisch erfassen. Aristoteles braucht dazu ein Maß für die Bewegung und findet es in der in einer bestimmten Zeit zurückgelegten Strecke. Außerdem muß die bewegte Last in das Bewegungsgesetz eingehen. Als Beziehung, in der diese Größen stehen, wird Proportionalität angesetzt – an was für eine Beziehung sollte man damals sonst denken? Aristoteles schreibt [Phys. VII, 5 = 250 a 4–12]: „Wenn dieselbe Kraft dasselbe (dieselbe Last) in einer bestimmten Zeit eine bestimmte Strecke weit bewegt, so wird sie dieselbe Last auch die halbe Strecke weit in der halben Zeit bewegen, und die halbe Kraft wird den halben Gegenstand in der gleichen Zeit die gleiche Strecke weit bewegen. ... Es ist jedoch nicht notwendig, daß dieselbe Kraft die doppelte Last in der gleichen Zeit die halbe Strecke weit bewegt.“

Zur Erläuterung schreibt Philoponos [Komm. z. Phys. S. 881]: „Wenn jeder von zwei Männern allein eine Last von 100 Pfund in einer Stunde ein Stadion (ca. 180 m) weit zieht, so werden beide zusammen eine Last von 200 Pfund in der Stunde ein Stadion weit ziehen.“ – Bei einer Kritik an dem Gesetz des Aristoteles sollte man also berücksichtigen, daß der Begriff „Kraft“ noch nicht genau festgelegt war.

2.7 Zusammenfassung

Wir haben oben (Abschn. 2.2.1) das Leben von Thales in dem lokalen Zusammenhang der politischen Lage in Kleinasien betrachtet. Wünschenswert wäre es, das Erwachen des griechischen Geistes im weltgeschichtlichen Zusammenhang zu sehen. Dazu kann ich hier nur Andeutungen bieten und verweise für ausführlichere Darstellungen auf von Fritz [Gr.] und Krafft [G. d. N.].

Die politische Struktur der Umgebung des östlichen Mittelmeers wurde entscheidend durch die dorische Wanderung um 1200 v. Chr. geprägt. Mit ihr hängt wahrscheinlich der Untergang des Hethiterreiches zusammen und auch das gefährliche Auftreten der „Seevölker“ an den Grenzen Ägyptens. Nach

dieser Wanderungszeit war Griechenland und die Westküste Kleinasien von Griechen bewohnt, die meist in kleineren Stadtstaaten lebten. In Griechenland entwickelte sich Sparta als Militärstaat, Athen aus einem Zusammenschluß des attischen Adels. Die Herrschaftsformen wechselten, jedoch wurde die Gewalt des Herrschers durch allgemeine Gesetze, denen auch er unterworfen war, eingeschränkt und kontrolliert. In Sparta wurden solche Gesetze der Sage nach im 8. Jh. von Lykurg geschaffen, in Athen gaben 620 Dracon, 594 Solon Gesetze.

Im 10. oder 9. Jh. hatten die Griechen von den Phöniziern die Schrift übernommen. Während die Phönizier nur die Konsonanten schrieben, führten die Griechen auch das Schreiben der Vokale ein. Diese Schrift war leichter zu erlernen als die der Babylonier und die der Ägypter; so konnte das Schreiben Allgemeingut werden und blieb nicht besonders ausgebildeten Schreibern vorbehalten.

Um 800 entstanden die Epen Homers, um 700 schrieb Hesiod eine Theogonie, in der die Göttergeschlechter mit Rücksicht auf die Weltentstehung geordnet wurden, was als Vorstufe zu einer rationalen Theorie der Weltentstehung angesehen werden kann [Krafft, G. d. N.]

Von der Mitte des 8. Jh. an wurden an den Küsten von Süditalien, Sizilien und auch am Schwarzen Meer Kolonialstädte gegründet. Diese Kolonisation wurde um 550 angehalten, im Westen durch die Karthager und Etrusker, von denen die Griechen in der Seeschlacht von Alalia (Korsika) 535 besiegt wurden, im Osten durch das Erstarken des Perserreiches.

Es bestand lebhafter Handelsverkehr. Dabei hatte Milet außer dem Seeverkehr, nicht nur zwischen dem Mutterland und den Kolonien, sondern auch nach Phönizien und Ägypten, noch den Vorzug, daß es am Ende einer Straße lag, die von Mesopotamien durch Kleinasien führte; diese „persische Königsstraße“ war wahrscheinlich mindestens teilweise schon von den Hethitern angelegt.

Die Griechen dieser Zeit müssen besonders aufgeschlossen dafür gewesen sein, die Welt kennen zu lernen, alles Erfahrbare zu erfahren. In dieser Situation sehen wir Thales als einen Mann, der auf Reisen Kenntnisse sammelte, sie unter neuen Gesichtspunkten verarbeitete und weitergab. Er fand in Milet Schüler und Männer gleicher Geisteshaltung: Anaximander, Anaximenes und den Geographen Hekataios, der auf Grund von Reisen eine Erdkarte und eine Erdbeschreibung erstellte, und damit die Erdkarte des Anaximander verbesserte, der auch – um eine Einzelheit zu erwähnen – alte Sagen rational zu erklären versuchte.

Diese Männer lebten in einer unruhigen Zeit, als die Machtkämpfe der Lyder, Meder und Perser auch die ionischen Städte nicht verschonten. 546 kam Milet unter persische Herrschaft.

In der Wissenschaft sehen wir im 6. Jh. das Suchen nach neuen Wegen, das Ersinnen von manchmal recht verschiedenartigen Möglichkeiten, die Erscheinungen zu verstehen, die in späterer Zeit teils genauer ausgeführt, teils abgeändert, teils verworfen wurden.

In der Astronomie sind es die verschiedenen Vorstellungen von der Gestalt der Erde, von den Sternen und ihren Bewegungen, in der Physik die Vorstellungen von einer Ausgangssubstanz, aus der die Dinge geworden sind, sowie

Vorstellungen über den Vorgang selbst (Verdünnung und Verdichtung) und evtl. der Gedanke an eine lenkende Kraft, z. B. bei Anaximenes die Luft, die als Atem das Leben des Menschen beherrscht.

In der zweiten Hälfte des 6. Jh. bringt Pythagoras den Gedanken: Alles ist Zahl. Er begründet damit eine Zahlentheorie, die noch mit Zahlenmystik durchsetzt, aber zum größten Teil reine Mathematik ist. Seine Musiktheorie ist die erste Darstellung physikalischer (hier akustischer) Sachverhalte durch Mathematik.

Pythagoras verließ Samos und ging nach Kroton, Xenophanes verließ Kolophon und ließ sich schließlich in Elea nieder, wo Parmenides sein Schüler wurde.

Heraklit und Parmenides haben um die Wende zum 5. Jh. allgemeinverbindliche wissenschaftliche Grundsätze verkündet, Heraklit den des unentrinnbaren Naturgesetzes, Parmenides den der Unentrinnbarkeit der logischen Gesetze, die in dem Satz zum Ausdruck kommt, daß Seiendes niemals Nichtseiendes gewesen sein oder werden kann.

Dieser Grundsatz führt zu dem Gedanken, daß die Stoffe aus kleinsten Teilen bestehen müssen, und zum Nachdenken darüber, welche Ursachen für das Trennen und Verbinden anzunehmen sind.

In der Astronomie führen bessere Beobachtungen zu einer besseren Auffassung von der Form der Erde und der Bewegung der Sterne.

In der Mathematik wurden die Möglichkeiten des Konstruierens und des Beweisens ausgiebig ausgenutzt und führten zu einer starken Vermehrung der mathematischen Kenntnisse. Das beginnt mit der Lehre vom Geraden und Ungerechten und der Lehre vom Flächeninhalt bei den älteren Pythagoreern und zeigt sich u. a. in den geschickten Methoden, die zur Lösung der drei klassischen Probleme ersonnen wurden. Besonders wichtig wurde die Entdeckung inkommensurabler Strecken. Im Laufe des Jh. nimmt der Gedanke, „Elemente“ der Mathematik aufzustellen, bestimmte Form an.

In der Logik wurden die Möglichkeiten des Argumentierens geübt und gegen Ende des Jh. Richtlinien gesucht, bei deren Anwendung das Argumentieren erfolgreich ist. Zunächst erscheint dabei die Forderung nach einer Festlegung des Ausgangsstandpunkts, d. h. nach Definition der behandelten Begriffe.

Am Anfang des 4. Jh. steht Platon, der alle Teile der Wissenschaft beeinflußt hat.

In der Physik konzipiert er einen qualitätslosen Träger, dem die Formen der regelmäßigen Körper aufgeprägt werden.

In der Astronomie fordert er die Darstellung der Sternbewegungen durch Kreise (nachdem die Forschungen der Pythagoreer erwarten ließen, daß das möglich ist).

In der Logik fordert er genaue Begriffsbestimmungen, gibt eine Methode an, sie zu finden, und erkennt, daß die elementaren Begriffe nicht in dieser Weise definierbar sind.

In der Mathematik soll er die Beschränkung auf Lineal und Zirkel als Konstruktionsmittel gefordert haben. Das ist in dieser Form nicht nachweisbar, könnte aber den Sinn haben: Wenn man Grundlagen der Geometrie sucht,

braucht man Grundfiguren, auf die alle Konstruktionen, und auf deren Grundeigenschaften alle Beweise aufgebaut werden.

So hat Platon für verschiedene Wissenschaften Richtlinien angegeben, vielleicht schon bestehende Richtlinien scharf und verbindlich formuliert. Die Ausarbeitung erfolgte umgehend – vielleicht war sie schon vorher von den Fachleuten in Angriff genommen worden.

Eudoxos erdachte für die Planetenbewegung das Modell der konzentrischen Sphären, vervollkommnete die auf Theaitetos zurückgehende Behandlung der Verhältnisse von (inkommensurablen) Größen und schuf die Grundlage der griechischen Infinitesimalmethode.

Autolykos entwickelte die Lehre von der bewegten Kugel, soweit sie für das Verständnis der Bewegung der Fixsterne erforderlich war.

Aristoteles hat verschiedene Gedanken einerseits bis zu den ersten Grundlagen analysiert und andererseits zu Ende gedacht. Seine Theorie der Materie, seine Theorie der Bewegung wurden zwar gelegentlich kritisiert, z. B. durch Philoponos im 6. Jh. nach Chr., aber erst zu Beginn der Neuzeit aufgegeben. Seine Analyse der Grundlagen einer beweisenden Wissenschaft (Definitionen, Postulate, Axiome) galt mindestens bis ins 19. Jh. und gilt in gewissem Sinne heute noch, nur denkt man seit der Entdeckung der Nichteuklidischen Geometrie etwas anders über die Wahrheit mathematischer Sätze. Euklid hat seine „Elemente“ nach diesen Regeln aufgebaut, wobei wieder offen bleibt, ob die Mathematiker dieses System selbständig entwickelt haben und Aristoteles es lediglich wissenschaftstheoretisch analysiert hat.

So ist etwa um 300 v. Chr. das wissenschaftliche Weltbild der Griechen im wesentlichen fertig. Ich nenne noch einmal die Stufen:

Erfinden verschiedener möglicher Vorstellungen.

Festsetzen einiger Grundprinzipien (Pythagoras, Heraklit, Parmenides).

Erweiterung und Vertiefung der Einzelkenntnisse.

Aufstellung eines Programms für eine systematische Ordnung (Platon).

Durchführung dieses Programms (Eudoxos, Aristoteles, Euklid).

Die systematische Ordnung mußte an einigen Stellen noch inhaltlich ausgefüllt werden. Die naturwissenschaftlichen Forschungen von Aristoteles wurden von den Nachfolgern in der Leitung seiner Schule weitergeführt, von Theophrast auf den Gebieten der Biologie und Mineralogie, von Straton von Lampsakos auf dem Gebiet der Physik.

In der Mathematik war um 300 die Methode endgültig durch Euklid festgelegt, und die allgemein interessierenden Probleme, diejenigen, deren Verständnis man bei Gebildeten voraussetzen konnte, waren zumeist gelöst. Was noch geleistet werden mußte, war die Bestimmung von Umfang und Fläche des Kreises und von Oberfläche und Volumen der Kugel, und das leistete Archimedes. Die Kegelschnittlehre war von Euklid schon in gewissem Umfang behandelt worden; diese und insbesondere ihre Erweiterung durch Apollonios dürften schon an der Grenze der höheren Mathematik stehen, die nur noch die Fachgelehrten interessierte.

Diesen Charakter einer höheren Mathematik hat alles, was bei den Griechen noch folgte. Dazu gehört z. B. die schöne Arbeit von Zenodotos (wahr-

scheinlich 2. Jh. v. Chr.) über die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises und der Kugel, die sogar für die Astronomie Bedeutung hatte, weil diese Eigenschaft als *ein* Argument dafür galt, daß der Himmel kugelförmig ist. [Ptolemaios, Alm. I, Kap. 3]. Dazu gehören die Bemühungen des Poseidonios (ca. 135–51 v. Chr.) um eine neue Definition der Parallelen, nämlich nicht als Geraden, die sich bei Verlängerung ins Unendliche nicht schneiden, sondern als solche, die überall gleichen Abstand voneinander haben [Proklos, S. 176]. An diese problematische Definition schlossen sich Versuche zum Beweis des Parallelenpostulats an. Zur höheren Mathematik sind vielleicht schon die Porismen von Euklid zu rechnen. Leider wissen wir nicht, welches Ziel Euklid mit dieser Arbeit verfolgte. Ich möchte auch den größten Teil von Diophants Arithmetik dazu rechnen; ein kleiner Teil wird wohl zum Rechenunterricht für Kaufleute gehört haben.

Von anderer Art sind die mathematischen Theorien der Astronomie; deren Ausarbeitung wurde durch die beobachteten Tatsachen erzwungen. Diese Theorien wurden z. T. von Apollonios, z. T. von Hipparch (um 150 v. Chr.) und vollständig von Ptolemaios ausgearbeitet und wurden ohne Unterbrechung ständig weiter durchgearbeitet, ohne daß allerdings vor Kepler etwas grundsätzlich Neues gefunden wurde.

Über diese These von einer höheren Mathematik, die die Allgemeinheit nicht mehr interessierte (denken Sie dabei bitte an Leute wie den Redner Demosthenes oder den sonst umfassend gebildeten Cicero), bitte ich den Leser nachzudenken und sich seine eigene Meinung zu bilden. Mir erscheint sie als einer der Gründe dafür, daß sich die Mathematik damals nicht mehr weiterentwickelt hat. Die späteren Kommentatoren, Pappos, Theon von Alexandria, Proklos, Eutokios und andere haben zwar Tüchtiges geleistet, aber keine bahnbrechenden neuen Ideen mehr hervorgebracht.

Eine Sonderstellung nehmen Heron (um 62 n. Chr.) und Diophant ein. Herons mathematische Werke sind ganz auf die Praxis zugeschnitten. Sie enthalten elementare Geometrie mit vielen Vorschriften zur Berechnung von Figuren und Körpern, oft ohne Beweis. Die Autorschaft Herons ist z. T. fraglich, aber es kommt eigentlich gar nicht so sehr darauf an, wer dieses Material zusammengestellt hat. Von Diophants algebraisch-zahlentheoretischen Aufgaben wurden oben (S. 143) einige Beispiele gebracht. Bei beiden, Heron und Diophant, ist babylonischer Einfluß spürbar.

2.8 Mathematik bei den Römern

Irgendwo habe ich gelesen: Der einzige Beitrag, den die Römer zur Mathematikgeschichte geleistet haben, war der, daß ein römischer Soldat den Archimedes erschlagen hat. – In der Tat sind Fortschritte in der theoretischen Mathematik bei den Römern nicht zu finden; sie haben sich mehr für die praktischen Anwendungen interessiert.

Ihre Zahlenschreibweise ist zwar umständlicher als das indische Positionssystem; ich halte sie aber für besser als das babylonische System und als die griechische Darstellung der Zahlen durch Buchstaben. Abgesehen von der Form der Symbole ist das römische System dasselbe wie das ägyptische, nur durch Zeichen für 5, 50 usw. vermehrt. Wie im ägyptischen System ist die Darstellung einer Zahl unabhängig von der Stellung und Anordnung der Zeichen. Die Schreibweise IV statt IIII usw., die diese Unabhängigkeit zerstört, wurde erst im Mittelalter üblich.

Auch das Rechnen ist nicht so unbequem wie man zunächst meinen könnte. Die Addition ist jedenfalls leichter erlernbar als die unsrige. Um $III + IIII = VII$ auszurechnen, braucht man nur zu wissen, daß IIIII durch V zu ersetzen ist. Für die Rechnung $3 + 4 = 7$ muß man die Bedeutung der Symbole und ein „Eins-und-eins“ auswendig gelernt haben. (S. hierzu Leibniz, [4.4] und J. G. Kennedy: Arithmetic with Roman Numerals. Amer. Math. Monthly 88, 1981, S. 29–32.)

Die Multiplikation könnte man durch Verdoppeln und Halbieren ausführen wie die Ägypter. Man könnte aber auch z. B. XXIII · CXXII so ausrechnen: man schreibt den einen Faktor senkrecht in seine Bestandteile zerlegt an und rechnet nach dem folgenden Schema:

	XXIII	I
	XXIII	I
	CCXXX	X
	CCXXX	X
	MMCCC	C
	MM	DCCC VI

(Bei dem Faktor X wird jedes Symbol durch das nächsthöhere ersetzt, bei dem Faktor C verfährt man entsprechend.)

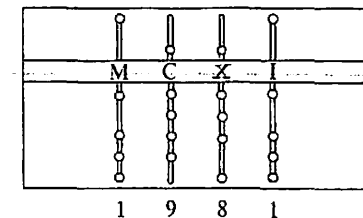


Abb. 2.54. Römischer Handabakus, schematisch

Ob die Römer so gerechnet haben, weiß ich nicht. Sie verwendeten wahrscheinlich ihren Handabakus, von dem einige Exemplare erhalten sind. Er besteht aus einer Tafel mit Rillen, in denen Marken (Kugeln oder Knöpfe) verschiebbar sind. Eine Marke im unteren Teil stellt eine Einheit, eine Marke im oberen Teil 5 Einheiten dar. Die für die Darstellung einer Zahl erforderlichen Marken werden in der Mitte zusammengeschoben, die übrigen bleiben

am Rand. Man braucht also oben eine, unten vier Marken. Rechts neben I befinden sich noch Spalten für Brüche.

Wie man auf diesem Gerät addiert, ist klar. Die Multiplikation kann auf wiederholte Additionen zurückgeführt werden; das kommt ungefähr darauf hinaus, daß man das oben angeschriebene Schema anwendet. Ob dieses Rechnen einigermaßen bequem ist, kann man wohl erst nach etwas Übung feststellen. Jedenfalls kann man ohne Ein-mal-eins auskommen; allerdings läßt sich die Rechnung abkürzen, wenn man es beherrscht.

In Griechenland rechnete man auf Rechenbrettern, Platten, in die Striche für die Einer, Zehner usw. eingeritzt waren; darauf wurden Rechensteine gelegt. Eine solche Tafel aus dem 4. Jh. v. Chr. wurde in Salamis gefunden. Sie ist 1,50 mal 0,75 m groß, aus Marmor [van der Waerden, E. W., S. 72/73]. Der römische Handabakus, der etwa Postkartengröße hat, scheint praktischer zu sein.

Die römische Bruchrechnung beruht darauf, daß die Einheit, das *As*, in 12 Unzen eingeteilt wird. Das wird in den meisten Fällen genügt haben. Die Unze wurde noch eingeteilt in

semuncia	=	1/2 uncia	=	1/24
sicilicus	=	1/4 uncia	=	1/48
sextula	=	1/6 uncia	=	1/72
dimidia sextula	=	1/12 uncia	=	1/144
scripulum	=	1/24 uncia	=	1/288.

Diese Einteilung nach Art eines 12-er-Systems dürfte nicht unpraktisch gewesen sein.

Manche gebildeten Römer haben in Griechenland studiert, so Marcus Terentius Varro (116–27 v. Chr.), der neben vielen anderen Werken auch „Neun Bücher *Disciplinae*“ geschrieben hat, von denen leider nur die Titel aus antiken Schriftenverzeichnissen bekannt sind: I. Grammatik. II. Dialektik. III. Rhetorik. IV. Geometrie. V. Arithmetik. VI. Astrologie. VII. Musik. VIII. Medizin. IX. Architektur. Die ersten sieben sind die „freien Künste“ (*artes liberales*), die später, von Cassiodorus in anderer Reihenfolge festgeschrieben, die Grundausbildung an den abendländischen Universitäten ausmachten. In einer Handschrift aus dem 5./6. Jh. n. Chr. finden sich einige Fragmente, die vielleicht aus dem Buch *Geometrie* stammen [Bubnov, s. unter *Agrimensoren*, S. 494–508]. Sie enthalten Regeln zur Flächenbestimmung von verschiedenen Dreiecken und Vierecken, auch einiges über Polygonalzahlen.

Cicero (106–43 v. Chr.) und Plinius (23/24–79 n. Chr.) haben sich mehr für die Naturwissenschaften als für die Mathematik interessiert. Die „Naturkunde“ des Plinius war eine der wichtigsten Quellen für die Naturwissenschaft des Mittelalters.

Vitruv (geb. ca. 84 v. Chr.) legte Wert auf bestimmte Proportionen bei Bauten. Dafür ein paar Beispiele;

[Arch. III, Kap. 1]: „Kein Tempel kann ohne Symmetrie und Proportion eine vernünftige Formgebung haben, wenn seine Glieder nicht in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, wie die Glieder eines wohlgeformten Men-

schen.“ – Zahlenverhältnisse am menschlichen Körper hat Polyklet (5. Jh. v. Chr.) in einer Schrift „Kanon“ zusammengestellt. Vitruv überträgt das auf die Architektur von Tempeln, z. B. [IV, Kap. 1, 6]: „Als sie (die Erbauer des ersten dorischen Tempels) bemerkt hatten, daß der Fuß beim Manne der sechste Teil der Körperhöhe war, übertrugen sie dies (Maßverhältnis) ebenso auf die Säule, und sie machten die Säule einschließlich des Kapitells sechsmal so hoch, wie sie den Schaft unten dick machten. So begann die dorische Säule die Proportion, die Stärke und die Anmut des männlichen Körpers an den Tempeln zu zeigen.“

[Arch. III, Kap. 1, 3]: „Ferner ist natürlicherweise der Mittelpunkt des Körpers der Nabel. Liegt nämlich ein Mensch mit gespreizten Armen und Beinen auf dem Rücken, und setzt man die Zirkelspitze an der Stelle des Nabels ein und schlägt einen Kreis, dann werden von dem Kreis die Fingerspitzen beider Hände und die Zehenspitzen berührt. – Ebenso wie sich am Körper ein Kreis ergibt, wird sich auch die Figur des Quadrats an ihm finden. Wenn man näm-

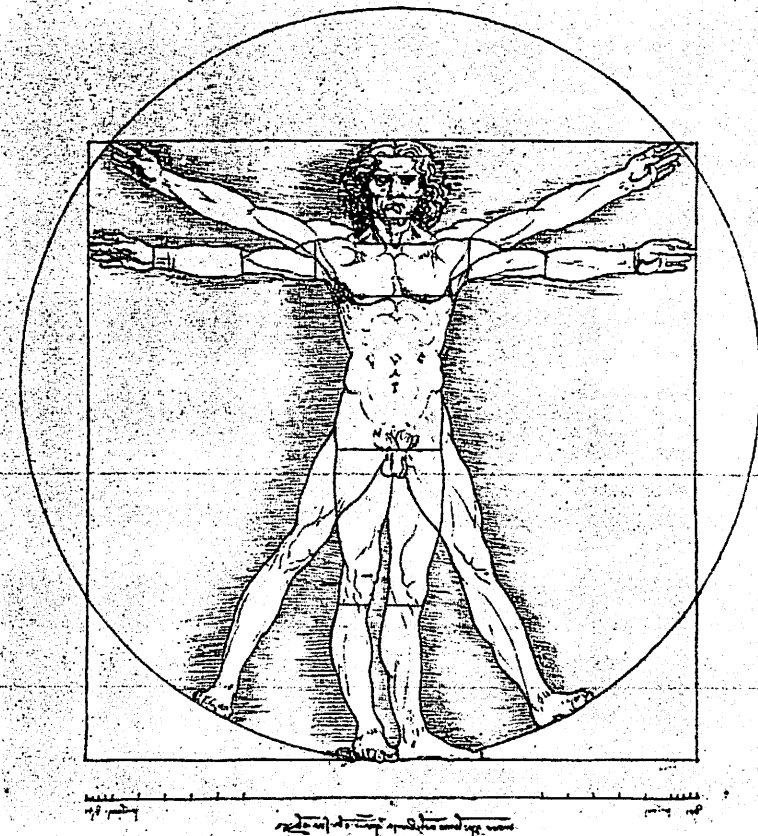


Abb. 2.55. Leonardo da Vinci: Proportionsschema der menschlichen Gestalt

lich von den Fußsohlen bis zum Scheitel Maß nimmt und wendet dieses Maß auf die ausgestreckten Hände an, so wird sich die gleiche Breite und Höhe ergeben.“ (Abb. 2.55).

In [V, Kap. 7, wegen Vertauschung von Seiten in der Handschrift auch als Kap. 6,1 bezeichnet] beschreibt Vitruv, wie der Grundriß eines Theaters nach einem regelmäßigen Zwölfeck konstruiert werden soll.

In [IX, Vorrede, 8] schlägt er vor, bei Treppen das Verhältnis 3:4:5 anzuwenden: Höhe 3, Länge am Boden 4, also Länge der Treppe 5 Einheiten.

Die römischen Feldmesser, die Agrimensoren, nach ihrem wichtigsten Instrument, der Groma (s. S. 60), auch Gromatiker genannt, brauchten einige elementare geometrische Kenntnisse von der Art, wie sie bei Varro auftreten. Als vollständige Lehrbücher des Vermessungswesens kann man die Schriften von Heron von Alexandria (1. Jh. n. Chr.) ansehen. Inhaltlich gehen die Werke der Agrimensoren nicht darüber hinaus, jedoch werden oft grobe Näherungen angegeben, z. B. $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ für die Fläche des Vierecks mit den Seiten a, b, c, d

[Blume ..., Bd. 1, S. 355], die bei Heron nicht vorkommt. Heron zerlegt das Viereck in zwei Dreiecke. Die Absicht der Agrimensoren ist offenbar eine Bestimmung der Fläche auf Grund der leicht meßbaren Seiten ohne mühsame Rechnungen (Berechnung der Höhen der Dreiecke).

Ein Verfahren für die Messung der Breite eines Flusses wurde S. 77 erwähnt.

Die Schriften der Agrimensoren sind einfache Leitfäden für Praktiker; sie geben Regeln ohne Beweise und sind mit der großen griechischen Geometrie nicht vergleichbar. Aber sie bildeten den Anfang der abendländischen Geometrie und finden sich noch lange in den mittelalterlichen Lehrbüchern als *geometria practica*. Vermittler dieser Kenntnisse waren insbesondere Boetius (ca. 480–524 n. Chr.), der lateinische Bearbeitungen von Teilen von Euklids Elementen und auch von der Arithmetik des Nikomachos von Gerasa verfaßte, und Cassiodorus (ca. 490–583 n. Chr.), der einen Lehrplan für den Unterricht in den Klöstern entwarf, der später auch für die Universitäten maßgebend wurde.

3. Mathematik im Orient

In diesem Teil muß noch stärker als in den vorangegangenen betont werden, daß nur einige Beispiele gebracht werden, die einen Einblick in die Mathematik der Chinesen, Inder und islamischen Völker geben sollen. Dabei beschränke ich mich sogar auf die ältere Mathematik, grob gesagt auf die Zeit, bevor westlicher Einfluß in diesen Ländern wirksam werden konnte.

3.1 Altchinesische Mathematik

3.1.1 Alte Diagramme

Die ältesten Dokumente chinesischer Mathematik sind zwei Diagramme, die dem sagenhaften Kaiser Yü dem Großen von einem Drachenpferd aus dem Gelben Fluß und einer Schildkröte aus dem Fluß Lo übergeben sein sollen. Dieser Kaiser soll im 3. Jahrtausend v. Chr. China aus der Sintflut errettet haben, indem er ein Gebirge durchstach. Diese Legende ist nach Needham [S. 56] vor dem 5. Jh. v. Chr. entstanden, aber erst im 4. Jh. werden nachweislich Zahlen mit den Diagrammen in Verbindung gebracht. Die heute bekannten bildlichen Darstellungen scheinen auf das 2. Jh. v. Chr. zurückzugehen. Das eine Diagramm ist ein magisches Quadrat, das andere hat die Eigenschaft, daß die Summe der geraden Zahlen einerseits und die Summe der ungeraden Zahlen andererseits je 20 ist (Abb. 3.1).

3.1.2 Zahlzeichen

Erste Dokumente von Schrift treten in China erst in der SHANG-Zeit (etwa Mitte des 16. bis Mitte des 11. Jh. v. Chr.) auf. Das SHANG-Reich erstreckte sich im wesentlichen auf die Landschaft um den Gelben Fluß; ein Großkönig herrschte über zahlreiche ziemlich selbständige Fürsten, vielleicht leitete sich seine Macht hauptsächlich aus seiner Kultfunktion als oberster Priester ab. Aus dieser Zeit gibt es Orakelknochen, auf denen die Fragen an das Orakel verzeichnet waren. Man erhitzte die Knochen und leitete aus den auftretenden Sprüngen die Aussagen des Orakels ab. Auch Zahlen finden sich auf diesen Knochen; sie sind den modernen Zahlzeichen auffällig ähnlich (s. Tafel Zahlzeichen).

3.3.5 Was haben wir den arabischen (choresmischen, persischen usw.) Mathematikern zu verdanken?

1. Sie haben die klassischen Werke der griechischen Mathematiker sorgfältig überliefert. Das Abendland hat diese griechischen Werke zuerst aus arabischen Übersetzungen kennen gelernt; erst später sind die griechischen Texte bekannt geworden, und einige wichtige Werke sind auch heute noch nur in der arabischen Übersetzung bekannt.

2. Sie haben griechische Ansätze bis zur vollständigen Klarheit durchgearbeitet und weiter ausgearbeitet. Das gilt z. B. für die Untersuchungen über das Parallelenpostulat, auch z. B. für die kubischen Gleichungen.

3. In den Algebra-Büchern der Araber erscheinen – wie bei den Indern – Anweisungen zur Ausführung der Rechenoperationen, nicht nur mit Zahlen, sondern auch mit Wurzelausdrücken und algebraischen Ausdrücken, d. h. Ausdrücken, die Unbekannte und ihre Potenzen enthalten. Es erscheinen auch Aufgaben aus dem täglichen Leben, z. B. der Kaufmannspraxis und dem Erbrecht. Aus der griechischen Literatur ist von Derartigem fast nichts bekannt. Daraus darf man freilich nicht schließen, daß es bei den Griechen so etwas nicht gegeben hätte; auch heute werden wahrscheinlich Lehrbücher der Grundschule nicht so sorgfältig aufbewahrt wie wissenschaftliche Werke.

Die Araber haben die Algebra „algebraisiert“, indem sie konsequent die Bezeichnungen „Wurzel“ (ğidr) oder „Ding“ (šai) für x , „Vermögen“ (māl) für x^2 und „Würfel“ (ka'ab) für x^3 verwendet und geometrische Konstruktionen (wie z. B. bei Euklid) durch algebraisches Rechnen ersetzt haben, wofür die erforderlichen Verfahren erarbeitet und gelehrt wurden. Sie haben die Gleichungslehre durch die Aufstellung der verschiedenen Gleichungstypen systematisiert und damit eine Gliederung nach dem Grad der Gleichung – wenn nicht gerade eingeführt, so doch konsequent durchgeführt.

4. Besondere Leistungen haben die Araber auf dem Gebiet der Trigonometrie aufzuweisen; sie wurden in der vorliegenden Darstellung viel zu wenig berücksichtigt. Von den mit großer Genauigkeit ausgeführten numerischen Rechnungen habe ich nur ein Beispiel erwähnt (S. 204) und möchte noch nachtragen, daß al-Kāšī (1428) den Umfang des Kreises vom Radius 1 (also 2π) aus dem $3 \cdot 2^{28}$ -eck sexagesimal zu

$$6;16,59,28,01,34,51,46,14,50$$

berechnet hat, mit einem Fehler von weniger als $1/4$ Einheit der letzten Stelle. Diesen Wert hat er noch in den Dezimalbruch

$$6,283\,185\,307\,179\,586\,5$$

umgerechnet. Al-Kāšī's Schrift ist eines der ältesten Dokumente des Rechnens mit Dezimalbrüchen (nicht *das* älteste).

4. Biographisch-bibliographische Notizen*

Die in einer westlichen Sprache zugänglichen Quellen sollten einigermaßen vollständig aufgeführt sein, bei der Literatur habe ich mich nicht um Vollständigkeit bemüht; ich nenne Werke und Arbeiten, aus denen ich Wesentliches gelernt habe, und solche, die vermutlich leicht zugänglich sind.

4.0 Allgemeine Literatur

4.0.1 Nachschlagewerke

1. Naturwissenschaften

DSB: Dictionary of Scientific Biography.

Hrsg. von C. C. Gillispie. 16 Bde. New York 1976–1980. (Biographien mit ausführlicher Darstellung der wissenschaftlichen Leistungen und Bibliographie)

Sarton, G.

Int.: Introduction to the History of Science. Washington, Baltimore. 1927–1948. Mehrere Nachdrucke.

Bd. 1. From Homer to Omar Khayyam (11. Jh.) 1927.

Bd. 2.1. 12. Jh. – 1931

Bd. 2.2. 13. Jh. – 1931

Bd. 3.1. 1. Hälfte des 14. Jh. – 1947.

Bd. 3.2. 2. Hälfte des 14. Jh. – 1948.

(Nach den Hälften der Jahrhunderte eingeteilt. Jeder Abschnitt enthält einen kurzen Überblick über die Entwicklung in diesem halben Jahrhundert, dann, nach Sachgebieten geordnet, die Gelehrten mit kurzen biographischen Daten, Stichworten zu ihren wissenschaftlichen Leistungen und sorgfältigen Bibliographien. – Berücksichtigt auch Religion, Philosophie und Medizin)

Krafft, F., und A. Meyer-Abich: Große Naturwissenschaftler. Biographisches Lexikon. Fischer-Bücherei 6010. Frankfurt (Main) 1970.

Pog.: Poggendorff, J. C.: Biographisch-Literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Naturwissenschaften. (Kurze biographische Daten. Angabe der wissenschaftlichen Veröffentlichungen.)

2. Mathematik

Meschkowski, H.: Mathematiker-Lexikon.

Mannheim, Bibliographisches Institut. 3. Aufl. 1980.

Hofmann, J. E.: Geschichte der Mathematik.

Sammlung Götschen. Berlin: W. de Gruyter.

Bd. 1. 2. Aufl.: 1963. Bd. 2: 1957. Bd. 3: 1957.

(Hier aufgeführt wegen der ausführlichen Bibliographie)

* Erläuterungen zum Zitiersystem s. S. VII, Hinweise für den Leser

4.0.2 Gesamtdarstellungen

1. Naturwissenschaften

Taton, R. (Herausgeber): *Histoire générale des sciences*.

Bd. 1: *La science antique et médiévale*. Paris 1957.

Kleinere Werke:

Lorenzen, P.: *Die Entstehung der exakten Naturwissenschaften*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1960.

Störig, H. J.: *Kleine Weltgeschichte der Wissenschaft*. 2 Bde. Frankfurt a. M.: Fischer 1982.

2. Mathematik

Cantor, M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. 4 Bde., Nachdruck: Stuttgart: Teubner 1965.

(Das große klassische Werk. Die Darstellung reicht bis zum Jahre 1800.)

Becker, O.: *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*. – *Orbis Academicus* Bd. II/6. Freiburg, München: Alber. 2. Aufl. 1964.

(Auszüge aus Originalarbeiten mit verbindendem Zwischentext. Das Wort „Grundlagen“ im Titel ist zu beachten.)

Becker, O., und J. E. Hofmann: *Geschichte der Mathematik*. – Bonn: Athenäum-Verlag 1951. (Das unter 4.0.1.2. genannte Werk von J. E. Hofmann ist als eine Neubearbeitung dieses Werkes anzusehen.)

Eves, H.: *An Introduction to the History of Mathematics*. New York usw.: Holt, Rinehart and Winston. 4. Aufl. 1974.

Kline, M.: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press 1972.

(1238 Seiten; S. 614–1022 behandeln das 19. Jh., S. 1023–1211 das 20. Jh.)

Kropp, G.: *Geschichte der Mathematik. Probleme und Gestalten*. Heidelberg: Quelle und Meyer 1969. (Eine kleine Einführung)

Loria, G.: *Storia delle matematiche*. 3 Bde. Mailand: Hoepli 1929, 1931, 1933.

Meschkowski, H.: *Problemgeschichte der Mathematik*. – Mannheim: Bibl. Inst.

I. Die Entwicklung der mathematischen Fragestellungen von den Anfängen bis ins ausgehende Mittelalter. 1979.

II. Die Mathematik des 17. und 18. Jahrhunderts. 1981.

Problemgeschichte der neueren Mathematik (1800–1950). 1978.

Popp, W.: *Wege des exakten Denkens. Vier Jahrtausende Mathematik*. München: Ehrenwirt. 1981.

Struik, D. J.: *Abriß der Geschichte der Mathematik*. 7. Aufl. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.

Tropfke, J.: *Geschichte der Elementarmathematik*.

2., z. T. 3. Aufl. 1923–1940.

4. Aufl., 1. Bd. *Arithmetik und Algebra*. Berlin: W. de Gruyter 1980.

Wussing, H.: *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. Berlin: VEB Verlag der Wissenschaften. 1979.

(365 Seiten. 15 Vorlesungen. Das Studienbuch für Mathematiklehrer in der DDR)

Wussing, H., und W. Arnold: *Biographien bedeutender Mathematiker*. Berlin 1975. Köln: Aulis Verlag 1978. (Sonderausgabe für die Wiss. Buchgesellschaft Darmstadt)

(41 Biographien von Pythagoras bis Emmy Noether)

Einzelfragen aus verschiedenen Zeiten

Damerow, P., und W. Lefèvre: *Rechenstein, Experiment, Sprache. Histor. Fallstudien zur Entstehung der exakten Wiss.* – Stuttgart: Klett-Cotta 1981.

Popp, W.: *Ablösung antiker Rezepte zur Bestimmung von Flächen- und Rauminhalten durch wissenschaftlich begründete Formeln. Erläutert an Beispielen: 1) Kreisfläche, 2) Fläche des Kreissegments, 3) Pyramiden- und Kegelvolumen*. – Diss. München, 1964.

4.1 Vorgriechische Mathematik (und Naturwissenschaft)

4.1.0 Allgemeine Darstellungen

Neugebauer, O.: *Vorl.: Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*. Bd. 1. *Vorgriechische Mathematik*. – Berlin: Springer 1934. 2. Aufl. (unverändert) 1969.

Ex. Sci.: *The Exact Sciences in Antiquity*. – Providence, Rhode Island: Brown Univ. Press. 2. Aufl. 1957. (Statt Bd. 2 des vorigen Titels)

Sarton, G.: *Hist. A.: A History of Science. Ancient Science through the Golden Age of Greece*. – Cambridge: Harvard Univ. Press. 1960.

Vogel, K.: *VM: Vorgriechische Mathematik*. – Hannover: Schroedel, Paderborn: Schöningh. Bd. 1. *Vorgeschichte und Ägypten*. 1958.

Bd. 2. *Die Mathematik der Babylonier*. 1959.

van der Waerden, B. L.: E. W.: *Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik*. Basel, Stuttgart: Birkhäuser. 2. Aufl. 1966 (Original holländisch 1950).

Astr.: *Die Anfänge der Astronomie*. (Erwachende Wissenschaft Bd. 2) Groningen: Noordhoff 1966.

GAAC: *Geometry and Algebra in Ancient Civilisations*. Berlin, Heidelberg: Springer 1983.

Einzelfragen

Popp, W.: *Ablösung antiker Rezepte ... s. unter 4.0.2.2.*

Seidenberg, A.: *Arbeiten im Arch. Hist. Exact. Sci.*

Or. Geom.: *The Ritual Origin of Geometry*. 1, 1960/62, S. 488–527.

Or. Count.: *The Ritual Origin of Counting*. 2, 1965, S. 1–40.

Sem. C.: *On the Area of a Semi-Circle*. 9, 1972/73, S. 171–211.

Or. Math.: *The Origin of Mathematics*. 18, 1977/78, S. 301–342.

4.1.1 Prähistorische Mathematik

Allgemein

Vogel, K.: *VM*, Bd. 1, s. unter 4.1.0.

Rechensteine

Schmandt-Besserat, Denise:

A. R.: *An Archaic Recording System in the Uruk-Jemdet Nasr Period*. – *American Journal of Archaeology* 83, 1979, S. 19–48.

P. W.: *The Earliest Precursor of Writing*. – *Scientific American* 238, Juni 1978, S. 38–47. s. auch Damerow, P. unter 4.0.2.2, *Einzelfragen*.

Geometrie

Thom, A.: *Megalithic Sites in Britain*. – Oxford: Clarendon Press 1967. Reprint 1972. (Wichtige Sammlung von Plänen und Zahlenangaben, anspruchsvolle Theorien für geometrische Konstruktionen.)

Heggie, D. C.: *Megalithic Science. Ancient Mathematics and Astronomy in North-West Europe*. – London: Thames and Hudson Ltd. 1981. (Kritische Besprechung der geometrischen und astronomischen Theorien unter Berücksichtigung aller denkbaren Einwände; viele Literaturangaben.)

Weitere Literatur

Angell, I. O.: *Megalithic Mathematics, Ancient Almanachs or Neolithic Nonsense?* – *Bulletin. The Institute of Mathematics and its Applications*. Southend-on-Sea, Essex, 14, 1978, S. 253–258.

(Konstruktionen 1) mit geschlossenen Schnüren und drei oder mehr Leitpflocken, 2) auf Grund der Längenänderung eines Schattenstabes im Laufe eines Jahres. Die Angabe von zwei Konstruktionsmöglichkeiten soll zeigen, daß die geometrische Interpretation der Grundrisse nicht eindeutig ist.)

Ashbee, P.: The Bronze Age Round Barrow in Britain. London: Phoenix House Ltd. 1960.

(Vermutung über das Aussehen von Woodhenge)

Burl, A.: The Stone Circles of the British Isles.

New Haven, London: Yale University Press 1976.

Cowan, Th. M.: Megalithic Rings: Their Design Construction. Science 168, Nr. 3929, April 1970, S. 321–325.

(Grundrißkonstruktionen mit Schnüren mit zwei Verankerungspflöcken und zwei Leitpflöcken)

Wood, J. E.: Sun, Moon and Standing Stones. Oxford: Univ. Press 1978.

Mathematikgeschichtliche Zusammenhänge

van der Waerden, B. L.: Prebab. M.: On Pre-Babylonian Mathematics. Arch. Hist. Exact Sci. 23, 1980, I: S. 1–25, II: S. 26–46.

4.1.2 Darstellung der Zahlen

Falkenstein, A.: Archaische Texte aus Uruk. – Ausgrabungen der Deutschen Forschungsgemeinschaft in Uruk-Warka. Bd. 2. Leipzig: Harrassowitz 1936.

Földes-Papp, K.: Vom Felsbild zum Alphabet. – Stuttgart: Belser Verlag 1966. Lizenzausgabe Bayreuth: Gondrom Verlag 1975.

Hartner, W.: Zahlen und Zahlensysteme bei Primitiv- und Hochkulturvölkern. – Paideuma, Bd. 2, Heft 6/7, 1943. Abgedruckt in: Oriens-Occidens. Festschrift zum 60. Geburtstag. Hildesheim: Olms 1968.

Menninger, K.: Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. 2 Bde. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht. 2. Aufl. 1958.

Neugebauer, O.: Zur Entstehung des Sexagesimalsystems. – Abh. der Ges. der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-Phys. Kl., Neue Folge Bd. 13, 1, 1927.

Powell, M. A. Jr.:

Sexag. S.: The Origin of the Sexagesimal System: The Interaction of Language and Writing. – Visible Language 6, 1972, S. 5–17.

Ant.: The Antecedents of Old-Babylonian Place Notation and the Early History of Babylonian Mathematics. – Historia Mathematica 3, 1976, S. 417–439.

Seidenberg, A.: Sixty S.: The Sixty System of Sumer. – Arch. Hist. Exact Sci. 2, 1965, S. 436–440.

Sethe, K.: Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern. Straßburg 1916.

s. auch Damerow unter 4.0.2.2, Einzelfragen.

4.1.3 Babylonische Mathematik

Allgemeine Literatur

Bruins, E. M.

B. Geom.: Neuere Ergebnisse zur Babylonischen Geometrie. Praxis der Math. 1, 1959, S. 201–207.

B. Alg.: Neuere Ergebnisse über Babylonische Algebra. Praxis der Math. 1, 1959, S. 147–152.

Cun. Math.: Interpretation of Cuneiform Mathematics. Physis 4, 1962, S. 277–340.

Comp.: Computation in the Old Babylonian Period. Janus 58, 1971, S. 222–267.

Rec.: Reciprocals and Pythagorean Triads. Physis 9, 1967, Fasc. 4, S. 373–392.

Goetsch, H.: Die Algebra der Babylonier. Arch. Hist. Exact Sci. 5, 1968, S. 79–153.

(Umfassende übersichtliche Zusammenstellung)

Jeremias, A.: Handbuch der altorientalischen Geisteskultur. Berlin, Leipzig: W. de Gruyter. 2. Aufl. 1929. (Darin Abb. 89 und 90: Babylonische Weltkarte; hier Abb. 1.35).

Meißner, B.: Babylonien und Assyrien. Heidelberg: Winters Univ. Buchhandlung. 1. Bd. 1920. 2. Bd. 1925.

von Soden, W.: Leistung und Grenze sumerischer und babylonischer Wissenschaft.

Die Welt als Geschichte. 2, 1936, S. 411–464, 509–557. Nachdruck Darmstadt: Wiss. Buchges. 1965.

(S. 75–99 des Nachdrucks: Charakterisierung der sumerischen und babylonischen Mathematik)

Unger, E.: Babylon, die heilige Stadt.

Berlin und Leipzig: de Gruyter 1931.

Textausgaben

ST: Susa-Texte: Bruins, E. M., et M. Rutten: Textes mathématiques de Suse. Mémoires de la Mission Archéologique en Iran. Tome 34. Paris 1961.

MKT: Neugebauer, O.: Mathematische Keilschrifttexte. Qu. u. St. A 3, Teil 1, 2: 1935, Teil 3: 1937. Reprint: Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973.

MCT: Neugebauer, O., and A. Sachs: Mathematical Cuneiform Texts. American Oriental Series, Vol. 29. American Oriental Society, New Haven, Connecticut 1945.

TMB: Thureau-Dangin, F.: Textes Mathématiques Babyloniens. Leiden: Brill 1938.

Einzeln edierte Texte

E 1: Edzard, D. O.: Eine altsumerische Rechentafel (OIP 14, 70). Alter Orient und Altes Testament I „Lisan mithurti“. Festschrift W. von Soden (1969), S. 101–104. – [20].

E 2: Taha Baqir: An Important Mathematical Problem Text from Tell Harmal (Iraq Museum 55357). – Sumer 6, 1950, S. 39–54. – [22ff.].

E 3: Goetze, A.: A Mathematical Compendium from Tell Harmal. Sumer 7, 1951, S. 126–155. – [41].

Museumssignaturen

AO Antiquités Orientales. Louvre, Paris.

BM British Museum, London.

IM Iraq Museum, Bagdad.

MLC Morgan Library Collection. New Haven.

VAT Vorderasiatische Abteilung. Tontafeln. Staatliche Museen, Berlin.

YBC Yale Babylonian Collection. New Haven.

4.1.4 Mathematik der Ägypter

Allgemeines über Ägypten

Lexikon der Ägyptologie. Begründet von W. Helck und E. Otto. Wiesbaden: Harrassowitz.

In Bd. 1, 1975, Sp. 967ff.: Chronologie.

In Bd. 3, 1980, Sp. 1237–1245: Mathematik, von W. F. Reinicke (Viele Literaturangaben).

von Beckerath, J.: Abriß der Geschichte des alten Ägypten. München, Wien: Oldenbourg 1971.

Hornung, E.: Grundzüge der ägyptischen Geschichte. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1978.

Erman, A.: Die Literatur der Ägypter. Leipzig 1923. (Darin eine Streitschrift aus der Zeit Ramses' II über die mathematischen Aufgaben eines Schreibers [50].)

Piankoff, A.: Egyptian Religious Texts and Representations, Bollingen Series XL, vol. 3: Mythological Papyri, ed. N. Rambova. New York: (c) Princeton University Press. 1957. Text figs. executed by Mark Hasselriis. [65]

Quibell, J. E.: Hierakonpolis I. Egyptian Research Account 4. London 1900. (Darin Bilder von der Keule des Königs Narmer und der Statue des Königs Chaseschem [15].)

Gesamtdarstellungen

s. 4.1.0, ferner

Gillings, R. R.: Mathematics in the Time of the Pharaohs. Cambridge, Mass., London 1972.
 Neugebauer, O.: Die Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte. Qu. u. St. B 1, 1931, S. 413–451.

(Übersichtliche Zusammenstellung des Materials.)

Textausgaben

P.M.: Papyrus Moskau. – [49, 62]

Struve, W. W.: Mathematischer Papyrus des staatlichen Museums der schönen Künste in Moskau. Qu. u. St. A 1. Berlin 1930.

P.Rh.: Papyrus Rhind. – [49, 51]

Erste Ausgabe: A. Eisenlohr. Leipzig 1877.

Peet, T. E.: The Rhind Mathematical Papyrus. London 1923.

Benutzte Ausgabe: Chace, A. B., und Mitarbeiter: The Rhind Mathematical Papyrus. Mathematical Association of America. Oberlin, Ohio, U.S.A. Bd. 1. 1927. Bd. 2. 1929.

Dem. P.: Parker, R. A.: Demotic Mathematical Papyri. Brown Egyptological Studies VII. Providence, Rhode Island, and London 1972.

Lepsius, R.: Über eine hieroglyphische Inschrift am Tempel in Edfu. Abh. d. Königl. Akad. d. Wiss. Berlin 1855, S. 69–111. – [59]

Meeks, D.: Le grand texte des donations au Temple d'Edfou. Publications de l'Institut Français d'Archéologie Orientale du Caire. 1972.

Reisner-Papyri

(Nach Gillings:) Gefunden 1904 von G. Reisner.

Hrsg. 1963–1969 von W. K. Simpson, Boston.

Sie stammen wahrscheinlich aus der Zeit Sesostri I (12. Dyn.) und sind somit anscheinend älter als P.M. und P.Rh. Sie enthalten numerische Rechnungen, insbesondere einfache Volumenberechnungen.

Literatur zu Einzelfragen

Becker, O.: Über die Proportionen der ägyptischen Pyramiden I. Die klassischen Pyramiden des Alten Reiches. Praxis der Math. 3, 1961, S. 260–266.

Bruins, E. M.: Über die Approximation von $\pi/4$ in der ägyptischen Geometrie. Indag. Math. 7, 1945, S. 11–15.

Gandz, S.: Die Harpedonapten oder Seilspanner und Seilknüpfer. Qu. u. St. B 1, 1931, S. 255–277.

(Die Seilspanner sind Landvermesser. Die Seilspannung ist auch eine wichtige Anfangszeremonie bei der Grundsteinlegung eines Tempels. Von einem Seil der Länge 12 mit Knoten zwischen den Längen 3, 4, 5 ist in den Urkunden keine Rede.)

Gundel, W.: Dekane und Dekansternbilder. – Glückstadt und Hamburg 1936.

Hertwig, O.: Über geometrische Gestaltungsgrundlagen von Kultbauten des VI. Jahrhunderts v. Chr. zu Paestum. – München: Beck 1968. – Anhang I: Die praktischen Ziele der Pyramidenaufgaben im Papyrus Rhind.

Seidenberg, A. [Sem. C.]: On the Area of a Semi-Circle. – Arch. Hist. Exact Sci. 9, 1972/73, S. 171–211.

Vogel, K.: Die Grundlagen der ägyptischen Arithmetik. – München 1929 (Dissertation).

van der Waerden, B. L.: Die Entstehungsgeschichte der ägyptischen Bruchrechnung. Qu. u. St. B 4, 1938, S. 359–382.

4.1.5 Altindische Mathematik

Quellen

The Śulvasūtra of Baudhāyana, with the Commentary by Dvārakānāthayajvan.

Ed. G. Thibaut. – The Pandit. A Monthly Publication of the Benares College Devoted to Sanskrit Literature. Bd. 9 u. 10. New Series Bd. 1. 1875–1877.

Das Āpastamba-Śulba-Sūtra.

Ed. Albert Bürk. Zeitschrift der Deutschen Morgenländischen Gesellschaft. Bd. 56, 1902.

Kātyāyana's Śūlbapariśiṣṭa with the Commentary by Rāma, Son of Sūryadāsa. Ed. G. Thibaut. – The Pandit, New Series Bd. 4. Benares 1882.

Gesamtdarstellung

Sen: D. M. Bose, S. N. Sen, B. V. Subbarayappa: A Concise History of Science in India.

New Delhi: Indian National Science Academy. 1971.

(Die Abschnitte 1. A Survey of Source Materials, 2. Astronomy, 3. Mathematics sind von Sen verfaßt.)

Literatur

Thibaut, G.: On the Śulvasūtras. Journ. Asiatic Soc. Bengal, 44, 1, 1875.

Michaels, A.: Beweisverfahren in der Vedischen Sakralgeometrie. Ein Beitrag zur Entstehungsgeschichte von Wissenschaft. Wiesbaden: Steiner 1978.

Alt- und Neu-Indische Studien, hrsg. vom Seminar für Kultur und Geschichte Indiens an der Universität Hamburg. (Betonung wissenschaftstheoretischer Gesichtspunkte. Viele Literaturangaben)

Müller, Conrad: Die Mathematik der Śulvasūtra. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität. 7, 1930, S. 173–204.

(Eine gründliche mathematische Untersuchung)

Seidenberg, A. s. unter Nr. 4.1.0.

4.2 Griechische Mathematik

Quellensammlung

Diels: Diels, H.: Die Fragmente der Vorsokratiker. 6. Aufl., Hrsg. von W. Kranz. Berlin 1951. Nachdruck Wiss. Buchgemeinschaft, Tübingen.

Auswahl mit deutscher Übersetzung:

Kranz, W.: Vorsokratische Denker. Berlin, Frankfurt a. M. 1949.

Capelle, W.: Die Vorsokratiker. Kröners Taschenausgabe Nr. 119. Stuttgart: Kröner. 4. Aufl. 1953.

Balss, H.: Antike Astronomie. Aus griechischen und lateinischen Quellen mit Text, Übersetzung und Erläuterungen. München, Heimeran 1949.

Nachschlagewerke

LAW: Lexikon der Alten Welt.

Zürich und Stuttgart, Artemis-Verlag 1965.

Auch einzelne Teile erschienen.

Oxf.: The Oxford Classical Dictionary.

Ed. M. Cary u. a. Oxford. Clarendon Press 1949.

Nachdruck 1961.

RE: (Pauly-Wissowa): Paulys Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft. Neue Bearbeitung, begonnen von G. Wissowa. Stuttgart.

TL: Tusculum-Lexikon griechischer und lateinischer Autoren des Altertums und des Mittelalters. 3. Aufl. bearb. von W. Buchwald, A. Hohlweg, O. Prinz. München, Zürich: Artemis Verlag 1982.

Gesamtdarstellungen

Heath, Sir Thomas L.

Gr. M.: A History of Greek Mathematics. 2 Bde. Oxford. Clarendon Press 1921. Nachdruck 1960.

Gr. Astr.: Greek Astronomy, London, New York 1932.

Sarton, George

Hist. A.: A History of Science. Ancient Science through the Golden Age of Greece. – Cambridge: Harvard University Press 1960.

Hist. H.: A History of Science. Hellenistic Science and Culture in the Last Three Century B. C. - Cambridge: Harvard University Press 1959.
 van der Waerden, B. L.

E. W.: Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Aus dem Holländischen übersetzt von Helga Habicht. Basel, Stuttgart: Birkhäuser-Verlag. 2. Aufl. 1966.

Weitere Literatur

Soweit sich eine Arbeit eindeutig einem antiken Autor zuordnen läßt, sind die genauen Angaben dort gemacht.

Die Herausgeber der Werke der antiken Autoren sind hier nicht aufgeführt.

Becker, Oskar

Grundl.: Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung. (Orbis Academicus Bd. II/6). Freiburg, München: Karl Alber 1954. 2. Aufl. 1964.

Ant.: Das mathematische Denken der Antike. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1957.

Eud. I.: Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionen-Lehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euklid. Qu. u. St. B 2, 1933, S. 311-333.

Eud. II.: Eudoxos-Studien II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen? Qu. u. St. B 2, 1933, S. 369-387.

Eud. III.: Eudoxos-Studien III. Spuren eines Stetigkeitsaxioms in der Art des Dede-kind'schen zur Zeit des Eudoxos. Qu. u. St. B 3, 1934, S. 236-244.

Eud. IV.: Eudoxos-Studien IV. Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in der griechischen Mathematik. Qu. u. St. B 3, 1934, S. 370-388.

Hipp.: Zur Textgestaltung des eudemischen Berichts über die Quadratur der Mönchen. Qu. u. St. B 3, 1936, S. 411-419.

G. u. U.: Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im 9. Buch der Elemente Euklids. Qu. u. St. B 3, 1936, S. 533-553 = Gr. Math. S. 125-145.

Gr. Math.: Zur Geschichte der griechischen Mathematik. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1965.

Wege der Forschung Bd. 33. (Sammlung von Arbeiten verschiedener Autoren, hrsg. von O.

Becker)

Beckmann, Friedhelm s. Euklid

Blume, F. s. Agrimensoren

Bubnov, N. s. Agrimensoren

Burkert, W.: Weisheit und Wissenschaft. Nürnberg 1962.

Dijksterhuis, E. J., s. Archimedes

Drachmann, A. G.: The Mechanical Technology of Greek and Roman Antiquity. Kopenhagen: Munksgaard 1963.

Edwards, C. H. Jr.: The Historical Development of the Calculus. New York, Heidelberg, Berlin: Springer 1979.

(Behandelt ausführlich auch die antiken Methoden)

Fladt, K.: Geschichte und Theorie der Kegelschnitte und der Flächen zweiten Grades. Stuttgart: Klett-Verlag 1965.

von Fritz, Kurt

Gr.: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft. Berlin, New York: W. de Gruyter 1971.

Darin u.a.:

Archai: Die Archai in der griechischen Mathematik. S. 335-429. Erstveröffentlichung: Archiv für Begriffsgeschichte 1.

Gl.: Gleichheit, Kongruenz und Ähnlichkeit in der antiken Mathematik bis auf Euklid. S. 430-508.

Erstveröffentlichung: Archiv für Begriffsgeschichte.

Ink.: Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont. S. 544-575. - Erstveröffentlichung (englisch): Annals of Math. 46, 1945. - Deutsch auch in Becker, Gr. Math., S. 271-301.

Apeiron: Das Apeiron bei Aristoteles. S. 677-700.

Nicht in Gr.:

Pl. Th.: Platon, Theaetet und die antike Mathematik. Philologus 87 (N. F. Bd. 41) 1932, Neudruck mit einem Nachtrag. Darmstadt, Wiss. Buchges. 1969.

Folkerts, Menso, s. Euklid

Fowler, D. H., s. Eudoxos

Gomperz, Heinrich

Sophistik und Rhetorik. Das Bildungsideal des EU LEGEIN in seinem Verhältnis zur Philosophie des V. Jh.

Leipzig und Berlin: Teubner 1912. Nachdruck Darmstadt, Wiss. Buchges. 1965.

Heller, Siegfried

Theod.: Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog „Theaetet“. Centaurus 5, 1956, S. 1-58.

St. T.: Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer. Abh. der Deutschen Akad. d. Wiss. Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik. Jahrgang 1958, Heft 6. 28 S.

Hertwig, O.: Über geometrische Gestaltungsgrundlagen von Kultbauten des VI. Jh. v. Chr. zu Paestum. München: Beck 1968.

Itard, J., s. Euklid

Knorr, W. B.: The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and its Significance for Early Greek Geometry. Dordrecht (Holland), Boston: D. Reidel Publ. Comp. 1975.

Krafft, F.: Geschichte der Naturwissenschaft I. Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen. Freiburg i. Br.: Rombach 1971.

Lachmann, K., s. Agrimensoren

Mahoney, M. S.: Another Look at Greek Geometrical Analysis. Arch. Hist. Exact Sci. 5, 1968, S. 318-348.

Müller, Wilhelm, s. Zenodoros

Neuschwander, E.: Beitr.: Beiträge zur Frühgeschichte der griechischen Geometrie. Arch. Hist. Exact Sci. 11, 1973, S. 127-133.

s. auch bei Euklid

Riddell, R. C., s. Eudoxos

Rudio, F.:

Hipp.: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griech. und deutsch. 1907.

Kreisim.: Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung. Deutsch hrsg. mit einer Übersicht über die Geschichte des Problems von der Quadratur des Zirkels von den ältesten Zeiten bis auf unsere Tage. Leipzig: Teubner 1892.

Schmidt, Wilhelm, s. Zenodoros

Schneider, Ivo, s. Archimedes

Steck, M., s. Euklid

Steele, A. D.: Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik. Qu. u. St. B 3, 1936, S. 313-369. Teil II und III auch in Becker, Gr. Math., S. 146-202.

Toomer, G. J., s. Hipparch

Szabó, Árpád

Anf.: Anfänge der griechischen Mathematik.

Budapest, Akadémiai Kiadó, 1969. Gemeinschaftsausgabe mit R. Oldenbourg, München, Wien.

1. Teil: Die Frühgeschichte der Theorie der Irrationalitäten.

2. Teil: Die voreuklidische Proportionenlehre.

3. Teil: Der Aufbau der systematisch-deduktiven Mathematik.

Anhang: Wie kamen die Pythagoreer zu dem Satz Eucl., Elem. II, 5?
 (Das Buch faßt ältere Arbeiten des Verf. zusammen.)

Anf. e.: The Beginnings of Greek Mathematics.

Übers. (engl.) von A. M. Ungar.

Budapest, Akadémiai Kiadó 1978. Gemeinsam mit D. Reidel Publ. Comp. Dordrecht, Holland.

Wm.: Winkelmessung und Anfänge der Trigonometrie. Acta Antiqua Academiae Scientiarum Hungarica, Budapest, Bd. 24, 1976, S. 161–182.

Sch. Z.: Der Schattenzeiger. Ein altes Instrument der Astronomie, Geographie und Trigonometrie. Humanismus und Technik. Berlin. Bd. 22, 2. Heft, 1978, S. 36–62.
van der Waerden, B. L., s. unter 4.1.0 und 4.1.1; ferner:

Pyth. Wiss.: Pythagoreische Wissenschaft. In RE. Bd. 24, Sp. 277–300.

Pyth.: Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft. Zürich, München: Artemis Verlag 1979.

Postulate: Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie. Arch. Hist. Exact. Sci. 18, 1977/78, S. 343–357.

Vogel, Kurt

Gr. L.: Beiträge zur griechischen Logistik.

Sitzungsber. der Bayer. Adak. d. Wiss., Math.-naturw. Abt. 1936, S. 357–472.

(Über die Rechenkunst der Griechen)

Griechische und römische Autoren

Aganis

Wahrscheinlich Zeitgenosse des Simplicios (6. Jh. n. Chr.). Gab einen Beweis des Parallelenpostulats [210]

Agatharchos

Mitte des 5. Jh. v. Chr. Maler aus Samos, arbeitete in Athen. Vitruv [Arch. VII, Vorr. 12]: „Zuerst nämlich schuf Agatharchos in Athen, als Äschylos eine Tragödie aufführte, eine Dekoration und hinterließ darüber eine Schrift.“

Agrimensoren

Römische Feldmesser, nach ihrem wichtigsten Gerät, der Groma [60], auch Gromatiker genannt. Ihre Aufgaben waren das Abstecken von Tempelgebieten, Städten und Lagern, ferner Flurgrenzziehungen und Ackerverteilungen. Schriften gibt es etwa seit 100 n. Chr. Durch sie sind geometrische Kenntnisse ins Mittelalter überliefert worden. [168]. Vierecksformel [168].

Editionen:

Blume, F., K. Lachmann und A. Rudorff: Die Schriften der römischen Feldmesser. 2 Bde. Berlin 1848, 1852.

Bubnov, N.: Gerberti Opera Mathematica. Berlin 1899. Nachdruck Hildesheim: Olms 1963. – Appendix VII. De corporis gromaticorum libellis mathematicis.

Literatur:

Dilke, O. A. W.: The Roman Land Surveyors. An Introduction to the Agrimensores. – Newton, Abbot: David and Charles 1971.

Alexander von Aphrodisias

Peripatetiker. Begann etwa 198 n. Chr. mit Vorlesungen in Athen. Schrieb Kommentare zu den Schriften des Aristoteles.

Bericht über Kreisquadraturen [95].

Ammonios Hermeiou

Geb. vor 445 n. Chr. Schüler von Proklos, seit 485 Schulhaupt der Platonischen Schule in Alexandria. Die Schüler dieser Schule waren teils Heiden, teils Christen. Die Schule bestand bis zur Eroberung von Alexandria durch die Araber (641/642). A. war vielleicht pro forma Christ. Zu seinen Schülern gehörten Simplicios und Philoponos. A. starb zwischen 517 und 526.

Zur Kreisquadratur [95].

Anaxagoras

Geb. ca. 500 in Klazomenai, kam etwa 460 nach Athen, wurde Freund des Perikles und des Euripides. Diog. L. [II, 8, 10]: „Man sagt, er habe den Fall des Meteorsteins in der Nähe von Aigospotamoi (468/467) vorausgesagt, von dem er sagte, er werde aus der Sonne herausfallen.“ – A. wird das schwerlich vorausgesagt haben, aber der Fall dieses Meteorsteins könnte der Anlaß dafür gewesen sein, daß er lehrte, die Sonne und alle Himmelskörper seien glühende Steine. Diese Lehre wird von Platon bezeugt [Apolog. 26 d]. A. wurde (daher) 430 wegen Gottlosigkeit angeklagt, mußte Athen verlassen und ging nach Lampsakos. Dort starb er um 425 v. Chr.

Mathematisches: A. soll sich im Gefängnis mit der Quadratur des Kreises beschäftigt haben [Plutarch, zitiert nach Diels 59 A 38] [94]. Er lehrte: „Im Kleinen gibt es kein Kleinstes, sondern immer noch ein Kleineres“ [Diels 59 B 3].

Kleinste Teile der Stoffe [88] [158]. Der Mond erhält sein Licht von der Sonne [148].

Anaximander

Geb. etwa 610 in Milet, gest. etwa 546. Erklärte als Ursubstanz das Grenzenlos-unendliche (apeiron) [73]. Die Erde habe die Form einer Säulentrommel, die Sterne seien mit Feuer gefüllte Schläuche mit einer Öffnung, aus der das Feuer herausseht [147]. Er stellte in Sparta einen Gnomon (Schattenstab, Sonnenuhr) auf, soll eine Erdkarte gezeichnet und eine „Sphaira“ (einen Himmelsglobus) konstruiert haben. [Diog. L. II, 1].

Anaximenes

Wirkte um 545 in Milet, gest. 528/525 (= 63. Olympiade). Ursubstanz ist die Luft [74]. Die Erde ist eine flache Scheibe. Die Sterne bewegen sich nicht unter der Erde durch, sondern um die Erde herum [147].

Anthemius von Tralleis

Wurde 532 n. Chr. gemeinsam mit Isidoros von Milet mit dem Neubau der Hagia Sophia in Konstantinopel beauftragt, starb 534. Schrieb über Brennspiegel. [Heath: Gr. M. Bd. 2, S. 541–543].

Antiphon der Sophist

Lebte in Athen, war Zeitgenosse des Sokrates.

Quadratur des Kreises mittels einbeschriebener Polygone, berichtet von Themistios und Simplicios. [95, 97]

Literatur: F. Rudio: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Leipzig 1907.

Apollonios von Perge

Nach Angabe von Eutokios [Apollonios K. Bd. 2, S. 168] ist er in Perge in Pamphylien geboren und erreichte die Blütezeit seines Lebens (40 J.) zur Zeit des Ptolemaios Euergetes (Reg. Zeit 246–222/221). A. studierte in der Schule von Euklid in Alexandria [Pappos, Coll. VII, 35. Hultsch S. 678], wurde berühmt durch astronomische Arbeiten z. Z. von Ptolemaios Philopator (Reg. Zeit 222/221–204). Das vierte Buch der „Kegelschnitte“ widmete er dem König Attalos von Pergamon (Reg. Zeit 241–197). Danach wird seine Lebenszeit auf etwa 262–190 v. Chr. angesetzt [Heath, Gr. M., Bd. 2, S. 126].

Hauptwerk: *Konika*. 8 Bücher, I–IV griechisch erhalten, V–VII arabisch erhalten, VIII verloren.

Editio princeps: E. Halley: Apollonii Conicorum libri octo. Oxford 1710. – Enthält den griechischen Text der Bücher I–IV, eine lateinische Übersetzung der Bücher V–VII und eine Wiederherstellung des Buches VIII.

K.: Apollonii Pergaei quae graece extant cum commentariis antiquis. Ed. J. L. Heiberg. Leipzig: Teubner. 2 Bde. 1891–1893. Gr. und lat.

K. d.: Die Kegelschnitte des Apollonios. Übers. von A. Czwilina. München, Berlin 1926. – Nachdruck: Darmstadt. Wiss. Buchges. 1967. (Buch I–IV).

K. d. Balsam: Balsam, H.: Des Apollonios sieben Bücher über Kegelschnitte nebst dem durch Halley wiederhergestellten achten Buche. Berlin 1861.

K. e.: T. L. Heath: Apollonius' Treatise on Conic Sections. Ed. in Modern Notation with Introductions, including an Essay on the Earlier History of the Subject. Cambridge 1896.

K. f.: P. ver Eecke: Les coniques. Brügge 1924. (Buch I–VII.)

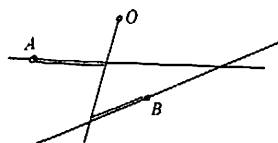
K. ngr.: APOLLONIOY KONIKA. Ed. E. Stamatis. Athen 1975–1976. I–IV: Text von Heiberg mit neugriechischer Übersetzung. V–VII: neugriechische Übersetzung nach Halley. 4 Bde.

Weitere Werke:

VS.: Über den Verhältnisschnitt.

Apollonii de sectione rationis libri duo ex arabico MSto latine versi. E. Halley, Oxford 1706.

(Die Aufgabe ist: gegeben sind zwei Geraden und auf jeder ein Punkt (A, B), ferner ein Punkt O außerhalb der Geraden. Durch diesen ist eine Gerade so zu legen, daß sie auf den gegebenen Geraden von den gegebenen Punkten aus Strecken in einem gegebenen Verhältnis abschneidet.)



Über weitere Werke berichtet Pappos [Coll. VII, 3 = H. S. 636]; darunter sind:

2 Bücher über Berührungen. Gegeben sind drei Figuren; jede kann ein Punkt oder eine Gerade oder ein Kreis sein. Gesucht ist ein Kreis, der durch jeden der gegebenen Punkte geht (wenn Punkte gegeben sind) und die gegebenen Geraden oder Kreise berührt. [s. Heath, Gr. M. Bd. 2, S. 181].

2 Bücher über „Ebene Örter“, die Fermat rekonstruiert hat.

2 Bücher über Einschiebungen.

Nach Proklos [Zu Def. 4, S. 105] bemerkte Apollonios, daß die Schraubenlinie auf dem Zylinder *ὁμοιομερής*, d. h. gleichförmig in ihren Teilen ist.

Nach Ptolemaios [Almagest XII, Kap. 1] hat Apollonios die Epizykel- und die Exzentertheorie der Planetenbewegung miteinander verglichen.

Literatur:

s. Fladt, zitiert auf S. 222.

Neugebauer, O.: Apollonius-Studien. Qu. u. St. B 2, 1933, S. 215–254.

Archimedes

Archimedes wurde bei der Eroberung von Syrakus durch die Römer (212 v. Chr.) von einem römischen Soldaten erschlagen. Nach einer Angabe des byzantinischen Historiographen Tzetzes (1110–1185 n. Chr.) war er damals 75 Jahre alt. Er ist in Syrakus geboren, weilte vielleicht einige Zeit in Alexandria; nach Diodorus soll er dort die Wasserschnecke erfunden haben, ein Gerät zum Hochpumpen von Wasser, das wohl für Bewässerungsanlagen besonders nützlich war [Op. e., S. XVI]; beschrieben ist es bei Vitruv [Arch. X, 6]. Seine mathematischen Arbeiten sandte er (nach seiner Rückkehr nach Syrakus) an alexandrinische Mathematiker. In Syrakus war er nicht nur als Mathematiker tätig, sondern auch als Ingenieur und technischer Berater des Königs Hieron und seiner Nachfolger. An einzelnen Leistungen werden u. a. berichtet: die Prüfung einer Krone auf Reinheit des verwendeten Metalls mittels des spezifischen Gewichts [Vitruv, Arch. IX Vorrede § 9], ein Gerät, mit dem jede beliebige (große) Last von jeder beliebigen (kleinen) Kraft bewegt werden konnte [Pappos, Coll. VIII, Prop. 10] – Pappos erwähnt dort seinen Ausspruch: „Gib mir einen Punkt, auf dem ich stehen kann, und ich werde die Erde bewegen“ (*δός μοι (φησι) ποῦ στῶ καὶ κινῶ τὴν γῆν*) – und vor allem seine Kriegsmaschinen, die bei der Belagerung von Syrakus eingesetzt wurden und die Einnahme der Stadt um zwei Jahre verzögerten [Plutarch: Marcellus, § 14–19].

Über seinen Tod gibt es verschiedene Versionen; eine davon besagt, er habe goldene Geräte (vielleicht ein Planetarium) zu Marcellus bringen wollen und sei dabei von einem Soldaten, der es auf das Gold abgesehen hatte, getötet worden.

Op.: Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii. Ed. J. L. Heiberg. 2. Aufl., 3 Bde. Leipzig: Teubner 1910–1915. Nachdruck Stuttgart 1972. Dazu als Bd. 4: Archimedes: Über einander berührende Kreise. Ed. Y. Dold-Samplonius, H. Hermelink und M. Schramm. Stuttgart 1975.

Op. d.: Archimedes Werke, übers. von A. Czwilina. – Im Anhang: Kreismessung, übers. von F. Rudio. Des Archimedes Methodenlehre von den mechanischen Lehrsätzen, übers. von J. L. Heiberg und kommentiert von H. G. Zeuthen. – Darmstadt: Wiss. Buchges. 1963.

Op. e.: The Works of Archimedes. Ed. in Modern Notation with Introductory Chapters (185 S.) by T. L. Heath. 1897. – With a Supplement: The Method of Archimedes. 1912. – Nachdruck: New York: Dover Publ. 1953.

- Op. f.: Oeuvres complètes d'Archimède. Ed. P. ver Eecke. Paris, Brüssel 1921. 2. Aufl. mit Übersetzung der Kommentare von Eutokios. Paris 1960.
 Op. ngr.: ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ ΑΠΑΝΤΑ, ed. E. Stamatis. Der Text von Heiberg mit neugriechischer Übersetzung, Scholien und Ergänzungen. 3 Teile in 4 Bd. Athen 1970-74.

Einzelne Werke

- K. u. Z.: De sphaera et cylindro. Op. Bd. 1, S. 1-229.
 Kugel und Zylinder. Op. d., S. 73-150.
 Kr.: Dimensio circuli. Op. Bd. 1, S. 231-243.
 Kreismessung. Op. d., S. 366-377.
 P. H. E.: De conoidibus et sphaeroidibus. Op. Bd. 1, S. 245-445.
 Über Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid. Op. d., S. 211-281.
 Sp.: De lineis spiralibus. Op. Bd. 2, S. 1-121.
 Über Spiralen. Op. d., S. 1-71.
 Gl. Fl.: De planorum aequilibriis. Op. Bd. 2, S. 123-213.
 Über das Gleichgewicht ebener Flächen oder über den Schwerpunkt ebener Flächen. Op. d., S. 177-210.
 SZ.: Arenarius. Op. Bd. 2, 215-259.
 Die Sandzahl. Op. d., S. 347-364.
 Qu. P.: Quadratura parabolae. Op. Bd. 2, S. 261-315.
 Die Quadratur der Parabel. Op. d., S. 151-176.
 Schw. K.: De corporibus fluitantibus. Op. Bd. 2, S. 317-413.
 Über schwimmende Körper. Op. d., S. 283-346.
 St.: Stomachion. Op. Bd. 2, S. 415-424.
 Meth.: De mechanicis propositionibus ad Eratosthenem methodus. Op. Bd. 2, S. 425-507.
 Eine neue Schrift des Archimedes. Op. d., S. 379-423.
 Ass.: Liber assumptorum. Op. Bd. 2, S. 509-525.
 Pr. B.: Problema bovinum. Op. Bd. 2, S. 527-534.

Literatur

- Eine ausführliche Charakterisierung von Archimedes gibt Plutarch in der Biographie des Marcellus (§ 14-19).
 Dijksterhuis, E. J.: Archimedes. Kopenhagen 1956.
 Schneider, Ivo: Archimedes, Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker. Darmstadt, Wiss. Buchgesellschaft 1979. Erträge der Forschung Bd. 102.
 (Neue gründliche Durcharbeitung der Quellen, die z. T. zu neuen Auffassungen führt; insbesondere wird der Ingenieur Archimedes herausgestellt. - Ausführliches Literaturverzeichnis.)
 Zu den Infinitesimalmethoden des Archimedes:
 Bachmakova, I. G.: Les méthodes différentielles d'Archimède. Arch. Hist. Exact Sci. 2, 1962/66, S. 87-107.
 Edwards, C. H. Jr.
 Dreiteilung des Winkels [92]. Quadratur der Parabel [119]. Summe einer geometrischen Reihe [119]. Spirale [120]. Länge einer Kurve, Konkavität [126]. Kreismessung [127, 173]. Bezeichnung der Kegelschnitte [131]. Fläche der Ellipse [134]. Volumen des Durchdringungskörpers zweier Zylinder [175]. Kubische Gleichung [199]. Siebeneck [200].

Archytas von Tarent

Er war ein Freund Platons und soll durch einen Brief an den Tyrannen Dionysios I von Syrakus Platon vor dem Tode gerettet haben [Diog. L. VIII, Kap. 4 = § 79-83]. Man setzt daher die Zeit der Wirksamkeit von A. als etwa 400-360 v. Chr. an. Er wurde siebenmal zum Strategen gewählt.

A. arbeitete über Musiktheorie, deren zahlentheoretische Grundlagen, auch über die Entstehung und Fortpflanzung der Töne. Nach Boetius [De musica III, 11] bewies er, daß zwischen zwei Zahlen, die im „übertheiligen“ Verhältnis

stehen, d. h. im Verhältnis $(n+1):n$, keine mittlere Proportionale (ganzzahlig) möglich ist. Ein etwas allgemeinerer Satz steht bei Euklid [El. VIII, 8]. Wahrscheinlich stammt das Buch VIII der El. von Archytas [van der Waerden, E. W., S. 182-188].

Für die Verdoppelung des Würfels, d. h. die Einschaltung zweier geometrischer Mittel zwischen zwei gegebenen Strecken, gab er eine raffinierte Konstruktion an, die von Eutokios [Archimedes, Op., Bd. 3, S. 84-89] nach Eudemos überliefert ist. Einen für Archytas möglichen Gedankengang gibt van der Waerden [E. W., S. 249-252].

Nach Vitruv [Arch. VII, Vorr., 14] hat A. „praecepta ... de machinationibus“ aufgeschrieben, nach Diog. L. [s. o.] soll er die Mechanik nach mathematischen Prinzipien systematisch behandelt haben (*τὰ μηχανικὰ ταῖς μαθηματικαῖς προσχρησάμενος ἀρχαῖς μεθώδευσε*).

Aristaios der Ältere

Pappos berichtet, daß A. „fünf Bücher über körperliche Örter in Verbindung mit Kegelschnitten“ geschrieben habe [Coll. ed. Hultsch S. 672] [130]. Dieses Werk muß älter sein als Euklids Werk über Kegelschnitte. A.s Schaffenszeit könnte also etwa 350-330 v. Chr. gewesen sein. - Hypsikles nennt im sog. Buch XIV von Euklids Elementen A. als Quelle für den Satz: „Derselbe Kreis umschließt das Fünfeck des Dodekaeders und das Dreieck des Ikosaeders, wenn diese Körper derselben Kugel einbeschrieben sind“ [Euklid Op. Bd. 5, S. 6]. - Mehr ist von A. nicht bekannt.

Aristarch von Samos

Um 280 v. Chr.

Archimedes schreibt [SZ. Kap. 1]: „Aristarch von Samos ... nahm an, daß die Fixsterne und die Sonne unbeweglich seien, die Erde sich um die Sonne, die in der Mitte der Erdbahn liege, in einem Kreise bewege, die Fixsternsphäre aber, deren Mittelpunkt im Mittelpunkt der Sonne liege, so groß sei, daß die Peripherie der Erdbahn sich zum Abstände der Fixsterne verhalte wie der Mittelpunkt der Kugel zu ihrer Oberfläche.“ Eine Schrift von A. darüber ist nicht erhalten. - [151]

Erhalten ist eine Schrift „Über die Größen und Abstände der Sonne und des Mondes“.

T. Heath: Aristarchus of Samos, the Ancient Copernicus. A History of Greek Astronomy to Aristarchos, together with Aristarchus's Treatise on the Sizes and Distances of the Sun and Moon. A New Greek Text with Translation and Notes. Oxford: Clarendon Press 1913. Nachdruck Oxford 1959.

Aristoteles

Geb. 384 v. Chr. in Stageira.

367 trat A. in die Akademie Platons ein, der er bis zu Platons Tod 348/7 angehörte. Dann hielt er sich zeitweise beim Fürsten Hermias von Atarneus (Kleinasien), zeitweise in Mytilene auf Lesbos auf. 343 wurde er von König Philipp von Makedonien zum Erzieher seines Sohnes Alexander berufen. Nach

dem Tod Philipps kehrte A. nach Athen zurück und gründete dort eine Schule (335), die Lykeion (nach dem Ort der Vorträge im Gymnasion Lykeion) oder Peripatos (nach einer benachbarten Wandelhalle – *peripatein* = umhergehen –) genannt wurde. Nach Alexanders Tod ging er wegen der antimakedonischen Haltung der Athener nach Chalkis auf Euböa (323), starb dort 322 v. Chr.

Op.: Aristotelis Opera, ed. I. Bekker im Auftrag der kgl. Preuß. Akad. Berlin: Reimer 1831.

Nachdruck: Darmstadt: Wiss. Buchges. 1960.

Nach dieser Ausgabe wird zitiert.

Einzelne Werke, insbesondere die hier benutzten:

Kat.: Kategorien.

Darin Kap. 4: Die 10 Kategorien [106].

Herm.: *Peri Hermeneias*. De interpretatione. Lehre vom Satz.

(Über Formen der sprachlichen Ausdrucksweise.)

1. Anal.: *Analytica priora*. Erste Analytik.

(Lehre vom Schluß. Syllogistik.)

2. Anal.: *Analytica posteriora*. Zweite Analytik.

Darin: Die Grundlagen einer beweisenden Wissenschaft [110].

Top.: Topik.

Buch VII handelt von der Definition.

Phys.: Physik.

In Buch III: Unterscheidung des der Wirklichkeit nach (*entelecheiā, actu*) Seienden und des der Möglichkeit nach (*dynamei, potentia*) Seienden.

In Buch IV u. a.: Diskussion über das Leere.

In Buch VIII, Kap. 5: Das Bewegungsgesetz [160].

Him.: Über den Himmel. *De coelo*.

W. u. V.: Vom Werden (Entstehen) und Vergehen.

Metaph.: Metaphysik.

Buch Δ enthält Erklärungen verschiedener Begriffe, u. a. Kap. 6: Das Eine [109]. Kap. 13: Die Quantität [106].

Politik.

Unt. L.: Über unteilbare Linien. (Alt, aber nicht von Aristoteles).

Ferner Schriften über Ethik, Rhetorik, Poetik und Zoologie u. a.

Literatur zur Mathematik bei Aristoteles:

von Fritz, K.

Heath, Th. L.: *Mathematics in Aristotle*. Oxford 1949.

Heiberg, J. L.: *Mathematisches zu Aristoteles*. – Abh. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 18, 1904, S. 1–49. Auch einzeln erschienen: Leipzig 1904.

Tóth, Imre: Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum. Arch. Hist. Exact Sci. 3, 1967, S. 249–422.

Wichtig für die Grundlagen der Mathematik:

Metaph. Δ 13 = 1020a 7ff.: Erklärung des Begriffs „Größe“ [106ff.].

2. Anal. I, 2 und 10 = 71b 9ff., 76a 31ff.: Über die Grundlagen einer beweisenden Wissenschaft [110ff.].

Weitere Hinweise: A. über Thales [72], über die Pythagoreer [81], über Sokrates [104]. Gattung und Art [106]. Definition; Größe, Grenze, zusammenhängend [106f.]. Parallelogramm der Geschwindigkeiten [122]. Figurierte Zahlen [142]. Vier Elemente [159]. Bewegungslehre [159].

Autolykos von Pitane

Nach Diogenes Laertius [IV, Kap. 6, 29] war Arkesilaos von Pitane zunächst Schüler von A., ging dann nach Athen und wurde Schüler von Theophrast. Also wird A. etwa gleichaltrig mit Theophrast (372–287) gewesen sein. Seine

Werke „Über die sich bewegende Kugel“ und „Über die Auf- und Untergänge (der Sterne)“ wurden von Euklid in den *Phainomena* benutzt. – [150]

Autolyce de sphaera quae movetur liber; de orbitis et occasibus libri duo, ed. F. Hultsch. Leipzig: Teubner 1885.

Deutsche Übersetzung von A. Czwajłna: Autolykos: Rotierende Kugel und Aufgang und Untergang der Gestirne. – (Zusammen mit Theodosios von Tripolis: Sphaerik). Leipzig 1931. Ostw. Klass. 232.

Boetius, ca. 480–524 nach Chr. [142, 168]

Bryson von Herakleia

Schüler des Eukleides von Megara (ca. 450–370 v. Chr.). Wahrscheinlich identisch mit dem Bryson, der sich mit der Kreisquadratur beschäftigte und dabei den Satz (das Axiom) benutzte: Wozu es ein Größeres und ein Kleineres gibt, dazu gibt es auch ein Gleiches [95].

Literatur: O. Becker, Eud. II.

Cassiodorus Senator, 490–583 n. Chr. [168].

Cicero, Marcus Tullius

Geb. 3. 1. 106 in Arpinum. Studierte u. a. 78 in Athen, 78/77 bei Poseidonios in Rhodos. Auf weitere biographische Daten sei hier verzichtet. C. wurde am 7. 12. 43 v. Chr. bei Caieta ermordet.

Naturwissenschaftliche Angaben finden sich in den Schriften *De natura deorum* und *De divinatione* [166].

Deinostratos

Um 350 v. Chr. Bruder des Menaichmos [Proklos, Math. Verz.], benutzte die von Hippias von Elis zur Dreiteilung des Winkels gefundene Kurve zur Quadratur des Kreises; sie heißt daher Quadratrix [92].

Demetrios von Phaleron

Ca. 350–280 v. Chr. Politiker und Philosoph in Athen, das damals zum Einflußbereich der Ptolemäer gehörte. Bei der Eroberung Athens durch den makedonischen Feldherrn und späteren König Demetrios I Poliorketes mußte er 307 nach Ägypten fliehen. Von D. beraten, gründete Ptolemaios I Soter des „Museion“ (s. unter Euklid). Wahrscheinlich hat D. Euklid in Athen gekannt und seine Berufung nach Alexandria veranlaßt.

Demokrit von Abdera

Geb. ca. 460 v. Chr. in Abdera, machte viele Reisen, hielt sich vielleicht auch in Athen auf, aber jedenfalls nur kurze Zeit. Er starb in seiner Heimat ca. 370 v. Chr.

D. hat die von Leukipp begründete Atomistik ausgebaut. Grundeigenschaften der Atome waren ihm Gestalt, Lage im Raum und relative Lage zueinander. [K. von Fritz in LAW]. [88, 158].

Von seinen mathematischen Werken ist fast nichts erhalten. Nach Archimedes [Meth. 1 = Op. Bd. 2, S. 430] hat er (ohne Beweis?) bemerkt, daß das Volumen des Kegels = $1/3$ des Volumens des Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe ist.

D. überlegte sich: „Wenn ein Kegel (*παρὰ τὴν βάσιν*, also) parallel zur Grundfläche von Ebenen geschnitten wird, wie soll man sich die entstehenden Schnittflächen denken, gleich oder ungleich? Sind sie ungleich, dann werden sie den Kegel ungleichmäßig machen, da er viele stufenartige Einschnitte und Vorsprünge erhält; sind sie dagegen gleich, so werden (alle) Schnitte gleich sein, und der Kegel wird die Erscheinung eines Zylinders darbieten.“ [Diels 68 B 155].

Diogenes Laertios, um 200 n. Chr.

Diog. L.:

Diogenis Laertii Vitae Philosophorum. Ed. H. S. Long. 2 Bde. Oxford, University Press 1964. (Griech.)

Diogenes Laertius: Leben und Meinungen berühmter Philosophen. Übers. von O. Apelt. Leipzig, Meiner 1921. Philos. Bibl. Bd. 53. (Deutsch)

(Ein damals populäres Werk, das viele wichtige Daten enthält [71].)

Diokles, um 100 n. Chr.

Schrieb ein Werk über Brennspiegel; darin beschreibt er die Kissoide (*κισσοῦς* = Efeu), eine Kurve, mit der er die Aufgabe der Würfelverdoppelung, d. h. des Einschiebens zweier mittlerer Proportionaler zwischen zwei gegebenen Größen löst. Eutokios in [Archimedes Op. Bd. 3, S. 160 ff.], Pappos [III, Hultsch, S. 54, IV, Hultsch S. 270].

Diophant von Alexandria

Anatolios, der ca. 270/280 n. Chr. Bischof von Laodicea war, widmete ihm eine Schrift über das ägyptische Rechnen. Das berichtet Psellos (11. Jh., Byzanz) in einem Brief [Op. Bd. 2, S. XVII, 38 f. S. Heath, Gr. M. Bd. 2, S. 448]. Also lebte Diophant etwa um 250 n. Chr.

Op.: Diophanti Alexandrini Opera omnia cum Graecis commentariis. Griech. und lat. Ed. P. Tannery. 2 Bde. Leipzig 1893, 1895. Darin: Ar.: Arithmetik. 6 Bücher. – P.: Über Polygonalzahlen.

Op. e. = Heath, Dioph.: Heath, Sir Thomas L., Diophantus of Alexandria. A Study in the History of Greek Algebra. Cambridge 1895. 2. Aufl. 1910. Neudruck Dover Reprint 1964. (Wichtigste Literatur über Diophant.)

Op. d., W.: Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen. Deutsch von G. Wertheim. Leipzig 1890.

Op. d., C.: Arithmetik des Diophantos aus Alexandria. Buch über die Polygonalzahlen. Deutsch von A. Czwalina. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht. 1952.

Op. f.: Franz. Übers. von P. ver Eecke. Brügge 1926. Paris 1959.

Op. ngr.: Diophantou Arithmetika. Griechisch und neugriechisch. Ed. E. S. Stamatis. Athen 1963.

1463 entdeckte Regiomotus eine Diophant-Handschrift.

1472 Bombelli behandelt Teile daraus in seiner Algebra.

1575 Lateinische Übersetzung von W. Holtzmann (Xylander) Basel.

1621 Griechische Ausgabe von Bachet de Méziriac.

1670 2. Aufl. mit Anmerkungen von Pierre de Fermat. Besorgt von dessen Sohn Samuel Fermat.

Die Arithmetik soll 13 Bücher umfaßt haben. Bekannt waren bis vor kurzem nur sechs. Vier weitere Bücher wurden in arabischer Übersetzung aufgefunden; sie sind als Buch IV–VII einzuordnen.

Rashed, Roshdi: Les travaux perdus de Diophant. – Revue d'hist. sciences 17, 1974, 97–122, 18, 1975, 3–30.

Sesiano, J.: Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the Arabic Translation Attributed to Qustā ibn Lūqā. New York, Heidelberg, Berlin: Springer 1982.

Überarbeitete Fassung der Dissertation Providence, USA, 1975.

Polygonalzahlen [142], Potenzen und Rechenoperationen [143], Beispiele [144].

Empedokles von Akragas, ca. 500–430 v. Chr.

E. ist der Schöpfer der Lehre von den vier Elementen Feuer, Luft, Wasser, Erde [88, 158]; bewegende Kräfte sind Liebe und Streit.

Epicharm

Komödiendichter in Syrakus um 480–470 v. Chr. [81].

Eratosthenes

Geb. in Kyrene ca. 276 v. Chr. (=etwas jünger als Archimedes, der seine Methodenlehre an E. sandte), kam um 245 nach Ägypten, wurde Erzieher des Kronprinzen und Vorsteher der Bibliothek in Alexandria, starb dort ca. 194 v. Chr.

E. erfand ein Gerät zur Einschaltung zweier mittlerer Proportionaler (Würfelverdoppelung) [Eutokios in Archimedes Op. Bd. 3, S. 88–97] [91]. – Das „Sieb des E.“, ein Verfahren zur Ermittlung der Primzahlen, beschreibt Nikomachos in Ar. I, 13. – Über sein Verfahren zur Messung des Erdumfangs [148] berichten Kleomedes, M. C., I, 10, Strabon II, 5, Plinius, Nat. Hist. II, 247. – E. entwarf eine Erdkarte, deren Grundgerüst der ungefähre Parallelkreis durch Gibraltar, Rhodos und das Taurusgebirge und der ungefähre Meridian durch Me-roe, Alexandria, Rhodos und die Mündung des Borysthenes (Dnjepr) waren [Strabon, II, 5, § 7]. – E. verfaßte eine „Chronographie“, das ist ein Versuch, die Daten politischer und literarischer Ereignisse festzuhalten; als zeitliches Bezugssystem führte er die Olympiaden ein.

Eudemos von Rhodos

Um 320 v. Chr. Schüler von Aristoteles, Freund von Theophrast. Schrieb u. a. eine Geschichte der Astronomie, eine Geschichte der Arithmetik, eine Geschichte der Geometrie, aus der antike Autoren, insbesondere Proklos, viel entnommen haben [70].

Sätze von Thales [76]. Flächenanlegung pythagoreisch. [87]. Mündchen des Hippokrates [97].

Eudoxos von Knidos

Die antiken Angaben über sein Leben sind nicht eindeutig. Wir folgen hier dem Artikel von K. von Fritz im LAW (1965) und geben zusätzlich die Daten von Lasserre (s. u.) an.

E. ist etwa 400 v. Chr. (L. 295) in Knidos geboren. Nach Diog. L. [VIII, 86–91] war er in der Geometrie Schüler des Archytas, in der Medizin des Siziliers Philiston. Im Alter von 22 Jahren kam er nach Athen, reiste von dort nach Ägypten (L. 365/4), wo er sich 16 Monate aufhielt und an einem Observatorium in der Nähe von Heliopolis astronomische Beobachtungen anstellte. Danach leitete er eine Schule in Kyzikos, ging 368 (L. 350) nach Athen und „scheint dort während Platons zweiter sizilischer Reise (367–365) und bei Aristoteles' Eintritt in die Akademie stellvertretender Vorsteher der Akademie gewesen zu sein“. (Dagegen L.: „Sicher trat er nicht in die Akademie ein“. S. 141). Später kehrte E. in seine Heimatstadt zurück und starb dort etwa 347 (L.: 342/1). (E. soll im Alter von 53 Jahren gestorben sein und Platon überlebt haben.)

In der Mathematik begründete er die Proportionenlehre für allgemeine Größen (Euklid, El. V) (s. hier Abschnitt 2.3.1) und die Exhaustionsmethode (s. 2.3.2), in der Astronomie gab er mit der Theorie der konzentrischen Sphären erstmals eine mathematische Darstellung der Planetenbewegungen [151].

Op. L.: = Lasserre: Eudoxos: Die Fragmente des Eudoxos von Knidos. Hrsg., übersetzt (deutsch), komm. von François Lasserre. Berlin: W. de Gruyter 1966.

Becker, O.: Eudoxos-Studien.

Riddell, R. C.: Eudoxan Mathematics and the Eudoxan Spheres. Arch. Hist. Exact Sci. 20, 1979, S. 1–19.

(Eine Erklärung für die Konzeption der konzentrischen Sphären.)

Fowler, D. H.: Anthyphairctic Ratio and Eudoxan Proportion. Arch. Hist. Exact Sci. 24, 1981, S. 69–72.

Euklid

Er war jünger als Eudoxos und älter als Archimedes, lebte wahrscheinlich zunächst in Athen, war Platoniker [Proklos, Math. Verz.]. Bei der Gründung des Museions in Alexandria (bald nach 300 v. Chr.) wurde er dorthin berufen und begründete dort eine einzigartige mathematische Schule. Apollonios soll bei seinen Schülern studiert haben; das dürfte um 250 v. Chr. gewesen sein. Demnach kann die Lebenszeit von Euklid etwa auf 340–270 angesetzt werden.

„Museion“ bedeutet zunächst ein Musenheiligtum. Unter diesem Namen gründete Ptolemaios I Soter auf Rat des Demetrios von Phaleron ein Forschungsinstitut, in dem zahlreiche Gelehrte und Künstler aller Gebiete gemeinsam lebten und arbeiteten; dazu gehörte eine große Bibliothek. Das Museion bestand bis 389 n. Chr. Sein letzter Gelehrter war Theon von Alexandria.

Zur Überlieferungsgeschichte der Elemente:

Murdoch, J. In DSB

Folkerts, M.: Probleme der Euklidinterpretation. Centaurus 23, 1980, S. 185–215.

Steck, M.: Bibliographia Euclidean. Nach dem Tode des Verf. hrsg. von M. Folkerts. Hildesheim: Gerstenberg 1981. (Ausführliche Beschreibung von Handschriften und Drucken, Abbildungen zahlreicher Titelblätter).

Theon von Alexandria besorgte eine griechische Ausgabe, die bis ins 19. Jh. maßgebend war. 1808 entdeckte Peyrard einen Text, der auf eine vor-theonische Fassung zurückgeht.

Mehrere arabische Gelehrte haben die El. ins Arabische übersetzt, so al-Ḥağğāğ (wirkte zwischen 786 und 833, wahrscheinlich in Bagdad), ferner Ishāq ibn Ḥunain (gest. in Bagdad 910/911), dessen Übersetzung verloren ist; erhalten ist eine Bearbeitung von Ṭābit ibn Qurra (836–901).

Adelhard von Bath übersetzte die El. aus dem Arabischen ins Lateinische (zwischen 1116 und 1142); eine Neubearbeitung lieferte Campanus (kurz vor 1260). Dieser Text wurde 1482 in Venedig gedruckt. 1505 erschien eine Übersetzung aus dem Griechischen ins Lateinische von Zamberti, 1533 eine Edition des griechischen Textes durch Grynaeus (Basel), 1572 eine weitere lateinische Übersetzung von Commandino.

Die heute maßgebende Ausgabe ist:

Op.: Euclidis Opera omnia. Ed. J. L. Heiberg und H. Menge. Leipzig: Teubner.

Bd. 1–4: Euclidis Elementa. I–XIII. Ed. Heiberg 1883–1885.

Bd. 5: (Die nicht von Euklid stammenden Bücher) XIV, XV, Scholia in Elementa cum Prolegomenis criticis et Appendicibus. Ed. Heiberg 1888.

Bd. 6: Euclidis Data cum commentario Marini et scholiis antiquis. Ed. Menge 1896.

Bd. 7: Euclidis Optica, Opticorum Recensio Theonis, Catoptrica, cum scholiis antiquis. Ed. Heiberg 1895.

Bd. 8: Euclidis Phaenomena et Scripta Musica. Ed. Menge. Fragmenta. Ed. Heiberg 1916.

(Neue Ausgabe, hrsg. von E. Stamatis. Leipzig: Teubner, seit 1969)

Übersetzungen:

El.: Euklid: Die Elemente Buch I–XIII, übers. von Cl. Thaer. Leipzig 1933–1937. Nachdruck Darmstadt: Wiss. Buchges. 1962.

Ich habe gewöhnlich diese Ausgabe benutzt. Ich zitiere nach der Nummer des Buches (lat. Ziffern) und der Nr. der Definition oder des §. Das ist unabhängig von der Ausgabe.

El. e.: Heath, T. L.: The Thirteen Books of Euclid's Elements, translated from the Text of Heiberg, with Introduction and Commentary. 3 Bde. Cambridge 1908. – 1926. – Nachdruck New York: Dover.

El. f.: Peyrard, F.: Les Eléments d'Euclide, grec, latin, français. 3 Bde. Paris 1814–1818.

El. (Ar.) f.: Itard, J.: Les livres arithmétiques d'Euclide. Paris: Hermann 1961.

(Die Bücher VII–IX, Übersetzung mit Einführung und Kommentar.)

Data: Die Data von Euklid, übers. von Cl. Thaer. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer 1962.

Literatur:

s. Heath in El. e., Itard in El. (Ar.) f.

Heiberg, J. L.: Studien über Euklid. Leipzig 1882.

Beckmann, F.: Neue Gesichtspunkte zum 5. Buch Euklids. Arch. Hist. Exact Sci. 4, 1967/68, S. 1–144.

Malmendier, N.: Eine Axiomatik zum 7. Buch der Elemente von Euklid. Mathem.-Physik. Semesterberichte 22, 1975, S. 240–254.

Seidenberg, A.: Did Euclid's Elements, Book I, Develop Geometry Axiomatically? Arch. Hist. Exact Sci. 14, 1974/75, S. 263–295.

van der Waerden, B. L.: Postulate.

Inhalt der Elemente

Die folgende Skizze des Inhalts soll zeigen, in welchem Zusammenhang die einzelnen zitierten Stellen stehen, und einen Eindruck davon geben, wie folgerichtig dieses Werk aufgebaut ist.

Buch I. Definitionen [107, 109]

1. Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
2. Eine Linie breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.
4. Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt [109].
5. Ein Fläche ist, was nur Länge und Breite hat.
6. Die Enden einer Fläche sind Linien.
7. Eine ebene Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt.
8. Ein ebener Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die einander treffen, ohne einander gerade fortzusetzen.
9. Wenn die den Winkel umfassenden Linien gerade sind, heißt der Winkel geradlinig.
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein Rechter; und die stehende gerade Linie heißt senkrecht zu (Lot auf) der, auf der sie steht.
11. Stumpf ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,
12. Spitz, wenn kleiner als ein Rechter.
13. Eine Grenze ist das, worin etwas endigt.
14. Eine Figur ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird [107].
15. Ein Kreis ist eine ebene, von einer einzigen Linie [die Umfang (Bogen) heißt] umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkt bis zur Linie [zum Umfang des Kreises] laufenden Strecken einander gleich sind [109];
16. Und Mittelpunkt des Kreises heißt dieser Punkt.
17. Ein Durchmesser des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, auf beiden Seiten vom Kreisumfang begrenzte Strecke; eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren. – [78].
18. Ein Halbkreis ist die vom Durchmesser und dem durch ihn abgeschnittenen Bogen umfaßte Figur; [und Mittelpunkt ist beim Halbkreise derselbe Punkt wie beim Kreise.]
- 19–22. (Erklärung der verschiedenen Arten von geradlinigen Figuren, Dreiecken und Vierecken)
23. Parallel sind gerade Linien, die in derselben Ebene liegen und dabei, wenn man sie nach beiden Seiten ins unendliche verlängert, auf keiner einander treffen. [Abschnitt 3.3.4]

Postulate. Αἰτήματα. [109–111]

Gefordert soll sein:

1. Daß man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
2. Daß man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
3. Daß man mit jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
4. (Ax. 10) Daß alle rechten Winkel einander gleich sind,

5. (Ax. 11) Und daß, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, daß innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind. [Abschnitt 3.3.4]

Axiome. Κοινὰ ἔννοια.

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
2. Wenn Gleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen gleich.
3. Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste gleich.
4. [Wenn Ungleichem Gleiches hinzugefügt wird, sind die Ganzen ungleich.]
5. (6) [Die Doppelten von demselben sind einander gleich.]
6. (7) [Die Halben von demselben sind einander gleich.]
7. (8) Was einander deckt, ist einander gleich.
8. (9) Das Ganze ist größer als der Teil.
9. (12) [Zwei Strecken umfassen keinen Flächenraum.]

Es folgen Grundkonstruktionen (Abtragen von Strecken und Winkeln, Füllen von Loten usw.) und die dazu erforderlichen Sätze, insbesondere Kongruenzsätze. § 16: Satz vom Außenwinkel [205]. § 27–31 bringen Sätze über Parallelen, von § 29 an unter Benutzung des Parallelenpostulats, das für das Folgende unentbehrlich ist [89]. § 32: Winkelsumme im Dreieck. § 33,34: Existenz von Parallelogrammen (und damit von Rechtecken). Die Diagonale halbiert das Parallelogramm. – Dann folgt die Lehre vom Flächeninhalt und der Satz des Pythagoras.

Buch II. „Geometrische Algebra“

Geometrische Beweise von Sätzen, die wir lieber algebraisch aussprechen, z. B.

$$\S 4. (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

$$\S 8. 4ab + (a-b)^2 = (a+b)^2.$$

Sie werden später als Hilfssätze gebraucht; z. T. wurden sie schon in der babylonischen Algebra benutzt.

Buch III. Kreislehre

Def. 2: Daß sie den Kreis berühre (Tangente sei) sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet [121].

Def. 6: Kreisabschnitt ist die von einer Strecke und einem Kreisbogen begrenzte Figur.

Def. 7: Winkel des Abschnitts ist der von der Strecke und dem Kreisbogen umfaßte.

§ 16: Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene gerade Linie muß außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens läßt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen.

Der Winkel des Halbkreises ist größer als jeder spitze geradlinige Winkel, der Restwinkel kleiner.

Diese Aussagen über den Berührungswinkel sind mit Rücksicht auf den Zwi-

schenwertsatz viel diskutiert worden, z. B. von Proklos [95] und im 16. Jh. von Clavius und Peletier.

Buch IV. Regelmäßige Polygone (Dreieck, Quadrat, Fünfeck, Fünfeck und ihre ein- und umbeschriebenen Kreise

Bisher wurden keine Verhältnisse geometrischer Größen, also keine Ähnlichkeit, und keine Flächeninhalte krummlinig begrenzter Figuren betrachtet. Dazu ist zunächst eine allgemeine Theorie der Größenverhältnisse erforderlich. Sie wird in *Buch V* entwickelt, das auf Eudoxos zurückgehen soll [115].

Def. 4: Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vervielfältigt einander übertreffen können.

Def. 5: Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind [115].

Buch VI. Ähnlichkeitslehre

§ 19: Ähnliche Dreiecke (§ 20: Ähnliche Vielecke) stehen zueinander zweimal im Verhältnis entsprechender Seiten. (D. h. die Flächen verhalten sich wie die Quadrate der Seiten.)

In § 27–29 steht die geometrische Lösung quadratischer Gleichungen. Sie steht mit Recht an dieser Stelle, denn Euklid spricht nicht (wie ich es vereinfachend getan habe [128]) von Rechtecken und Quadraten, sondern z. B. in § 28 von der Aufgabe: „An eine gegebene Strecke ein einer geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, daß ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm fehlt.“

Die arithmetischen *Bücher VII–IX* scheinen den konsequenten Aufbau zu unterbrechen. Aber gerade wenn man weiß, daß die Verhältnisse ganzer Zahlen für die Geometrie nicht ausreichen, ist es sinnvoll, die Theorie dieser Zahlenverhältnisse zu entwickeln, um zu sehen, wie weit man damit kommt und was man damit nicht mehr erreichen kann. Z. B. wird in VI, § 12 gezeigt, daß man zu drei Strecken stets mittels ähnlicher Dreiecke eine vierte proportionale Strecke konstruieren kann, während in IX, § 19 gezeigt wird, daß es zu drei Zahlen a, b, c nur dann eine vierte Proportionale ($a:b=c:x$) gibt, wenn bc durch a teilbar ist.

Buch VII beginnt mit der klassischen Definition der Zahl:

Def. 1: Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird [81].

Def. 2: Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.

Def. 3–5 beschreiben die Verhältnisse, in denen zwei Zahlen zueinander stehen können. Dazu wird in § 4 bewiesen, daß es keine anderen Verhältnisse zwischen Zahlen geben kann. In § 20 wird auf dieser Grundlage die Gleichheit von Zahlenverhältnissen definiert [114].

Vorher wird die Einteilung der Zahlen in gerade und ungerade usw. [81], Primzahlen und zusammengesetzte Zahlen erklärt. Auf die Definitionen folgt die Erklärung der Wechselwegnahme (wechselseitigen Subtraktion):

§ 1: Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher Zahlen abwechselnd immer

die kleinere von der größeren weg, so müssen, wenn niemals ein Rest die vorangehende Zahl genau mißt, bis die Einheit übrig bleibt, die ursprünglichen Zahlen gegeneinander prim sein.

In § 2 wird nach dieser Methode der größte gemeinsame Teiler zweier Zahlen ermittelt.

Von dem reichen Inhalt der arithmetischen Bücher erwähne ich nur noch die Frage der Einschaltung von einem oder zwei geometrischen Mitteln zwischen zwei gegebenen Zahlen in Buch VIII, die für die Rationalität oder Irrationalität von Quadrat- und Kubikwurzeln entscheidend ist, ferner die Sätze über die Zerlegung einer Zahl in Primzahlen [141], sowie die Lehre vom Geraden und Ungeraden und den Satz über vollkommene Zahlen am Ende von Buch IX [82].

In *Buch X*, das vermutlich von Theaitetos stammt, wird eine Theorie der quadratischen Irrationalitäten entwickelt. Es beginnt ähnlich wie Buch VII:

§ 1. Nimmt man bei Vorliegen zweier ungleicher (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muß einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.

Dieser Satz folgt leicht aus V, Def. 4. Er ist die Grundlage der ganzen griechischen Infinitesimalmathematik. – [117].

§ 2: Mißt, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals genau die vorhergehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein.

Den Hauptinhalt des Buches bildet eine Theorie und Klassifikation der Irrationalitäten, die in Buch XIII benutzt wird.

Am Ende des Buches steht der Beweis dafür „daß in jedem Quadrat die Diagonale der Seite linear inkommensurabel ist“. Er könnte am Anfang des Buches stehen, denn er zeigt, daß es Strecken gibt, die linear inkommensurabel, aber quadratisch kommensurabel sind – andernfalls ginge die ganze Theorie ins Leere. Aber die Methode, mit der das bewiesen wird, ist eine ganz andere als die in § 1 gelehrt allgemeine Methode.

Mit *Buch XI* beginnt die Geometrie der räumlichen Figuren. Bemerkenswert ist, daß Kugel, Kegel und Zylinder durch Bewegung (Drehung eines Halbkreises, eines rechtwinkligen Dreiecks, eines Rechtecks) definiert werden [131]. Dann folgen (ähnlich wie in Buch I) grundlegende Sätze, z. B.

§ 3: Wenn zwei Ebenen einander schneiden, ist ihr Schnittgebilde eine gerade Linie,

ferner Sätze, die ohne Infinitesimalbetrachtungen beweisbar sind, z. B.

§ 32: Parallelfäche unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.

§ 33: Ähnliche Parallelfäche stehen zueinander dreimal im Verhältnis entsprechender Kanten.

In *Buch XII* wird die Exhaustionsmethode angewandt, um zu beweisen:

§ 2: Kreise verhalten sich zueinander wie die Quadrate über den Durchmessern [117].

§ 7, Zusatz: Jede Pyramide ist ein Drittel des Prismas, welches mit ihr dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat.

§ 10: Jeder Kegel ist ein Drittel des Zylinders, der mit ihm dieselbe Grundfläche und die gleiche Höhe hat.

In einem Scholion [Euklid, Op. Bd. 5, S. 628] wird dieser Satz dem Eudoxos zugeschrieben. Man wird das für das ganze Buch annehmen dürfen.

§ 18: Kugeln stehen zueinander dreimal im Verhältnis ihrer Durchmesser.

Buch XIII behandelt die Konstruktion der regelmäßigen Polyeder. Es wird angegeben, zu welcher Klasse von Irrationalitäten das Verhältnis der Kanten zum Kugeldurchmesser gehört.

Eutokios

Geb. ca. 480 n. Chr. in Askalon (Palästina), besuchte die Schule in Alexandria z. Z. als Ammonios dort Mathematik lehrte, wirkte in Byzanz. E. schrieb Kommentare zu drei Werken des Archimedes (K. u. Z., Kr., Gl. Fl.) [Archimedes Op. Bd. 3] und zu den ersten vier Büchern des Apollonios über Kegelschnitte [Apollonios Op. Bd. 2] [70]. Der Kommentar zu K. u. Z. enthält 12 Lösungsmethoden für die Verdoppelung des Würfels mit Angabe ihrer Erfinder [93], darunter die „Triaden des Menaichmos“ [131].

ver Eecke, P.: Introduction à Eutokios. Archives Internationales d'Histoire des Sciences. Jg. 7, 1954, S. 131–132.

Geminos von Rhodos

Ob sein Name griechischen oder lateinischen Ursprungs ist, ist unsicher, auch Geburtsort und Geburtsdatum sind unsicher. Wahrscheinlich ist G. auf Rhodos geboren, war Schüler von Poseidonios, schrieb seine Werke etwa 73–67 v. Chr. Mit dem Mathematiker, der bei al-Nayrīzī „Aganis“ genannt wird, ist G. wahrscheinlich nicht identisch [206].

Von seinen Werken ist erhalten:

Astr.: Gemini elementa astronomiae. Ed. mit deutscher Übersetzung von K. Manitius. Leipzig: Teubner 1898.

Aus einer mathematischen Enzyklopädie, die nach Eutokios [Komm. zu den Kegelschnitten des Apollonios, Apollonios Op. Bd. 2, S. 170] den Titel „Theorie der Mathematischen Wissenschaften“ (*τῶν μαθημάτων θεωρία*) hatte, haben Proklos u. A. viel zitiert. Ein Stück über die Gliederung der Mathematik ist bei Heron [Op. Bd. 4, S. 97–108] wiedergegeben.

Gorgias von Leontinoi

Ca. 485–380 v. Chr. Einer der berühmtesten Sophisten; Redner und Lehrer der Rhetorik. 427 war er als Führer einer Gesandtschaft der Leontiner in Athen. – [102].

Literatur: Gomperz, H.: Sophistik und Rhetorik.

Hekataios von Milet

Ca. 560/550–480 v. Chr. Seine Werke sind nur in Fragmenten erhalten.

Erdbeschreibung [161].

(Von Herodot oft benutzt und kritisiert. – Verbesserung der Erdkarte des Anaximander.) Genealogiai.

(Versuch „eine Chronologie zu schaffen, in die sich die gesamte Sagen Geschichte einordnen ließ. An dieser übte er eine Art rationalistischer Kritik, indem er „Übertreibungen“ reduzierte und Wunderbares und Unglaubliches psychologisch deutete.“ [K. von Fritz in LAW].)

Herakleides Pontikos

Geb. ca. 388 v. Chr. in Herakleia am Pontos, kam vor 364 nach Athen, schloß sich an Speusipp an (den Neffen und Nachfolger Platons in der Leitung der Akademie), hörte auch Aristoteles. Er „war ein reicher Mann, ... hielt auf feine und weiche Kleidung und war überaus stattlich von Figur“ [Diog. L. V, Kap. 6, 86–94]. Nach dem Tod von Speusipp kandidierte er für die Leitung der Akademie, unterlag aber knapp dem Xenokrates. Darauf ging er in seine Heimat zurück. Er starb ca. 310.

Diogenes L. schreibt: „Es gibt von ihm ganz hervorragende und treffliche Schriften“, und zwar über sehr verschiedenartige Gegenstände: Ethik, Physik, Astronomie, Grammatik, Musik, Rhetorik, Poetik, Geschichte, „auch über Geometrie und Dialektik“.

H. vertrat die Ansicht, daß die Erde sich täglich einmal um ihre Achse dreht, ferner daß Merkur und Venus um die Sonne kreisen, die Sonne und alle übrigen Planeten um die Erde [151].

Literatur: Heath: Aristarch, S. 249–283, besonders 252–255.

Heraklit von Ephesos, ca. 550–480 v. Chr.

Ein Teil seiner Lehre wurde hier (im Anschluß an Nietzsche) so interpretiert, daß die Veränderlichkeit des Geschehens von unveränderlichen und zwingenden Naturgesetzen beherrscht wird [74]. – Sonne und Sterne werden täglich neu entzündet [148].

Herodot

Geb. etwa 484 v. Chr. in Halikarnassos, war verwickelt in die Parteikämpfe der Heimatstadt, wurde verbannt nach Samos, machte Reisen ins Schwarzmeergebiet, nach Thrakien und Makedonien, nach Babylon und nach Ägypten, ging etwa 447 nach Athen, dann 443/2 in die 444 von Perikles gegründete Kolonie Thurioi am Golf von Tarent, erlebte noch den Ausbruch des Peloponnesischen Krieges 430 und starb wahrscheinlich wenig später in Thurioi.

Hist.: Herodot. Historien. Griech.-deutsch hrsg. von J. Feix. 2 Bde. München: Heimeran 1963.

Heron von Alexandria

Zur Lebenszeit: In der Dioptra [35] ist eine Mondfinsternis beschrieben, die im Jahre 62 n. Chr. stattgefunden hat.

Seine Werke haben den Charakter von Handbüchern für Techniker; sie benutzen ältere Quellen und sind selbst nicht selten später überarbeitet worden.

Op.: Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia. Leipzig: Teubner.

Bd. 1: Pneumatica et automata. Ed. W. Schmidt 1899.

Bd. 2: Mechanica et catoptrica. Ed. L. Nix, W. Schmidt 1900. (Die einfachen Maschinen: Hebel, Rolle usw. – In der Catopt. das Reflexionsgesetz und Anwendung von Spiegeln)

Bd. 3: Rationes dimetiendi (= Metrica) et commentatio dioptrica. Ed. H. Schoene 1903. (Regeln zur Berechnung von Flächen, u. a. von regelmäßigen Polygonen [38], Ellipse und Parabel, von Oberflächen von Zylinder, Kegel und Kugel. – Beschreibung der Dioptra, d. i. ein einem Theodoliten ähnliches Vermessungsinstrument, und des älteren Asteriskon (= Groma) [60]; Behandlung von Vermessungsaufgaben [60, 76])

Bd. 4: Definitiones. Heronis quae feruntur Geometrica. Mit Benutzung von Vorarbeiten von W. Schmidt ed. J. L. Heiberg 1912.

Bd. 5: Heronis quae feruntur Stereometrica et de Mensuris. Mit Benutzung von Vorarbeiten von W. Schmidt ed. J. L. Heiberg 1914.

Lit.: A. G. Drachmann: The Mechanical Technology of Greek and Roman Antiquity. Kopenhagen: Munksgaard 1963.

Hesiod

Um 700 v. Chr., lebte in Askra (Böotien).

Werke:

Theogonie. (Götterentstehung).

„Eine Entstehungsgeschichte der Welt, in der eine Fülle von teils alten mythischen Überlieferungen, teils mehr theologisch-philosophischen Spekulationen in einen ursprünglich keineswegs gegebenen systematischen, d. h. vor allem genealogischen Zusammenhang gebracht sind.“ G. Knebel in LAW. – [161]

Werke und Tage.

Enthält u. a. Regeln für die Landarbeit, Vorschriften über die richtige Zeit und Art der Akkerbestellung.

Hipparch

Geb. in Nikaia (Bithynien), führte von 141 bis 126 genaue astronomische Beobachtungen in Rhodos, z. T. auch in Alexandria durch, wozu er auch Instrumente ersann. Von seinen Werken ist nur ein Kommentar zu dem Lehrgedicht „Phainomena“ (Himmelserscheinungen) von Aratos (3. Jh. v. Chr.) erhalten. Über seine Leistungen berichtet teilweise Plinius [Nat. Hist. II, 53, 57, 95, 188, 247], vor allem aber Ptolemaios. H. bemerkte die Präzession der Tag- und Nachtgleichen, beobachtete einen neuen Stern (134), stellte einen Fixsternkatalog auf, beschrieb die Bewegungen von Sonne und Mond nach der Exzentertheorie [151]. Die Theorie der (übrigen) Planeten, bei denen Ptolemaios die Epizykel- und Exzentertheorie kombinierte, scheint H. noch nicht ausgearbeitet zu haben. H. teilte als erster den Kreis auf seinen Instrumenten in 360°. Er berechnete eine Sehnentafel, nach Toomer vermutlich mit einer Schrittweite von $7\frac{1}{2}^\circ$ [154].

Literatur:

Heath: Greek Astronomy. London-New York 1932.

Toomer, G. J.: The Chord Table of Hipparchus and the Early History of Greek Trigonometry. Centaurus 18, 1974, S. 6–28.

Hippasos von Metapont

Seine Lebenszeit wird von van der Waerden [Pyth. S. 74] auf „etwa zwischen

520 und 480“, von K. von Fritz [Ink., Gr. S. 459] auf etwa 450 v. Chr. angesetzt.

H. hat akustische Experimente mit Metallscheiben verschiedener Dicke und mit Vasen, die ganz oder teilweise mit Wasser gefüllt waren, angestellt [Diels 18, 12, 13].

Er hat sich mit der Theorie der Proportionen beschäftigt, dabei u. a. den Namen „harmonisches Mittel“ eingeführt.

Iamblichos schreibt [V. P. 247]: „Wie andere behaupten, zürnte die Gottheit denjenigen, welche die Lehren des Pythagoras an die Öffentlichkeit trugen. So sei der Mann wie ein Frevler im Meer ertrunken, der den Aufbau des Körpers mit zwanzig Ecken verriet, die Tatsache, daß der Zwölfflächner – einer der sogenannten fünf Körper – sich einer Kugel einbeschreiben läßt. (In V. P. 88 ist hierfür Hippiasos genannt.) Einige sagen auch, ihm sei dies widerfahren, weil er das Geheimnis des Irrationalen und Inkommensurablen verraten habe.“ [101]

Wegen der Entdeckung des Inkommensurablen ziehe ich die spätere Datierung der Lebenszeit des H. vor. Zwischen der Lehre des Pythagoras „Alles ist Zahl“ und der Entdeckung, daß nicht alles Zahl ist, möchte ich den Pythagoreern etwas Zeit lassen. Die zum Beweis der Inkommensurabilität benötigten Kenntnisse und Methoden, ja dieser Begriff selbst, mußten doch erst erarbeitet werden.

Für die frühe Datierung wird angeführt:

1) Aristoteles schreibt [Metaph. A 3=984a 7]: „Hippiasos von Metapont und Heraklit von Ephesos haben das Feuer“ als Ursprung der Dinge angesehen. Das läßt darauf schließen, daß Aristoteles den Hippiasos als älter oder gleich alt mit Heraklit angesehen hat; aber absolut zwingend ist dieser Schluß wohl nicht.

2) Nach Theon von Smyrna [Diels 18: 13] haben „Lasos von Hermione, wie man sagt, und Hippiasos von Metapont“ ... akustische Versuche mit Vasen durchgeführt. Da Lasos um 520 gelebt hat, würde dieser Satz für die frühe Datierung sprechen, wenn man aus ihm schließt, daß Lasos und Hippiasos diese Versuche gemeinsam oder gleichzeitig durchgeführt haben. Aber das steht ja gar nicht da.

Für eine gründliche Diskussion der Argumente verweise ich auf die oben angegebene Literatur.

Hippias von Elis

Um 420 v. Chr. Nach Platon [Hippias maior, 282d, e] war er zu gleicher Zeit wie Protagoras in Sizilien, war aber „viel jünger“ als dieser. H. unternahm zu Vorträgen und als Gesandter seiner Heimatstadt Reisen durch die ganze griechische Welt, trat bei den Olympischen Spielen im Redewettkampf auf. Seine Vorträge umfaßten alle Gebiete der Bildung und Erziehung; er lehrte (als erster) die Fächer des später sog. Quadriviums: Arithmetik, Astronomie, Geometrie, Musik [Platon, Protagoras 318e]. H. leistete die Dreiteilung des Winkels mittels der später (s. Deinostratos) Quadratrix genannten Kurve [Proklos, K. Eukl. S. 65, 271, 356] [91].

Schilderungen bei Platon in den Dialogen Hippias minor, Hippias maior, Protagoras.

Hippokrates von Chios

Wirkte in Athen etwa 450–430 v. Chr.

H. führte die Aufgabe der Würfelverdoppelung auf das Einschalten zweier geometrischer Mittel zwischen zwei gegebenen Größen zurück [Eutokios im

Komm. zu Archimedes K. u. Z., Archimedes, Op. Bd. 3, S. 88] [2.35], quadrierte von Kreisbögen begrenzte Mündchen [Rudio] [97], schrieb „Elemente“ der Geometrie [Proklos, Math. Verz.] [99].

Rudio, F.: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Leipzig: Teubner 1907.

Becker, O. Hipp.: Zur Textgestaltung des eudemischen Berichts über die Quadratur der Mündchen. Qu. u. St. B 3, 1936, S. 411–419.

Etwa gleichzeitig lebte der Arzt Hippokrates von Kos (geb. 460 v. Chr., gest. in hohem Alter in Larissa).

Hypatia

Tochter von Theon von Alexandria. Philosophin und Mathematikerin, schrieb Kommentare zu Diophant, Apollonios und Ptolemaios, die alle verloren sind. Sie wurde von Christen beschuldigt, den Stadtpräfekten gegen den Bischof Kyrillos aufgewiegelt zu haben, und 415 n. Chr. ermordet.

Hypsikles

2. Jh. v. Chr. (vor Hipparch?). Verfasser des sog. Buches XIV der Elemente von Euklid (Sätze über das Ikosaeder und Dodekaeder). Diophant nennt ihn als Autor der Erklärung (Definition) der Polygonalzahlen als Reihen [Polygonalzahlen § 4] [142]. Des H. Schrift Anaphorikos (Aufgang der Sternbilder) ist die erste griechische Schrift, in der die Einteilung des Kreises (der Ekliptik) in 360 Grad angegeben wird [Heath, Gr. M. Bd. 2, S. 214]. Ferner enthält sie Sätze über die Summe arithmetischer Reihen [Neugebauer, MKT Bd. 3, S. 78]. Beziehungen zur babylonischen Astronomie sind wahrscheinlich.

An.: Manitius, K.: Des Hypsikles Schrift Anaphorikos nach Überlieferung und Inhalt kritisch behandelt. Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden. Dresden 1888.

Iamblichos

Ca. 250–330 n. Chr. Geb. in Chalkis im südl. Syrien (Koile-Syrien), war Schüler von Porphyrios, Neuplatoniker, gründete eine Schule in Apameia (Syrien).

I. schrieb eine Art Enzyklopädie der Pythagoreischen Lehre.

V. P.: Iamblichos: Pythagoras. Legende, Lehre, Lebensgestaltung. Griech. u. deutsch ed. von M. von Albrecht. Zürich und Stuttgart: Artemis Verlag 1963. [80].

Auch: De vita Pythagorica liber. Ed. L. Deubner. Leipzig: Teubner 1937. Neuauflage, besorgt von U. Klein. Stuttgart 1975.

Protr.: Iamblichi Protreptikos. Ed. H. Pistelli. Leipzig 1888.

Math.: Iamblichi de communi mathematica scientia. Ed. N. Festa. Leipzig 1891.

Nik.: Iamblichi in Nicomachi arithmetica introductionem liber. Ed. H. Pistelli. Leipzig 1894. [82].

Theol. Ar.: Theologumena arithmeticae. Ed. V. de Falco. Leipzig: Teubner 1922.

Bab.: Iamblichi Babyloniacorum Reliquiae. Ed. E. Habrich. Leipzig: Teubner 1960.

Iunius: Marcus Iunius Nipsus

Römischer Feldmesser, wohl 2. Jh. n. Chr.

Fluminis varatio. Übermessung eines Flusses [77], in Blume ... (s. unter Agrimensoren) Bd. 1, S. 285 f.; Erläuterung: Bd. 2, S. 340. Zuweisung unsicher.

Kleomedes

1. Jh. v. Chr.? K. benutzt und zitiert Poseidonios (135–51 v. Chr.), lebte also später als dieser. Er nennt Ptolemaios nicht; danach läßt sich vermuten, daß er früher als Ptolemaios lebte. Vielleicht war er Schüler von Poseidonios.

Sein Werk enthält Berichte über die Erdmessung des Eratosthenes und eine ähnliche des Poseidonios [148].

M. C.: Cleomedis de motu circulari corporum caelestium libri duo. Ed. mit lat. Übers. Hermann Ziegler, Leipzig 1891.

M. C. d.: Kleomedes. Die Kreisbewegung der Gestirne. Deutsch von A. Czwilina. Leipzig 1927. Ostwalds Klass. Nr. 220.

Leon

Geb. ca. 800 n. Chr. in Hypate (Thessalien). Philosoph und Mathematiker in Byzanz, Prof. am Madaurapalast. Neubegründer und Leiter der Bardas-Universität (863). Man verdankt L. die besten Handschriften der griechischen mathematischen Klassiker. – Bei arithmetischen Sätzen verwendet er Buchstaben als Variable für Zahlen, nicht in ihrer Bedeutung als bestimmte Zahlen. Vorlesungsnotizen sind wiedergegeben in Euklid Op. Bd. 5, S. 714–718. – [K. Vogel im LAW].

Leukipp

Mitte des 5. Jh. v. Chr., aus Milet. Begründer des Atomismus [88, 158].

Menaichmos

Um 360 v. Chr. Schüler des Eudoxos von Knidos. Löste die Aufgabe der Verdoppelung des Würfels durch Schnitt zweier Kegelschnitte [93].

Menelaos von Alexandria

Mathematiker und Astronom. Zur Lebenszeit: Ptolemaios berichtet von zwei astronomischen Beobachtungen, die M. im ersten Jahr Trajans (98 n. Chr.) in Rom gemacht hat [Alm. VII, Kap. 3. Alm. d., Bd. 2, S. 26 und 28].

Drei Bücher Sphaerica (Kugelgeometrie, sphärische Trigonometrie) sind arabisch erhalten, andere Schriften verloren.

A. Björnbo: Studien über Menelaos' Sphärik. Abhandlungen zur Gesch. d. math. Wissenschaften, Heft 14, 1902.

Krause, M.: Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abū Naṣr Maṣṣūr b. 'Alī b. 'Irāq mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematikern. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Phil.-Hist. Klasse, 3. Ser., Nr. 17, 1936.

Heath, Gr. M. Bd. 2, S. 260–273.

Nikomachos von Gerasa

(Wahrscheinlich Gerasa östl. des Jordans). Um 100 n. Chr. Seine Arithmetik enthält pythagoreisches Gedankengut. Sie wurde von Apuleius (123. – nach 170

n. Chr.) und von Boetius ins Lateinische übersetzt und wurde dadurch zur Grundlage des mittelalterlichen Universitätsunterrichts in Arithmetik.

Ar.: Nicomachi Geraseni Pythagorei introductionis arithmeticae libri II. Ed. R. Hoche, Leipzig: Teubner 1866.

Ar. e.: Nicomachus, Introduction to Arithmetic, translated by M. L. d'Ooge. New York: Macmillan 1926. Nachdruck New York: Johnson Reprint Corporation 1972 [81, 182].

Harm.: Encheiridion Harmonices. (Handbuch der Harmonielehre.)

Theol. Ar.: Theologumena arithmeticae, ed. F. Ast. Leipzig 1817. Dieses Werk wird heute Iamblichos zugeschrieben, enthält aber Material von Nikomachos.

Oinopides von Chios

Um 440 v. Chr. Nach Proklos [K. Eukl., Math. Verz.] war er „wenig jünger als Anaxagoras“.

Proklos nennt ihn bei den Aufgaben, auf eine Gerade ein Lot zu fällen [zu Prop. 12], hier [89], und an eine Strecke einen Winkel anzutragen [Prop. 23]. Nach Eudemos, zitiert von Theon von Smyrna [Diels 41; 7] soll er die Schiefe der Ekliptik „gefunden“ haben [148]. O. gab das „Große Jahr“ (bestimmt durch volle Umläufe von Sonne und Mond) zu 59 Jahren an [Diels 41; 9].

Frajese, A.: Il cerchio nelle geometria di Enopide di Chio. Archimede, 1967, fasc. 6, ed. Le Monnier, Firenze, S. 285–294.

Pamphile

Aus Epidauros. Schriftstellerin z. Z. des Kaisers Nero. Diogenes Laertius nennt sie für den Satz des Thales [75].

Pappos von Alexandria

Zur Lebenszeit: Im Kommentar zum Almagest berechnet P. eine Finsternis des Jahres 320 n. Chr.

Werke:

Coll.: Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt ed. F. Hultsch. Griech. u. lat. 3 Bde. Berlin 1875–1878. Nachdruck Amsterdam: Hakkert 1965.

Buch I ist verloren, II teilweise, III–VIII vollständig erhalten.

P. berichtet über ältere Ergebnisse, bringt Hilfssätze zum besseren Verständnis und eigene Ergänzungen.

Coll. f.: Pappus d'Alexandrie. La collection mathématique. Franz. Übers. und Komm. von P. ver Eecke. 2 Bde. Paris, Brügge 1933.

Coll. d.: Die Sammlung des Pappus von Alexandrien. (Buch VII und VIII). Griech. und deutsch hrsg. von C. J. Gerhardt. Halle 1871.

K. Alm.: Kommentar zu Ptolemaios' Almagest. Ed. A. Rome. Rom 1931.

K. El. X.: Kommentar zu Euklid, Elemente X.

(W): arab. von al-Dimisqī, ed. F. Woepcke, Paris 1855,

(S): deutsch von H. Suter, Abh. zur Gesch. der Naturwiss., Heft 4, S. 9–78, Erlangen 1922.

(TH): arabisch und englisch von William Thomson, mit Erläuterungen von G. Junge und W. Thomson. Cambridge: Harvard Univ. Press 1930.

Quadratrix [91], Neusis [92], Spirale [121], Geschichte der Kegelschnitte [130], Konstruktion des geom. und harm. Mittels [137], Invarianz des Doppelverhältnisses [139], Satz von Pappos-Pascal [140].

Parmenides von Elea

Ca. 515–445 v. Chr. Zur Lebenszeit: Platon erzählt [Parmenides 127 a–c], P. sei im Alter von etwa 65 Jahren beim Panathenäenfest in Athen gewesen, gemeinsam mit Zenon, der damals ungefähr 40 Jahre alt war; Sokrates sei damals noch sehr jung gewesen.

P. lehrte, „daß es das Nichtseiende auf keine Weise geben kann und daß es daher weder ein Werden noch ein Vergehen noch überhaupt eine Bewegung geben kann. ... Die philosophischen Systeme der Folgezeit ... sind alle Versuche, das durch die Argumente des P. gestellte Problem der Möglichkeit der Vielheit, des Werdens und Vergehens, sowie der Bewegung, zu lösen“ [K. von Fritz im LAW] [86, 158, 162]. – Einheit [82].

Philolaos aus Kroton

Pythagoreer, lebte später in Tarent. Nach Diog. L. VIII, 84 hat Platon Bücher über die pythagoreische Lehre von ihm gekauft; das müßte 388 v. Chr. gewesen sein. Wenn P. einer der beiden jungen Männer war, die sich aus dem Brandanschlag 445 retten konnten (s. Pythagoreer), so könnte er etwa 465/460–385 v. Chr. gelebt haben.

P. setzte das Feuer (als das vornehmste Element) in den Mittelpunkt der Welt; die Erde sowie eine Gegenerde und die Planeten (einschl. Sonne und Mond) kreisen um dieses Zentralfeuer. [Diels 44 A 16, 17, 21], [150].

Literatur: van der Waerden: Pyth.

Philoponos, Johannes

Geb. wahrscheinlich in Alexandria am Ende des 5. Jh. n. Chr. Schüler des Ammonios Hermeiou. Seine Aristoteleskommentare sind „weiter ausgebaut und mit eigenen Zusätzen und Exkursen versehene Skripten, die er nach den Vorlesungen des Ammonios angefertigt hatte“ [Böhm, S. 28] [95]. Besonders gegenüber den physikalischen Vorstellungen von Aristoteles ist P. sehr kritisch und selbständig. – [160]. – P. war Christ. – Sein Kommentar zur Meteorologie des Aristoteles ist nach 529 verfaßt.

Literatur: Böhm, Walter: Johannes Philoponos. Ausgewählte Schriften. Übersetzt, eingeleitet und kommentiert. München, Paderborn, Wien: Schöningh Verlag 1967.

Platon

Geb. 427 v. Chr. in Athen; hatte etwa seit etwa 407 Umgang mit Sokrates. Nach dessen Verurteilung soll P. sich zu dem Philosophen Euklid, der auch Schüler von Sokrates war, nach Megara begeben haben. Bezeugt sind Reisen nach Unteritalien und Sizilien 388/387, nach Syrakus 367–365 und 361–360. P. starb in Athen 348/347. P. hat wahrscheinlich zwischen 387 und 367 die Akademie gegründet; sie wurde 529 vom Kaiser Justinian aufgelöst.

Op.: Platonis Opera, ed. J. Burnet, 5 Bde. Oxford 1900–1907. Mehrfach nachgedruckt. Zitiert werden, wie es allgemein üblich ist, die Seiten und Abschnitte der Ausgabe von Henrius Stephanus, Paris 1578, die in den meisten neueren Ausgaben angegeben sind.

[70], – P. über Thales [72], Tadel mechanischer Würfelverdoppelung [89], Gerade und Kreis als Grundformen [88, 109], Verdoppelung des Quadrats [91], Inkommensurabilität [100], Momente der Erkenntnis [104], Definitionen allgemein [105], Kreis [104], Grenze [107], Einheit [109], Gerade [109], Kreisbewegung der Sterne [150], Elemente = regelmäßige Körper [159].

Plinius,

C. Plinius Secundus der Ältere (gegenüber seinem Neffen und Adoptivsohn gleichen Namens). Geb. 23/24 n. Chr. in Novum Comum (Como am Comer See), kam früh nach Rom, diente 47–52 als Offizier in Germanien, kehrte 52 nach Rom zurück, war wahrscheinlich Anwalt, trieb rhetorische und grammatische Studien, setzte später seine militärische Laufbahn fort. „Sein letzter Posten war das Kommando über die kaiserliche Flotte in Misenum. Dort fand er beim Ausbruch des Vesuvs am 25. August 79 den Tod, als ihn wissenschaftliche Interessen und das Verlangen, in der allgemeinen Verwirrung hilfreich einzugreifen, in die Nähe des Vulkans trieben. Als Todesursache ist Herzschlag infolge Herzverkalkung anzunehmen, da der starke Asthmatiker den Anstrengungen und Aufregungen in Zusammenhang mit der Katastrophe physisch nicht gewachsen war“. [Winkler in Nat. Hist. Bd. 1, S. 322–325]. Sein Werk Nat. Hist. war eine der wichtigsten Quellen für die Naturwissenschaft des Mittelalters. P. schreibt in der Praefatio [I, 17]: „Zwanzigtausend der Behandlung wert Gegenstände ... habe ich aus der Lektüre von ungefähr 2000 Büchern ... zusammengefaßt“. – [166].

Nat. Hist.: C. Plinii Secundi Naturalis Historiae libri XXXVII

C. Plinius Secundus d. Ä. Naturkunde.

Lat. deutsch, hrsg. und übers. von Roderich König in Zusammenarbeit mit Gerhard Winkler. Heimeran Verlag, seit 1973.

Plutarch

Geb. 45/50 n. Chr. in Chaironeia (Böotien), studierte in Athen, schloß sich der Akademie an, machte Reisen, wahrscheinlich nach Sardes und Alexandria, sicher nach Italien und Rom, kehrte schließlich nach Chaironeia zurück, starb dort bald nach 120 n. Chr.

Werke:

B. p.: *Bioi paralleloi*. 24 Biographienpaare von je einem Griechen und Römer. – Griech. mit engl. Übersetzung von B. Perrin in Loeb Classical Library. 6 Bde. London 1914–1918.

B. p. d.: Plutarch: Große Griechen und Römer. Eingel. und übers. von Konrat Ziegler. Zürich, Stuttgart: Artemis-Verlag. In Bd. 3, 1955 steht die Biographie von Marcellus mit einem Bericht über Archimedes.

L.: *De facie in orbe lunae*. – Benutzte deutsche Übersetzung: Plutarch, Das Mondgesicht, übers. und erläutert von Herwig Görgemanns. Zürich: Artemis-Verlag 1968. (Reihe: Lebendige Antike).

M.: *Moralia*. (Sammlung von etwa 80 Schriften).

Porphyrios

Geb. 233 n. Chr. in Batanea (Palästina) oder Tyrus, kam 264 nach Rom und blieb dort bis zu seinem Tod ca. 304 n. Chr. P. schrieb Kommentare zu Plotin, zu Ptolemaios' Musik, eine Einführung zu Aristoteles' Kategorien; diese wurde

durch die lat. Übersetzung von Boetius für das Mittelalter eine wichtige Einführung in die Logik (Baum des Porphyrios [106]). Ferner schrieb P. Biographien von Plotin und Pythagoras. – Einer seiner Schüler war Iamblichos.

Poseidonios

Geb. ca. 135 v. Chr. in Apameia am Orontes (Syrien). Stoiker. Studierte in Athen, ließ sich in Rhodos nieder, machte Reisen nach Spanien, Südgallien, Italien, Sizilien und mehrmals nach Rom. Cicero, Pompeius und andere Römer haben ihn in Rhodos besucht. Einer seiner Schüler war Geminus. P. starb wahrscheinlich auf einer Reise nach Rom 51 v. Chr.

Nach Proklos [K. Eukl., zu Def. 35] definierte er parallele Geraden als Geraden gleichen Abstands [204].

Proklos Diadochos

Geb. 410/411 n. Chr. in Byzanz, aufgewachsen in Xanthos (Lykien), studierte in Alexandria und Athen, wurde Haupt der Platonischen Akademie. Einer seiner Schüler war Ammonios. P. starb am 17. 4. 485.

Er schrieb Kommentare zu Hesiod, Platon, Aristoteles, zum I. Buch von Euklids Elementen und zum Tetrabiblos, dem astrologischen Werk von Ptolemaios.

Sein Euklid-Kommentar enthält viele historische Nachrichten, gestützt insbesondere auf die Werke von Eudemos und Geminus. Er wurde zuerst gedruckt in der griechischen Euklid-Ausgabe von Grynaeus, Basel 1533, in lateinischer Übersetzung von Barocius, Padua 1560, und in der Euklid-Ausgabe von Commandino, Pesaro 1572.

K. Eukl.: *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii*. Ed. G. Friedlein. Leipzig: Teubner 1873.

Ich zitiere nach dieser heute maßgebenden Ausgabe, für die Textwiedergabe benutze ich die deutsche Übersetzung.

K. Eukl. d.: Proclus Diadochus, Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“. Übersetzt von P. L. Schönberger, O. S. B., eingeleitet und hrsg. von M. Steck. Halle 1945.

Vergleich der Seitenzahlen:

Friedlein:	1	100	150	200	250	300	350	400
deutsch:	163	235	271	307	341	375	408	445

K. Eukl. e.: Proklos: A Commentary of the First Book of Euclid's Elements, translated with Introduction and Notes by G. R. Morrow. Princeton: University Press 1970.

K. Eukl. f.: Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des éléments d'Euclide. Ed. P. ver Eecke. Brügge 1948.

[70] – Über Thales [76], über den Satz des Pythagoras [80], Definition des Punktes [82], Oinopides [89], zur Kreisquadratur [93], Zwischenwertsatz [96], Spirale zur Winkeldreiteilung [121], Flächenanlegung [88], Fünfeck [148], zum Parallelenpostulat [206].

Das sog. Mathematikerverzeichnis [K. Eukl. S. 64–69] sei hier in der Übersetzung von P. Schönberger wiedergegeben [K. Eukl. d., S. 210–214]. Ob und wie weit es auf Eudemos zurückgeht, ist nicht sicher. Jedenfalls konnte Eudemos nicht über Euklid, Eratosthenes und Archimedes berichten. Für die Nachrichten über Pythagoras kommt auch Iamblichos als Quelle in Frage.

Das Mathematikerverzeichnis des Proklus

Es sagte nun freilich der gefeierte Aristoteles, dieselben Anschauungen kehrten häufig wieder bei den Menschen in bestimmten Weltperioden; und nicht in unserer Zeit oder der Zeit derer, die wir kannten, hätten die Wissenschaften zum ersten Male ihren Ursprung genommen, sondern auch in anderen Perioden (unmöglich zu sagen, wie viele ihrer schon waren und noch sein werden), seien sie aufgeblüht und wieder verschwunden. Da wir aber den Ursprung der Künste und Wissenschaften in der gegenwärtigen Periode zu erforschen haben, so sagen wir, die meisten berichten, daß bei den Ägyptern die Geometrie zuerst ausgebildet wurde und ihren Ursprung mit den Landvermessungen nahm. Sie waren ihnen notwendig wegen des Steigens des Nils, der die den einzelnen zustehenden Grenzen unkenntlich machte. Und es ist nicht zu verwundern, daß das praktische Bedürfnis zur Schaffung dieser und der anderen Wissenschaften führte, da alles im Bereich des Werdens vom Unvollkommenen zum Vollkommenen sich entwickelt. Von der Sinneswahrnehmung möchte also füglich der Übergang zum logischen Denken und von diesem zur reinen Geistesschau erfolgen. Wie nun bei den Phönikern aus Handel und Verkehr die Anfänge der genauen Kenntnis der Zahlen sich ergaben, so wurde auch bei den Ägyptern aus dem bezeichneten Grunde die Geometrie geschaffen. Thales aber verpflanzte zuerst, nachdem er nach Ägypten gekommen, diese Wissenschaft nach Griechenland und machte selbst viele Entdeckungen; zu vielen anderen legte er für die Späteren den Grund. Sein Verfahren war dabei teilweise mehr allgemeiner Art, teilweise mehr auf die Sinnendinge ausgerichtet. Nach ihm war es Mamertios, der Bruder des Dichters Stesichoros, der nach der Überlieferung sich mit dem Studium der Geometrie befaßte, und Hippias von Elis berichtete, daß er wegen der Geometrie zu Ruhm gelangte; ihnen folgte Pythagoras, der ihren wissenschaftlichen Betrieb in das System der höheren Bildung einbezog. Seine Untersuchungen galten ihren obersten Prinzipien, und seine theoretischen Forschungen bewegten sich frei von materiellen Einflüssen im Bereich des reinen Denkens. Er war es auch, der die Lehre von den Proportionen (den irrationalen Werten?) und die Darstellung von den fünf Weltkörpern schuf. Nach diesen befaßte sich Anaxagoras von Klazomenä mit vielen Problemen der Geometrie und dann, wenig jünger als Anaxagoras, Oinopides von Chios. Von beiden bemerkt Platon in den „*Rivalen*“, sie seien wegen ihrer mathematischen Kenntnisse berühmt geworden. Nach diesen waren Hippokrates von Chios, der Erfinder der Mönchchenquadratur, und Theodor von Kyrene, namhafte Fachvertreter. Denn Hippokrates begegnet uns in der Geschichte als erster Verfasser eines Elementarbuches. Auf sie folgte Platon, dessen eifrigem Studium es zu verdanken ist, daß die anderen mathematischen Wissenszweige und besonders die Geometrie den größten Aufschwung nahmen. Er hat ersichtlich seine Schriften mit mathematischem Gedankengut ganz und gar durchsetzt und geht allenthalben darauf aus, in den Philosophiebeflissenen das Staunen über diese Dinge hervorzurufen. In dieser Zeit lebten auch der Thasier Leodamas, Archytas von Tarent und Theaitetos von Athen, von denen die Lehrsätze vermehrt und in ein den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechendes System gebracht wurden. Jünger als Leodamas ist Neoklei-

des und dessen Schüler Leon, die den Wissensstand ihrer Vorgänger beträchtlich erweiterten, so daß Leon ein in Hinsicht auf Reichtum und Brauchbarkeit der Beweise gediegenes Elementarbuch verfassen und auch genaue Bestimmungen dafür geben konnte, wann die Lösung einer gestellten Aufgabe möglich ist und wann nicht. Eudoxos von Knidos sodann, wenig jünger als Leon und ein Freund von Platons Schülern, hat als erster die Zahl der sogenannten allgemeinen Lehrsätze vermehrt, zu den drei Proportionen drei weitere hinzugefügt und die Lehre von der Teilung der Geraden, die Platon grundgelegt hatte, in mehreren Sätzen weitergeführt, wobei er sich auch der analytischen Methode bediente. Amyntas von Heraklea, ein Freund Platons, Menaichmos, Schüler des Eudoxos, der auch mit Platon gleichzeitig war, und dessen Bruder Deinostratos bauten das ganze System der Geometrie noch vollkommener aus. Theudios ferner aus Magnesia war hervorragend auf dem Gebiete der Mathematik und der anderen Wissenschaften. Denn er brachte die Elementarlehre in ein geordnetes System und gab vielen definitionsartigen Bestimmungen eine allgemeinere Fassung (andere Lesart: vielen speziellen Sätzen). Auch der Kyziker Athenaios, der derselben Zeit angehört, machte sich durch seine Leistungen auf dem Gebiete der anderen mathematischen Disziplinen und besonders der Geometrie einen Namen. All diese lebten miteinander in der Akademie und betrieben gemeinsam ihre Forschungen. Hermotimos aber von Kolophon entwickelte die Ergebnisse des Eudoxos und Theaitetos weiter, leistete einen beträchtlichen Beitrag zu den „*Elementen*“ und schrieb einiges über (geometrische) Örter. Philippos von Medma ferner, Platons Schüler und von diesem zum Studium der Mathematik angeregt, betrieb seine Forschungen nach Anleitung Platons und stellte sich nur solche Aufgaben, von denen er sich eine Förderung der platonischen Philosophie versprach. Bis auf diesen herab führen die Geschichtsschreiber die Entwicklung dieser Wissenschaften zurück. Nicht viel jünger als diese ist Euklid, der die „*Elemente*“ zusammenstellte, viele Ergebnisse des Eudoxos zusammenfaßte, viele des Theaitetos zum Abschluß, und die weniger stringenten Beweise seiner Vorgänger in eine unwiderlegbare Form brachte. Er lebte zur Zeit des ersten Ptolemaios. Denn Archimedes, der nach dem ersten Ptolemaios lebte, erwähnt Euklid und erzählt auch in der Tat, Ptolemaios habe ihn einmal gefragt, ob es nicht für die Geometrie einen kürzeren Weg gebe als die Lehre der „*Elemente*“. Er aber antwortete, es führe kein königlicher Weg zur Geometrie. Er ist jünger als Platons Schüler, aber älter als Eratosthenes und Archimedes; denn diese sind Zeitgenossen, wie Eratosthenes irgendwo sagt. Er gehörte zur platonischen Schule und war mit dieser Philosophie vertraut, weshalb er auch als Ziel der gesamten Elementarlehre die Darstellung der sogenannten platonischen Körper aufstellte. Von ihm stammt auch noch eine große Menge anderer mathematischer Schriften, alle ausgezeichnet durch bewundernswerte Exaktheit und wissenschaftliche Spekulation, so z. B. seine „*Optik*“ und „*Katoptrik*“ (Lehre von der Lichtreflexion), seine „*Elementarlehre der Musik*“, ferner sein Buch „*Über die Teilung der Figuren*“. Besondere Bewunderung verdient bei seinem Elementarbuch der Geometrie der systematische Aufbau, und die Auswahl der für die „*Elemente*“ geschaffenen Lehrsätze und Konstruktionsaufgaben. Denn nicht, was man überhaupt anführen konnte, sondern was zur grundlegenden Einführung diene, nahm er auf.

Protagoras

Geb. etwa 480 v. Chr. in Abdera.

P. war der Begründer des sophistischen Lebensstils: er machte Vortragsreisen, hielt Lehrkurse gegen Honorar, auch in Athen, oft als Gast reicher bildungsbefflossener Häuser. Er soll auf einer Fahrt nach Sizilien bei einem Schiffbruch umgekommen sein, 411 v. Chr. – [103].

Platon Theaitetos 152a: „Aller Dinge Maß ist der Mensch, der seienden, daß (wie) sie sind, der nichtseienden, daß (wie) sie nicht sind.“

Diog. L. IX, 51: „Er sagte als Erster, über jede Sache gebe es zwei einander entgegengesetzte Aussagen“ (*λόγους* (= Ansichten, Überlegungen; jedes Ding kann von zwei Seiten betrachtet werden)).

Aristoteles Metaph. II, 2, 997b 35 – 998a 4: „Die sichtbaren Linien sind gar nicht so wie der Geometer sagt; weder ist etwas so (d. h. im Sinne des Geometers) gerade, noch so gekrümmt; der Kreis berührt die Gerade nicht in einem Punkte, sondern so wie Protagoras zeigte ...“

Ptolemaios, Klaudios

Ca. 100–170 n. Chr., lebte in Alexandria. Im *Almagest* finden sich Beobachtungen aus den Jahren 127–141; das ist der einzige sichere Anhaltspunkt für seine Lebenszeit. Der *Almagest* ist das älteste der größeren Werke des P.; in den anderen Werken wird auf ihn Bezug genommen.

Op.: Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia. Leipzig. Bd. 1. Syntaxis mathematica. Ed. J. L. Heiberg. 2 Teile 1898, 1903. Griech. Titel: *Μαθηματικὴ σύνταξις*, später *Μεγάλη σ. oder Μερίστη σ.*, arabisch: *al-miḡisṭi* (al-Ḥaḡḡāḡ [197]): daraus wurde „*Almagest*“.

Bd. 2. Opera astronomica minora. Ed. J. L. Heiberg. 1907.

Bd. 3,1. *Apotelesmatika*. (Astrologische Einflüsse). Ed. F. Boll und A. Boer. 1957. – Das aus vier Büchern bestehende Werk wird oft „*Tetrabiblos*“ genannt.

Bd. 3,2. *Περὶ κριτηρίων καὶ ἡγεμονικῶν*. Ed. F. Lammert. 1952.

Alm.: *Almagest* = Op. Bd. 1.

Alm. d.: Ptolemäus. Handbuch der Astronomie. Deutsch von K. Manitius. 1911. 2. Aufl. mit Berichtigungen von O. Neugebauer. Leipzig: Teubner 1963.

Alm. f.: *Composition Mathématique de Claude Ptolémée*. Frz. von M. Halma. Paris. Bd. 1: 1813, Bd. 2: 1816.

H. pl.: *Hypotheses planetariae*. Griech. und deutsch in Op. Bd. 2. („In der vorliegenden Schrift ist es unser Ziel, nur das Allgemeine dieser (im *Almagest*) erwähnten Dinge niederzulegen, damit sie sich unserem Geiste und dem Geiste derer, die dafür Instrumente bauen, leicht vorstellen lassen ...“)

An.: *Analemma*. In Op. Bd. 2.

(Erklärung eines Verfahrens zur Bestimmung der Winkel bei der Sonnenuhr.)

Pl.: *Planisphaerium*. In Op. Bd. 2.

(Projektion der Himmelskugel vom Himmelssüdpol auf die Äquatorebene.)

Tb.: *Tetrabiblos* = Op. Bd. 3,1.

Tb. e.: Text mit engl. Übersetzung in Loeb Classical Library.

Geogr.: Claudii Ptolemaei Geographica. Ed. C. F. A. Nobbe. 2 Bde. Leipzig 1843–1845. Nachdruck in 1 Bd. Hildesheim 1966.

Optik: *L'Optique de Claude Ptolémée dans la version latine d'après l'arabe de l'émir Eugène de Sicile*. Ed. A. Lejeune. (Université de Louvain, Recueil de travaux d'histoire et de philologie, 4° Série, Fasc. 8) Louvain 1956.

Harmonica: I. Dühring: Die Harmonielehre des Klaudios Ptolemaios. Göteborgs högskolas arskrift 36, no. 1, 1930.

Gründe für das Stillstehen der Erde [151]. Theorie der Planetenbewegung [152]. Satz vom Viereck im Kreis, trigonometrische Sätze [55].

Pythagoras und die Pythagoreer [Abschnitt 2.2.2]

Pythagoras ist um 600 oder um 570 v. Chr. geboren. Er ist in Samos aufgewachsen, machte Reisen nach Phönizien, Ägypten und Babylon, kehrte nach Samos zurück, wanderte um 529 nach Kroton (Süditalien) aus und gründete dort einen Orden, dessen Mitglieder insbesondere auf eine bestimmte, genau festgelegte Lebensweise verpflichtet wurden. Anscheinend auf Grund feindseliger Haltung der Bevölkerung gegen die Pythagoreer ging er um 509 nach Metapont und starb dort.

Die Pythagoreer machten sich einerseits unbeliebt dadurch, daß sie sich gegen Nicht-Mitglieder abschlossen, andererseits „wollte man das Gemeinwesen von Pythagoreern verwaltet sehen“ [Iamblichos, V. P. 249]. Unruhen in Kroton um 509 blieben auf diese Stadt beschränkt und dauerten nicht lange. Die Pythagoreer behielten politischen Einfluß, haben aber anscheinend gelegentlich ihre Macht mißbraucht, z. B. nach der Eroberung von Sybaris das gewonnene Land nicht verlost, jedenfalls kamen Bestrebungen auf, die Oligarchie durch eine demokratische Verfassung zu ersetzen. „Damals setzten sich sogar aus dem Rat der Tausend Hippiasos, Diodoros und Theages für die Zulassung aller Bürger zu den Staatsämtern und zur Volksversammlung ein: auch sollten die Amtspersonen vor durch das Los bestimmten Vertretern der Gesamtheit Rechenschaft abzulegen haben. Die Pythagoreer Alkimachos, Deinarchos, Meton und Demokedes widersetzten sich dem Plan und suchten die Zerstörung der ererbten Verfassung zu verhindern. Doch es siegten die Fürsprecher der Menge.“ [Iamblichos, V. P. 257]. An anderer Stelle berichtet Iamblichos [V. P. 249]: Die Gegner der Pythagoreer gingen so weit, „daß sie, als die Pythagoreer zu Kroton in Milons Haus beisammen saßen und politische Fragen berieten, das Haus anzündeten. Alle fanden den Flammentod, bis auf zwei: Archippos und Lysis. Sie waren die Jüngsten und Kräftigsten und konnten sich irgendwie ins Freie durchschlagen.“ Nach einem Scholion zu Platons Phaidon waren es Archippos und Philolaos, nach Plutarch Philolaos und Lysis [Diels 44 A 1a und 4 a]. Diese Unruhen fanden etwa 445 statt. In den antiken Nachrichten werden die beiden Aufstände gegen die Pythagoreer (509 und 445) nicht deutlich auseinandergehalten. Es ist also auch nicht sicher, ob Hippiasos 509 oder 445 aufgetreten ist.

Mit dieser Katastrophe war der Orden der Pythagoreer als solcher ausgelöscht. Es gab jedoch weiterhin Pythagoreer, Einzelne oder kleine Gruppen, die der Lehre des Pythagoras anhingen. Philolaos – wenn sein Name hier richtig ist – lebte später in Tarent und wurde Lehrer von Archytas, der in Tarent sogar eine führende politische Rolle spielte.

Eine antike Quelle: Iamblichos, V. P.

Literatur:

Burkert, W.; von Fritz, K., Ink.; van der Waerden, B. L., Pyth., Pyth. Wiss. Allgemeines [80]. Winkelsumme im Dreieck [90]. Flächenanlegung [87]. Arithmetische Bücher Euklids [141]. Kugelgestalt der Erde [148]. Zentralfeuer (s. Philolaos) [150].

Simplikios

6. Jh. n. Chr. Neuplatonischer Philosoph. Geb. in Kilikien, Schüler von Ammonios Hermeiou, wirkte in Athen, ging nach der Schließung der Akademie 529 an den Hof des Königs Chosroes von Persien, kehrte 533 zurück. Schrieb Kommentare zu mehreren Werken des Aristoteles (wahrscheinlich nach 533); die viele wichtige historische Angaben enthalten; z. B. hat er die Quadratur der Möndchen von Hippokrates überliefert [95]. Zur Halbierung des Kreises durch den Durchmesser [78]. Ein Beweis des Parallelenpostulats [207].

Sokrates

Geb. 470 v. Chr. in Athen, 399 zum Tode durch den Giftbecher verurteilt. Aristoteles, *Metaph.* XII, 4 = 1078 b 27–29: „Zwei Dinge muß man Sokrates mit Recht zubilligen: die (an das Wesen der Dinge) heranführenden Untersuchungen und die Definition der Allgemeinbegriffe.“ *τούς τ' επακτικούς λόγους* – das könnte auch mit „die induktiven Beweise“ übersetzt werden – *καὶ τὸ ὀρίζεσθαι καθόλου* [103].

Xenophon, *Mem.* IV, 7: „Zum Beispiel behauptete er, man brauche die Geometrie nur soweit zu lernen, daß man im Notfall in der Lage sei, ein Stück Land richtig ausgemessen zu übernehmen, zu übergeben, zu verteilen oder seine Berechnung zu beweisen. Das sei aber leicht zu lernen. Man brauche nur einmal bei der Messung aufzupassen, dann wisse man schon genau, wie groß das Land sei und wie gemessen wird. Dagegen lehnte er ab, die Geometrie bis zu den schwerverständlichen Figuren zu lernen. Denn nach seiner Meinung war nicht einzusehen, wozu das nütze. Trotzdem war er darin nicht Laie, er meinte aber, solche Untersuchungen nähmen ein Menschenleben in Anspruch und hielten von vielen anderen nützlichen Kenntnissen ab.“

Strabon

Historiker und Geograph. Geb. 64/63 v. Chr. in Amaseia (Pontos), machte ausgedehnte Reisen, lebte seit 7 v. Chr. wieder in Amaseia, seine letzten Notizen stammen aus den Jahren zwischen 23 und 26 n. Chr.

Schriften:

Historische Kommentare. Davon sind nur Fragmente erhalten.

Geogr.: *Geographica*. 17 Bücher. Ed. G. Kramer. Berlin 1844.

(Darin wird die Weltkarte des Eratosthenes zugrundegelegt und beschrieben.)

Geogr. d.: *Strabo's Erdbeschreibung*, übers. von A. Forbiger.

Berlin und Stuttgart 1855–1903.

Straton von Lampsakos

Geb. ca. 330 v. Chr. in Lampsakos, wurde 287 als Nachfolger von Theophrast Leiter der peripatetischen Schule in Athen, starb 269 v. Chr.

Seine Vorstellungen über das Vakuum, die er auch durch Experimente stützte (es gibt ein Vakuum „naturgemäß“ nur im Kleinen, zwischen den Atomen; dadurch wird Verdünnung und Verdichtung der Luft möglich) hatten Einfluß auf die weitere Entwicklung, zunächst bei Heron. S. hat auch über Mechanik gearbeitet. – [163].

Thales von Milet

Ca. 624–548/545 v. Chr. Leben und Leistungen [72–79, 90]. Die Erde schwimmt auf dem Wasser [147].

Theaitetos

416–369 v. Chr. Platon schildert ihn im Dialog „Theaitetos“, der im Jahre 399 v. Chr. spielt, als einen Jüngling von etwa 17 Jahren. Er war Schüler von Theodoros und Freund von Platon. 369 wurde er in der Schlacht vor Korinth verwundet, nach Athen gebracht und starb an seinen Wunden und der im Heere ausgebrochenen Ruhr. – Von ihm stammt wahrscheinlich im wesentlichen die Theorie der Irrationalitäten in Euklids *El.* X und die Theorie der regelmäßigen Körper *El.* XIII.

Literatur: K. von Fritz: *Ink.* – W. R. Knorr. – A. Szabó: *Anf.*, S. 79 ff.

Themistios

Ca. 317–388 n. Chr. Geb. in Paphlagonien, wirkte in Konstantinopel als Philosoph und Redner; schrieb Paraphrasen zu Werken des Aristoteles. – [95].

Theodoros von Kyrene

470/460–390/380 v. Chr. Proklos nennt ihn im Mathematiker-Verzeichnis zusammen mit Hippokrates von Chios, Iamblichos führt ihn in einer Liste der Pythagoreer aus Tarent auf [V. P. 267], Platon schildert ihn im Dialog *Theaitetos* (399) als einen älteren Mann, der die Diskussion seinem Schüler Theaitetos überläßt; er selbst habe sich „aus dem bloßen Denken (*ἐκ τῶν ψιλῶν λόγων* = aus dem leeren Gerede?) in die Mathematik gerettet“ [165 a]. Theaitetos schildert eine Unterrichtsstunde, in der Theodoros die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ vorführt [147 d–148 d].

Theodosios von Bithynien

2. Jh. v. Chr.? Vitruv nennt ihn als Erfinder einer Sonnenuhr „für jeden Ort“ [Arch. IX, Kap. 8,1], also muß Th. vor der Abfassung von *De architectura* gelebt haben. Vielleicht war er Zeitgenosse von Hipparch, nach dem Charakter der Sphärik eher etwas älter.

Hauptwerk:

Sph.: Heiberg, J. L.: *Theodosius Tripolites Sphaerica*. Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Phil.-Hist. Klasse, N. S. 19, Nr. 3, 1927.

(Kugelgeometrie mit Anwendung auf die Astronomie. Erweiterung der Sphärik des Autolykos und der *Phainomena* von Euklid.)

Sph. d.: *Die Sphärik des Theodosios*. Übers. von E. Nizze. Stralsund 1826.

Lit.: Heath: *Gr. M.* Bd. 2, S. 245–252.

Theon von Alexandria

2. Hälfte des 4. Jh. n. Chr. Vater der Hypatia.

Herausgeber des Euklid. Erst im 19. Jh. wurde eine Handschrift gefunden, die

auf eine vor-theonische Fassung der Elemente zurückgeht [70]. Th. schrieb ferner Kommentare zu Werken von Ptolemaios. – [116].

Theon von Smyrna

Zur Lebenszeit: Ptolemaios benutzt vier Beobachtungen der Planeten Merkur und Venus aus den Jahren 127, 129, 130, 132 n. Chr. aus den „von dem Mathematiker Theon uns hinterlassenen Aufzeichnungen“.

Schrift:

M. Pl.: Theonis Smyrnaei expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium. Ed. E. Hiller, Leipzig 1878.

(Eine Einführung in die Mathematik für Studenten der Philosophie. Von den 5 Teilen (1) Arithmetik, (2) ebene Geometrie, (3) Stereometrie, (4) Astronomie, (5) Musik sind (1) und (4), sowie Teile von (5) erhalten. (1) enthält interessante zahlentheoretische Sätze, in (4) wird das Weltbild des Herakleides vertreten.)

Theophrast

Geb. 372 v. Chr. in Erebos auf Lesbos, ging nach Athen, wurde Schüler von Aristoteles und nach dessen Fortgang aus Athen (322) Leiter von dessen Schule bis zu seinem Tod 287 v. Chr. Sein Nachfolger war Straton von Lampsakos. Von naturwissenschaftlichem Interesse sind insbesondere seine Schriften über Botanik und Mineralogie. Seine Geschichte der Naturphilosophie ist verloren, die Auszüge daraus, die sich bei anderen Schriftstellern finden, sind wichtige historische Quellen.

Op.: Theophrasti Eresii quae supersunt omnia. Ed. F. Wimmer, Leipzig.

Vol. I. Historia plantarum. 1854.

Vol. II. De causis plantarum. 1854.

Vol. III. U. a. de lapidibus ... 1862.

Theudios aus Magnesia

Er ist nur aus dem Math. Verz. des Proklos bekannt: „Er hat die Elemente in guter Ordnung zusammengestellt und vielen speziellen Sätzen eine allgemeinere Fassung gegeben“ [99]. Nach seiner Stellung in diesem Verzeichnis müßte er etwa ein Zeitgenosse von Platon gewesen sein. Man kann annehmen, daß Aristoteles seine mathematischen Kenntnisse von ihm erworben hat.

Varro, Marcus Terentius

Geb. 116 v. Chr. in Reate bei Rom, studierte um 82 in Athen, war ca. 86 Quästor, 77–71 als Legat von Pompeius in Spanien, 70 Volkstribun, 68 Prätor, 49 wieder Legat von Pompeius. Nach dem Tode von Pompeius wurde V. von Caesar begnadigt und 47 zum Reichsoberbibliothekar ernannt. Nach dem Tode von Caesar wurde V. von Antonius geächtet; er entkam zwar dem Tod, aber seine Bibliothek wurde geplündert.

V. starb 27 v. Chr.

Von seinen zahlreichen Schriften sind nur erhalten:

Vollständig: Rerum rusticarum libri III. –

Mit Lücken: die Bücher 5–10 der 25 Bücher De lingua latina. Verloren ist auch: Disciplinarum libri IX [166].

Vitruv

Seine erst im 15. Jh. erwähnten Vornamen sowie der Beiname Pollio sind unsicher.

Geb. etwa 84 v. Chr. Leitete unter Caesar und später unter Augustus den Bau von Kriegsmaschinen, war auch 33 v. Chr. beim Bau der römischen Wasserleitung tätig, erbaute die Basilika von Fano.

Sein Werk „De architectura libri decem“ ist wahrscheinlich in den Jahren 33–22 v. Chr. verfaßt und wurde vielleicht erst 14 v. Chr. herausgegeben. – [166].

V.s Todesjahr ist unbekannt.

Benutzte Ausgabe:

Arch.: Vitruv. Zehn Bücher über Architektur. Lat. u. deutsch. Übers. von Curt Fensterbusch. Darmstadt: Wiss. Buchges. 1964.

Xenophanes

570–475/470 v. Chr. Geb. in Kolophon, verließ seine Vaterstadt im Alter von 25 Jahren aus Anlaß der Eroberung durch die Perser (545), wanderte 67 Jahre als Rhapsode „durch das Hellenische Land auf und ab“ [Diels 21 B 8], bis er sich in hohem Alter in Elea niederließ. Er gilt als der Begründer der eleatischen Schule.

Aristoteles, Metaph. A 5, 986 b 21–24: „Xenophanes stellte zuerst eine solche Einheitslehre auf (Parmenides soll ja sein Schüler gewesen sein) ... er blickte auf den ganzen Himmel hin und sagte, das Eine sei die Gottheit“.

Aus Hippolytos [Diels 21 A 33]: „Er lehrt, eins sei das All, und sagt, die Gottheit sei ewig, eins, überall gleich, begrenzt, kugelförmig und in allen ihren Teilen voll Wahrnehmung.“ – [86].

Xenophon

Ca. 426 – nach 355 v. Chr. Geb. in Athen, Schüler von Sokrates, schloß sich dem griechischen Söldnerheer des gegen Artaxerxes II. rebellierenden persischen Prinzen Kyros an; nach dessen Niederlage und Tod bei Kunaxa (401) führte X. die 10000 Griechen zum Schwarzen Meer, von wo sie über Byzanz zurückkehren konnten. Das Heer trat dann in die Dienste Spartas.

Von Xenophons Schriften wurde hier benutzt:

Mem.: Memorabilien. Erinnerungen an Sokrates. Deutsch in: Xenophon. Die Sokratischen Schriften, übers. von E. Bux. Stuttgart: Kröner Verlag 1956.

Zenodoros

2. Jh. v. Chr.? Z. bewies, daß der Kreis unter allen Figuren gleichen Umfangs den größten Flächeninhalt hat, sowie die entsprechende Eigenschaft der Kugel gegenüber den regelmäßigen Polyedern und den Körpern, die durch Rotation eines zu einer Achse symmetrischen Polygons entstehen, dessen Ecken auf einem Kreis liegen, die also aus Kegeln und Kegelstümpfen zusammengesetzt sind. – [163].

Quellen:

Theon von Alexandria, Kommentar zum Almagest I, Kap. 3.

Pappos, Coll. V., und Ed. Hultsch, Bd. 3, S. 1189–1211.

Deutsche Übersetzung in

Müller, Wilhelm: Das isoperimetrische Problem im Altertum. Sudhoffs Archiv 37, 1953, S. 39–71.

Lit.: Schmidt, Wilhelm: Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertum. Bibl. Math. (3), 2, 1901, S. 5–8.

Zenon von Elea

Geb. etwa 490 v. Chr. Z. war im Alter von 40 Jahren mit seinem Lehrer Parmenides in Athen, als Sokrates noch sehr jung war [Platon, Parmenides 127].

Die berühmten vier Beweise Zenons gegen die Bewegung stehen in Aristoteles' Physik VI, 9, 239b 5 – 240a 13. [86].

4.3 Mathematik im Orient

Juschkevitsch, A. P.: Geschichte der Mathematik im Mittelalter.

Russisches Original: Moskau 1961. Deutsche Übersetzung von V. Ziegler, Leipzig. Basel: Pfalz-Verlag 1964.

4.3.1 Altchinesische Mathematik

Allgemeine Literatur

Kogelschatz, H.: Bibliographische Daten zum frühen mathematischen Schrifttum Chinas im Umfeld der „Zehn mathematischen Klassiker“ (1. Jh. v. Chr. bis 7. Jh. n. Chr.). – Veröffentlichungen des Forschungsinstituts des Deutschen Museums für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. Reihe B. München 1981. (Dieser Arbeit sind die meisten einschlägigen Daten entnommen.)

Mikami, Yoshio: The Development of Mathematics in China and Japan. Abh. zur Gesch. d. Math. 30, Leipzig 1913.

Needham, J.: Science and Civilisation in China. – With the Collaboration of Wang Ling. – Bd. 3. Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth. – Cambridge University Press 1959.

Für die spätere chinesische Mathematik:

Libbrecht, U.: Chinese Mathematics in the Thirteenth Century. The Shu-shu chiu-chang of Ch'in Chiu-shao. – Cambridge, Mass., London 1973.

Darin: V. The Chinese Remainder Theorem: A Monograph. (S. 213–413).

Die wichtigste chinesische Sammlung ist

Suan-ching shih shu. Die „Zehn mathematischen Klassiker“. Erstmals während der T'ANG-Dynastie (656) unter diesem Obertitel zusammengefaßt: in der Bearbeitung von LI Ch'un-feng und seinem Stab, als Lehrbuchsammlung für das neugegründete Mathematische Institut an der Staatsakademie; zugleich als Prüfungsgrundlage für den entsprechenden Zweig im staatlichen Examenssystem. – Drei Druckausgaben: 1084, 1213, 1774. (Kogelschatz, S. 31).

Editionen und Literatur zu einzelnen Werken

Zum Kanon der Mohisten [171]

Forke, A.: Mē Ti, des Sozialethikers und seiner Schüler philosophische Werke, übers. (deutsch) und erl. von A. Forke. – Mitteilungen des Seminars für Orientalische Sprachen an der Friedrich-Wilhelm-Universität zu Berlin. Beiband zum Jahrgang 23/25. Berlin 1922.

Graham, A. C.: Later Mohist Logic, Ethics and Science. – Hongkong, London 1978.

Chiu-chang suan-shu. Neun Bücher arithmetischer Technik. – Deutsch mit Erläuterungen von K. Vogel. Braunschweig: Vieweg 1968. (Ostwalds Klassiker, Neue Folge Bd. 4.) [173].

Gillon, B. S.: Introduction, Translation and Discussion of Chao Chün-Ch'ing's „Notes to the Diagrams of Short Legs and Long Legs and of Squares and Circles“. – Hist. Math. 4, 1977, S. 253–293. [179].

van Hee, P. L.: Le classique de L'île maritime, ouvrage chinois du III^e siècle. – Qu. u. St. B 2, 1933, S. 255–280.

(Enthält: LIU Hui, Hai-tao suan-ching = mathematisches Handbuch von der Insel im Meer (frz.) [180] und als Einleitung: Tableau général des mathématiciens chinois.)

Wagner, D. B.:

Sph.: Liu Hui and Tsu Keng-chih on the Volume of a Sphere. Chinese Science Vol. III, March 1978. Philadelphia, Pennsylvania, S. 59–79. [174].

Pyr.: An Early Chinese Derivation of the Volume of a Pyramid: Liu Hui, Third Century A. D. – Hist. Math. 6, 1979, S. 164–188. [176].

Die in den Titeln vorkommenden Worte bedeuten:

chang:	Buch, Kapitel	suan:	Mathematik, Arithmetik
ching:	Handbuch, Klassiker	shi:	10
chiu:	9	shu:	Kunst (im Sinne von Können, lat. ars)
hai:	Meer	tao:	Insel
pei:	Gnomon		

Chinesische Mathematiker in zeitlicher Anordnung

Bei der geringen Anzahl wird auf eine alphabetische Anordnung verzichtet.

Die Mathematiker sind oft nur durch die Titel ihrer Werke bekannt.

CHANG Heng, 78–139 n. Chr.

Dichter, Mathematiker und Astronom. – Berechnung des Kugelvolumens [174].

HSÜ Yüeh, um 200 n. Chr.

Verfasser eines verloren gegangenen Kommentars zu den „Neun Büchern“, angeblicher Verfasser des Shu-shu chi-i. (Darin: Die Aufgabe der 100 Vögel [181]).

CHAO Chün-ch'ing, 3. Jh. n. Chr.

Verfasser des ältesten Kommentars zum Chou-pei suan-ching (nach 222). – Zum Satz des Pythagoras s. o. Gillon und [179].

LIU Hui, 3. Jh. n. Chr.

Kommentar zu den „Neun Büchern“ [173]. Ergänzung dazu: Neun Vermessungsaufgaben (Hai-tao suan-ching) [180].

SUN Tzu, Ende des 4. Jh.

Sun-tzu suan-ching: Meister Sun's Arithmetisches Handbuch. (Darin: Das chinesische Restproblem [182]).

CHANG Ch'iu-chien, 5. Jh.

Chang Ch'iu-chien suan-ching: Mathematisches Handbuch von CHANG Ch'iu-chien (zwischen 466 und 485). – Aufgabe der 100 Vögel [181].