

4729

pdf

Dhombres, J. Des theoremes de la revolution, ou l'inscription des mathematiques
dans l'histoire
Melanges de l'Ecole francaise de Rome 1992 104 191-214 C3 inscription

4729 pdf
DHOMBRES, J.
1992

Des théorèmes de la Révolution, ou l'inscription des mathématiques dans l'Histoire

Dhombres Jean

Mélanges de l'Ecole française de Rome. Italie et Méditerranée, Année 1992, Volume 104, Numéro 1
p. 191 - 214

[Voir l'article en ligne](#)

Jean Dhombres, Des théorèmes de la Révolution, ou l'inscription des mathématiques dans l'Histoire, p. 191-214. Parce qu'elles sont porteuses d'une vérité paraissant immuable dès qu'elle est dé-couverte, les mathématiques se présentent comme négatrices d'Histoire. A fortiori, elles sont rebelles à la notion d'événement. Ce qui ne rend pas vain le questionnement, mais oblige à en qualifier les termes. On le fera pratiquement à partir de deux exemples. L'un tient à la géométrisation de l'analyse et remonte au monde d'Alexandrie et d'Apollonios, l'autre engage la «méthode révolutionnaire» suscitée en 1794 pour l'apprentissage accéléré des sciences.

Avertissement

L'éditeur du site « PERSEE » – le Ministère de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche, Direction de l'enseignement supérieur, Sous-direction des bibliothèques et de la documentation – détient la propriété intellectuelle et les droits d'exploitation. A ce titre il est titulaire des droits d'auteur et du droit sui generis du producteur de bases de données sur ce site conformément à la loi n°98-536 du 1er juillet 1998 relative aux bases de données.

Les oeuvres reproduites sur le site « PERSEE » sont protégées par les dispositions générales du Code de la propriété intellectuelle.

Droits et devoirs des utilisateurs

Pour un usage strictement privé, la simple reproduction du contenu de ce site est libre.

Pour un usage scientifique ou pédagogique, à des fins de recherches, d'enseignement ou de communication excluant toute exploitation commerciale, la reproduction et la communication au public du contenu de ce site sont autorisées, sous réserve que celles-ci servent d'illustration, ne soient pas substantielles et ne soient pas expressément limitées (plans ou photographies). La mention Le Ministère de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche, Direction de l'enseignement supérieur, Sous-direction des bibliothèques et de la documentation sur chaque reproduction tirée du site est obligatoire ainsi que le nom de la revue et- lorsqu'ils sont indiqués - le nom de l'auteur et la référence du document reproduit.

Toute autre reproduction ou communication au public, intégrale ou substantielle du contenu de ce site, par quelque procédé que ce soit, de l'éditeur original de l'oeuvre, de l'auteur et de ses ayants droit.

La reproduction et l'exploitation des photographies et des plans, y compris à des fins commerciales, doivent être autorisés par l'éditeur du site, Le Ministère de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche, Direction de l'enseignement supérieur, Sous-direction des bibliothèques et de la documentation (voir <http://www.sup.adc.education.fr/bib/>). La source et les crédits devront toujours être mentionnés.

JEAN DHOMBRES

DES THÉORÈMES DE LA RÉVOLUTION, OU L'INSCRIPTION DES MATHÉMATIQUES DANS L'HISTOIRE

Le titre quelque peu provocateur que j'ai choisi, et que je compte bien justifier par l'ensemble de l'exposé, n'indique pas suffisamment combien j'entends mettre en évidence ce qui, en mathématiques, pourrait être qualifié d'événement. L'exercice préalable est indispensable à l'occasion du colloque 1789. *L'événement* qui nous rassemble à Florence, et le comble serait qu'un mathématicien ne définisse pas les termes qu'il emploie ou qu'il a acceptés comme constitutifs du travail requis par les organisateurs de notre réunion. Mais, à première vue, l'exercice n'est pas difficile.

L'ÉVÉNEMENT-THÉORÈME

Dans l'ordre mathématique, le théorème paraît un candidat *événementiel* idéal. De même qu'une histoire, celle de la Révolution par exemple, se bâtit sur des événements qui se succèdent et que l'on repère dans le discours historien, de même étymologiquement et pratiquement parlant, une théorie mathématique aligne dans un ordre préétabli des résultats, en rehaussant ses théorèmes pour mieux les individualiser. À telle enseigne d'ailleurs qu'un théorème est sans doute le seul lieu mathématique qui loge de l'histoire sous une forme explicite. Le théorème de Pythagore ne rappelle-t-il pas universellement un homme et son siècle, tout aussi nettement que le code de Justinien? Et je pourrais tout autant choisir mes exemples au XX^e siècle : en l'année 1907, le théorème de Riesz-Fischer signale le premier résultat probant de l'analyse fonctionnelle, publié quasi simultanément à Paris par le Hongrois Frédéric Riesz et à Göttingen par l'Allemand Emil Fischer¹; le théorème de l'indice d'Atiyah-Singer repère les années soixante de notre siècle et une mise en œuvre précise qui a pu surprendre

¹ F. Riesz (1880-1856) et E. Fischer (1875-1959). Les deux publications initiales sont : F. RIESZ, *Comptes rendus Acad. sc. Paris*, 144, 1907, p. 734-736. E. FISCHER,

et émerveiller, tant elle intégrait des disciplines considérées comme autonomes dans le monde mathématique². S'agit-il de traces humblement humaines dans une science au déroulement implacable?

Car nous aurions bien tort d'accorder un poids historique trop fort à ces appellations : les attributions de nom sont souvent fortuites, et propres à telle ou telle aire culturelle. En France, on connaît le théorème de Thalès mais il ne viendrait guère à l'idée d'un Chinois de le nommer ainsi, malgré l'emploi qu'il fait communément du résultat depuis des millénaires. Et ce qui en France encore porte le nom de théorème de d'Alembert (pour des raisons que nous évoquerons plus loin) se traduit en anglais par *fundamental theorem of algebra*³! Il ne faudrait pas questionner trop longtemps un mathématicien avant qu'il ne convienne que les noms patronymiques servent de repérage en quelque sorte, de fléchage dans un parcours. À tel point que certains manuels éliminent le nom au profit d'un simple numérotage : on parle alors de la proposition 47 du livre I des *Éléments* d'Euclide... et non du théorème de Pythagore⁴. Quelquefois une description succincte

Göttingen Nachrichten, 1907, p. 116-122. Fischer publia bientôt aux Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris.

² R. PALAIS, *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem*, dans *Annals of Math. Studies*, 57, 1965.

³ Les attributions traditionnelles sont quelquefois contestées par les historiens des mathématiques qui n'argumentent pas toujours selon la règle de la preuve d'antériorité, d'ailleurs moins facile d'application qu'on ne croit, et après tout contestable. Voir F. SVETZ, T. I. KAO, *Was Pythagoras Chinese*, Pennsylvania State University, NCTM, 1975. On le constate aussi sur l'inégalité $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$, dite inégalité de Cauchy parce qu'elle parut dans son *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, 1^{re} Partie, Analyse algébrique, Paris, 1821 (page 455, 16^e théorème de la note II). Les Allemands accolent à A. L. Cauchy (1789-1857) le nom de H. A. Schwarz (1843-1921) qui donna la version continuiste de cette inégalité (avec des intégrales) : *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung*, dans *Acta. Soc. Sc. Fenn.*, 15, 1885, p. 315-362. Mais les Soviétiques entendent rappeler le rôle de V. Y. Bouniakowsky (1804-1889) : *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies*, dans *Mém. Acad. Saint-Petersbourg*, VII, 1, 1859, N° 9. Il est vrai que ce Russe avait suivi les cours de Cauchy à Paris en 1825. Si N. Bourbaki utilise l'expression inégalité de Cauchy-Schwarz (*Éléments de Mathématiques*, Livre V, Espaces vectoriels topologiques, chap. V, Espaces hilbertiens, Paris, 1964, page 127, Proposition 2, § 1, 2), quelques auteurs de manuels n'hésitent pas à faire trinitaire : inégalité de Cauchy-Schwarz-Bouniakowsky. La version abstraite (dans des espaces préhilbertiens) est pourtant réduite à l'appellation d'inégalité de Schwarz, ce qui pour une fois semble délivrer les Français du défaut de trop grande abstraction!

⁴ Proposition 47, Livre I, *Les œuvres d'Euclide*, trad. F. Peyrard, Paris, 1814, page 78 (ΠΡΟΤΑΣΙΣ μζ': Ἐν τοῖς ὀρθογώνιοις τριγώνοις...). Cette proposition est suivie de la dernière du livre I, qui en fournit la réciproque : « Si le carré d'un des côtés

est utilisée : ainsi pour le théorème dit de préparation en théorie des fonctions analytiques ou celui d'inversion locale des fonctions implicites en géométrie différentielle. En Chine assez souvent, les procédures mathématiques sont décrites métaphoriquement, comme les prises au judo. Parfois le mépris des noms peut cacher une intention maligne : une tradition veut que Nicolas Bourbaki ait attribué à un mathématicien français le théorème dit «de Montel» parce qu'il était quasiment évident, ce qui trivialisait à la façon d'un canular les contributions du dit mathématicien⁵. Dans cette affaire, l'histoire se vengea en quelque sorte, puisque le seul théorème que s'attribua l'inénarrable Bourbaki – sur la faible compacité de la boule unité du dual d'un espace de Banach – fut revendiqué par un être au nom imprononçable, Alaoglu⁶!

L'histoire des mathématiques ne peut donc pas se construire au fil de l'exposé savant en accumulant des noms de théorèmes⁷. Dans la mesure où

d'un triangle est égal aux carrés des deux côtés restants de ce triangle, l'angle compris par les deux côtés restants est droit». N. Bourbaki, dans un contexte abstrait, parle entre guillemets de «théorème de Pythagore», mais sans l'individualiser comme un véritable théorème (voir référence de la note 3, chap. V, § 1, N° 5, page 135).

⁵ Les textes ne confortent pas la tradition orale! Un espace de Montel est défini par BOURBAKI (*op. cit.* à la note 3, chap. IV, § 3, n° 4, page 89) comme «un espace localement convexe tonnelé séparé, dans lequel tout ensemble borné est relativement compact». Le non mathématicien appréciera au moins l'absence de termes savants dans une telle définition et goûtera peut-être le qualificatif «tonnelé». Est annoncé par Bourbaki le résultat majeur dû à Montel : l'espace des fonctions holomorphes dans une partie ouverte de $\mathbb{C}$ muni de la topologie de la convergence compacte est un espace de Montel. Ce résultat est présenté comme «théorème fondamental» par H. CARTAN, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Paris, 1961, p. 165 et suivantes, mais non attribué, encore qu'une allusion soit faite à «ce que l'on appelait autrefois la théorie des "familles normales"».

⁶ Théorème 1, chap. IV, § 2 N° 2, page 65 dans N. BOURBAKI, *op. cit.*, à la note 3. Les publications correspondantes ne circulèrent pas facilement : L. ALAOGU, *Weak convergence of linear functionals*, dans *Bull. Amer. Math. Soc.*, 44, 1938, page 196; L. ALAOGU, *Weak topologies of normed linear spaces*, dans *Annals of Math.*, (2), 41, 1940, p. 252-267, (voir page 255); N. BOURBAKI, *Sur les espaces de Banach*, dans *Comptes rendus Acad. Sc. Paris*, 206, 1938, p. 1701-1704. Un Japonais pourrait aussi revendiquer sa part de gloire : S. KAKUTANI, *Weak topologies, bicomact sets and the principle of duality*, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 16, p. 63-67, 1940. Le théorème apparaît aujourd'hui comme une conséquence facile d'une stabilité de la compacité, selon le théorème dit de Tychonoff.

⁷ Ce qui pose une question dans l'ordre didactique, puisque la plupart des incursions historiques des enseignants de mathématiques du secondaire prennent prétexte des noms de baptême des théorèmes. Lorsqu'on interroge des élèves, alors que les physiciens sont à peu près correctement situés dans l'histoire (le physicien Ohm

cette science apparaît dans sa pratique comme négatrice d'histoire, comment alors inscrire les mathématiques dans l'histoire? Nous venons de constater un refus, du moins par le petit bout de la lorgnette, en évoquant cum grano salis ces appellations nominales de théorèmes. Il faut bien sûr aller au fond et poser la question : pourquoi historiciser ce qui a été une fois prouvé comme vrai et qui le restera inexorablement? Par exemple le fait que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés du triangle rectangle. On sent là combien l'histoire des mathématiques est imprégnée de platonisme : elle ne serait que le récit du dévoilement des idées, pures et éternelles, inexorablement appelées à être un jour montrées, le voile étant plus ou moins rapidement levé. En fait foi parmi d'autres un livre de Léon Brunschwig paru en 1912, *Les Étapes de la philosophie mathématique*, que ne pouvant appeler livre d'heures, je qualifierais volontiers de livre de raison⁸. Il me semble que la position de Bourbaki dans son *Histoire des mathématiques* – qui récapitule toutes les notices historiques annexées aux différents livres du fameux traité débuté en 1939 – est tout aussi platonicienne⁹. L'auteur pluriel part de la vérité telle qu'elle est aujourd'hui révélée ou construite, c'est-à-dire connue, et il ne saisit dans le passé que les étapes de la mise en place de cette vérité, rejetant de facto dans l'obscurité tout ce qui n'y mena point. Négation a priori des cheminements autres, et par suite indéniablement abolition de l'histoire. Mais on le voit bien, ce silence implique un déterminisme du dévoilement¹⁰. Les vers de Péguy reviennent en mémoire, à propos du Christ : les pas des légions romaines l'annonçaient! Par détournement ne dirait-on pas que les dessins d'Archimède sur la poussière des places de Syracuse annonçaient et Newton et Leibniz, donc tout le calcul différentiel et intégral? Voltaire lui aussi adoptait un ton biblique, prédéterminé donc, pour annoncer :

responsable d'une loi d'électrodynamique n'est pas rangé au Moyen Âge!), les mathématiciens paraissent baigner dans l'intemporalité. Ce qui faisait joliment dire à Littlewood, mathématicien anglais de notre siècle, qu'Euclide ou Apollonios ne sont pas dans l'Antiquité, mais plutôt des «collègues d'une université voisine».

⁸ LÉON BRUNSCHWIG, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1912. Réédition A. Blanchard, avec une préface de J. T. Desanti, Paris, 1972.

⁹ NICOLAS BOURBAKI, *Éléments d'histoire des mathématiques*, nouvelle édition, Paris, 1974.

¹⁰ Dans un article remarquablement agencé intitulé *Nombres réels*, Bourbaki (*op. cit.* à la note précédente) décrit le contenu du livre V d'Euclide (livre vraisemblablement écrit vers 300 avant J.-C.) et conclut : «Il est facile de voir que de ce fondement axiomatique, découle nécessairement la théorie des nombres réels». Alors qu'il s'agit d'une théorie mise au point vers 1872! Philosophes et mathématiciens ont fréquemment cette manière intemporelle de parler, qui n'a pas que des désavantages, mais surprend néanmoins dans une note historique.

«Le compas de Newton mesurant l'Univers,
Lève enfin ce grand voile et les cieus sont ouverts»¹¹.

Certes le philosophe peut forger des explications pour ce déterminisme de la démarche mathématique, et donc de ses événements, les théorèmes. Aristote parvenait à déloger les mathématiques du monde des idéalités pures afin de magnifier la démarche καθόλου, qui procède vers le général pour en déduire ensuite le particulier. C'est la démarche d'abstraction à partir du réel. Si la structure mathématique lui apparaissait comme *construite*, elle n'en était pas moins *unique* et donc *uniquement* accessible. Nous ne sortons pas d'une vision déterministe de l'histoire qui, globalement, ne pouvait se dérouler autrement. Les épistémologues ne butent-ils pas toujours sur les mathématiciens, et me semble-t-il très souvent sur leur rapport à l'histoire? On le voit assez nettement à propos de l'histoire des algébristes dont la discipline représente le mieux le long et patient jeu de l'abstraction à partir d'une pratique numérique ou combinatoire. T. Kuhn avec ses révolutions scientifiques comme K. Popper avec sa théorie de la réfutation, s'arrêtent aux portes de l'algèbre. S'ils les franchissent, ou bien – tel Lakatos et Vuillemin – ils graduent seulement la découverte par la dialectique de l'abstraction et de la généralisation, ou bien – tel Wittgenstein – ils évacuent l'histoire, ou bien encore – tel Kant – ils n'admettent le progrès de la connaissance mathématique que pour mieux l'insérer dans une détermination limitée, les jugements synthétiques a priori. Et l'on sait le cinquant dementi apporté par les géométries non euclidiennes à la *Critique de la raison pure*. Couturat en riait encore à la fin du siècle dernier! À la terne limitation kantienne, comment ne pas préférer l'allant de Socrate tel qu'il nous est restitué dans le *Théétète*? Tandis que le jeune homme lui expose une nouvelle classification des nombres irrationnels, une tentative de Théodore de Cyrène que nous savons aujourd'hui inefficace, Socrate lance quelque chose comme un *Allons les enfants*, et donne l'image du gourmand qui se poulèche les babines à l'idée de goûter du nouveau¹². Si l'innovation est certainement l'arc-boutant qui conforte un théorème en tant qu'événement, si le moment du théorème n'a d'épaisseur que par la nouveauté qu'il renferme, peut-on parler en soi de l'originalité d'un acte mathématique?

Derrière cette question se cache un arrière-plan qu'il serait d'autant moins pardonnable d'omettre qu'il favorise la réflexion historique à propos

¹¹ VOLTAIRE, *Éléments de la philosophie de Newton*, Amsterdam, 1738, page 5, à Madame la Marquise du Ch**.

¹² PLATON, *Théétète*, Traduction A. Diès, Paris, 1965. La citation exacte est : «le mieux du monde, enfants», 148 b 4. Quelques lignes plus haut, Socrate lance : κάλλιστα Ἀλλὰ τί τί τὸ μετὰ τοῦτο!

des mathématiques. C'est que la mathématique est science enseignée, et donc largement transmise dans les écoles depuis une lointaine antiquité : privilège qu'elle partage sans doute avec la musique qui lui fut apparentée. Au-delà même des contenus, l'enseignement des mathématiques ne constitue pas une pratique statique. L'insistance mise sur la science d'Euclide dans les collèges jésuites des XVI^e et XVII^e siècles n'est pas assimilable à l'injonction de l'impératrice Ci Xi aux mandarins en 1867 : *Apprenez les mathématiques*¹³ puisque s'y nichait l'idée de conquérir l'arme majeure de l'Occident. Il ne convient pas non plus d'assimiler l'audace toujours associée à un risque de créer des connaissances nouvelles à la manière de Socrate au *Sapere aude* de *Ce que sont les lumières*. L'injonction de Kant prend une considérable valeur collective : c'est une invite à l'appropriation sociale d'un savoir, mais il s'agit seulement d'un savoir déjà dévoilé dont les mathématiques sont partie intégrante. Elle inscrit radicalement la connaissance scientifique *normale* dans l'histoire d'une société, au moins dans l'horizon humain qu'elle se fixe. Les événements mathématiques perdraient-ils dans ce cas leur identité? Se dissoudraient-ils dans le continuum de l'apprentissage intellectuel? Ce dernier étant tellement flexible sur le long terme qu'il put substituer à la disputatio scolastique la version latine, et à l'exercice de géométrie la construction d'un programme informatique.

STRUCTURE ET HISTOIRE

Le cartésien que je suis ne se laisse pas effrayer par les objections, les incidences, et poursuit sa quête de l'événement-théorème tel qu'il peut se reconnaître immédiatement dans presque tous les textes mathématiques¹⁴. Mais à tout le moins comment mesurer l'originalité d'un théorème? S'il est vrai que les théorèmes sont aux mathématiques ce que les atomes sont aux

¹³ Cité dans F. SWETZ, *Mathematics education in China : its growth and development*, Cambridge, 1974.

¹⁴ Chez les mathématiciens classiques grecs, les propositions dûment numérotées sont repérables au premier coup d'œil. Ceci est encore vrai dans les textes arabes, médiévaux ou de la Renaissance. Mais la pratique chinoise est autre, de même que se présentent autrement les exposés analytiques comme la *Géométrie* de Descartes. Cet auteur, en dégraissant les textes antérieurs, inaugure une écriture par laquelle le théorème ne s'individualise pas dans un discours-chaîne pour lequel presque tout peut passer pour un résultat. Autant dans les *Principia* de Newton, que chez Leibniz, on retrouve les théorèmes en apposition distincte du texte. Cette présentation systématique n'a fait que se renforcer jusqu'à nos jours, Bourbaki fixant un ton généralement adopté dans le monde entier.

corps chimiques, force est de constater qu'ils ne les épuisent pas. En d'autres termes, des structures se trouvent à l'œuvre en mathématiques. Un théorème de géométrie plane se situe dans un cadre généralement euclidien où les angles et les distances jouent un rôle précis. Il vient s'insérer dans une filiation de résultats et s'appuie explicitement sur certains d'entre eux alors qu'il permet d'en déduire d'autres, déjà connus ou éventuellement nouveaux. C'est un maillon dont un enjeu est la place même qu'il occupe dans la chaîne mathématique. Ainsi la présence d'une structure est d'avance reconnue et admise¹⁵. Les professeurs insistent très tôt sur cet aspect global puisqu'ils font demande expresse à un élève de séparer entre les propriétés d'une figure celles qui sont métriques ou celles qui sont affines de ses propriétés projectives. Car elles relèvent de structures distinctes. L'anecdote historique est là pour nous rappeler la prégnance des structures mathématiques. Lorsque Dinet examina le jeune Galois au concours d'entrée à l'École polytechnique, il demanda au très bon élève du collège Louis le Grand d'établir *arithmétiquement* la théorie du logarithme. Galois choisit une voie originale où l'analyse prédominait et se mit ainsi hors jeu¹⁶. Le chiffon, paraît-il, vola à la tête de l'examineur exigeant mais trop méthodique, et Galois ne fut pas reçu!

Il me faut illustrer par un exemple plus élaboré ce qui vient d'être dit sur les structures et je suis obligé de parler boutique. Mais reprocherait-on à un théologien de citer Saint Thomas d'Aquin? J'ai donc choisi quatre événements mathématiques que je vais fournir avec le minimum de bruit de fond, celui de la classe de seconde indifférenciée comme on dit dans le jargon scolaire contemporain. Le lecteur que toute formule mathématique désarçonne ou agace peut quant à lui directement sauter au prochain chapitre, s'il n'a pas déjà perdu tout intérêt.

Dans son livre des *Coniques*, Apollonios – nous pénétrons ainsi au Musée de l'Alexandrie des Ptolémées – établissait le théorème suivant¹⁷ que je transcris en langue moderne pour aller plus vite au risque de brûler tous les repères philologiques : dans un parallélogramme, la somme des carrés des longueurs des diagonales est égale à la somme des carrés des longueurs des quatre côtés. Soit en utilisant les lettres repérées sur la fig. 1

¹⁵ Le titre grec des *Éléments* d'Euclide, ΣΤΟΙΧΕΙΑ, fait référence à ce qui s'enchaîne. Il était suffisamment indicateur à l'époque hellène. Plus tard, il fallut pourtant le commenter, et c'est ce que fit en particulier Proclus, encore en grec, au V^e siècle de notre ère, dans son *Commentaire au premier livre des Éléments d'Euclide*.

¹⁶ L'anecdote est attestée pour le concours de 1829.

¹⁷ APOLLONIOS, *Les Coniques*, édition et traduction P. Ver Eecke, Paris, 1923.

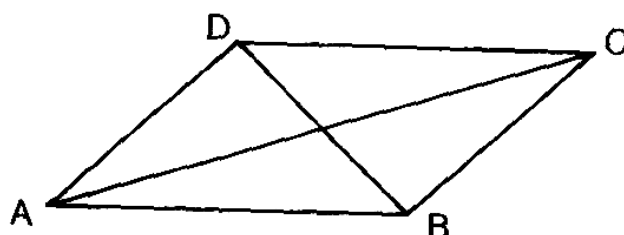


Fig. 1

$$DB^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$$

En 1803, dans sa *Géométrie de position*, Lazare Carnot – l'un des principaux personnages de la Révolution française – énonce¹⁸ ce qui prend souvent en français le nom de théorème de la médiane, parce qu'intervient le milieu M du côté BD dans la fig. 2 triangulaire jointe et que AM est appelée une médiane :

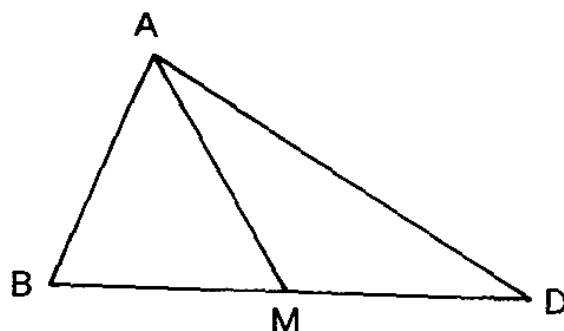


Fig. 2

$$AB^2 + AD^2 - 2BM^2 = 2AM^2.$$

En 1934, Pascual Jordan et John von Neumann – dont le nom évoque les ordinateurs américains de la seconde guerre mondiale – établissent¹⁹

¹⁸ L. M. N. CARNOT, *Géométrie de position*, Paris, J. B. M. Duprat, an XI, 1803.

¹⁹ P. JORDAN et J. VON NEUMANN, *On inner products in linear metric spaces*, dans *Annals of Math.* (2), 36, 1934, p. 719-724. Il est démontré que si une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel normé réel satisfait $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, pour tous x et y , cette norme provient d'un produit scalaire selon $(x, x) = \|x\|^2$. Le produit scalaire est l'outil qui permet de considérer des vecteurs orthogonaux sur lesquels fut effectuée la géométrisation de l'analyse au début du XX^e siècle.

qu'il n'existe au fond qu'une seule géométrie, la géométrie euclidienne usuelle, sur un espace à trois dimensions. Du moins dès lors que l'on impose a priori l'existence d'une longueur pour tout segment, longueur qui soit invariante si on translate le segment, qui subisse la même homothétie si on le dilate ou le contracte et pour laquelle l'identité d'Apollonios soit satisfaite. À savoir que tient toujours l'égalité suivante pour quatre points disposés aux quatre sommets d'un parallélogramme, lorsque $\|AB\|$ désigne la longueur du segment AB :

$$2(\|AB\|^2 + \|AD\|^2) = \|DB\|^2 + \|AC\|^2.$$

En 1948, Lorch établit²⁰ que pour être vrai le résultat de Jordan et von Neumann n'exige pas l'identité d'Apollonios mais beaucoup plus simplement une dépendance : la donnée des seules longueurs $\|AB\|$, $\|AD\|$ et $\|DB\|$ (cf. fig. 1) détermine a priori la quatrième longueur $\|AC\|$ (quand bien même on ne saurait pas comment cette détermination est effectivement calculable).

Indéniablement, ces quatre théorèmes ont quelque chose en commun, au point qu'on éprouve la sensation concrète d'un grand arc de pensée qui relierait le mathématicien Apollonios de Perge aux mathématiciens contemporains. Rapidement dit, Jordan et von Neumann donnent la réciproque d'un théorème auquel Apollonios et Carnot accordent deux formes différentes mais équivalentes, alors que Lorch montre à quel point la réciproque peut s'obtenir à bien moindres frais. Fort bien! Mais le jeu de l'énoncé direct et de sa réciproque n'est pas écrit d'avance dans le déroulement historique. Il n'y a eu aucun mathématicien pré-apollonien pour énoncer que la longueur d'une diagonale dans un parallélogramme dépend seulement des longueurs des quatre autres côtés (deux à deux égaux) et de celle de la deuxième diagonale. La chose est tellement évidente! D'ailleurs Apollonios décrit si explicitement cette dépendance qu'elle obscurcit le regard, qu'il faut une réflexion exercée pour apercevoir que l'écartement des deux côtés AB et AD du parallélogramme, écartement mesuré par l'angle BAD, ne joue de fait aucun rôle, contrairement à ce que l'on pouvait penser a priori. Du coup, le caractère purement métrique du résultat permet de poser la question de la caractérisation de la géométrie euclidienne... Il aura fallu vingt et un siècles pour que la question soit ainsi et formulée et résolue. Quod erat demonstrandum, si j'ose dire!

Pourquoi un Boèce au V^e siècle de notre ère, un Oresme au XIV^e siècle,

²⁰ E. R. LORCH, *On certain implications which characterize Hilbert spaces*, dans *Annals of Math.* (2), 49, 1948, p. 523-532.

ou un Descartes au XVII^e siècle auraient-ils souhaité caractériser une géométrie alors qu'ils ne pensaient pas un seul instant qu'il pût en exister d'autre que celle régie par la construction euclidienne, dans laquelle s'inscrit apparemment si bien l'expérience humaine quotidienne. L'horizon de von Neumann et Jordan n'est pas celui d'Apollonios, quoique le champ où s'inscrive l'horizon contemporain l'englobe incontestablement. Il ne s'agit pourtant pas d'un effet de taille, comme pour les poupées russes qui s'emboîtent.

Apollonios dit une relation dont il se sert ensuite pour l'étude des figures coniques – l'ellipse, la parabole et l'hyperbole – trois courbes qui sont générées de la même façon comme sections planes d'un cône circulaire, trois courbes dont il établit la parenté analytique en fournissant les relations précisément métriques entre ce qui correspond à une abscisse et une ordonnée relativement à deux diamètres conjugués²¹. La métrique est son domaine d'action, l'horizon qui oriente ses calculs au service de la géométrie. Jordan et von Neumann balisent axiomatiquement le monde géométrique familier; ils en disent la texture qui suffit à le reconstituer intégralement; ils établissent ainsi ce qui le rend original et unique, de sorte que leur horizon est la multiplicité des géométries pensables.

Est-il légitime de faire entrer le résultat de Carnot dans l'horizon d'Apollonios et le résultat de Lorch dans celui de von Neumann et Jordan? Oui pour le dernier cas. La démonstration d'ailleurs consiste à prouver que l'hypothèse de Lorch conduit à la validité de l'identité d'Apollonios, donc se réduit à la preuve de Jordan et von Neumann²². L'événement Lorch est une jolie suite de l'événement Jordan-von Neumann, une généralisation habile. D'autres événements de cette sorte ont pu être développés par ailleurs et en sont des conséquences quasi-nécessaires. Le mathématicien, classificateur de résultats, interprétant la démarche de Jordan-von Neumann pose ipso facto tout résultat métrique comme une possible caractérisation de la géométrie euclidienne²³. Un jeu mathématique est initié. Certains diront qu'il est gratuit, en ce sens qu'il ne vise qu'à essayer obstinément de traquer toutes les latences disponibles à partir d'un schéma connu et répertorié. Ce

²¹ L'œuvre d'Apollonios n'est pas assez commentée aujourd'hui. Voir la note (17), car ver Eecke explique les grandes démonstrations.

²² On trouvera une démonstration fonctionnelle et complète du résultat de Lorch dans J. ACZÉL et J. DHOMBRES, *Functional equations in several variables*, Cambridge, 1989, chap. II, p. 178-185.

²³ Voir la référence de la note précédente où ce point de vue est systématiquement utilisé. Voir aussi, J. DHOMBRES, *Utilisation des équations fonctionnelles pour la caractérisation des espaces préhilbertiens*, dans *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, vol. LIV, 1984, p. 159-186.

n'est pas une mauvaise description, mais pourquoi faudrait-il interdire au mathématicien d'expérimenter systématiquement? En tout cas, la description historique, chronologique, colle bien en l'occurrence avec le développement épistémologique.

Par contre, le cas Carnot ne se laisse pas insérer dans la trame explicative précédente. Non que l'équivalence avec l'égalité d'Apollonios pose difficulté puisque $2BM = BD$ et $2AM = AC$, si l'on prend avec C le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois autres sont A, B, et D (figure 2). Toutefois, si l'on envisage un horizon à la von Neumann-Jordan, il faut signaler que l'énoncé de Carnot ne fait intervenir qu'un triangle, ne mentionne pas de parallèles, mais qu'il est choisi un milieu. Là n'est pourtant pas le point majeur. De fait, l'horizon de Carnot est analytique : l'officier du Génie a une stratégie. Il entend tactiquement écrire par l'algèbre les relations métriques de la géométrie euclidienne, pour en déduire d'autres par un raisonnement portant sur les seules équations. Cette déduction est son véritable but, car il est bloqué par l'interprétation des quantités négatives qui ne sont pour lui que des «êtres de raison», de «simples formes algébriques incapables de représenter aucune quantité réelle et effective» dont l'utilisation pour rendre compte des situations géométriques n'est qu'un effet des variations de position relative des points d'une figure. Aussi prend-il le soin d'écrire les deux relations suivantes dans les triangles BAD et ADC, sans spécifier les signes

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 \pm 2AD \ AB \cos DAB \\ AC^2 &= AD^2 + AB^2 \pm 2AD \ AB \cos ADC \end{aligned}$$

Mais $\cos DAB = -\cos ADC$ puisque les angles DAB et ADC sont supplémentaires. Cette opposition de signe fournit l'identité d'Apollonios. On aura constaté que c'est l'écriture analytique qui compte avant tout²⁴. Auguste Comte indiquerait vraisemblablement que la démarche de Carnot est un progrès sur celle d'Apollonios, car elle joue à fond de l'algèbre qualifiée d'«universelle», et ne se fonde pas sur la géométrie des figures, un point de vue que nous ne partageons plus aujourd'hui, preuve s'il en fallait de l'inscription historique de l'épistémologie mathématique.

Avoir classé les genres, après avoir réalisé une bonne chronologie historique, n'épuise pourtant pas encore la comparaison des quatre événements retenus. En effet, il y a plus et ce plus est surprenant qui nous permet en particulier de nous opposer à la présentation «positive» de la preuve de Carnot. Il faut donc reprendre le fil du récit. Pas plus que l'his-

²⁴ L. N. CARNOT, *op. cit.* à la note 18.

toire tout court, l'histoire des mathématiques n'est œuvre terminée. Apollonios dans les *Coniques* s'intéresse à la plus courte distance entre un point extérieur M à une ellipse (ou plus généralement à une conique) et celle-ci. Il montre (fig. 3) qu'au point extrême atteint sur l'ellipse, la tangente est orthogonale à la droite qui joint M et N . Ce qui généralise le cas très simple du cercle, qui est d'expérience courante²⁵ (fig. 4), ou celui encore plus simple de la droite. Dans ce cas, N est la projection orthogonale de M sur la droite.

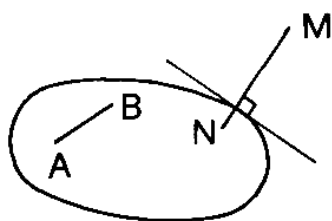


Fig. 3

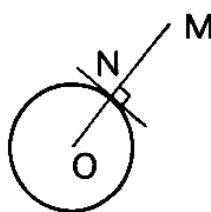


Fig. 4

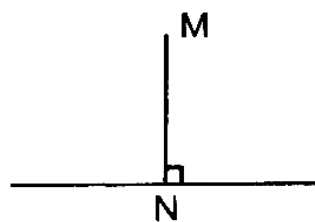


Fig. 5

Cette propriété d'orthogonalité – l'angle droit en N – a sommeillé longtemps et grosso modo fut oubliée avec le déclin de l'intérêt pour la géométrie. Elle est d'un coup réapparue dans le contexte abstrait d'espaces introduits au début du XX^e siècle dans le but de comprendre la résolution d'équations intégrales de la physique mathématique, donc dans un domaine a priori bien étranger à la géométrie²⁶. La projection orthogonale minimise une distance et la raison du succès d'Apollonios n'est pas spécifique aux courbes coniques, ou aux deux premiers degrés, mais tient tout simplement au fait qu'une ellipse délimite un domaine convexe. Cette dernière qualification signifie qu'on peut joindre par une droite deux points quelconques A , B à l'intérieur de l'ellipse sans que la droite AB ne sorte de cet intérieur (fig. 3), ce qui peut s'écrire analytiquement. Ce résultat général est aujourd'hui à la base de la théorie de l'optimisation²⁷ : il intervient pour le calcul effectif de la stabilité des structures comme les carlingues d'avion; il est programmé dans les ordinateurs²⁸. On pourrait ne voir là qu'une belle

²⁵ Livre V des *Coniques* d'Apollonios, voir référence de la note (17).

²⁶ Voir J. DIEUDONNÉ, *History of functional analysis. Notas de matematica*, North-Holland, 1981.

²⁷ N. BOURBAKI, *op. cit.* à la note 3, chap. V, Espaces hilbertiens, Théorème I, page 132.

²⁸ I. Ekeland et R. TEMAM, *Analyse convexe et problèmes variationnels*, Paris, 1974. La méthode de Galerkin comme celle des éléments finis est une conséquence de la méthode de la projection orthogonale.

illustration de la quête explicative du mathématicien, et la richesse de l'exploitation de ses idées, si précisément l'outil ad hoc pour la démonstration de ce qui ne se réduit pas à une généralisation²⁹ n'était précisément l'identité d'Apollonios!

Il y a donc des connivences dans l'ordre démonstratif qui semblent se moquer des siècles, précisément parce qu'une même idée structurelle est en jeu, qu'on la construit tout en la dévoilant. La liaison entre la propriété de minimalisation et celle d'orthogonalité prend alors une importance telle, bien au-delà de la géométrie et notamment pour la physique quantique, qu'on comprend aisément le souci de von Neumann et Jordan, qui tous les deux travaillent dans le cadre de la mécanique quantique³⁰ de montrer que cette liaison n'est pas fortuite, qu'elle tient à une propriété de la distance euclidienne, qu'aucune autre géométrie ne la possède. Leur travail n'est plus un jeu sur les données mathématiques, une inversion classique du direct par la réciproque, mais il s'inscrit dans un essai de décryptage des structures qui gouvernent le monde, ou du moins le modèle qu'on peut s'en faire à une époque donnée.

Aussi, à partir des quelques exemples réunis ici, et de bien d'autres, l'épistémologue comme l'historien constatent au XX^e siècle un formidable retour à la géométrie qui paraît ainsi s'installer dans toutes les branches des mathématiques et de la physique : c'est son « triomphe »³¹ qui éclipse la préférence analytique qu'avait manifestée le XVIII^e siècle, dominé par ces deux Européens avant la lettre que sont Euler et Lagrange. Dans la mesure où on les met en perspective, les théorèmes-événements sont les signes extérieurs de ces amples mouvements. De tels changements ont des répercussions qui s'étendent au-delà des mathématiques bien sûr, mais encore des sciences proprement dites; ils engagent la Weltanschauung d'une civilisation et bien entendu l'historien ne peut les ignorer.

On aura au moins vu à partir de ce récit que l'événement-théorème n'est qu'une pierre dans un édifice, car l'ordre mathématique est architectural. Il y a une visée et celle-ci n'a rien d'uniforme dans le temps. De même qu'un architecte peut reprendre au profit d'un édifice en cours les

²⁹ La propriété d'orthogonalité définit une projection. La linéarité de celle-ci sur un sous-espace vectoriel est également une propriété caractéristique de la géométrie euclidienne en dimension 3. Voir J. DHOMBRES, *Mathématiques de la théorie de l'approximation*, Nanta Iremica, 1976.

³⁰ En 1926, John VON NEUMANN a écrit un livre fondamental pour la mathématisation de la physique des quantas : *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*.

³¹ L'expression est de J. Dieudonné.

pierres et matériaux d'un précédent bâtiment – pensons à l'insertion magnifique des colonnes du temple de Minerve dans la cathédrale de Syracuse – de même le mathématicien utilise les « théorèmes » de ses prédécesseurs, les incorporant à sa construction à la place qu'il choisit de leur donner ou les reléguant dans les fondations où ils deviennent pratiquement invisibles.

L'importance d'une forte structure sous-jacente à tout parcours mathématique peut apparaître alors comme un obstacle à une présentation véritablement historique. En quelque sorte, celle-ci dérogerait tant dans la pratique du mathématicien que dans son métier d'enseignant³². L'histoire serait-elle pourtant si rétive devant les structures? Il me semble que non. Il me semble même que dans son métier l'historien est l'intellectuel qui fait le plus souvent appel à des cadres préétablis, à des schémas organisationnels particulièrement forts. Même si, par clause rhétorique, certains historiens continueraient de prétendre qu'ils ne font que rassembler les faits, que suivre les archives et la chronologie. Bien entendu, l'historien découpe dans le temps et dans l'espace, mais ces deux données ne peuvent suffire à elles seules pour structurer son projet. Il sélectionne surtout les types d'activités qu'il analyse et décrit : histoire politique, religieuse, économique ou sociale, pour ne citer que des pans largement reconnus, auxquels on pourrait ajouter bien d'autres, de l'histoire militaire à l'histoire de la vie privée en passant par l'histoire de la presse, celle des arts ou l'histoire démographique. L'énoncé même des secteurs historiques montre à l'envi que l'historien forge devant nous son objet, qu'il le construit, lui donnant une structure qu'il nous fait finalement voir et nous donne à juger. Il serait facile de prendre des exemples à partir des présentations de notre colloque³³.

Le mathématicien agit de même et il ne faudrait pas qu'un positivisme – le recours au concept de progrès – vienne bloquer la perception du déroulement de la pensée sous prétexte que telle structure mathématique est

³² À tel point que de nombreux mathématiciens, avant le XIX^e siècle, sont très avares de références. S'ils acceptent volontiers de reconnaître leur dette intellectuelle à l'égard de tel ou tel, ils vont rarement se contenter d'une indication bibliographique, sauf quand il s'agit de la bible euclidienne. Ils recopient rarement une démonstration, préférant donner la leur. Ils éprouvent le besoin d'inscrire leur marque pour l'incorporation d'un résultat. Un exemple typique est celui d'Arnauld, le janséniste de Port-Royal, qui parle dans sa *Géométrie* de 1657 de la méthode des indivisibles due à Cavalieri, mais assure vivement ne pas l'avoir lue tout en se sentant capable de refaire seul les démonstrations selon cette méthode, d'après le peu qu'on lui en a laissé entendre!

³³ N'est-ce pas la méthode suivie par D. Roche dans son livre récent consacré à la mode vestimentaire au XVIII^e siècle?

inéluclable, qu'elle est définitivement contraignante et optimale, alors que la structure historique est changeante, aussi diverse qu'il y a de familles d'historiens. La succession commentée des quatre théorèmes-événements, je l'espère, a pu permettre de prendre conscience d'évolutions fluctuantes chez le mathématicien. Ceci dit, ne doutons pas que l'identité d'Apollonios reste toujours un *acquis*. La vision que Thucydide donne du siècle de Périclès aussi. Si la connaissance humaine a pour habitude de thésauriser, ce n'est toutefois pas sa seule fonction!

La métaphore architecturale adoptée est exploitable de bien des façons pour envisager l'inscription des mathématiques dans l'histoire. Nous allons nous contenter d'en choisir une, celle qui interroge le style mathématique à la manière du style architectural. Façon bien classique de faire entrer l'histoire en art, mais façon moins fréquentée pour les sciences. Un exemple de la période de la Révolution française va guider notre réflexion en nous faisant retrouver le cadre historique plus familier du colloque.

UN STYLE MATHÉMATIQUE RÉVOLUTIONNAIRE

Le 11 ventôse an III (1^{er} mars 1795) Laplace présente la démonstration d'un théorème spectaculaire qui «consiste en ce que toute équation d'un degré pair est résoluble en facteurs réels du deuxième degré»³⁴. C'est un événement que Laplace sait manifestement mettre en scène puisqu'il le produit au terme de sa leçon. Non pas une leçon privée, car il s'agit d'un acte quasiment officiel, posé devant des représentants de la Convention. Dûment chapeautés de tricolore et de plumes, ceux-ci surveillent de leur estrade le déroulement des cours de l'École normale par lesquels on ambitionne de modeler les instituteurs que la jeune République compte disperser ensuite dans tous les départements comme un levain pour faire germer un esprit nouveau. «Préférez donc dans l'enseignement les méthodes générales, enjoint Laplace qui sera abondamment cité à ce propos³⁵, attachez-vous à les présenter de la manière la plus simple, et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles»³⁶. Bien loin de s'adresser à une étroite communauté d'initiés, Laplace harangue plus d'un millier d'élèves entassés dans l'amphithéâtre du Muséum d'histoire na-

³⁴ *Séances des Écoles normales, recueillies par des sténographes, et revues par les professeurs*, Paris, Régnier, an III, tome 2, p. 315-317.

³⁵ En 1801, le ministre de l'Intérieur reprendra cette phrase de Laplace son prédécesseur titulaire du même portefeuille, Voir J. Dhombres (éd.), *Histoire de l'École polytechnique de A. Fourcy*, Paris, 1987.

³⁶ *Op. cit.*, à la note 34, tome 4, page 49, 37^e séance de l'École normale.

turelle, issus de milieux fort divers, et désignés par un jury *populaire* selon une base purement géographique, au prorata de la population³⁷. La plupart d'entre eux n'ont aucune formation mathématique et n'envisagent pas d'enseigner cette science dont Laplace les entretient avec une fougue dont le froid mathématicien ne paraissait pas susceptible. La «raison passionnée», ce couple monstrueux de la Révolution aurait-il pris les rênes de la science?

Mais autant qu'aux élèves présents, Laplace s'adresse à ses pairs qui n'ont plus d'Académie pour abriter leurs débats puisque celle-ci a disparu en août 1793 dans la grande débâcle des corporations d'Ancien Régime. Sa démonstration est originale autant que brillante. Il se place en outre sur un terrain algébrique qu'il n'a jamais balisé de ses publications, le laissant au célèbre Lagrange, son aîné de treize ans, lui aussi professeur à l'École normale. Qui plus est, Lagrange assiste à la leçon de Laplace selon la règle imposée par les organisateurs particulièrement méthodiques de l'École. Entre Laplace et Lagrange la rivalité intellectuelle³⁸ était tissée de longue date, depuis qu'ils avaient tous les deux travaillé sur le problème des trois corps, pour examiner notamment les inégalités séculaires de Saturne ou la libration de la Lune. À l'élégante clarté analytique de Lagrange répond la capacité non moins analytique de Laplace à faire concourir les ressorts les plus divers en vue de l'établissement du *Système du Monde*³⁹.

La présence physique de Lagrange n'ajoute pas seulement du piquant à l'histoire du théorème, comme on aurait dit au XVIII^e siècle. Vraisemblablement, sans cette présence, le théorème n'aurait pas vu le jour, à cette époque du moins, car l'appareil démonstratif est clairement inspiré par les techniques que le même Lagrange développait quelques décades plus tôt pour le profit des élèves, devant Laplace cette fois. Il leur indiquait habilement la raison pour laquelle les équations des quatre premiers degrés se résolvent au moyen de formules algébriques explicites, sans que l'on sache pourtant étendre la méthode au degré cinq⁴⁰. Lagrange travaille sur des fonctions rationnelles des racines ayant certaines symétries, et c'est effectivement la considération par Laplace d'une telle fonction, certes particulièrement simple, qui dénoue la difficulté. Si a , b , c , etc, désignent les ra-

³⁷ N. et J. DHOMBRES, *Naissance d'un pouvoir, sciences et savants en France (1793-1824)*, Paris, 1989.

³⁸ Voir J. DHOMBRES, *L'enseignement des mathématiques par la «méthode révolutionnaire» : les leçons de Laplace à l'École normale de l'an III*, dans *Revue d'histoire des sciences*, 30, 1980, p. 315-348.

³⁹ P. S. LAPLACE *Exposition du système du monde*, Paris, 1796.

⁴⁰ L'impossibilité de cette résolution par radicaux pour le degré cinq sera établie par Abel en 1824.

cines (inconnues) d'une équation, il imagine de considérer toutes les expressions $a + b + mab$ où m est un paramètre fixé. Ce sont des fonctions symétriques en a, b , mais elles varient selon le choix des autres racines. Si toutes ces racines sont distinctes, en nombre égal à $2n$ puisque Laplace part d'un polynôme pair, il y a en général $m = 2n(2n-1)/2 = n(2n-1)$ expressions distinctes $a + b + mab$. Cette forme combinatoire pourtant très simple du nombre des expressions différentes fournit l'astuce algorithmique du théorème. En effet, une division par deux a été effectivement gagnée. Cela se voit très bien si dans un entier pair comme $2n$ l'on introduit le nombre maximal de puissances de 2 qu'il contient en facteur, disons $2n = 2^k l$, où l est alors un nombre impair (et k un entier au moins égal à 1). On constate que le deuxième entier m vaut $2^{k-1} l'$ (d'ailleurs $l' = l(2^k l - 1)$, mais cette valeur explicite n'a guère d'intérêt : il suffit de voir que l' est impair car produit de deux nombres impairs). Le passage de $2n$ à m correspond bien à la perte d'une unité pour l'entier k , c'est-à-dire à la perte d'une puissance de 2.

La démonstration laplacienne joue explicitement sur le nombre 2 et le raisonnement par récurrence est effectué sur les puissances de 2, c'est-à-dire en partant de ce qui est connu pour, algorithmiquement, aller à des degrés plus élevés. Une nouvelle fois il me faut parler boutique, mais ici encore ce que j'utilise reste du niveau mathématique des classes du secondaire. Au départ donc, il y a un polynôme (unitaire) de degré 2, c'est-à-dire une expression.

$$(1) \quad P(x) = x^2 + ax + b,$$

où a et b sont des nombres ordinaires, ceux dits réels depuis Descartes. On sait (depuis les algébristes italiens du XVI^e siècle) que l'on peut aussi écrire $P(x)$ sous une forme multiplicative :

$$(2) \quad P(x) = (x - x_1)(x - x_2).$$

Appelées racines de P , les x_1 et x_2 ne sont pas toujours des nombres réels mais peuvent être complexes, c'est-à-dire comporter des valeurs dont le carré est négatif. Naturellement le lien entre x_1, x_2 et a, b s'obtient par développement et identification :

$$(3) \quad x_1 + x_2 = -a \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = b.$$

Point n'est pourtant besoin ici d'être descriptif quant à la signification d'un nombre complexe; il est inutile de préciser le statut de ces nombres

étranges. Il suffit d'une définition opératoire et c'est exactement le comportement qu'adopte Laplace. Il suffit de savoir que le passage de (1) à (2) est possible au moyen d'entités calculatoires, dites nombres complexes, les x_1 et x_2 qui obéissent aux règles usuelles des quatre opérations algébriques. Ces nombres suffisent pour l'équation du second degré. Il n'y a rien d'autre dans l'équivalence entre (1) et (2), moyennant (3).

L'objectif est maintenant de montrer que cette situation est la situation générale, que les nombres complexes suffisent en fait pour décrire les racines de tout polynôme. Il faut quand même préciser un peu, d'autant que dans son énoncé Laplace se restreint au cas d'un polynôme de degré pair. Soit donc P un polynôme de degré $2n$, c'est-à-dire une expression ordonnée suivant les puissances d'une variable x , dont le coefficient de la plus haute puissance $2n$ vaille 1 :

$$(3) \quad P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2n-1}x^{2n-1} + x^{2n},$$

où les $2n$ coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}$ sont des nombres réels. Soient $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ les expressions qui permettent d'écrire P comme produit :

$$(4) \quad P(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{2n}).$$

Ces nombres sont les racines de P . Le vocabulaire tenant seulement au fait que d'après (4), la valeur $P(x)$ ne s'annule que si x vaut x_1 , ou $x_2, \dots$ ou x_{2n} . On interprète les x_i comme les zéros ou racines de $P(x)$.

Nous devons prouver qu'il est possible de grouper les racines $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, deux par deux, de sorte que chaque groupement $(x - x_1)(x - x_2)$, ou $(x - x_3)(x - x_4)$, etc., soit précisément un polynôme du second degré dont les coefficients sont réels (*facteur réel du second degré*). C'est exactement l'énoncé du théorème proposé par Laplace. Si nous parvenons à réaliser la démonstration, nous aurons effectivement prouvé que les $2n$ racines $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ du polynôme P sont des nombres complexes, au sens opératoire que nous avons donné à cette expression, sans nous encombrer d'une autre signification. On remarque comment Laplace sépare les choses à prouver, avec quelle habileté il se débarrasse de problèmes ontologiques sur les nombres complexes qui ne sont pas véritablement liés au fond du théorème en jeu. D'une part, il fournit un contenu algébrique d'opérations, d'écritures sur les polynômes, de calcul. D'autre part, il donne l'interprétation structurelle, la preuve que les nombres complexes définis à partir des seules équations du second degré servent en fait pour toutes les équations polynomiales, au moins celles de degré pair. Va-t-il pouvoir tenir tout au long de sa preuve une telle rigueur qui est aussi une économie de moyens?

Sa démarche est d'autant plus intéressante qu'elle renoue avec le fil historique du statut des nombres complexes. Lorsque Descartes, dans sa *Géométrie* publiée en 1637, indique comme une évidence l'équivalence entre la forme (3) et la forme (4), il éprouve le besoin de donner un nom aux $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$. Ce sont imaginaires; l'expression signifiant que l'on doit «imaginer» des entités telles, sans qu'il soit nécessaire d'en demander plus. La clarté de la raison impose cette *vision* pour que l'analyse d'un polynôme – sa signification – corresponde exactement à la décomposition multiplicative sous la forme (4). N'oublions pas que la *Géométrie* illustre le *Discours de la Méthode* qu'elle justifie.

«Sachez donc qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir de diverses racines... Au reste tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles; mais quelquefois seulement imaginaires; c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque Equation»⁴¹.

Mais donner un nom aux racines imaginaires, ce n'est pas expliquer leur forme, c'est seulement assurer l'existence d'une sorte de niche dont la structure reste inconnue. À la déterminer doivent s'atteler les mathématiciens. Les successeurs de Descartes se diviseront à ce propos tant qu'il n'y aura pas de preuve formelle. Faut-il structurer les nombres imaginaires en autant de strates qu'il y a de degrés différents dans les équations? Leibniz, entre de nombreux autres auteurs le pensera pour le degré supérieur à 3. Faut-il au contraire réduire la structure des nombres imaginaires à celle des seuls nombres complexes, c'est-à-dire aux seules racines des équations du second degré? D'Alembert le démontrera en 1746, suivi aussitôt par Euler et Lagrange⁴². C'est cette réduction qu'exhibe à son tour Laplace en 1795.

Mais autant ses trois grands prédécesseurs sont difficiles à suivre, sont incomplets à nos yeux contemporains, et utilisent des ressources considérables qui empêchent d'incorporer le théorème dans un cours, autant Laplace est court, simple, efficace. Un programme véritablement révolutionnaire.

Car nous pouvons pratiquement boucler d'un coup la démonstration. Supposons avoir démontré le théorème pour tous les polynômes de degré

⁴¹ R. DESCARTES, *La Géométrie*, Leyde, 1637, p. 372.

⁴² J. D'ALEMBERT, *Recherches sur le calcul intégral*, dans *Hist. de l'Acad. Berlin*, 1746 (1748), p. 182-200; L. EULER, *Recherches sur les racines imaginaires des équations*, dans *Hist. de l'Acad. Berlin*, 1749, p. 222-288; J. L. LAGRANGE, *Réflexions sur les résolutions algébriques des équations*, dans *Nouv. Mém. Acad. Berlin*, 1770 (1772), p. 134-215, et 1771 (1773), p. 128-254.

$2^k l$, où l est entier impair quelconque. C'est-à-dire supposons que tout polynôme de ce degré possède comme facteur un polynôme réel du second degré. Telle est l'hypothèse de récurrence, qui notons-le porte sur une famille infinie de polynômes puisque le nombre impair l n'est pas spécifié. Soit un polynôme P quelconque de degré $2^{k+1} l$, où l désigne à nouveau un nombre impair. Considérons le polynôme Q dont les seules racines sont les expressions $a + b + mab$ où a et b parcourent les racines de P et où m est un paramètre pour le moment fixé. L'algèbre (théorie de l'élimination) indique que le polynôme Q a tous ses coefficients réels, tout comme P . Parce que les coefficients de Q sont des fonctions symétriques rationnelles des racines de P et comme telles s'expriment rationnellement à partir des fonctions symétriques élémentaires de ces racines, lesquelles sont précisément données par les coefficients réels de P . Mais le degré de Q est $2^k l'$ comme nous l'avons vu. Donc nous savons d'emblée que Q a au moins une racine complexe puisqu'il existe en facteur dans Q un polynôme réel du second degré. Telle est notre hypothèse de récurrence. On vérifie que Laplace ne déborde pas de la signification qu'il a attribuée au nombre complexe, à la théorie algébrique de l'élimination et qu'en se référant, il reste dans le giron des équations.

Le résultat de Laplace paraît cependant minime puisqu'il ne porte a priori que sur une racine. C'est pourtant là que tout se décide, grâce au paramètre m , muet jusqu'à présent et pourtant disponible à notre guise. Laplace invente à son propos un argument magnifique qui repose sur une idée bien banale : le fini n'épuise pas l'infini. Je le cite.

«Comme on peut donner à m une infinité de valeurs, on aura une infinité de fonctions de la forme $a + b + mab$ qui auront des valeurs complexes. Parmi ces fonctions, il y en aura nécessairement qui renfermeront les mêmes racines de la proposée»⁴³.

Autrement dit, il y a au moins deux valeurs distinctes m et m' telles que pour les mêmes racines, disons pour fixer les idées les racines a et b de P , on ait à la fois pour $a + b + mab$ et pour $a + b + m'ab$ des expressions qui soient des nombres complexes. On déduit par addition et soustraction (en éliminant la différence non nulle $m - m'$) que la somme $a + b$ et le produit ab sont eux-mêmes des nombres complexes. Un peu d'algèbre⁴⁴ montre alors

⁴³ P. LAPLACE, *op. cit.* à la note 34. En fait, à la place du mot «complexes», Laplace a écrit «réelles», car il mène d'abord sa démonstration pour $k = 1$ et dans ce cas Q est de degré impair, donc possède une racine non seulement complexe mais bien réelle comme nous l'expliquons ci-après.

⁴⁴ J'ai simplifié ici la démonstration de Laplace, car il ne raisonne pas aussi directement sur les nombres complexes. Laplace utilise un peu plus d'algèbre et doit

que a et b sont à leur tour des nombres complexes, puisque racines du polynôme à coefficients complexes $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$. Par conséquent ce polynôme de degré 2 se met en facteur dans P . Le passage par récurrence de k à $k+1$ est acquis dès que l'on aura montré qu'en fait il y a possibilité de choisir des coefficients réels pour un tel polynôme en facteur. Dans les quelques calculs précédents, Laplace ne s'en tient plus à la simple considération des nombres complexes comme racines des équations du second degré. Il suppose que ces nombres sont susceptibles des opérations algébriques usuelles, et surtout qu'un comportement particulier de ces nombres a lieu lorsqu'on leur impose des opérations «réelles». Techniquement parlant, Laplace utilise l'opération de conjugaison sur les nombres complexes.

Pour en terminer avec la récurrence, il lui reste à établir le départ de celle-ci, à savoir le cas $k=1$. On peut examiner d'abord le cas $k=0$, c'est-à-dire le cas où le polynôme P est de degré impair. Cette fois, il n'y a aucune raison pour qu'un polynôme réel de degré 2 se factorise. Laplace, en adoptant un principe de continuité qui relève de l'analyse et non de l'algèbre, considère cependant qu'il est évident qu'un tel polynôme P s'annule pour une valeur réelle. Car, pour x prenant une très grande valeur avec un signe $+$ ou avec un signe $-$, comme le polynôme se comporte alors selon x^{2n+1} , il est alternativement positif et négatif. Il doit donc s'annuler en un point réel intermédiaire a . Exactement comme pour le passage de l'étape k à l'étape $k+1$, on démontre que tout polynôme de degré $2l$, où l est impair, possède un facteur réel de degré 2. La fin de la démonstration est simple :

Donc, toute équation d'un degré pair a un facteur du deuxième degré; en la divisant par ce facteur on aura une nouvelle équation d'un degré pair, qui aura elle-même un facteur réel du deuxième degré, et en continuant ainsi on décomposera l'équation entière en facteurs réels du deuxième degré⁴⁵.

Sous la forme que lui donne Laplace, la démonstration du théorème est terminée.

Si la décomposition des polynômes est son objectif, la structure des nombres complexes n'entre pas dans son horizon. Pourtant, on a beaucoup plus au terme de la démonstration : à savoir que les nombres complexes épuisent les imaginaires qui servent pour tous les polynômes. On a établi le cas du degré pair. Pour le degré impair, on a également vu que se factorisait une expression réelle $(x-a)$, avec a réel, ce qui réduit ce cas au cas pair

faire intervenir la réduction des équations du quatrième degré, selon la méthode de Cardan et de Ferrari. Autrement dit, il privilégie l'algèbre des équations sur l'algèbre des opérations, mais sans parvenir à éviter tout à fait cette dernière.

⁴⁵ P. LAPLACE, *op. cit.* à la note 34.

par perte d'un degré. Laplace n'insiste pas, car il ne mélange pas un résultat de décomposition d'un polynôme en facteurs réels du premier ou du second degré avec un résultat sur la nature des imaginaires. Cette portée lui semblerait-elle épistémologiquement moins sûre?

Sa démonstration est conduite sans appel aucun à une figure. Ainsi, nous avons vu Laplace faire intervenir les nombres complexes, mais il n'a nullement cherché à leur donner une interprétation géométrique. Celle-ci, pourtant dans l'air du temps, ne sera adoptée généralement que bien plus tard. Comme Lagrange qui voulait éviter le recours à la géométrie dans sa *Mécanique analytique* de 1788, Laplace entend placer les seules combinaisons des équations, mues par les seul raisonnement. Il n'y a pas là simple coquetterie.

En adoptant une présentation analytique, c'est-à-dire en divisant les difficultés, non seulement Laplace simplifie son exposé, mais il donne à voir et par conséquent engage l'avenir. D'abord on voit dans sa démonstration l'intervention de ce qu'on appelle aujourd'hui le théorème des valeurs intermédiaires pour assurer un zéro réel à tout polynôme de degré impair. Bolzano le soulignera en 1817 et tentera d'y remédier⁴⁶. Cette intervention d'un résultat extérieur à l'algèbre peut paraître plutôt cocasse pour le théorème fondamental de cette discipline, mais cela ne devait pas gêner sur le fond un analyste comme Laplace. Il importe pourtant de constater combien partout ailleurs sa démonstration est d'essence algébrique. Laplace a donc souligné le seul apport extérieur. Ensuite, grâce à sa démonstration, on voit la nécessité de poser a priori l'existence de racines imaginaires. C'est une position que Gauss critiquera dans sa thèse de 1799. Pour éviter cette hypothèse, le mathématicien de Göttingen préférera revenir à une démonstration géométrique, faisant intervenir des intersections de courbes⁴⁷. Grâce aux travaux algébriques de E. Noether et de E. Artin au XX^e siècle, nous savons aujourd'hui justifier le présupposé cartésien de Laplace, et donc écrire toute sa démonstration en rigueur.

Venant d'accomplir en quelques minutes une démonstration époustouflante par sa simplicité, Laplace ne laisse pas pour autant souffler son auditoire. Il n'éprouve pas du tout le besoin de commenter, tant sont claires les

⁴⁶ B. BOLZANO, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen zwei Werten die ein entgegengesetztes Resultat gewahren, wenigstens eine reelle Wurzel liegt*, dans ID., *Œuvres*, t. 1.

⁴⁷ C. F. GAUSS, *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores primi vel secundi gradus resolvi posse*, dans ID., *Œuvres*, t. III, p. 1-30.

séparations qu'il a effectuées dans un style net, coupant, utilitaire et sans le caractère définitif de l'académisme. Aussitôt il indique que si le théorème qu'il vient de démontrer réduit les imaginaires aux seuls nombres complexes, il ne fournit pourtant pas un moyen de calcul explicite pour des racines, dès lors que sont seulement donnés les coefficients du polynôme. De tels moyens pourtant sont connus pour les quatre premiers degrés : «L'uniformité des méthodes imaginées pour résoudre les équations des degrés inférieurs au cinquième, donnait quelque espoir de les étendre à ce degré; mais toutes les tentatives que l'on a faites pour cet objet, ont été jusqu'à présent infructueuses»⁴⁸. Il reste donc du travail au mathématicien! Par cette attitude, Laplace se montre novateur. Il n'était pas courant dans un cours d'indiquer les insuffisances des théories présentées!

C'est qu'à l'instar des savants l'accompagnant à l'École normale, Laplace intègre le concept de progrès dans la démarche scientifique elle-même et ne se contente pas de définir le progrès par les usufuits de la science. Le raisonnement est aussi simple qu'un syllogisme. Si nous admettons que nous pouvons savoir plus et mieux que nos prédécesseurs, il faut en déduire que nos successeurs en sauront également plus. Il y a une conclusion : autant baliser le terrain sur lesquels viendront s'inscrire les découvertes futures. C'est exactement ce que Laplace et Lagrange, associés dans la même harangue, expliquent devant Lakanal le jour de l'ouverture de l'École normale. «Présenter les plus importantes découvertes que l'on ait faites dans les sciences, en développer les principes, ..., ce qui reste à faire, la marche qu'il faut suivre pour s'élever à de nouvelles découvertes; tel est l'objet de l'École Normale»⁴⁹.

Le théorème de Laplace se présente donc comme un événement qui résume une démarche et engage une foi. Les successeurs ne s'y trompèrent pas, qui parlent souvent de l'effet considérable des cours de l'École normale sur l'enseignement français pendant de longues décennies⁵⁰. La pratique analytique du raisonnement et celle de l'observation, qui constituent deux moments inséparables, permettent d'aborder en accéléré l'ensemble des connaissances humaines dans ce qui constitue leur modernité. Large-

⁴⁸ LAPLACE, *op. cit.* à la note 34.

⁴⁹ *Séances de l'École normale, op. cit.*, à la note 34, t. I, p. 16-17, Première séance, 1^{er} Pluviôse.

⁵⁰ Arago, Fourier, Cousin et bien d'autres en parleront. Voir par exemple le rapport que fait Delambre en 1810 sur la situation des sciences mathématiques : *Rapport à l'Empereur sur l'État des sciences mathématiques et leurs progrès depuis 1789*, réédition, Paris, 1989.

ment accessible à tous les citoyens, le monde du savoir est un. Ce n'est pas, comme dans l'ancienne métaphysique scolastique, l'objet du savoir qui fonde la vérité de cette assertion, ni même la claire vision cartésienne des idées distinctes, mais l'unicité de la démarche analytique. La «méthode révolutionnaire» que Barère magnifie le 14 juillet 1794 dans un discours à la Convention n'est, dans l'enseignement, que la traduction pratique de cette conception. Si la démarche élimine quelques pans du savoir, de la théologie à l'astrologie, en passant par ce qui fait jouer les systèmes a priori, elle est avant tout intégratrice, et c'est sans doute en cette dernière décennie du XVIII^e siècle la dernière manifestation d'une volonté encyclopédiste. Une manifestation novatrice en ce que l'économie politique est incorporée au savoir, en ce que les systèmes de signes prennent une valeur, en ce que l'histoire elle-même est conçue comme la rencontre de plusieurs faisceaux descriptifs et explicatifs⁵¹. Une dernière manifestation cependant, puisque le XIX^e siècle connaîtra la parcellisation des connaissances et en tout cas l'opposition entre ce qui relève du littéraire et ce qui relève du scientifique. Cette opposition était inexistante dans l'esprit d'un Laplace exposant à un autre large public son théorème. Voilà aussi ce qui donne de l'épaisseur à l'événement.

Jean DHOMBRES

⁵¹ Vandermonde enseigne l'économie politique à l'École normale, Volney l'histoire et Sicard fait un cours sur la langue des signes. Tous les cours de l'École normale vont bientôt faire l'objet d'une réédition critique à paraître chez Dunod. Le premier volume, *Leçons de mathématiques*, est paru en 1992.