

4745
FRITSCH, K. H.
1989

Résultat abrégé de la recherche

[Afficher la notice complète](#) [Retour à la liste des résultats](#)

◀ 47/124 ▶

Titre du document / titre traduit : Sind die pythagoreischen Tripel Vorgänger der pythagoreischen Dreiecke?

Auteur (s) : FRITSCH, K. H.

Titre de revue / nom d'ouvrage
dépuillé : Göttinger Miszellen

Edition : Göttingen : Universität der Göttingen, Seminar für Ägyptologie und Koptologie

Année millésime / date de
publication : 1989

Tomaison/Volumaison : 110

Pagination : p. 19-25

ISBN/ISSN : ISSN : 0344-385X

Type de document : extrait

Mots-clés : Métrologie -- Rapport mathématique -- Triangle -- Mathématiques -- Triple -- Egypte
-- Pythagore -- Archéologie du Proche-Orient

Base d'origine : Francis

Localisation :

◀ 47/124 ▶

Sind die pythagoreischen Tripel Vorgänger der pythagoreischen Dreiecke? Göttinger Miszellen



Volume 110 / 1989 / Journal Part / Article

Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de

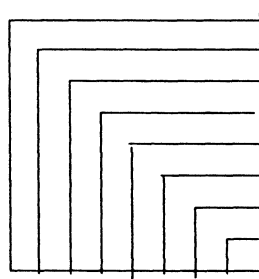
SIND DIE PYTHAGOREISCHEN TRIPEL VORGÄNGER DER PYTHAGOREISCHEN DREIECKE ?

Das Auftreten pythagoreischer Tripel und pythagoreischer Dreiecke in der vorgriechischen Zeit wird in der Regel mit der Aussage kommentiert, daß zu jener Zeit der Satz des Pythagoras bekannt gewesen sein muß. Die folgenden Überlegungen zeigen, daß diese Ansicht zutreffen kann, aber nicht zutreffen muß.

Wenn man ein Quadrat vergrößern will, dann genügt es, einen 'Haken' anzulegen. Will man das Vergrößern systematisieren, dann wird man das Ergebnis in einer Tabelle festhalten.

Abbildung 1

Tabelle 1



altes Quadrat		Haken	neues Quadrat	
Seite	Fläche	Fläche	Fläche	Seite
1	1	3	4	2
2	4	5	9	3
3	9	7	16	4
4	16	9	25	5
5	25	11	36	6
6	36	13	49	7
7	49	15	64	8
8	64	17	81	9
9	81	19	100	10
10	100	21	121	11
11	121	23	144	12
12	144	25	169	13

Die Auswertung der Tabelle zeigt :

- Die Tabelle kann durch Addition fortgesetzt, das Anlegen zur Kontrolle benutzt werden.
- Die Tabelle kann auf eine Tabelle der Quadratzahlen verkürzt werden. .
- Das Bildungsgesetz $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ kann erkannt werden.
- Es gibt Haken, die einem Quadrat flächengleich sind.
- Mit $4^2 + 3^2 = 5^2$ muß auch $3^2 + 4^2 = 5^2$ gelten.

* Diese Erkenntnis kann dazu anregen, Haken mit größerer Breite zu verwenden .

Für das Aufsuchen weiterer Tripel ist es von Vorteil, den Haken genauer zu betrachten: Er besteht aus zwei gleichen Rechtecken und einem Eckquadrat der Seitenlänge d .

Abbildung 2

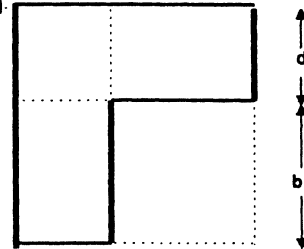
Die Innenseiten umspannen ein Quadrat der Seite b , die Außenseiten ein Quadrat der Seite $b + d = c$.
Wenn der Haken die Fläche $A = a^2$ hat, dann gilt: $a^2 = 2bd + d^2$

$$b^2 + a^2 = b^2 + 2bd + d^2 = (b + d)^2 = c^2$$

Man kann also eine binomische Formel ablesen.

Ferner erkennt man, daß $a^2 > d^2$.

In den Tabellen 2 wird nach den Hakenbreiten d geordnet.



Tabellen 2

$d = 1 \quad 2b = a^2 - 1 \quad c = b + 1$						$d = 2 \quad 4b = a^2 - 4 \quad c = b + 2$					
a^2	$2b$	a	b	c		a^2	$4b$	a	b	c	
9	8	3	4	5		16	12	4	3	5	
25	24	5	12	13		36	32	6	8	10	
49	48	7	24	25		64	60	8	15	17	
81	80	9	40	41		100	96	10	24	26	
121	120	11	60	61		144	140	12	35	37	
169	168	13	84	85		196	192	14	48	50	
$d = 4 \quad 8b = a^2 - 16 \quad c = b + 4$						$d = 8 \quad 16b = a^2 - 64 \quad c = b + 8$					
a^2	$8b$	a	b	c		a^2	$16b$	a	b	c	
64	48	8	6	10		144	80	12	5	13	
144	128	12	16	20		400	336	20	21	29	
256	240	16	30	34		784	720	28	45	53	

Diese Tabellen und ihre Erweiterungen lassen viele Zusammenhänge erkennen.

Hier sei festgehalten :

1. Zu jedem $a \geq 3$ gibt es mindestens ein ganzzahliges Tripel.

2. c kann nicht jeden Zahlenwert annehmen.

Will man dieser zweiten Frage nachgehen, dann kann man von c ausgehen und b aus $b = c-d$ bestimmen. Wenn $A = 2bd + d^2$ eine Quadratzahl a^2 ist, dann ist a die dritte Zahl. Die Kontrollrechnungen bringen keine weiteren Zahlenwerte für c, sie sind zum Teil langwierig, aber nicht schwierig.

Einige Ergebnisse sind in Tabelle 3 festgehalten :

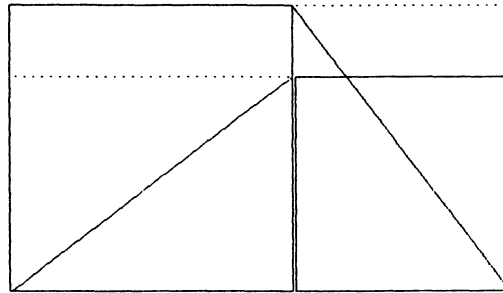
Tabelle 3

$b = c-d \quad a^2 = d(2b+d)$							
c	d	b	$2b+d$	a^2	c	b	a
5	1	4	9	9	5	4	3
13	1	12	25	25	13	12	5
17	2	15	32	64	17	15	8
25	1	24	49	49	25	24	7
29	8	21	50	400	29	21	20
37	2	35	72	144	37	35	12
41	1	40	81	81	41	40	9
53	8	45	98	784	53	45	28
61	1	60	121	121	61	60	11
65	2	63	128	256	65	63	16
65	9	56	121	1089	65	56	33
73	18	55	128	2304	73	55	48
85	1	84	169	169	85	84	13
85	8	77	162	1296	85	77	36
89	9	80	169	1521	89	80	39
97	25	72	169	4225	97	72	65
101	2	99	200	400	101	99	20
109	18	91	200	3600	109	91	60
113	1	112	225	225	113	112	15
125	8	117	242	1936	125	117	44

Wer genau zeichnet, wird auch genau messen.

Es fällt auf, daß die Längen der Diagonalen keine ganzen Zahlen sind. Legt man die Quadrate der Flächen 9 und 16 aneinander, (Abbildung 2), dann haben die eingezeichneten Querstrecken (Rechtecksdagonalen) die Länge 5 .

Abbildung 3



Für jede dieser Querstrecken ist eine Kontrolle durch Flächenvergleich möglich. Dieser Vergleich kann im Quadratraster durchgeführt werden, das Prinzip ist auch für die anderen pythagoreischen Tripel anwendbar.

Abbildung 4

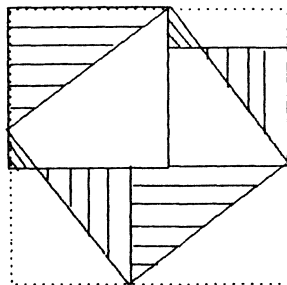
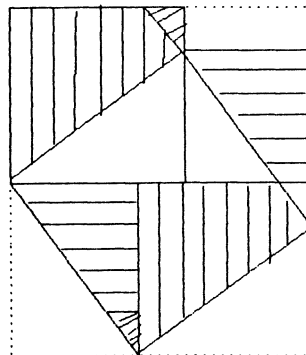


Abbildung 5



Die hier vorgeführte Entwicklung setzt sich aus recht einfachen Schritten zusammen :

Legespiele · Systematisieren des Aniegens · Festhalten der Ergebnisse in Tabellen · Kontrolle an Zeichnung und Rechnung · Ausbau durch Rechnung.

Erst am Ende dieser Dateneammlung mag es zu der Erkenntnis gekommen sein, daß für alle rechtwinkligen Dreiecke die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat ist. Zum Beweis dieser Tatsache ist dann allerdings ein geändertes Denken notwendig, nämlich die Zurückführung auf einfache andere Grundtatsachen.

Das bedeutet : Übergang vom induktiven zum deduktiven Schließen.

Es gibt Hinweise darauf, daß zumindest das Tripel $3/4/5$ und einige seiner Vielfachen bekannt waren, und daß die zeichnerische Lösung der rechnerischen vorausgegangen ist :

Die Probleme 1 und 2 im Berliner Papyrus 6618 (BP)

6 Im Moskauer Papyrus (MP)

LV, 4 Im Kahoun Papyrus (KP)

befassen sich mit der Summe von Quadratzahlen. Das Zeichen knbt = $\sqrt{\quad}$ wird dabei unterschiedlich übersetzt :

Schack · Schackenburg : Nimm die Quadratwurzel daraus

Struve : Berechne Du seinen Winkel (Quadratwurzel 16)

Griffith : make thou a corner (square root of 16) [1], [3]

Zusammenstellung der Tripel :

a	b	c	Fundstelle
1	$\overline{2} \overline{4}$	$1 \overline{4}$	BP1, KP, MP
2	$1 \overline{2}$	$2 \overline{2}$	BP2
4	3	5	KP, MP
8	6	10	BP1
16	12	20	BP2

Eine Gegenüberstellung der Übersetzung (nach Gillings) [3], [6]

und der möglichen zeichnerischen Lösung am Beispiel des Problems 1 im Berliner Papyrus 6619 :

"Wenn man Dir sagt, die Fläche eines Quadrats von 100 ist gleich der von zwei kleineren Quadraten. Die Seite des einen ist $\sqrt{2}$ mal der Seite des anderen. Welches sind die Seiten der beiden unbekannten Quadrate?"

Obersetzung

Auftrag zum Zeichnen

* Nimm stets ein Quadrat der Seite 1.
Die Seite des anderen ist dann $\sqrt{2}$ mal.

Multipliziere dies mit $\sqrt{2}$.
Es ergibt $2\sqrt{2}$, die Fläche des kleineren Quadrats.

Dann haben die beiden Quadrate zusammen die Fläche $1 + 2\sqrt{2}$.

Nimm die Quadratwurzel daraus, das gibt $1 + \sqrt{2}$.

Nimm die Quadratwurzel aus 100, sie ist 10.

Dividiere diese 10 durch $1 + \sqrt{2}$, es ergibt 8, die Seite des kleineren Quadrats.

Nimm $2\sqrt{2}$ von diesen 8, es gibt 6, die Seite des anderen Quadrats."

Zeichne zunächst ein Quadrat der Seite 1.
Zeichne das andere mit der Seite $\sqrt{2}$ mal.

Zähle seine Fläche aus.
Sie beträgt $2\sqrt{2}$.

Mache einen Haken mit der gleichen Fläche.
Er umspannt ein Quadrat der Fläche $1 + 2\sqrt{2}$.

Seine äußere Länge ist $1 + \sqrt{2}$.

Vergrößere dieses Quadrat auf eine Fläche von 100, seine Seite ist 10.

Zeichne den zugehörigen Haken.

Er hat die innere Länge 8 und die Fläche 36. Das Quadrat dieser Fläche hat die Seite 6.

Der Vergleich dieser beiden Vorgänge führt zu dem Eindruck, der Schreiber wolle zeigen, daß man die Zeichnung durch Rechnung ersetzen kann.

Weitere Hinweise :

1. Eine Textstelle in Apastamba-Sūtra (III, 9) [2]
 " Man fügt das, was man mit der jedesmaligen Verlängerung umzieht, an zwei Seiten hinzu und an der Ecke das Quadrat, welches durch die betreffende Verlängerung hervorgebracht wird.
2. Das Ägyptische Längenmaß Remen : " a double-remen was the length of the diagonal of a square whose side was one cubit."[3]
3. Die Verwendung von Maßstäben bei der Vermessung von Innen- und Hofräumen (Hesekiel 40;3,5. Offenbarung des Johannes 21 ; 15,16)
4. Bei den Indern findet man Zerlegungsbeweise zum Satz des Pythagoras
5. Die Winkelgenauigkeit bei den Pyramiden ohne Verwendung von Winkelmaßen.
6. Meyer-Christian hat in den Plänen von Lauer vom Djoser-Grab 16 pythagoreische Dreiecke nachgemessen, von denen sind 8 primitiv oder auf primitive zurückzuführen.
 Die zugehörigen 8 Tripel sind in Tabelle 3 erfaßt.

Literatur :

- [1]Kurt Vogel : Vorgriechische Mathematik, Teil 1
 Hermann Schroedel Verlag 1959 (S. 34, 57, 64)
- [2]Oskar Becker-Jos. E. Hofmann : Geschichte der Mathematik
 Athenäum Verlag 1951 S. 40
- [3]Richard J. Gillings : Mathematics in the time of the Pharaohs.
 Dover edition Mineola N.Y. 1982, 161-162, 216
- [4]Kuno Flad : Mathematik Band 1
 Verlag Moritz Diesterweg 1952
- [5]W. Meyer-Christian : Pythagoras in Ägypten am Beginn des Alten Reichs.
 Mitt. des Deutschen Archäologischen Instituts Abt. Kairo
 Verlag Philipp von Zabern Band 43 (1987) 195-203
- [6]Celia Bibé : Les Egyptiens ont ils été pré-Pythagoréens ?
 Göttinger Miszellen 1988 Heft 106 S. 7-14.

*St. D. I.R. Karl-Heinz Fritsch, Friedberger Anlage 20
 6000 Frankfurt am Main 1*

März 1989

