

Zur Begründung der wissenschaftlichen Mathematik
durch die Pythagoreer
von Wolfgang Lefèvre

1. Vorüberlegungen

Ursprung der wissenschaftlichen Mathematik

Die klassische Periode des antiken Griechenland (500–300 v. u. Zt.) war in der europäischen Geistesgeschichte oft Gegenstand bewundernder und auch idealisierender Rückblicke. Erstaunlich ist allein schon, auf wievielen Gebieten diese kurze Periode späteren Zeiten Muster aufstellte: der bildenden Kunst mit der klassischen Bauweise und den Plastiken von Phidias und Praxiteles, dem Drama in der Trias Aischylos, Sophokles und Euripides, der Rhetorik durch Demosthenes, der Historie in Herodot und Thukydides, der Philosophie durch Sokrates, Platon und Aristoteles. Auch die Wissenschaftsgeschichte blickt auf das klassische Griechenland mit Bewunderung, ehrt es als die Geburtsstätte der Wissenschaft im engeren Sinne, nämlich der Wissenschaft als beweisender Theorie¹. Am Ende dieser Periode, etwa 300 v. u. Zt., stellte Euklid seine „Elemente“ zusammen, das – neben der Bibel – bis zum Beginn unseres Jahrhunderts meistgedruckte Buch der Welt.

In den Maße, wie uns in den vergangenen hundert Jahren die Arithmetik, Geometrie und Astronomie der alten mesopotamischen Völker und des alten Ägypten bekannter geworden sind, mußte freilich die Vorstellung korrigiert werden, nach der die Griechen der archaischen und klassischen Periode gewissermaßen als die Erfinder dieser Wissensgebiete galten. Vieles, was als originelle Schöpfung der Griechen angesehen wurde, stellte sich als Aneignung mesopotamischer und ägyptischer Errungenschaften heraus. Mehr noch: Zumindest hinsichtlich Arithmetik und Astronomie ist nicht länger zu bezweifeln, daß das klassische Griechenland den Vergleich mit jenen älteren Kulturen nicht bestehen kann.

IN: RECHENSTEIN,
EXPERIMENT,
SPRACHE

Diese Berichtungen unseres Bildes des klassischen Griechenland berühren allerdings nicht das Urteil der Wissenschaftshistoriker, daß das klassische Griechenland die Wissenschaft als beweisende Theorie schuf, und zwar in der Begründung der Mathematik als Wissenschaft.

Wenn der Titel „Wissenschaft“ der Mathematik des klassischen Griechenland zuerkannt wird, obgleich sie in mancher Hinsicht unentwickelt war und viele ihrer Erkenntnisse nicht selbst entwickelte, sondern von anderen übernahm, und wenn zugleich dieser Titel der mesopotamischen und ägyptischen Mathematik abgesprochen wird, obgleich zumindest die Arithmetik und Algebra der Mesopotamier unbestritten höher entwickelt waren als die des klassischen Griechenland, so ist natürlich zu fragen, welches Kriterium diesem Urteil der Wissenschaftshistoriker zugrunde liegt. Dies Kriterium besteht negativ darin, daß die „Mathematik als Wissenschaft“ von einer Mathematik abgegrenzt wird, die als Kenntnis „nach Art von Rezepten“² bezeichnet werden kann, nämlich als Kenntnis bestimmter Techniken und Verfahren zur Lösung bestimmter mathematischer Aufgaben und Probleme. Man kann diese Mathematik auch als anwendungsgebunden bezeichnen, allerdings nur in dem Sinne, daß sich ihre Kenntnisse von Lösungsverfahren fallspezifisch auf bestimmte mathematische Probleme beziehen. Dagegen ist es nicht haltbar, zu behaupten, diese Mathematik sei „stets dem unmittelbar Praktischen verhaftet“ geblieben³. Welche praktische Bewandnis läßt sich für die Addition einer Länge mit einer Fläche denken, wie wir sie in mathematischen Keilschrifttexten der altbabylonischen Zeit finden?

Eine positive Bestimmung der „Mathematik als Wissenschaft“ kann in der einschlägigen Literatur auf vielerlei Kriterien zurückgreifen, deren Zusammenhang nicht immer deutlich ist. Es finden sich dort zum Beispiel folgende Kriterien: „Formulierung allgemeiner Sätze“, „beweisen“, „Grundlagenreflektion“, „Deduktion“⁴, „axiomatisch-deduktiv“, Vollzug der „dialektischen Negation der Realität“ durch die Mathematik⁵, „Bedürfnis zur Abstraktion (. . .), d. h. das Bedürfnis, die gewonnenen Kenntnisse zu einem logisch begründeten einwandfreien System zu entwickeln“⁶, „Lehrsätze über beliebige und gewisse Dinge (beweisen) (. . .), ohne nähere Angaben über bestimmte Einzeldinge zu machen“⁷, die Frage nach dem Warum anstelle der Frage nach dem Wie stellen⁸ usw.

Was immer zu diesen Formulierungen zu sagen wäre, es ist ihnen jedenfalls zu entnehmen, daß es die der griechischen Mathematik eigene Art des Beweisens, ihre Art des Begründens und Ableitens ist, wodurch sie sich von der Mathematik der älteren Kulturen unterscheidet und

weswegen ihr von den Wissenschaftshistorikern der Titel „Wissenschaft“ zugesprochen wird. Und tatsächlich gibt es kein Anzeichen, daß eventuell entsprechende Formen des Beweisens, Begründens und Ableitens in der Mathematik jener älteren Kulturen uns nur aufgrund zufälliger archäologischer Lücken unbekannt geblieben wären. Wie groß auch solche Lücken im einzelnen noch sein mögen, so erscheint es doch ungereimt, daß sich in all den Funden von mathematischen Texten, die eine hochstehende Algebra bezeugen, keine Spur einer solchen Entwicklung der wissenschaftlichen Form erhalten haben sollte, wenn es sie gegeben hätte.

Belehren uns also die neueren Erkenntnisse hinsichtlich der mesopotamischen und ägyptischen Wissenschaft zwar darüber, wie groß die Kontinuität zwischen dieser älteren Mathematik und der des klassischen Griechenland war, wie sehr die alten Vorstellungen von der Originalität der Griechen berichtigt werden müssen, so gilt es zugleich, den Bruch in dieser Kontinuität nicht zu verkennen. Vielmehr gilt es, das spezifisch Neue der Mathematik des klassischen Griechenland festzuhalten, nämlich ihre wissenschaftliche Form, ihre Durcharbeitung zur beweisenden und systematischen Theorie.

Kein innermathematischer Vorgang

Wer diesen Bruch in der Kontinuität nicht ernsthaft als Bruch zur Kenntnis nimmt, läuft Gefahr, schon bei den ersten Vorüberlegungen hinsichtlich der Entstehung jener wissenschaftlichen Form in die Irre zu gehen. Denn dieser Bruch bedeutet, daß die Genese der wissenschaftlichen Form nicht als ‚innermathematischer‘ Prozeß zu verstehen ist.

Arpád Szabó zum Beispiel hat dies gegenüber K. Reidemeister an einzelnen Momenten dieser Genese, auf die wir hier nicht eingehen können, überzeugend verdeutlicht⁹. Hier mag die allgemeine Überlegung genügen, daß den Völkern Mesopotamiens und Ägyptens der Übergang zur wissenschaftlichen Mathematik ohne Zweifel hätte eher gelingen müssen als den Griechen, wenn dieser Übergang innermathematisch zu erklären wäre, das heißt als Resultat extensiver mathematischer Praxis und der Weiterentwicklung ihrer Techniken; denn in dieser Beziehung waren diese Völker den Griechen lange Zeit überlegen. Gerade der Umstand, daß bei diesem Übergang offenbar ein qualitativer Sprung vorliegt, verleitet ja immer wieder dazu, über „den griechischen Geist“ zu rätseln, und zwar so, als sei es eine Naturanlage dieses klei-

nen Volks im östlichen Mittelmeerraum gewesen, die es zum wissenschaftlichen Denken befähigte.

Die wissenschaftliche Mathematik entwickelte sich im klassischen Griechenland abgetrennt und in Distanz zur praktischen Mathematik, zur Rechen- und Feldmeßkunst. Über die praktische Mathematik der Griechen dieser Zeit ist uns nur wenig überliefert. Wir wissen von ihr nicht zuletzt aus philosophischen Polemiken gegen sie, die zugleich diese Distanziertheit der wissenschaftlichen Mathematik dokumentieren¹⁰. Wie die Polemiken zeigen, haben wir es mit zwei Mathematiken zu tun, mit einer normalen oder praktischen und mit einer von dieser losgelösten ‚philosophischen Mathematik‘. Und in dieser philosophischen Mathematik entstand ihre wissenschaftliche Form¹¹.

Philosophisch kann man diese zweite Mathematik schon aus dem äußerlichen Grunde nennen, daß ihre voreuklidische Phase nur aus philosophischen Quellen zu rekonstruieren ist. Die „Quadratur der Möndchen“ des Hippokrates von Chios¹² ist der älteste, auf etwa 440 v. u. Zt. zu datierende mathematische „Text“, der uns überliefert ist; es handelt sich in Wirklichkeit um den von Simplicius (6. Jahrhundert u. Zt.) überlieferten Bericht des Eudemos von Rhodos (2. Hälfte des 4. Jahrhunderts v. u. Zt.). Sieht man von diesem „Text“ ab, so gilt generell für die Zeit vor Euklid, daß wir über die Mathematik nur aus den Fragmenten beziehungsweise Berichten über die sogenannten Vorsokratiker und aus den Schriften des Plato und Aristoteles Kenntnis haben. Diese zweite Mathematik tritt uns also als integraler Bestandteil des philosophischen Denkens entgegen und kann auch insofern als philosophische Mathematik bezeichnet werden, als sie in ihrer Entwicklung von den Bedürfnissen der philosophischen Theorie abhängig war, was – wie wir sehen werden – Probleme mit sich brachte.

Wenn der hier interessierende Übergang nicht innermathematisch, nicht Mathematik-immanent zu verstehen ist, so heißt das also gerade nicht, daß wir die Sphäre der sogenannten reinen Mathematik verlassen müßten. Verlassen müssen wir vielmehr die Sphäre der praktischen Mathematik, von der her die in der griechischen Antike sich vollziehende Genese dessen, was später einmal die reine Mathematik sein wird, nicht zu erklären ist.

Die materialistische Wissenschaftsgeschichtsschreibung steht hierbei vor dem keineswegs singulären Sachverhalt, bei der Rekonstruktion eines so bedeutsamen Vorgangs, wie es die Genese der wissenschaftlichen Mathematik ist, gerade nicht auf die materielle Produktion in dem Sinne zurückgreifen zu können, daß aus deren Bedürfnissen diese Genese zu erklären wäre. Wie an Mesopotamien und Ägypten zu studieren,

können die praktischen Anforderungen an mathematische Lösungstechniken wesentlich weiter entwickelt sein als bei den Griechen der klassischen Periode, ohne daß deshalb auch die Entwicklung der wissenschaftlichen Mathematik notwendig wäre. Die Entwicklung der Produktivkräfte im Griechenland dieser Zeit enthält nicht die Voraussetzungen für ein Bedürfnis nach wissenschaftlicher Mathematik seitens der materiellen Produktion. Insofern scheinen hinsichtlich der Wissenschaftsentwicklung im klassischen Griechenland sozialhistorische Rekonstruktionen im Recht, die die materielle Produktion weniger beachten und das Gewicht allein auf die Produktions- und Klassenverhältnisse legen. Ehe wir uns nun der Genese der wissenschaftlichen Mathematik im einzelnen zuwenden, seien aber noch einige weitere Überlegungen vorangestellt.

Ein bewußte Schöpfung?

Die erwähnten philosophischen Polemiken gegen die Rechen- und Feldmeßkunst zeigen, daß den Vertretern der philosophischen Mathematik selbst durchaus bewußt war, daß sie einen Bruch mit der bisherigen Mathematik vollzogen, daß sie mathematische Probleme in neuer Weise behandelten. Von den Pythagoreern, die im 5. Jahrhundert v. u. Zt. die Pioniere der wissenschaftlichen Mathematik waren, wird überliefert, daß sie ihre Beschäftigung mit Mathematik als *ἐλευθερά παιδεία* bezeichneten, also als eine „freie Lehre“¹³. Man geht wohl nicht fehl, wenn man dieses „frei“ als frei von praktischen Zwecken liest, also ohne Anwendungsbezug, und so als Abgrenzung gegen die praktische Mathematik. Wenn H. Wussing darüber hinaus diese „freie Lehre“ als „Mathematik der Freien“ deutet¹⁴ und so auf den klassenmäßigen, auf den aristokratischen Charakter der Pythagoreer hinweist, so verfehlt er die Sache gewiß nicht. Im 4. Jahrhundert v. u. Zt. finden wir dann in den Werken des Plato und Aristoteles explizite Reflexionen über die diese Mathematik auszeichnende wissenschaftliche Form.

Trotz dieses konstatierbaren Bewußtseins der Beteiligten wäre es verfehlt, die Genese der wissenschaftlichen Mathematik und in ihr der Wissenschaft als beweisender Theorie als eine bewußte Hervorbringung zu verstehen, sie also auf die irgendwie bei den Griechen dieser Epoche entstandene Idee zurückzuführen, Erkenntnisse wissenschaftlich beweisen zu wollen. Schon eine simple formale Überlegung sollte uns davon abhalten: Haben wir es in der Mathematik des klassischen Griechenland tatsächlich mit der *ersten* beweisenden Theorie zu tun, so läßt sie sich schon deswegen nicht auf eine Idee, eine bewußte Zielsetzung zu-

rückführen, weil niemand vor der ersten beweisenden Theorie sich vorstellen konnte, was eine beweisende Theorie ist. Auf der heutigen Stufe der Zivilisation hat jede wissenschaftliche Entwicklung und Neuerung die Wissenschaft zur Voraussetzung, ist Resultat der Wissenschaft. Das kann aber für die Entstehung der Wissenschaft gerade nicht gelten. Wir müssen mit der Möglichkeit rechnen, daß die Begründer der wissenschaftlichen Mathematik aus Motiven handelten, die nach unseren Begriffen vielleicht wenig mit Wissenschaftlichkeit zu tun haben.

Wie auch sonst bei wissenschaftshistorischen Untersuchungen ist es hier generell wichtig, daß wir nicht unser eigenes Interesse an der Entstehung der wissenschaftlichen Form den damals Beteiligten unter-schieben. Auf der Grundlage der heutigen, weit ausdifferenzierten und entwickelten Totalität der Wissenschaften verfügen wir über Standards, an denen wir messen, welchen Erkenntnissen die wissenschaftliche Form zuzusprechen ist und welchen nicht. Es bedeutet aber keinesfalls einen Rückfall in den historistischen Relativismus, wenn man darauf verweist, daß es problematisch ist, historische Gestalten der Wissenschaft ohne weiteres an diesen unseren Standards zu messen. Vergewärtigen wir uns überdies, daß hinsichtlich jener Standards die wissenschaftliche Auseinandersetzung heute keineswegs abgeschlossen ist, so haben wir darauf zu achten, daß nicht die oder jene besondere heutige Auffassung von ‚Wissenschaft‘ den damaligen Gelehrten als ihre Intention und ihr Interesse unterstellt wird.

Das Wissenschaftsverständnis bei Plato und Aristoteles

Es ist in diesem Zusammenhang interessant zu sehen, daß schon in der Antike selbst keine Einigkeit hinsichtlich der Standards bestand, die erfüllt sein müssen, um eine Theorie als Wissenschaft ansehen zu können. Plato etwa stellte dem Reich des Werdens und der sinnlichen Wahrnehmung (ὁπατόν) das Reich des Wissens (νοητόν) als durch eine unüberbrückbare Kluft Geschiedenes gegenüber, ließ deswegen sogar die Geometrie nur als ein „Afterdenken“ gelten¹⁵ und rechnete von der Mathematik nur die Arithmetik zum Reich des Wissens. Die peripatetische Schule des Aristoteles sah demgegenüber die den platonischen Ansprüchen genügende reine Mathematik nur als eine der Wissenschaften an, der zudem nur Erkenntnisse von sehr eingeschränktem Erklärungswert möglich seien¹⁶, und machte sich um die Entwicklung empirischer Wissenschaften verdient.

Mehr Interesse noch als solche Differenzen zwischen philosophischen Schulen verdient eine weitere Tatsache: Die hellenistische Mathe-

matik behandelte die Resultate, zu denen die Philosophie des 4. Jahrhunderts in ihren wissenschaftstheoretischen Reflexionen der wissenschaftlichen Mathematik gelangt war, keineswegs als verbindliche Richtschnur. Dies zeigt uns, daß diese Wissenschaftstheorien, so unentbehrlich sie für unser Verständnis der beweisenden Theorie in jener Zeit sind, als Metatheorien angesehen werden müssen, die sich gegenüber der wissenschaftlichen Theoriebildung in den einzelnen Disziplinen bereits bis zu einem gewissen Grade verselbständigt hatten. Schon aus diesem Grunde dürfen wir die damaligen Theorien über beweisende Wissenschaften nicht einfach als Dokumente des Selbstverständnisses der Begründer der wissenschaftlichen Mathematik ansehen.

Es kommt ein weiteres hinzu. Die philosophischen Ausführungen über beweisende Wissenschaft, die wir bei Plato und Aristoteles finden, sind Reflexionen post festum, die für eine Rekonstruktion der Genese der wissenschaftlichen Mathematik nur mit viel Umsicht zu verwerten sind. Es läßt sich nämlich bei bestimmten Einzelheiten zeigen, daß den philosophischen Theoretikern des 4. Jahrhunderts v. u. Zt. zum Teil nicht mehr bekannt oder bewußt war, in welchem Zusammenhang einzelne Momente der beweisenden Theorie entstanden waren. So ist zum Beispiel das auf Aristoteles zurückgehende Verständnis von ‚Axiom‘ als Satz, dessen Richtigkeit gar nicht bezweifelt werden kann¹⁷, nicht bloß falsch, sondern es verbaut auch das Verständnis dafür, wie das 5. Jahrhundert v. u. Zt. zu der in Euklids „Elementen“ vorliegenden Form des systematischen Aufbaus der Mathematik kam¹⁸.

Die Pioniere: Aristokratische Geheimbünde

Die wissenschaftstheoretischen Reflexionen in der Philosophie des 4. Jahrhunderts v. u. Zt. sind nicht zuletzt deswegen für uns Heutige leicht irreführend, weil sich an ihnen die Vorstellung bilden kann, als habe es sich bei der Entwicklung der wissenschaftlichen Mathematik in der klassischen Periode des antiken Griechenland um einen rationalen, an bestimmten wissenschaftlichen Kriterien orientierten Diskussions- und Forschungsprozeß einiger Gelehrter gehandelt, denen das Ziel einer beweisenden Theorie mehr oder minder deutlich vor Augen stand. Diese Vorstellung löst sich jedoch auf, wenn wir ein konkreteres Bild von den Begründern der wissenschaftlichen Mathematik zu gewinnen suchen.

Der Grundstein der wissenschaftlichen Mathematik wurde im 5. Jahrhundert v. u. Zt. im wesentlichen von Vertretern der pythagoreischen Schule unter maßgeblichem Einfluß der Lehren der eleatischen

Schule gelegt. Dazu ist gleich anzumerken, daß das Wort ‚Schule‘ irreführend ist. Die Schulen der Pythagoreer wie der Eleaten waren Geheimbünde politischen Charakters, es waren Aristokraten-Bünde in den Pflanzstädten Großgriechenlands. Sie betätigten sich konspirativ und unterwarfen ihre Mitglieder strengen Ritualen und Lebensvorschriften. Ihre Geheimlehren waren alles andere als wissenschaftlich im heutigen Sinne des Worts. Wir würden sie eher als mystische oder quasi-religiöse Lehren bezeichnen. So soll Pythagoras zum Beispiel die Seelenwanderung gelehrt haben¹⁹. Dringt man durch die sektenreligiöse Form dieser Lehren hindurch, so offenbart sich ihre Rationalität zunächst als eine politische; man begreift, gegen was und wen sich die Argumentation richtet, erkennt in ihnen Verteidigungen des aristokratischen Prinzips und entnimmt ihnen als Reaktionen, wie bedroht schon zu Beginn des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. dieses Prinzip gewesen sein muß, bedroht durch die bürgerliche Entwicklung in den griechischen Polleis.

In diesen halbreligiösen aristokratischen Geheimbünden also wurde der Grundstein der wissenschaftlichen Mathematik gelegt. Wir können auch nicht zweifeln, daß die Beschäftigung mit Mathematik in diesen Sekten Moment eines – mit einem modernen Wort – ideologischen Programms war. Nehmen wir daraufhin an, daß es sich um eine der Entwicklung der wissenschaftlichen Mathematik besonders förderliche Ideologie gehandelt haben muß, so zeigen uns spätestens die bekannten Paradoxien des Eleaten Zenon, daß das nur bedingt richtig ist, daß vielmehr die Mathematik durch diese Ideologie zugleich auch in ihren elementarsten Grundlagen gefährdet war. Wie soll Arithmetik denkbar sein, wenn das „Viele“ nicht wahrhaft ist, sondern nur das „Eine“²⁰? Wie Geometrie angesichts der Zenonschen Negation von Raum und Bewegung²¹?

Das wissenschaftshistorische Problem

Über der Geburtsstunde der wissenschaftlichen Mathematik liegt, wie wir sehen, keineswegs jenes klare Licht, das alle Gegenstände plastisch hervortreten läßt und alle Konturen scharf zeichnet, liegt nicht jener vollständig durchsichtige Glanz, den gerade wir nebelgewohnten Deutschen mit dem tiefblauen griechischen Himmel zu assoziieren pflegen. Wir geraten vielmehr in ein befremdendes, von Legenden durchwobenes Halbdunkel. Die wissenschaftliche Mathematik scheint aus einem Gesamt sich kreuzender, hemmender und fördernder geistiger Orientierungen zu resultieren, die uns vom Standpunkt wissenschaftlichen Denkens aus als suspekt und irrational erscheinen. Wir sollten uns vielleicht

an Anthropologen, Religionswissenschaftler und Sozialhistoriker mit der Bitte wenden, uns die Grundlagen jener geistigen Orientierungen zu zeigen, deren Wechselspiel wir die wissenschaftliche Mathematik verdanken.

Allerdings läßt sich eines nicht übersehen. Was immer zu der geistigen Konstellation, der wir die wissenschaftliche Mathematik verdanken, im einzelnen zu sagen ist und was zu ihren geschichtlichen Gründen: Dieser Konstellation entstammt ein Resultat, das nicht mit ihr verging, sondern sie überdauerte, eben die wissenschaftliche Mathematik. Das zeigt uns aber, daß die wissenschaftliche Mathematik ihr Bestehen nicht nur den Intentionen ihrer Begründer verdankt, sondern daß sie in etwas begründet sein muß, was von den Zielen und Vorstellungen jener aristokratischen Geheimbünde unabhängig ist und wovon ihre Begründer vielleicht gar kein oder nur ein unangemessenes Bewußtsein hatten.

Das, worin die wissenschaftliche Mathematik unabhängig von den Intentionen und Vorstellungen ihrer Begründer wie auch ihrer philosophischen Interpreten im 4. Jahrhundert v. u. Zt. ihren Bestand hat, wollen wir vorläufig unbestimmt ihre *objektive Grundlage* nennen. Sie verdient unser wissenschaftshistorisches Interesse in erster Linie, denn sie enthält die objektive Möglichkeit des Übergangs der Rechen- und Feldmeßkunst zur beweisenden Theorie, der als qualitativer Sprung zu verstehen ist. An ihr also müßten wir Einsicht in das Gesetzmäßige dieses Übergangs gewinnen können. Die konkrete geistige Konstellation im Griechenland des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. ist also zwar als ein Feld von Bedingungen interessant, unter denen jene Grundlage als objektive Möglichkeit realisiert wurde. Doch könnte diese Konstellation selbst dann keinen Aufschluß darüber geben, wie dieser Übergang überhaupt möglich war, wenn sie intentional auf die Hervorbringung einer beweisenden Theorie gerichtet gewesen wäre. Denn die Möglichkeit dieses Übergangs ist selbstverständlich keine Frage des Wollens.

Um diese objektive Grundlage der wissenschaftlichen Mathematik aufzufinden, müssen wir uns den mathematischen Theorien selbst zuwenden. In der folgenden Untersuchung wird zu diesem Zwecke exemplarisch die wohl älteste mathematische Lehre behandelt, die als beweisende Theorie bezeichnet werden kann, nämlich die „Lehre vom Geraden und Ungeraden“ (im folgenden: LvGuU).

2. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden – wissenschaftlicher Charakter und philosophische Implikationen

Zur Überlieferung

Die LvGuU ist eine den Pythagoreern zugeschriebene, sehr alte arithmetische Lehre, die am Ende – gewissermaßen als ein Anhang – des IX. Buchs der „Elemente“ Euklides steht. Und zwar handelt es sich um die Sätze IX/21–34 sowie den Satz IX/36. Die dieser Lehre zugrundeliegenden Definitionen befinden sich unter den dem VII. Buch vorangestellten Definitionen, und zwar sind die Definitionen VII/Def. 6–9 und 12 diejenigen, die direkt zur LvGuU gehören²².

Wir nannten die LvGuU eine sehr alte pythagoreische Lehre. Die „Elemente“ Euklids werden aber auf die letzten Jahre des 4. Jahrhunderts v. u. Zt. datiert, auf etwa 300 v. u. Zt. Euklid stellte also seine „Elemente“ etwa 200 Jahre nach dem Tod des Pythagoras zusammen; und auch seit der Blüte der sogenannten jüngeren pythagoreischen Schule waren zu diesem Zeitpunkt bereits etwa 100 Jahre vergangen.

Nun brauchen uns die chronologischen Merkwürdigkeiten nicht allzu sehr zu irritieren. Es ist seit langem bekannt, daß Euklids „Elemente“ eine Zusammenstellung sind. Euklid konnte dabei auf eine etwa 130jährige Tradition mathematischer Werke mit dem Titel „Elemente“ zurückgreifen. Nach Proklos²³ stellte als erster Hippokrates von Chios, der etwa 440 v. u. Zt. in Athen wirkte, „Elemente“ zusammen. Von diesen Mathematikbüchern ist uns freilich keines erhalten geblieben, vielleicht deshalb, weil sie durch die umfassende Zusammenstellung des Euklid verdrängt und der Tradierung nicht mehr für wert befunden wurden. Euklids „Elemente“ enthalten also nicht etwa nur mathematische Theorien, die Euklid selbst aufstellte; sie sind vielmehr ein Compendium des damaligen mathematischen Wissens, in dem Euklid auch die Lehren der älteren griechischen Mathematiker tradierte. Gestützt auf die oben erwähnten philosophischen Quellen können die „Elemente“ Euklids auf die historische Schichtung ihrer Teile hin untersucht werden, um ein konkreteres Bild der voreuklidischen Phase der griechischen Mathematik zu rekonstruieren²⁴. Auf dieser Grundlage glaubt die heutige Forschung hinsichtlich ganzer Bücher der „Elemente“ Euklids angeben zu können, wer ihr eigentlicher oder ursprünglicher Autor ist. Die arithmetischen Bücher VII–IX, in denen sich unsere LvGuU befin-

det, werden pythagoreischen Mathematikern des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. zugeschrieben.

Was nun die LvGuU selbst angeht, so gibt es sichere Anhaltspunkte dafür, daß sie sehr alt ist. So zeigt ein Fragment des Komödiendichters Epicharmos, der um 500 v. u. Zt. in Syrakus wirkte, daß bereits an der Wende vom 6. zum 5. Jahrhundert v. u. Zt. irgendeine LvGuU allgemein bekannt gewesen sein muß²⁵. Seit den Forschungen O. Beckers²⁶ wird allgemein angenommen, daß die im IX. Buch der „Elemente“ Euklids tradierte LvGuU auf die Mitte, wenn nicht gar auf die erste Hälfte des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. zu datieren ist.

Es bleibt natürlich angesichts dieser Überlieferungsgeschichte die Frage, ob wir in den von Euklid tradierten Theoremen wirklich die authentische LvGuU aus dem 5. Jahrhundert v. u. Zt. vor uns haben. Sie könnte ja von Euklid überarbeitet worden sein, als er sie seinem Werk einfügte. Und wenn dies für die Sätze der Lehre wenig wahrscheinlich erscheint, so könnte es wenigstens für die Beweise dieser Sätze gelten.

Dagegen spricht aber folgendes. Die von Euklid tradierte LvGuU ist, trotz aller Anzeichen für ihre Altertümlichkeit, nahtlos in den Duktus der arithmetischen Bücher VII–IX integriert. Aufbau wie Begründungsform weisen diese Bücher als ein in sich geschlossenes Ganzes aus, als eine in sich geschlossene Arithmetik, die dem 5. Jahrhundert v. u. Zt. angehört. Das zeigt ein Vergleich mit dem die Proportionslehre enthaltenden Buch V, das Eudoxos zugeschrieben wird, der in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts wirkte. Das heißt also: Euklid hat offenbar nicht versucht, diese ältere, in sich geschlossene und einheitliche Arithmetik bei der Einfügung in seine „Elemente“ durch Überarbeitung „auf den neuesten Stand zu bringen“.

Trotz der nicht ausschließbaren Möglichkeit einer euklidischen Überarbeitung im einzelnen können wir deswegen davon ausgehen, daß die in den „Elementen“ des Euklid überlieferte LvGuU im ganzen eine Fassung dieser Lehre ist, die von den Verfassern der Bücher VII bis IX stammt, die also dem 5. Jahrhundert v. u. Zt. angehört. Ob diese Fassung ihrerseits mit der Lehre identisch ist, auf die der Komödiendichter Epicharmos anspielte, oder ob sie vielmehr eine Überarbeitung oder Neufassung einer älteren LvGuU darstellt, wird uns später noch beschäftigen.

Sehen wir uns nun die Lehre selbst an (vgl. Faltblatt am Ende des Buches). Die LvGuU, wie sie Euklid tradiert, besteht aus Definition und Sätzen.

Die *Definitionen* sind anscheinend Klassifizierungen²⁷ von Zahlen, und zwar Klassifizierungen innerhalb des Bereichs der ganzen Zahlen, allerdings unter Ausschluß der Null sowie unter Annahme einer Sonderstellung der Eins („Einheit“), die „für die Alten keine Zahl ist“²⁸. Resultat dieser Klassifizierung sind eben die Klassen der geraden und ungeraden Zahlen sowie einige daraus zusammengesetzte Zahlklassen (vgl. VII/Def. 6–10).

Die *Sätze* der Lehre lassen sich vielleicht vorläufig so beschreiben: Ein Teil von ihnen besagt, welche Zahlen aus den verschiedenen Kombinationen dieser Zahlklassen entstehen müssen, und zwar, welcher Zahlklasse diese entstehenden Zahlen selbst angehören, der geraden oder der ungeraden (vgl. IX/21–29); ein anderer Teil von ihnen besagt, wie Zahlen in gerade beziehungsweise ungerade Zahlen zerlegt werden können (vgl. IX/32–34). Die übrigen Sätze der Lehre fügen sich einer vorläufigen Beschreibung nicht so leicht.

Wichtig ist nun, daß die Behauptung aller Sätze der Lehre bewiesen wird. Wenn O. Becker oder K. Reidemeister diese Lehre als ein $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ im Sinne eines deduktiven beziehungsweise logischen Lehrstücks, als eine beweisende Theorie bezeichnen²⁹, dann berechtigt sie dazu eben die Tatsache, daß jeder der Sätze bewiesen wird. Eine nähere Untersuchung der Beweise zeigt uns überdies, daß unter den Beweisen der einzelnen Sätze ein Zusammenhang besteht, und zwar dergestalt, daß spätere Sätze in ihren Beweisen auf frühere aufbauen. Die Lehre ist also nicht nur eine Sammlung isoliert nebeneinander stehender Theoreme; sie ist vielmehr ein zusammenhängendes Lehrstück.

Sind so in diesem zusammenhängenden, ein systematisches Ganzes darstellenden $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ bestimmte Sätze ausgezeichnet, weil auf ihnen andere in ihrem Beweis beruhen, so beruhen sie zugleich alle in ihren Beweisen auf den Definitionen. Von hier aus wird ohne weiteres verständlich, warum – anders als heute – die antike Wissenschaftstheorie für die Frage, ob eine Lehre die Stufe einer beweisenden Theorie erreicht hat, nicht den Beweisen, sondern den Definitionen die ausschlaggebende Rolle zusprach³⁰.

Beweisende Ableitungen einer Behauptung aus fallspezifischen Ausgangsannahmen werden für die nicht belegbare Frühphase der griechischen Mathematik allgemein angenommen³¹. Solche beweisenden Ab-

leitungen sind zwar etwas anderes als mathematische Vorschriften oder Regeln; sie leiten ab. Aber diese Ableitungen unterscheiden sich andererseits auch von einer beweisenden Theorie im vollgültigen Sinne eines $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$, weil sie nur einen un abgeschlossenen Beweis darstellen. Ihre Ausgangsannahmen sind nicht bewiesen, beziehungsweise es ist nicht bewiesen, daß diese Ausgangsannahmen unbeweisbar sind. Formell angesehen, zeichnet es ja die Definitionen, die Ausgangsannahmen eines entwickelten $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$, gegenüber sonstigen Ausgangsannahmen aus, daß ihr Beweis als ausgeschlossen gilt; deshalb aber wird jede Ableitung aus ihnen zu einem abgeschlossenen Beweis.

Hinsichtlich der Genese der Mathematik als beweisender Theorie verlangen also die Definitionen unsere besondere Aufmerksamkeit.

Definitionen und Elemente

Sehen wir uns deswegen die Definitionen der LvGuU, also die Zahlklassen, näher an. Gehen wir von ihrem Wortlaut aus, so begegnen wir in jeder einem Terminus, der eine Divisionsoperation bezeichnet: „halbieren“ in den Definitionen (VII/Def.) 6 und 7, „messen“ in den Definitionen (VII/Def.) 8 bis 10. Die Zahlarten werden somit nach ihrer Teilbarkeit unterschieden; das heißt durchaus nach Eigenschaften, nämlich danach, welches Verhalten ihnen gegenüber der Divisionsoperation eigen ist. Es handelt sich also um eine gewöhnliche Klassifikation, denn diese verschiedenen Eigenschaften machen die Zahlen nach einer *differentia specifica* unterscheidbar.

Weiterhin können wir feststellen, daß die Definitionen gewissermaßen nicht gleichwertig sind. Es finden sich nämlich zwei Zahlarten mit einem Fundamentalstatus, die gerade und die ungerade Zahl. Ihr Fundamentalstatus zeigt sich daran, daß die anderen Zahlarten (VII/Def. 8–10) als Kombinationen aus den beiden grundsätzlichen Zahlarten zu verstehen sind. Wir hatten darüber hinaus bei der ersten Kenntnismahme der Sätze der Lehre gesehen, daß auch diese sich als Sätze über Kombinationen von Zahlen aus geraden und/oder ungeraden Zahlen beschreiben lassen.

Mit den Definitionen der geraden und ungeraden Zahl (VII/Def. 6 und 7) sind also zwei Zahlarten an die Spitze der LvGuU gestellt, aus denen sich die weiteren definierten Zahlarten gesetzmäßig erzeugen lassen und deren Kombinationsgesetzmäßigkeiten Gegenstand der Sätze der Lehre sind. Die LvGuU stellt sich demnach als eine Theorie dar, in der Definitionen Ausgangspunkte beweisender Ableitung sein können, weil sie elementare Bausteine sind, aus denen sich die betrachteten

arithmetischen Gebilde nach den diesen Elementen eigenen Gesetzmäßigkeiten zusammensetzen lassen und auf die sie sich folglich auch wieder zurückführen lassen.

Hier ist vielleicht eine kleine Abschweifung zu einem sprachlichen Tatbestand am Platze. Das berühmte mathematische Werk Euklids trägt den Titel „Elemente“. Dies war, wie schon erwähnt, ein damals üblicher Titel für ein mathematisches Buch. Das griechische Wort für „Element“ ist στοιχεῖον. Στοιχεῖον ist zugleich das griechische Wort für „Buchstabe“. In dieser Bedeutung bezeichnete der Plural (στοιχεῖα) das „Alphabet“. Dieser sprachliche Sachverhalt ist nun insofern aufschlußreich, als er ein Modell erkennen läßt, das der Gründung der wissenschaftlichen Mathematik auf Elemente Orientierung gibt, nämlich das Modell einer Aggregation aller mathematischen Gebilde aus gewissen invarianten Elementen so, wie sich das Universum der Sprache als geschriebene aus den wenigen unveränderlichen Buchstaben des Alphabets aggregieren läßt³².

Im Unterschied zu den Buchstaben lassen sich die gerade und ungerade Zahl allerdings ihrerseits in Elemente auflösen, wie sich unmittelbar daran zeigt, daß sie durch ihr Verhalten gegenüber einer bestimmten Divisionsoption definiert sind. Sie stellen selbst Aggregationen dar. Für die spezifischen Aggregationsgesetzmäßigkeiten jedoch, die den Inhalt der LvGuU ausmachen, sind sie zugleich konstitutive Elemente, deren Rückführung auf noch Elementareres, nämlich auf die „Einheit“ (VII/Def. 1), die Lehre selbst auflösen würde. In bezug auf diese ihre Funktion für die LvGuU bezeichnen wir sie im folgenden als Elemente, auch wenn sie selbst aggregiert sind.

Angesichts der obigen Überlegungen zu den Ausgangsannahmen eines μέθης liegt indessen die Frage nahe, inwiefern die Definitionen dieser Elemente der LvGuU nicht bewiesen werden müssen. Sind sie selbstverständlich? „Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt“ (VII/Def. 6) – läßt sich denn nicht jede Zahl halbieren? „Und ungerade die, die sich nicht halbieren läßt, oder die sich um eine Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet.“ (VII/Def. 7) Wir sehen, unbezweifelbar wahr sind diese Definitionen nur unter der Voraussetzung, daß nur die ganzen Zahlen als Gegenstand dieser Lehre zugelassen sind.

Wie die Definitionen (VII/Def.) 1 und 2 zeigen, ist dies nicht nur eine spezielle Voraussetzung für die LvGuU; vielmehr stehen alle Theoreme dieser arithmetischen Bücher unter der Voraussetzung, daß nur die ganzen Zahlen zugelassen sind. Wir haben es also nicht nur bei der LvGuU, sondern generell in Euklids „Elementen“ mit einer Arithmetik zu tun, die keine Bruchzahlen kennt.

Wie ist das zu erklären? Sollten die Griechen keine Bruchzahlen gekannt haben, obwohl sie ausgedehnte Beziehungen zu Völkern hatten, denen Bruchzahlen geläufig waren? Natürlich nicht. Schon in der archaischen Zeit kannten die Griechen Bruchzahlen, was sich sprachlich zum Beispiel an den Termini der alten Musiktheorie zeigen läßt (ἡμιόλιον: das „Anderthalbfache“, ἐπίτριτον: das „Eineindrittelfache“ usw.); und die griechischen Kaufleute und Handwerker haben sie in ihrer Praxis selbstverständlich verwandt³³. Wenn die wohlbekannten Bruchzahlen bis zu Archimedes, der sich ihrer wieder bediente, aus der wissenschaftlichen Arithmetik verbannt waren, muß das besondere Gründe gehabt haben.

Das Aggregationsmodell und die Rettung der Arithmetik

Die Zahldefinition zeigt uns den Ausschluß der Bruchzahlen: „Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge.“ (VII/Def. 2) Also nur Vielfache der Eins fallen überhaupt unter den Begriff der Zahl. Diese Definition des Zahlbegriffs impliziert, daß die Eins selbst keine Zahl ist. Der strategische Zweck dieser Aussonderung der Eins aus dem Reich der Zahlen ist leicht zu entdecken: Wäre die Eins eine Zahl, so hätte sie wie jede Zahl auch Teile (vgl. VII/Def. 3) beziehungsweise „Mengen von Teilen“ (VII/Def. 4). Der Ausschluß der Bruchzahlen aus der wissenschaftlichen Arithmetik und die ihre Unteilbarkeit sichernde Sonderstellung der Eins stehen sachlich im engsten Zusammenhang. Die Unteilbarkeit der Eins führt uns aber auf die Gründe für diese Eigentümlichkeit der wissenschaftlichen Arithmetik des klassischen Griechenland.

A. Szabó hat in diesem Zusammenhang auf die Auskünfte hingewiesen³⁴, die aus einer bekannten Stelle in Platos „Politeia“ zu erhalten sind. Die Stelle lautet:

„Denn du weißt doch, die sich hierauf (sc. die Arithmetik) verstehen, wenn einer die Einheit selbst im Gedanken zerschneiden will, wie sie ihn auslachen und es nicht gelten lassen; sondern wenn du sie zerschneidest, vervielfältigen jene wieder, aus Furcht, daß die Einheit etwa nicht als Eins, sondern als viele Teile angesehen werde. (...) Was meinst du nun, Glaukon, wenn jemand sie fragte: Ihr Wunderlichen, von was für Zahlen redet ihr denn, in welchem die Einheit so ist, wie ihr sie wollt, jede ganz jeder gleich und nicht im mindesten verschieden, und keinen Teil in sich habend? Was, denkst du, würden sie antworten? – Ich denke dieses, daß sie von denen reden, welche man nur denken kann, unmöglich aber auf irgendeine andere Art handhaben.“³⁵

Diese Stelle verweist auf eine Argumentation, die der so rätselhaft klingenden Definition der „Einheit“ – „Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird“ (VII/Def. 1)³⁶ – zugrunde lag. Wie es scheint, ist die Unteilbarkeit der Eins bestritten worden („Ihr Wunderlichen, von was für Zahlen redet ihr denn . . .“), und zwar offenbar mit Hinweis auf die selbstverständlich mögliche Teilbarkeit aller Dinge. Und ebenso geht aus dieser Stelle hervor, wie der Einwand abgewehrt wurde: „... daß sie von denen (den Zahlen, d. Verf.) reden, welche man nur denken kann“.

Die Abwehr des Einwandes hebt zunächst den rein gedanklichen Charakter der wissenschaftlichen Arithmetik hervor; alles Anschauliche und Vorstellungshafte ist vom Zahlbegriff der wissenschaftlichen Arithmetik fernzuhalten³⁷. Es leuchtet auch sofort ein, daß diese Hervorhebung etwas mit der Abwehr der Teilbarkeit der Eins zu tun hat; von jeder vorgestellten oder gar dinglich repräsentierten Größe läßt sich sofort zeigen, daß sie teilbar ist. Dagegen leuchtet es zunächst gar nicht ein, warum nicht auch von einer nur gedachten Größe gilt, daß sie teilbar ist. Das Argument kann nur überzeugt haben, wenn gezeigt wurde, daß sich die „Einheit“ nur als unteilbar denken läßt.

Nun ist bekannt, daß die Eleaten, auf die sich Plato positiv wie auf keine vorsokratische philosophische Strömung sonst bezieht, genau dies zu zeigen versucht haben. Zenon hatte zu beweisen versucht, daß man sich zwangsläufig in Widersprüche verwickelt, wenn man davon ausgeht, daß „Viele“ ist³⁸. Zenon expliziert und verteidigt damit Parmenides, der in seinem Lehrgedicht das wahrhafte, nur dem reinen Denken erfassbare „Seiende“ als „eins“³⁹ und „unteilbar“⁴⁰ bestimmte.

Wir sehen also, daß der Unteilbarkeit der „Einheit“ *philosophische* Argumentationen zugrunde lagen. Schon oben war zu Zenons Paradoxie über das „Viele“ bemerkt worden, daß sie die Möglichkeit der Arithmetik fundamental in Frage stellt. An den ersten beiden Definitionen (VII/Def. 1 und 2) können wir nun studieren, wie die pythagoreischen Mathematiker des 5. Jahrhunderts v. u. Zt., die sich den eleatischen Argumenten offenbar nicht verschlossen, einen Zahlbegriff konzipierten, der den eleatischen Lehren Rechnung trägt und zugleich sicherstellt, daß Arithmetik möglich ist. Sie faßten die „Einheit“ als unteilbar und definierten die Zahlen als Zusammensetzungen aus dieser unwandelbaren und unteilbaren „Einheit“. Auf diese Weise kann keine Teilungsoperation, die mit den definitorisch zugelassenen Zahlen vorgenommen wird, die Unteilbarkeit der „Einheit“ tangieren. Aber es gibt nicht nur eine „Einheit“, sondern viele.

Der Kompromißcharakter dieser Lösung tritt besonders deutlich in

einer Charakterisierung der Mathematik durch Plato hervor, über die Aristoteles berichtet:

„Ferner erklärte er, daß außer dem Sinnlichen und den Ideen die mathematischen Dinge existierten, als zwischen inne liegend, unterschieden vom Sinnlichen durch ihre Ewigkeit und Unbeweglichkeit, von den Ideen dadurch, daß es der mathematischen Dinge viel gleichartige gibt, während jede Idee nur eine, sie selbst, ist.“⁴¹

Diese Rettung der Arithmetik durch die pythagoreischen Mathematiker des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. zeigt uns das den Definitionen der LvGuU abgelesene Aggregationsmodell als Fundamentalstruktur dieser Arithmetik: Zahlen sind Zusammensetzungen der „Einheit“ und in diese wieder auflösbar. Die „Einheit“ bleibt in allen Zahlen sich selbst gleich; sie ist invariantes Element, das – anders als die Elemente der LvGuU, die gerade und die ungerade Zahl – nicht wieder in grundlegendere Elemente zerlegt werden kann. Ob nun freilich die beweisende Ableitung in nichts weiter als der Rückführung auf invariante Elemente besteht, bleibt noch zu untersuchen.

Vorläufig haben wir festzuhalten, daß wir mit dem Aggregationsmodell als Fundamentalstruktur der wissenschaftlichen Arithmetik des klassischen Griechenland ein erstes charakteristisches Moment der beweisenden Theorie vor uns haben. Bei der beweisenden Theorie handelt es sich nicht einfach um die Ableitung des Konkreten und Mannigfaltigen aus abstrakten Prinzipien. Entscheidend ist vielmehr, daß diese Prinzipien als Elemente gedacht werden, aus denen das Konkrete und Mannigfaltige zusammengesetzt, aggregiert ist.

Aggregationsmodell und Naturphilosophie

Es läßt sich nun an der griechischen Naturphilosophie zeigen, daß dies Aggregationsmodell als Fundamentalstruktur rationaler Erklärungen keineswegs nur der wissenschaftlichen Mathematik eigentümlich war, sondern daß es vielmehr um die Wende vom 6. zum 5. Jahrhundert v. u. Zt. allgemein den Status eines Grundmodells der Theoriebildung erlangte.

Für die ionische Naturphilosophie – Thales, Anaximander, Anaximenes, Heraklit –, die das 6. Jahrhundert v. u. Zt. bestimmte, ist festzustellen, daß ihre Prinzipien gerade nicht solche invarianten Elemente waren. Grob vereinfacht läßt sich vielmehr sagen, daß die Prinzipien der ionischen Naturphilosophie Prinzipien sind, weil und insofern sie sich in ihrer Variabilität, in ihren Welt-bildenden Metamorphosen

identisch erhalten, nicht an eine Bestimmung gebunden sind und so nicht mit den Veränderungen zugrunde gehen. Was von fester Bestimmung, also invariant ist, das gilt ihnen gerade als das Vergängliche und also nicht als Prinzip.

Für die Naturphilosophie des 5. und 4. Jahrhunderts v. u. Zt. – Empedokles, Leukipp, Demokrit, Aristoteles – läßt sich dagegen zeigen, daß sie – wiederum grob vereinfacht – die konkrete Mannigfaltigkeit auf invariante Elemente oder Stoffe beziehungsweise auf Grundkombinationen solcher invarianten Elemente oder Stoffe zurückführt⁴².

Die Durchsetzung des Aggregationsmodells als Fundamentalstruktur rationaler Erklärung läßt sich zeitlich nicht genauer bestimmen als mit jenem vagen „um die Wende vom 6. zum 5. Jahrhundert v. u. Zt.“. Zur äußerlichen Charakterisierung dieser Zeit sei an die Eroberung Ioniens durch die Perser, an die Perserkriege selbst, die Erscheinung der Tyrannis, ihre Ablösung durch die Demokratie in Athen, nicht zuletzt aber auch an die wachsende Bedeutung der griechischen Kolonien in Süditalien und Sizilien erinnert. Philosophiegeschichtlich kommt eben den „Schulen“ der Pythagoreer und Eleaten bei der Durchsetzung dieser fundamentalen Erklärungsstruktur zentrale Bedeutung zu, beide in den griechischen Pflanzstädten Süditaliens beheimatet.

Negation des Werdens

Am sachlichen Gehalt der Lehre der Eleaten wird dies unmittelbar deutlich. Die Negation des Werdens, des Entstehens und Vergehens wie der Veränderung, steht im Mittelpunkt ihrer Philosophie⁴³. Die Pythagoreer faßten Bewegtes und Unbewegtes als polare Gegensätze auf, wobei das Bewegte auf die Seite fällt, die den Pythagoreern für das „Böse“ steht⁴⁴. Bei ihnen liegt somit nicht allein eine metaphysisch-trennende Gegenüberstellung von Werdendem und Invariantem vor, sondern darüber hinaus bewerten sie in dieser Gegenüberstellung das Invariante positiv.

Dennoch liegt in dieser Lehre der älteren Pythagoreer eine gewisse Ambivalenz, auf die schon Parmenides hinwies⁴⁵. Wenn sich unter ihren Gegensatzpaaren solche von Zahlen finden – unter anderen das Gegensatzpaar der geraden und ungeraden Zahl⁴⁶ –, wenn sie also die Seiten ihrer polaren Gegensätze auch als verschiedene Zahlen auffaßten⁴⁷, dann ist bei ihnen offenbar nicht nur das Invariante Element, sondern ebenso das Bewegte. Indem aber das Bewegte in diesen polaren Gegenüberstellungen als Element fixiert ist, kennt – wie schon Ari-

stoteles anmerkte⁴⁸ – das aus diesen Elementen gebildete Ganze kein Entstehen und Vergehen.

Die älteren Pythagoreer, die die Arithmetik als eine von sinnlichen Vorstellungen gereinigte Naturlehre verstanden⁴⁹, lassen also die Schwierigkeiten und Ambivalenzen des Übergangs zu einem neuen Grundmodell erklärender Theorie sehr deutlich erkennen. Zu diesen Ambivalenzen gehört auch, daß in der pythagoreischen Auffassung des Wesens der Dinge als Zahl und des Universums als „Harmonie und Zahl“⁵⁰, das heißt wohl: ein Gesamt harmonischer Verhältnisse, neben der Aggregations- oder Zusammensetzungsvorstellung zugleich die von zu qualifizierenden Zusammensetzungsverhältnissen wirksam war.

Im übrigen ist zu beachten, daß nicht erst bei den Eleaten, sondern schon bei den älteren Pythagoreern die Abstraktion vom Werden untrennbar mit der Negation des Sinnlichen, Anschaulichen und Vorstellungshaften, ja Materiellen überhaupt verbunden war. Eine andere Eigentümlichkeit dieser philosophischen Negation des Werdens und der von ihr unabtrennbaren Negation des Anschaulichen und Materiellen wird uns später noch beschäftigen, nämlich die Argumentationsweise mittels des indirekten Beweises.

Wir haben also in den Lehren der Pythagoreer und Eleaten Versuche vor uns, das Invariante als universelles philosophisches Prinzip zu fundieren. Im Mittelpunkt steht bei dieser Fundierung die Abstraktion vom Werden. Diese ist als konstitutives Prinzip der beweisenden Theorie anzusehen, wie sie das klassische Griechenland ausbildete. Die LvGuU, dieses früheste Exemplar der beweisenden Theorie, entstammt also keinesfalls zufällig einer der philosophischen Strömungen, die das konstitutive Prinzip der beweisenden Theorie zuerst philosophisch ausarbeiten versuchten, nämlich die Negation des Werdens.

Wir nannten das Aggregationsmodell ein Fundamentalmodell der beweisenden Theorie, die im klassischen Griechenland entwickelt und die zuerst in der wissenschaftlichen Mathematik durch die Pythagoreer des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. realisiert wurde. Wir haben auch einen Blick auf den philosophischen Kontext dieses Modells geworfen und die Negation des Werdens als ein konstitutives Prinzip für diese beweisende Theorie bezeichnet. Die Herausarbeitung dieser Negation markiert zugleich eine tiefgreifende Wandlung des philosophischen Weltverständnisses an der Wende vom 6. zum 5. Jahrhundert v. u. Zt.

Diese philosophische Wende ist zweifellos eine wesentliche Bedingung für den in der wissenschaftlichen Arithmetik realisierten Typus beweisender Theorie. Aber sie ist nur eine Bedingung; aus ihr läßt sich die Realisation der beweisenden Theorie in der wissenschaftlichen

Arithmetik nicht ableiten und nicht verstehen, vor allem nicht die Möglichkeit dieser Realisation. Ein Verständnis davon zu erlangen ist aber wie gesagt deswegen so wichtig, weil ja die wissenschaftliche Mathematik, so sehr auch ihre erste, ihre pythagoreische Gestalt im einzelnen von jener philosophischen Situation geprägt ist, nicht auf diese Situation reduziert werden kann, wie sich daran zeigt, daß sie die philosophische Konstellation des klassischen Griechenland überlebte.

Versuchen wir deshalb als nächstes, durch die Rekonstruktion der LvGuU etwas über die Möglichkeit des Übergangs zur wissenschaftlichen Arithmetik herauszufinden. Es geht also um die – wie wir uns oben ausdrücken – objektive Grundlage der wissenschaftlichen Mathematik, die deren Entstehen und Überdauern ermöglicht.

3. Die Entwicklung der Lehre zur beweisenden Theorie

3.1 Die $\psi\eta\phi\alpha\iota$ -arithmetische Lehre

Pythagoreischer Gebrauch der Rechensteine

Die LvGuU ist in der Form, die Euklid überliefert, rein arithmetisch. Nun wissen wir – im Prinzip seit Aristoteles –, daß sich die älteren Pythagoreer mit figurierten oder Polygonalzahlen beschäftigten, die sie mit Rechensteinen ($\psi\eta\phi\alpha\iota$) zu legen pflegten. Es kann weiterhin als sicher gelten, daß auch die Sätze der LvGuU anfänglich an mit $\psi\eta\phi\alpha\iota$ gelegten Zahlen demonstriert wurden. Die schon erwähnte Anspielung des Komödiendichters Epicharmos lautet nämlich:

„Wenn einer zu einer geraden Zahl, meinethalben auch einer ungeraden, einen Stein ($\psi\alpha\phi\omicron\nu$: d. i. die dorische Form von $\psi\eta\phi\omicron\nu$) zulegen oder von den vorhandenen einen wegnehmen will, meinst du wohl, sie bleibe dieselbe?“⁵¹

$\Psi\eta\phi\alpha\iota$ sind, wie gesagt, Rechensteine. Sie gehören zur alltäglichen Rechenpraxis der Griechen, nämlich zum Rechnen mit Hilfe von Rechenbrettern ($\acute{\alpha}\beta\acute{\alpha}\kappa\iota\omicron\nu$, lat: abacus). Auf diesen Brettern, von denen die Archäologen ein marmornes Prachtstück, die Salaminische Rechentafel, gefunden haben⁵², wurden durch Linien Spalten gebildet, die den Stellenwert der $\psi\eta\phi\alpha\iota$ bestimmten, die in sie hineingelegt wurden. Das Operieren mit diesen Mitteln, $\acute{\alpha}\beta\acute{\alpha}\kappa\iota\omicron\nu$ und $\psi\eta\phi\alpha\iota$, und das Rechnen

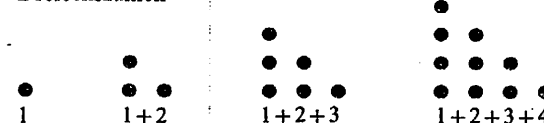
waren offenbar ein und dasselbe, wie das griechische Zeitwort für „rechnen“ zeigt: $\psi\eta\phi\acute{\iota}\zeta\epsilon\iota\nu$, wörtlich: „steineln“.

Wenn die älteren Pythagoreer mit den $\psi\eta\phi\alpha\iota$ figurierte Zahlen legten, so gilt es als erstes zu sehen, daß sie die $\psi\eta\phi\alpha\iota$ gewissermaßen zweckentfremdeten. Sie benutzten sie dabei nämlich nicht zum Rechnen. Sie machten sich vielmehr den Umstand zunutze, daß es gegenständliche Mittel generell auszeichnet, nicht an einen bestimmten Verwendungszweck gebunden zu sein. Sie bedienten sich des gegenständlichen Mittels der alltäglichen Rechenpraxis für einen anderen Zweck, nämlich für die Demonstration arithmetischer Eigentümlichkeiten.

Um uns davon eine Vorstellung zu verschaffen, sei an zwei Beispielen die heuristische Leistungsfähigkeit dieser pythagoreischen Verwendung der $\psi\eta\phi\alpha\iota$ vorgeführt.

1. Beispiel⁵³: Die Summenformel für die arithmetische Reihe der natürlichen Zahlen ist durch Legung von Dreieckszahlen und ihre Verdoppelung auffindbar – vgl. Abbildung 7.

Dreieckszahlen



Verdoppelung

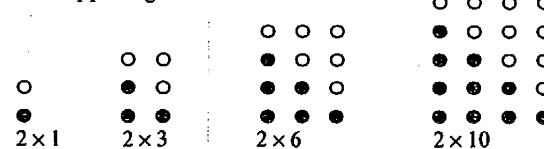


Abbildung 7: Dreieckszahlen und Heteromeke

Die Seiten der Rechteckzahlen, die durch Verdoppelung der Dreieckszahlen entstehen, differieren um einen Stein. Solche Rechteckzahlen nannten die Pythagoreer $\epsilon\tau\epsilon\rho\omicron\mu\eta\kappa\epsilon\varsigma$ ⁵⁴ (Heteromek). Ihre Formel ist

$$n(n+1).$$

Nun sind die ursprünglichen Dreiecke die Hälfte eines Heteromeks; ihre Formel ist also

$$\frac{1}{2} n (n + 1).$$

Da nun diese Dreieckszahlen die Summe der natürlichen Zahlen darstellen, ist auch die Formel für diese Summe gefunden:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} n (n + 1).$$

2. Beispiel⁵⁵: Durch eine bestimmte Legung von Quadratzahlen ist zu entdecken, daß die arithmetische Reihe der ungeraden Zahlen, ausgehend von der 1, die Reihe der Quadratzahlen ergibt – vgl. Abbildung 8.

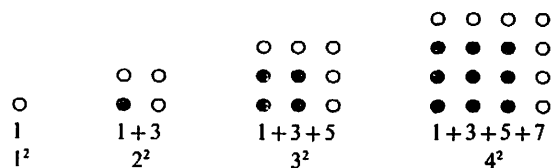


Abbildung 8: Quadratzahlen

Es wird jeweils um die gelegte Quadratzahl ein Zahlenwinkel so gelegt, daß wieder eine Quadratzahl entsteht. Diesen Zahlenwinkel nannten die Griechen γνῶμων⁵⁶ (Gnomon). Er hat die Formel

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Die Gnomone bilden aber in ihrer Aufeinanderfolge die Reihe der ungeraden Zahlen.

Daß die Pythagoreer diese Entdeckungen tatsächlich gemacht haben, wir ihnen also nicht etwa uns mögliche Einsichten unterschieben, geht unzweifelhaft daraus hervor, daß in der dem Pythagoreer Alkmaion zugeschriebenen Liste der zehn pythagoreischen Gegensatzpaare⁵⁷ das Quadrat der ungeraden und das Heteromek der geraden Zahl zugeordnet ist⁵⁸. Es gibt noch mehr solcher Belege für die heuristische Leistungsfähigkeit der ψῆφοι-Arithmetik⁵⁹.

Wir sehen also, daß die älteren Pythagoreer die ψῆφοι nicht zum Rechnen benutzten. Zugleich haben wir ein konkretes Beispiel vor uns, das uns besser verstehen läßt, was die Pythagoreer wohl meinten, wenn sie ihre Beschäftigung mit Mathematik – wie schon erwähnt – eine ἐλευθέρα παιδεία, eine „freie Lehre“ nannten. Diese Beschäftigung mit den ψῆφοι war frei von den praktischen Zwecksetzungen, unter denen das gewöhnliche „Steineln“ steht. Wenn so zwar feststeht, daß die älteren Pythagoreer die ψῆφοι nicht zum Rechnen benutzten, so ist jedoch noch nicht klar, wozu sie sie eigentlich als Mittel verwandten. Ich ge-

brauchte bisher die Formulierung „demonstrieren“ für diese „freie“ Verwendungsweise der ψῆφοι. Wie ist das zu verstehen?

Moritz Cantor verstand den pythagoreischen Gebrauch der ψῆφοι als „figürliche Versinnlichungen der nach unserer heutigen Auffassung abstrakten Zahlbegriffe“⁶⁰. Wie ist das gemeint? Besaßen die Pythagoreer bestimmte, von unseren heutigen sicherlich abweichende, aber doch bereits rein gedankliche Zahlbegriffe und darüber hinaus arithmetische Theorien – etwa, wie in unserem zweiten Beispiel, über den Zusammenhang zwischen der mit der 1 beginnenden arithmetischen Reihe der ungeraden Zahlen und der Reihe der Quadratzahlen –, die sie dann, vielleicht aufgrund des den Griechen oft nachgesagten Hangs zum Anschaulichen, mit ψῆφοι „figürlich versinnlichten“? Wohl kaum.

„Es ist ein weitverbreitetes Vorurteil“, schrieb K. Reidemeister⁶¹, „das wesentliche Merkmal der griechischen Mathematik sei ihre Anschaulichkeit. (...) Richtig ist vielmehr, daß sich in der griechischen (pythagoreischen) Mathematik die Umwendung vom Anschaulichen zum Begrifflichen vollzieht.“ Und wir selbst bemerkten bereits zu dem philosophischen Kontext, in dem sich die beweisende Theorie herausbildete, daß nicht erst bei den Eleaten, sondern schon bei den älteren Pythagoreern die Negation des Werdens aufs engste mit der Abwehr des Sinnlichen und Anschaulichen zusammenhing. Es scheint deshalb nicht denkbar, daß Angehörige dieser „Schule“ Zahlen oder arithmetische Theoreme „figürlich versinnlichten“, wenn sie sie bereits rein gedanklich zu fassen vermochten. Plausibel erscheint vielmehr allein die Annahme, daß die ψῆφοι-Arithmetik der älteren Pythagoreer einer Stufe ihrer „freien“ mathematischen Beschäftigung angehört, die der rein gedanklichen Arithmetik vorausging, und daß sie von der ψῆφοι-Arithmetik abliefen, sobald sie sich zu einer rein gedanklichen Arithmetik durchgearbeitet hatten.

Für diese Annahme spricht auch folgender Umstand. Die pythagoreische Arithmetik, die uns Euklid überlieferte, enthält von der alten ψῆφοι-Arithmetik lediglich die LvGuU – natürlich in rein arithmetischer Form. Dagegen finden sich in den „Elementen“ Euklids nicht die ψῆφοι-arithmetisch entdeckten arithmetischen Gesetzmäßigkeiten, von denen wir zwei Beispiele anführten. Das scheint mir zu zeigen, daß die Arithmetik der klassischen Zeit nicht in der Lage war, diese ψῆφοι-arithmetisch gefundenen Gesetzmäßigkeiten in einer rein arithmetischen Theorie darzustellen und zu beweisen. Wenn dem aber so ist, kann natürlich von einer „figürlichen Versinnlichung“ rein arithmetischer Theorien keine Rede sein. Es scheint vielmehr so gewesen zu sein,

daß beim Übergang zur reinen Arithmetik höchst interessante Entdeckungen der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik liegen gelassen wurden, weil es nicht gelang, sie rein arithmetisch zu beweisen.

Wenn das oben zitierte Epicharmos-Fragment darauf hindeutet, daß die LvGuU $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch demonstriert wurde, dann müssen wir also aufgrund dieser Überlegungen davon ausgehen, daß auch die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetische LvGuU nicht eine „figürliche Versinnlichung“ der rein arithmetischen Lehre war. Vielmehr muß es sich dabei um eine ältere Form der Lehre handeln, die später in die von Euklid tradierte rein arithmetische Lehre überführt wurde. Es ist auch seit O. Beckers Rekonstruktion der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischen LvGuU⁶² kein Zweifel möglich, daß die Sätze der Lehre mittels der Legung von Flächenzahlen mit $\psi\eta\phi\omicron\iota$ gefunden und in ihrer Richtigkeit faktisch aufgezeigt werden können.

Es ist also zwischen einer zu rekonstruierenden $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischen LvGuU und der von Euklid tradierten rein arithmetischen LvGuU bei den Pythagoreern zu unterscheiden. Wir können weiterhin davon ausgehen, daß die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik eine Vorstufe und im Fall der LvGuU die Vorläuferin der reinen Arithmetik ist. Der Übergang von der einen zur anderen ist aber nichts anderes als die Entstehung der wissenschaftlichen Mathematik im Falle der elementaren Arithmetik.

Demonstration der Lehre mit $\psi\eta\phi\omicron\iota$

Sehen wir uns zunächst an, wie die Sätze der LvGuU $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch zu finden sind. Aus Platzgründen beschränke ich mich dabei auf die ersten drei Sätze der Lehre (IX/21–23).

Die Definitionen der geraden und ungeraden Zahl (VII/Def. 6 und 7) unterscheiden die beiden Zahlarten einerseits nach ihrem Verhalten gegenüber der Halbierung und andererseits danach, daß sie um eine „Einheit“ differieren. Um beides zum Ausdruck zu bringen, lege ich gerade und ungerade Zahl folgendermaßen



und symbolisiere diese Legung mit folgenden Bildern:



Die ersten drei Sätze der Lehre lassen sich dann $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch so demonstrieren, wie es die Abbildung 9 zeigt.

Wir sehen also, daß und wie die Sätze der LvGuU $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch zu finden waren. Wir sehen zugleich etwas weiteres. Es ist bereits ausgeführt worden, daß die gerade und ungerade Zahl Elemente der LvGuU darstellen, allerdings Elemente, die ihrerseits in Elemente zerlegbar sind. Dieser Sachverhalt tritt uns hier anschaulich entgegen: Die Gebilde dieser Elemente sind auflösbar in $\psi\eta\phi\omicron\iota$; in der LvGuU fungieren aber nicht die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ als Elemente, sondern die aus ihnen gebildeten Figurationen der geraden und ungeraden Zahl.

Wenden wir uns einigen Momenten der Durchformung der LvGuU zu einem beweisenden $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ zu.

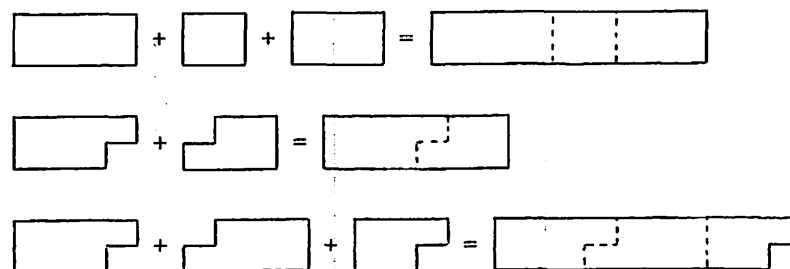


Abbildung 9: $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetische Demonstration von Sätzen der Lehre vom Geraden und Ungeraden

IX/21 Die Summe gerader Zahlen ist gerade.

IX/22 Die Summe einer geraden Anzahl ungerader Zahlen ist gerade.

IX/23 Die Summe einer ungeraden Anzahl ungerader Zahlen ist ungerade.

Einzelne Sätze

Es gibt einen Anhaltspunkt, wie wir uns die erste Stufe der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischen LvGuU vorzustellen haben. Der Anhaltspunkt liegt darin, daß jene mathematisch hochinteressanten Entdeckungen der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik, für die wir einige Beispiele nannten, unverbunden als einzelne Entdeckungen dastehen. So wird es wahrscheinlich auch mit den Gesetzmäßigkeiten gerader und ungerader Zahlen gewesen sein. Irgendwelche Sätze der späteren LvGuU werden die älteren Pythagoreer bei ihrer Beschäftigung mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$ einzeln entdeckt haben, und diese Sätze haben wohl anfangs unverbunden nebeneinander und neben anderen Entdeckungen gestanden, die nicht zur späteren LvGuU gehören.

Die Lehre als strukturiertes Ganzes

Ein Entwicklungsschritt der Lehre drückt sich in der Anordnung aus, in der uns ihre Sätze überliefert sind. Zuerst begegnen uns Sätze, in denen es um die „Zusammensetzung“ gerader und ungerader Zahlen geht (IX/21–23), also Additionssätze vom Typus $G + G = G$; dann Sätze, in denen es um das „Wegnehmen“ dieser Zahlen geht (IX/24–27), also Subtraktionssätze vom Typus $G - G = G$; drittens Sätze, in denen es um die „Vervielfältigung“ dieser Zahlen geht (IX/28 und 29), also Multiplikationssätze vom Typus $G \times G = G$. Was es mit den restlichen Sätzen auf sich hat, ist nicht sogleich zu entscheiden. Wir erkennen aber jedenfalls eine Anordnung nach den Grundrechnungsarten und darüber hinaus, daß diese Anordnung der Sätze eine systematisch variierende Untersuchung der Operationsmöglichkeiten mit den Elementen gerade und ungerade Zahl dokumentiert (vgl. Abbildung 10).

Addition			Subtraktion		
+	Gerade	Ungerade	–	Gerade	Ungerade
Gerade	IX/21	implizit ¹	Gerade	IX/24	IX/27
Ungerade	implizit ¹	IX/22 IX/23	Ungerade	IX/25	IX/26

Multiplikation			Division		
×	Gerade	Ungerade	:	Gerade	Ungerade
Gerade	implizit ²	implizit ³	Gerade	?	
Ungerade	IX/28	IX/29	Ungerade		

Abbildung 10: Das kombinatorische Grundschema der Sätze der Lehre vom Geraden und Ungeraden

¹ Triviale Folgerung aus IX/21 und IX/22

² Triviale Folgerung aus IX/21

³ Triviale Folgerung aus IX/28

Es spricht meines Erachtens nichts gegen die Annahme, daß diese systematische Untersuchung bereits auf $\psi\eta\phi\sigma\iota$ -arithmetischer Stufe erfolgte. Nachdem einzelne Sätze der späteren Lehre bei der Beschäftigung mit $\psi\eta\phi\sigma\iota$ isoliert gefunden worden waren, lag es für Leute, die den „freien“ Charakter ihrer mathematischen Beschäftigung betonten,

gewiß nicht fern, systematisch die Legungs- und Zerlegungsmöglichkeiten gerader und ungerader Zahlen durchzugehen.

Hinsichtlich des Charakters einer solchen systematischen Untersuchung und Anordnung der möglichen Operationen mit den Elementen gerade und ungerade Zahl müssen wir uns aber folgendes klarmachen: Diese Anordnung der Operationsmöglichkeiten zu einem systematischen Ganzen bedeutet auf der Stufe der $\psi\eta\phi\sigma\iota$ -Arithmetik keineswegs, daß die verschiedenen Sätze so zu einem Ganzen verbunden wären, daß sie sich wechselseitig tragen oder auseinander hervorgehen. Was die Begründung angeht, so steht jeder Satz noch einzeln für sich da; seine Richtigkeit ist auf dieser Stufe prinzipiell nur durch die wirkliche erzeugende Operation aufzeigbar. Auf der anderen Seite ist freilich festzuhalten, daß trotz dieser wichtigen Einschränkung die möglichen Erzeugungsoperationen mit den Elementen gerade und ungerade Zahl als ein Ganzes, und zwar als ein struktureller Zusammenhang, in den Blick gekommen sind.

Wenden wir uns jetzt der problematisch gebliebenen letzten Gruppe von Sätzen zu, und zwar – um es uns leichter zu machen – zunächst nur den Sätzen IX/32–34 (vgl. Faltblatt am Ende des Buches).

Es handelt sich – von der reinen Arithmetik her gesehen – um Sätze über die Zerlegung von Zahlen in Faktoren, also durchaus um Sätze der Division. Es macht auch keine Schwierigkeit zu sehen, warum dabei nicht einfach analog zu den Multiplikationssätzen Sätze vom Typus $G : G = G$ aufgestellt werden können. Dies liegt daran, daß es einerseits Zahlen gibt, die gar nicht in Faktoren zerlegt werden können, und andererseits solche, für die verschiedene Zerlegungsmöglichkeiten bestehen, hinsichtlich derer also kein eindeutiges Ergebnis zu erreichen ist.

Umkehrung der Schlußrichtung

Warum ist diese Schwierigkeit gerade den Divisionssätzen eigen? Einen Weg zur Antwort weist die Frage, wodurch sich diese Sätze von den anderen unterscheiden. Denn die anderen Sätze gehen von den Elementen gerade und ungerade Zahl aus und stellen fest, wie die Eigenschaften des durch Addition, Subtraktion oder Multiplikation Erzeugten von den Eigenschaften der Elemente determiniert werden: „Setzt man beliebigviele gerade Zahlen zusammen, so ist die Summe gerade.“ (IX/21) Die Divisionssätze aber gehen umgekehrt von den Eigenschaften des Resultats aus und haben aus ihnen zu erschließen, wie dies Resultat aus Elementen mit der Eigenschaft gerade oder ungerade durch Multi-

plikation zu erzeugen ist: „Eine Zahl, deren Hälfte ungerade ist, ist ausschließlich gerademal ungerade.“ (IX/33) Die Divisionssätze unterscheiden sich also von den anderen in der Schlußrichtung.

Wir stellen fest, daß es bei den Divisionssätzen nicht mehr wie bei den Additions-, Subtraktions- und Multiplikationssätzen um den Schluß von den Elementen und Operationen auf Eigenschaften des Erzeugten geht, sondern umgekehrt um den Schluß von Eigenschaften des Erzeugten auf die Elemente, aus denen es durch die Operation der Multiplikation erzeugbar ist. Das bedeutet aber, daß die durchsichtige Erzeugungslogik der Additions-, Subtraktions- und Multiplikationssätze, bei denen alles aus den vorausgesetzten Elementen und Operationen fließt, hier versagt. Warum versagt sie? Offenbar aus dem Grunde, weil in den Divisionssätzen gerade und ungerade Zahl nicht als vorausgesetzte Elemente den Ausgangspunkt bilden, sondern als arithmetische Gebilde, die aus diesen Elementen erzeugt sind. Als solche Produkte teilen es aber gerade und ungerade Zahl mit allen Produkten, daß die erzeugende Tätigkeit in ihnen als Resultat verschwunden ist. Es gibt keinen direkten Schluß von ihnen auf die sie erzeugende Tätigkeit, deshalb versagt in diesem Falle jene durchsichtige Erzeugungslogik. Das sei gleich noch etwas näher beleuchtet.

Analytische Klassifikation

Es ist natürlich möglich, probierend zu zeigen, daß eine bestimmte Zahl auf diese oder jene Weise durch Multiplikation aus geraden beziehungsweise ungeraden Zahlen erzeugbar ist. In gewissen Fällen wird man auch in der Lage sein, alle Möglichkeiten zu überprüfen. Je größer die Zahl jedoch ist, desto schwieriger wird es, diese probierende Überprüfung praktisch durchzuführen. Für alle ganzen Zahlen ist das Verfahren natürlich nicht mehr durchführbar. Steht mir, wie das in der Antike der Fall war, das mathematische Verfahren der „vollständigen Induktion“ nicht zu Gebote, so kann ich nur dann zu einem Ende kommen, wenn es mir gelingt, die ganzen Zahlen analytisch so in Klassen einzuteilen, daß diese begriffliche Gliederung dann den Rückschluß auf die Erzeugungsmöglichkeiten gestattet.

Eine solche Klassifikation liegt in den Sätzen IX/30–34 tatsächlich vor. Die Sätze IX/32–34 führen für die geraden Zahlen drei im Hinblick auf die Zerlegbarkeit mögliche Klassen auf: Der Satz IX/32 behandelt die Zerlegungsmöglichkeiten der geraden Zahlen, „die durch Verdoppelung von der Zwei aus entstehen“; der Satz IX/33 behandelt in derselben Hinsicht die geraden Zahlen, „deren Hälfte ungerade ist“;

der Satz IX/34 schließlich die Klasse der geraden Zahlen, „deren Hälfte nicht ungerade ist“ und die nicht „durch Verdoppelung von der Zwei aus entstehen“.

Entsprechend explizit klassifizierende Sätze lassen sich für die ungeraden Zahlen nicht finden. Daß es keinen solchen Satz über die ungeraden Zahlen gibt, die Primzahlen sind, ist leicht einzusehen. Diese Zahlen sind überhaupt nicht in gerade und ungerade Zahlen zu zerlegen, weil für die Pythagoreer die „Einheit“ keine Zahl ist und also auch nicht gerade oder ungerade sein kann.

Verwundern mag es dagegen, daß sich auch kein Satz mit den Zerlegungsmöglichkeiten der Klasse der ungeraden Zahlen befaßt, die nicht Primzahlen sind. Die Zerlegungsmöglichkeit dieser Klasse sind allerdings implizit in den Beweisen der Sätze IX/31, 33 und 34 enthalten. Diese Beweise setzen voraus, daß sich eine ungerade Zahl, die nicht Primzahl ist, nur in ungerade Faktoren zerlegen läßt. Daß diese Zahlklasse implizit bleibt, scheint darin begründet, daß ihre Zerlegbarkeit für die Pythagoreer nicht eigens bewiesen werden mußte, sondern sich aus der Umkehrung der Multiplikationssätze (IX/28 und 29) ergab: Entsteht nämlich aus der Multiplikation einer geraden mit einer ungeraden Zahl (und – das impliziert der Satz ebenfalls – aus der Multiplikation einer geraden mit einer geraden) immer eine gerade Zahl (IX/28) und immer eine ungerade aus der Multiplikation einer ungeraden mit einer ungeraden (IX/29), so scheint die (allerdings einen indirekten Beweis implizierende) Umkehrung selbstverständlich, daß eine ungerade Zahl, die nicht Primzahl ist, nur in ungerade Faktoren zerlegt werden kann⁶³.

Wir können also konstatieren, daß in den Sätzen IX/30–34 – explizit oder implizit – fünf Zahlklassen im Hinblick auf ihre Zerlegbarkeit unterschieden werden, das heißt hinsichtlich ihrer Erzeugbarkeit aus geraden und/oder ungeraden Zahlen mittels der Multiplikation; drei Klassen für die geraden Zahlen und zwei für die ungeraden. Es liegt auch auf der Hand, daß mit diesen fünf Klassen alle ganzen Zahlen erfaßt werden können.

Vollständige Klassifikation und bestimmte Negation

Die betrachtete Klassifikation der ganzen Zahlen erfolgt unter anderem nach dem Kriterium der Vollständigkeit, das heißt danach, daß die gebildeten Klassen zusammen alle ganzen Zahlen erfassen. An der expliziten Klassifikation der geraden Zahlen hinsichtlich ihrer Zerlegbarkeit (Sätze IX/32–34) läßt sich nun gut studieren, wie diese Vollständigkeit

erreicht und gesichert wird. Die Sätze IX/32 und 33 exponieren je eine im Hinblick auf ihre Zerlegbarkeit besondere Art gerader Zahlen. Der Satz IX/34 exponiert eine dritte besondere Art, und zwar ist sie durch die Negation der beiden ersten Arten bestimmt; es ist die Art der geraden Zahlen, die nicht unter die beiden anderen Arten fallen. (IX/34: „Wenn eine (gerade) Zahl weder zu denen gehört, die durch Verdoppelung von der Zwei aus entstehen (IX/32), noch eine ungerade Zahl zur Hälfte hat (IX/33), dann (...)“.) Mit diesem Negationsverfahren wird zwangsläufig Vollständigkeit erzielt: Es kann kein Exemplar der Gattung gerade Zahl gedacht werden, das nicht unter eine der Arten fällt. – Für die beiden impliziten Arten der ungeraden Zahlen läßt sich ohne weiteres dasselbe zeigen.

Diese Klassifikationslogik mag trivial und keiner besonderen Hervorhebung wert scheinen. Daß sie jedoch in einem konkreten Fall keineswegs eine triviale Sache ist, zeigt unser Beispiel schon beim nächsten Schritt. Es muß für diese Logik gewährleistet sein, daß jedes Exemplar der Gattung ganze Zahl entweder unter die Art der geraden Zahl fällt oder unter die der ungeraden. Ist das selbstverständlich? Und vor allem: Ist das von der Warte der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik aus selbstverständlich?

Lege ich gerade und ungerade Zahl so wie oben,

also $\bullet \bullet \bullet \bullet$ und $\bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$
 $\bullet \bullet \bullet \bullet$ $\bullet \bullet \bullet \bullet$

so stehen zwei verschiedene Flächenzahlen nebeneinander. Daß sie sich nicht als bestimmte Negationen zueinander verhalten, ist leicht zu sehen. Ich kann nämlich daneben ganze Zahlen in weiteren Formen legen, etwa als Dreiecke oder als Fünfecke. Dann zeigt sich, daß die Verschiedenheit der gelegten Zahlen gleichrangig ist; der Unterschied zwischen den beiden zuerst gelegten Gebilden ist in keiner Weise ausgezeichnet.

Noch deutlicher wird das an den sprachlichen Bezeichnungen für „gerade“ und „ungerade“. Denn anders als im Deutschen, wo die zweite Bezeichnung durch Negation der ersten gebildet ist, zeigen die griechischen Wörter für „gerade“ und „ungerade“ bloß das beziehungslose Verhältnis der Verschiedenheit. $\acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma$ (gerade) heißt ursprünglich soviel wie „eben“, geht also auf die Gestalt. $\pi\epsilon\rho\iota\sigma\sigma\acute{o}\varsigma$ (ungerade) heißt soviel wie „überzählig“, geht also auf Größe und Anzahl. Die Wörter liegen auf verschiedenen Qualitätsebenen und können deswegen nicht im Verhältnis der Negation stehen.

Ganz anders liegt die Sache bei den Definitionen der geraden und ungeraden Zahl, die dem VII. Buch der „Elemente“ Euklids vorange-

stellt sind. „Gerade ist die Zahl, die sich halbieren läßt.“ (VII/Def. 6) „Und ungerade die, die sich nicht halbieren läßt, oder die sich um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet.“ (VII/Def. 7) Durch diese Formulierung stehen gerade und ungerade Zahl nicht länger im beziehungslosen Verhältnis der Verschiedenheit, sondern im Verhältnis der Negation; sie beziehen sich aufeinander. Unter der erörterten Voraussetzung, daß keine Bruchzahlen zugelassen sind, ergibt sich auch sofort aus diesen Definitionen, daß jede Zahl entweder gerade oder ungerade sein muß, daß also das Kriterium der Vollständigkeit erfüllt ist.

Wie sind nun diese Definitionen zu verstehen? Dokumentieren sie vielleicht, daß die Pythagoreer den formallogischen Mechanismus vollständiger Klassifikation durch Negation erkannt und entsprechend ihre gerade und ungerade Zahl sprachlich so gefaßt haben, daß sie sich als Negationen aufeinander beziehen? Oder bilden die Formulierungen der Definitionen ein wirkliches Negationsverhältnis ab, stellen also eine bestimmte Negation dar?

Wären gerade und ungerade Zahl nur nach ihrem Verhalten gegenüber der Halbierung definiert, müßte die Frage vielleicht offen bleiben. Das Unterscheidungskriterium, daß sich die eine halbieren läßt und die andere nicht, betrifft eventuell eine bloße Verschiedenheit, die nur sprachlich als ein Negationsverhältnis ausgedrückt wird. Anders verhält es sich mit dem zweiten Teil der Definition 7: Ungerade ist die Zahl, „(...) die sich um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet“ (VII/Def. 7). Hier ist die Handlung angesprochen, mit der sich aus einer geraden Zahl eine ungerade – und vice versa – erzeugen läßt, nämlich durch Hinzufügen oder Wegnehmen der Einheit. In dieser Handlung, dem Hinzufügen oder Wegnehmen der Einheit, ist die Erzeugung der ungeraden Zahl unmittelbar die Negation der geraden und die Erzeugung der geraden unmittelbar die Negation der ungeraden.

Ein wirkliches Negationsverhältnis besteht also nicht zwischen der gelegten geraden und ungeraden Zahl. Ebenso wenig ist es eine sprachliche Zutat, denn es resultiert nicht aus einer klug gewählten sprachlichen Bezeichnung. Vielmehr drückt die Formulierung der Definition ein wirklich bestehendes Verhältnis bestimmter Negation aus, nämlich eine gesetzmäßige Beziehung der Erzeugungshandlungen mit den spezifischen gegenständlichen Elementen dieser Arithmetik.

Die Sprache als neues gegenständliches Mittel der Mathematik

Wir gelangen damit zum Kernpunkt des Übergangs von der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik zur wissenschaftlichen Arithmetik. Bei den eben betrachte-

ten Klassifikationen bedient sich die LvGuU nicht mehr allein des gegenständlichen Mittels der mit $\psi\eta\phi\omicron\iota$ gelegten Zahlen, sondern eines weiteren gegenständlichen Mittels, nämlich der Sprache. Dieses neue Mittel ist die objektive Grundlage des Übergangs zur wissenschaftlichen Arithmetik. In welcher spezifischen Weise die Sprache diese Funktionen für die Entwicklung der wissenschaftlichen Arithmetik erfüllte, muß nun allerdings näher bestimmt werden.

Sprache war sicherlich – um ein Mißverständnis vorab zu vermeiden – nicht in dem Sinne ein neues Mittel, daß sich die mathematische Erkenntnis bis dahin sprachlos entwickelt hätte. Schon die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetische LvGuU zeigt, daß dies nicht denkbar ist. Wir wissen zwar nicht, ob die demonstrierende Legung der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch gefundenen Sätze der Lehre von einer sprachlichen Paraphrasierung begleitet wurde oder nicht. In jedem Fall muß aber das Ergebnis, die an den figurierten Zahlen gewonnene Erkenntnis, sprachlich fixiert worden sein; sonst wären die Ergebnisse mit der Auflösung der Zahlenfiguren jeweils wieder verloren gegangen. Die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetiker haben sich also ohne Frage der Sprache bedient. Aber welche Funktion hatte für sie die Sprache? Sie diente noch nicht als spezifisches Erkenntnismittel. Die Einsichten der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik stammten aus der erzeugenden Konstruktion, nicht aus der eventuellen sprachlichen Paraphrasierung dieser Konstruktion und nicht aus der sprachlichen Fixierung des Ergebnisses.

Wir haben gesehen, welche verblüffenden Einsichten in arithmetische Gesetzmäßigkeiten den figurierten Zahlen abzugewinnen sind. Was aber den figurierten Zahlen keinesfalls abzulesen ist, das sind Einsichten in die Gesetzmäßigkeit der Erzeugungshandlungen mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$. Diese Handlungen sind vielmehr in jeder gelegten Flächenzahl verschwunden. Einsicht ist hier also nicht durch weitere erzeugende Legungen zu gewinnen, sondern nur durch die Reflexion auf das erzeugende Legen mit diesen spezifischen Elementen selbst.

Diese Reflexion auf das erzeugende Legen selbst setzt nun aber voraus, daß die Erzeugungshandlungen nicht jeweils in der gelegten Zahl als Produkt erlöschen, sondern eine Daseinsweise haben, die den Legeakt überdauert. Diese dauerhafte Daseinsweise können sie, ihrer Natur als Akte entsprechend, nur in einem Repräsentanten haben. Wenn nun die Sprache der Reflexion auf das erzeugende Legen die Erzeugungshandlungen dauerhaft und gegenständlich repräsentiert, so erfüllt sie genau damit die Funktion eines spezifischen Erkenntnismittels. Die gesetzmäßigen Beziehungen zwischen den Erzeugungshandlungen mit den spezifischen Elementen dieser Arithmetik können entdeckt und

selbst sprachlich abgebildet werden, weil es der Erkenntnis möglich ist, sich auf diese Erzeugungshandlungen und ihren Zusammenhang als Gegenstand zu beziehen, wenn die Handlungen in der Sprache gegenständlich repräsentiert sind.

Aufgrund der Nutzung der Sprache als eines spezifischen gegenständlichen Mittels der Erkenntnis, nämlich als Mittel gegenständlicher Repräsentation der Erzeugungshandlungen mit den Elementen dieser Arithmetik, wird die Reflexion dieser Handlungen möglich, erschließt sich der Erkenntnis der gesetzmäßige Zusammenhang dieser Handlungen. Das hat weitreichende Folgen für die Lehre.

Wir sahen oben, daß es schon auf $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischer Stufe möglich ist, die einzelnen, anfangs wahrscheinlich auch vereinzelt gefundenen Sätze der Lehre zu einem systematischen Ganzen nach Art unserer tabellarischen Anordnung der Sätze als Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionssätze zusammenzustellen (vgl. Abbildung 10). Wir sahen aber zugleich, daß diese Anordnung der Sätze zu einem systematischen Ganzen auf der Stufe der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik keinesfalls bedeuten kann, die Sätze dergestalt zu einer zusammenhängenden Lehre zu verbinden, daß sie sich wechselseitig tragen und auseinander hervorgehen. Vielmehr konstatieren wir: Was die Begründung angeht, so steht jeder Satz noch einzeln für sich da; seine Richtigkeit ist auf dieser Stufe prinzipiell nur durch die wirkliche erzeugende Legung aufzuzeigen.

Der Grund für diese Schranke der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Arithmetik ist jetzt zu sehen. Den einzelnen gelegten figürlichen Zahlen sind bestimmte arithmetische Gesetzmäßigkeiten abzulesen, nicht aber ihr Zusammenhang. Zwischen ihnen als gelegten Gebilden besteht kein Zusammenhang. Die erzeugende Legehandlung mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$, worin ihr Zusammenhang besteht, ist in den gelegten Gebilden erloschen. Der Zusammenhang der Sätze ist also erst zu finden, wenn vermittelt der sprachlichen Repräsentation der Erzeugungshandlungen deren Zusammenhang aufgeklärt werden kann.

Elemente und Operationen als gesetzte Voraussetzungen

Nun sind die Divisions- oder Klassifikationssätze IX/30–34 sowohl Manifestation als auch bereits Überschreitung dieser Schranke der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischen Form der LvGuU. Damit diese nicht mißverstanden wird: Es gibt keinerlei Grund zu bezweifeln, daß auch diese Sätze, natürlich ohne ihre von Euklid überlieferten Beweise, der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -

arithmetischen LvGuU zuzurechnen sind. Es ist ohne weiteres möglich, die Richtigkeit ihrer Behauptungen durch Legung figürlicher Zahlen zu demonstrieren. Ein Indiz ist auch der Umstand, daß die Sätze IX/30 und 31 in der Anordnung der Sätze keinen rechten Platz haben. O. Becker hat ihre Funktion für den nachfolgenden Satz IX/32 untersucht⁶⁴. Diese Untersuchung bezieht aber bereits die Beweise mit ein und muß deshalb hier außer acht gelassen werden. Mir scheint, daß es sich um einzeln gefundene Sätze handelt, die sich dem späteren Anordnungsschema der Lehre nicht recht fügten und die am wenigsten störend unter die Divisionssätze aufzunehmen waren. Das würde aber gerade für das hohe Alter auch dieser Sätze sprechen. Es sind also nicht historische, sondern inhaltliche Gründe, die mich veranlassen, in den Sätzen IX/30–34 sowohl eine Manifestation als auch Überschreitungen der Schranke zu sehen, die mit der $\psi\eta\phi\omega\iota$ -arithmetischen Form der Lehre gegeben ist.

Wie crinnerlich, machten die Divisionssätze bei der tabellarischen Anordnung Schwierigkeiten. Bei ihnen versagt ja die in den Additions-, Subtraktions- und Multiplikationssätzen bewährte durchsichtige Logik erzeugender Konstruktion, die es erlaubt, aus den Eigenschaften der Elemente bestimmte Eigenschaften des Erzeugten zu erschließen. Im Falle der Divisionssätze ist vielmehr umgekehrt verlangt, aus Eigenschaften des Resultats die Elemente zu erschließen, aus denen es durch die Multiplikationsoperation erzeugt werden kann. Die durchsichtige Logik erzeugender Konstruktion ist aber das Charakteristische der $\psi\eta\phi\omega\iota$ -arithmetischen Form der Lehre. In den Problemen der Divisionssätze zeigt sich also diese Form als Schranke.

Nun konnte weiterhin den Sätzen IX/30–34 – wohlgermerkt: den Sätzen, also ohne Berücksichtigung ihrer Beweise – abgelesen werden, wie die LvGuU mit diesem Problem fertig wird. Sie löst das Problem durch eine analytische Einteilung der ganzen Zahlen in Klassen dergestalt, daß aus den Bestimmungen dieser Klassen auf die Erzeugungsmöglichkeiten der Zahlen zurückgeschlossen werden kann. Diese Klassen bilden zusammen in dem Sinne ein vollständiges Ganzes, daß jede ganze Zahl unter eine von ihnen fallen muß. Daraus scheint nun aber zugleich zu folgen, daß diese Klassen nicht nur in diesem Sinne ein vollständiges Ganzes bilden. Denn wenn jede ganze Zahl unter eine dieser Klassen fällt und wenn aus deren Bestimmungen auf die Erzeugungsmöglichkeiten der betreffenden Zahlen zurückgeschlossen werden kann, dann müssen diese Bestimmungen insgesamt auch ein vollständiges Ganzes der Erzeugungsmöglichkeiten enthalten.

Läßt sich das faktisch aufzeigen? Die drei Arten der geraden Zahlen

(IX/32–34) lassen auf folgende Erzeugungsmöglichkeiten zurückschließen:

$G \times G$ (IX/32), $G \times U$ (IX/33) und sowohl $G \times G$ als auch $G \times U$ (IX/34);

die implizite Art der ungeraden Zahlen, die überhaupt in gerade beziehungsweise ungerade Faktoren zerlegt werden können, die Art der ungeraden Zahlen, die nicht Primzahlen sind, aber auf folgende Erzeugungsmöglichkeiten:

$U \times U$.

Nun sieht man rein kombinatorisch sofort, daß zwei weitere Möglichkeiten denkbar sind, nämlich:

sowohl $G \times G$ als auch $U \times U$ und sowohl $U \times U$ als auch $U \times G$.

Das Fehlen dieser beiden Möglichkeiten widerlegt nun nicht den Schluß, daß die Bestimmungen der Klassen ein vollständiges Ganzes der Erzeugungsmöglichkeiten enthalten. Vielmehr verdeutlicht es die spezifische Eigenart dieser Klassifikation und läßt erkennen, inwiefern es sich bei dieser Ableitung der Erzeugungsmöglichkeiten aus den Bestimmungen der Zahlklassen nicht um eine Explikation der beiden Multiplikationssätze (IX/28 und 29) handelt, also nicht um eine redundante Verdoppelung, sondern um einen spezifisch neuen Schritt: Wenn jene beiden denkbaren Möglichkeiten aus den Bestimmungen der Zahlklassen nicht erschlossen werden, so deshalb, weil auf diese Weise keine ganze Zahl zerlegbar beziehungsweise erzeugbar ist. Es handelt sich also um rein kombinatorische, um abstrakte Möglichkeiten, die gerade von der Erzeugbarkeit einer ganzen Zahl abstrahieren.

Inwiefern verweist die Eliminierung dieser rein kombinatorischen Möglichkeiten auf eine spezifische Eigenart der Klassifikation, die in den Divisionssätzen (IX/30–34) enthalten ist? Müßte nicht auch der $\psi\eta\phi\omega\iota$ -Arithmetiker diese beiden Möglichkeiten ausscheiden, und zwar aufgrund des Wissens, daß $G \times G$ und $G \times U$ immer eine gerade Zahl ergeben, während $U \times U$ zu einer ungeraden führt, und also jene beiden kombinatorisch denkbaren Möglichkeiten eine Zahl erzeugen müßten, die sowohl gerade als auch ungerade wäre?

Ist dieser Schluß vom konstruktiven Standpunkt her möglich, das heißt ausgehend von den Elementen und Erzeugungshandlungen mit ihnen? Von diesem Standpunkt her ist nur zu konstatieren, daß es nicht gelingen will, ein und dieselbe Zahl einmal durch Vervielfachung ungerader mit ungeraden Zahlen und ein anderes Mal durch Vervielfachung gerader mit geraden beziehungsweise ungeraden zu erzeugen. Die Ein-

sicht, daß das nicht nur bei jedem bisherigen Versuch mißlungen ist, sondern prinzipiell nicht möglich ist, setzt indessen voraus, daß Einsicht in die wechselseitige Ausschließung von Erzeugungshandlungen gewonnen ist, setzt also die Reflexion auf die Erzeugungshandlungen und ihre Gesetzmäßigkeiten voraus. Wie sich an den Definitionen der geraden und der ungeraden Zahl (VII/Def. 6 und 7) zeigte, ist es erst auf der Grundlage dieser Reflexion als ein Widerspruch, als eine Unmöglichkeit zu bewerten, daß eine ganze Zahl zugleich gerade und ungerade ist.

Der Klassifikation, die in den Sätzen IX/30–34 enthalten ist, liegt – wie wir sahen – eine solche Reflexion auf die Erzeugungshandlungen mit den Elementen dieser Arithmetik zugrunde. Wenn in diesen Sätzen aus den Bestimmungen der gebildeten Zahlklassen ihr Erzeugungsmöglichkeiten abgeleitet werden, so ergeben sich jene beiden abstrakten, rein kombinatorischen Möglichkeiten zunächst deshalb nicht, weil diese Ableitung anders als die rein kombinatorischen Möglichkeiten nicht vom zu Erzeugenden abstrahiert, nämlich von der ganzen Zahl. Vielmehr nimmt die Ableitung ihren Ausgang gerade von dem Reich der ganzen Zahlen, also dem zu Erzeugenden.

Das Reich der ganzen Zahlen als der Ausgangspunkt dieser Ableitung ist nun von ganz anderer Natur als die Elemente und Operationen, von denen die Konstruktion ausgeht. Es ist nicht sinnlich vorzuführen, kann nicht durch erzeugende Legehandlungen demonstriert werden. Dies Reich ist in den sprachlichen Bestimmungen der Zahlklassen Ausgangspunkt für die Ableitung der Erzeugungsmöglichkeiten. In diesen Bestimmungen ist aber das Reich der ganzen Zahlen als der bestimmte Möglichkeitshorizont gefaßt, den die Reflexion auf die gesetzmäßigen Zusammenhänge der Erzeugungshandlungen expliziert hat.

Es geht bei dieser Ableitung der Erzeugungsmöglichkeiten also nicht um ein kombinatorisches System von Legemöglichkeiten mit den Elementen gerade und ungerade Zahl, sondern um Ableitung aufgrund der Einsicht in den Zusammenhang der Erzeugungshandlungen. Das beinhaltet aber zugleich folgendes:

Anders als bei der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischen Demonstration der Additions-, Subtraktions- und Multiplikationssätze wird hier nicht mehr unmittelbar von den Elementen gerade und ungerade Zahl ausgegangen. Diese Elemente sind jetzt vielmehr abgeleitete Ausgangspunkte, gesetzte Voraussetzungen. Ausgegangen wird also nicht mehr von sinnlich demonstrierbaren Elementen, die als Faktizitäten hinzunehmen sind, sondern von etwas – dem Reich der ganzen Zahlen –, das aus dem

gesetzmäßigen Zusammenhang der Erzeugungshandlungen erschlossen ist.

Was für die Elemente zu konstatieren ist, gilt nun auch für die erzeugenden Operationen. Wie unsere tabellarische Anordnung der Sätze der LvGuU als Additions-, Subtraktions-, Multiplikations- und Divisionssätze zeigt (vgl. Abbildung 10), erscheinen auf $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischer Stufe die Operationen mit den Elementen gerade und ungerade Zahl als so faktisch Hinzunehmendes wie die Elemente selbst. Ihre Zusammenstellung zu einem Ganzen nach Art jener Tabellen ist ein Ganzes von erzeugenden Operationen in einem empirischen Sinne, es werden vorgefundene Operationen zusammengestellt. Die in den Sätzen IX/30–34 vorliegende Ableitung der Erzeugungsmöglichkeiten beschränkt sich nun zwar auf die Erzeugungen mittels der Multiplikationsoperation; doch sind diese Erzeugungsmöglichkeiten nicht mehr bloß faktisch auffindbare und als solche hinzunehmende Ausgangspunkte. Sie sind vielmehr wie die Elemente gesetzte Voraussetzungen, abgeleitete Ausgangspunkte, abgeleitet aus ihrem gesetzmäßigen Zusammenhang.

Ohne jeden Rückgriff auf die Beweise, die der Integration der LvGuU in die spätere übergreifende Arithmetik der Pythagoreer des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. angehören, gestützt alleine auf die zweifellos alten Sätze der Lehre, kann also konstatiert werden, daß die Sätze IX/30–34 das Stadium einer Demonstration durch Konstruktion überschreiten. Auch wenn wir nicht wissen, ob sie bereits in der ursprünglichen $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischen LvGuU eine besondere Rolle gespielt haben, ist jedenfalls ihrem Inhalt zu entnehmen, daß sie auf eine andere Art theoretischer Begründung ausgerichtet oder wenigstens für eine andere Art theoretischer Begründung geeignet sind als die durch demonstrative Konstruktion. Die Ausschöpfung der in diesen Sätzen angelegten theoretischen Dimension, soviel läßt sich in jedem Fall sagen, ist mit dem gegenständlichen Mittel der mit $\psi\eta\phi\omicron\iota$ gelegten Flächenzahlen nicht möglich. Und wir hatten uns auch bereits davon überzeugt, daß bei der in diesen Sätzen vorliegenden Klassifikation ein weiteres gegenständliches Mittel verwandt wird, nämlich die Sprache als das spezifische Erkenntnismittel, das sie als gegenständliche Repräsentation der Erzeugungshandlungen darstellt.

Es ist hier die passende Stelle anzumerken, daß die Definitionen der geraden und der ungeraden Zahl (VII/Def. 6 und 7), an denen wir uns die Verwendung dieses neuen gegenständlichen Mittels klarmachten, wahrscheinlich außerordentlich alt sind⁶⁵ und vielleicht einer Zeit vor der Integration der LvGuU in die übergreifende Arithmetik der Bücher VII–IX angehören. Darauf deutet das in diesen Definitionen verwand-

te Wort für „halbieren“ hin: διαιπεῖν. Den speziellen Sinn von „halbieren“ erhielt dieses Wort wohl erst in der mathematischen Sprache des 4. Jahrhunderts v. u. Zt., während es im 5. Jahrhundert unspezifisch „teilen“, „zerlegen“ bedeutete⁶⁶. Entsprechend findet sich noch bei Plato folgende Definition der geraden Zahl: ἄρτος ἀριθμὸς ὁ διαιρούμενος εἰς ἴσα δύο μέρη – „gerade ist die Zahl, die in zwei gleiche Teile zerlegbar ist“⁶⁷. In den von Euklid überlieferten Definitionen (VII/Def. 6 und 7) heißt es demgegenüber δίχα διαιρούμενος, was wörtlich „in zwei (Teile) teilbar“ bedeutet, also sachlich falsch wäre, wenn διαιπεῖν nicht bereits die Spezialbedeutung „halbieren“ angenommen hätte.

Zeigt dies nun, daß die Formulierung der Definitionen wohl der Zeit nach Plato angehört, vielleicht von Euklid selbst stammt, so kann dennoch die Tatsache, daß in diesen Definitionen überhaupt das Wort διαιπεῖν verwandt wird, als ein Verweis auf sehr alte, von Euklid reformulierte Definitionen der geraden und der ungeraden Zahl verstanden werden. Die anderen zur LvGuU gehörenden Definitionen (VII/Def. 8–10 und 12) gebrauchen nämlich für „teilen“ das andere gebräuchliche Wort: μετρεῖν („messen“), das auf Geometrie und Musiktheorie zurückverweist⁶⁸. Wahrscheinlich gehört also die Formulierung dieser vier Definitionen zur Integration der LvGuU in die spätere übergreifende Arithmetik der Pythagoreer, die ja auch sonst Spuren der Herkunft aus Geometrie und Musiktheorie aufweist – zum Beispiel in der bildlichen Darstellung der Zahlen als Strecken⁶⁹. Demgegenüber scheinen die Definitionen der geraden und der ungeraden Zahl auf eine noch nicht von Geometrie und Musiktheorie berührte Arithmetik zurückzugehen. Was haben wir uns unter dieser aber vorzustellen, wenn nicht die ψήφοι-Arithmetik?

3.2 Die beweisende Lehre

Der deduktive Zusammenhang der Lehre

In ihrer rein arithmetischen Form, in der sie Euklid überliefert, haben wir die LvGuU als eine zu einem zusammenhängenden Ganzen verbundene Lehre vor uns, in der die Sätze in ihren Begründungen aufeinander aufbauen, in der also ein explizierter Zusammenhang der Sätze vorliegt. Aufgrund des eben Dargelegten erwartet man vielleicht, nun vorgeführt zu bekommen, daß und wie dieser Zusammenhang der Sätze aus dem System der Erzeugungsmöglichkeiten entwickelt wurde, das in den Bestimmungen der in den Sätzen IX/30–34 vorliegenden Klassifi-

kation der ganzen Zahlen enthalten ist. Nun zeigt aber gleich der Beweis des ersten Satzes der Lehre (IX/21), daß sich diese Erwartung nicht erfüllt. Der Beweis lautet:

„Beliebigviele gerade Zahlen AB, BC, CD, DE seien zusammengesetzt. Ich behaupte, daß die Summe AE gerade ist.

Jede der Zahlen AB, BC, CD, DE hat, da sie gerade ist, einen Teil, der die Hälfte ist (VII/Def. 6). Folglich hat auch die Summe AE einen Teil, der die Hälfte ist (VII/5). Gerade ist aber die Zahl, die sich halbieren läßt (VII/Def. 6). Also ist AE gerade – q. e. d.“

Der Beweis des Satzes IX/21 stützt sich auf das Theorem VII/5. Dieses Theorem beweist in den Grenzen der pythagoreischen Arithmetik die arithmetische Gesetzmäßigkeit, die heute als Distributivgesetz geläufig ist: $a_1b + a_2b = (a_1 + a_2)b$. Dieser erste Satz der Lehre und sein Beweis hat nun nicht allein für die beiden anderen Additionssätze (IX/22 und 23) einen Fundamentalstatus, sondern damit ebenso für die Multiplikationssätze (IX/28 und 29), die sich beide in ihrem Beweis auf Additionssätze stützen. Die Subtraktionssätze (IX/24–27) stützen sich in ihrem Beweis auf das Theorem VII/7, in dem die subtraktive Form des Distributivgesetzes bewiesen wird: $a_1b - a_2b = (a_1 - a_2)b$. Es ist also zu konstatieren, daß der Teil der Lehre, bei dem sich ehemals die für die ψήφοι-arithmetische Form charakteristische durchsichtige Logik konstruktiver Erzeugung bewährte, nun aus einer übergreifenden arithmetischen Gesetzmäßigkeit beweisend abgeleitet wird, für die die LvGuU nur noch ein Spezialfall ist.

Nun könnte man natürlich die Frage stellen, ob sich das Distributivgesetz vielleicht auch ψήφοι-arithmetisch finden läßt und ob dabei jener Ableitung der Erzeugungsmöglichkeiten aus der Klassifikation der ganzen Zahlen, die wir in den Sätzen IX/30–34 finden, eine Bedeutung zukommt. Tatsächlich ist eine allgemeine Regel der Zusammenlegung von Rechteckzahlen ψήφοι-arithmetisch zu finden, die in den Grenzen solcher Flächenzahlen dem arithmetischen Distributivgesetz äquivalent ist. (Zu finden ist die Regel, daß sich ganze Zahlen – mit Ausnahme derer, die „gegeneinander prim“ sind – als Rechtecke mit einer gleichen Seite legen lassen und daß ihr Betrag das Produkt dieser gleichen Seite mit der Summe der ungleichen ist.) Diese Regel kann darüber hinaus sogar als ein verallgemeinernder, die LvGuU zwar überschreitender, aber in der Sphäre der Flächenzahlen verbleibender Schluß aus den Erzeugungsmöglichkeiten verstanden werden, die aus den Sätzen IX/30–34 ableitbar sind. Auch wenn dies interessant anmutet, weil dieser Schluß aus den Erzeugungsmöglichkeiten nur unter der Voraussetzung

einer sprachlichen Repräsentation der Erzeugungsmöglichkeiten denkbar erscheint, gibt es doch einen gewichtigen Grund, diesem rein hypothetischen Zwischenglied der Rekonstruktion keine Bedeutung zuzumessen. Andernfalls würde nämlich die Bedeutung unseres Exempels, eben der LvGuU, für die Geschichte der Arithmetik in der klassischen Epoche Griechenlands verkannt.

Die Bedeutung der LvGuU hinsichtlich der Entwicklung der wissenschaftlichen Arithmetik ist vor allem eine heuristische für unsere wissenschaftsgeschichtliche Rekonstruktion dieser Entwicklung. Da wir diese Lehre in ihrer vorwissenschaftlichen Gestalt bis zu einem gewissen Grade rekonstruieren und diese Gestalt mit der wissenschaftlichen Form, in der sie uns Euklid tradiert, konfrontieren können, sind aus ihr Einsichten in wesentliche Momente der Herausbildung der wissenschaftlichen Mathematik zu gewinnen. Diese Bedeutung der LvGuU darf nun aber nicht so verstanden werden, als habe sich die pythagoreische Arithmetik des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. allein oder im wesentlichen aus dieser Lehre entwickelt. Dafür ist ihr mathematischer Inhalt viel zu beschränkt. Zudem zeigt jeder unbefangene Blick auf die Bücher VII–IX, daß andere vorwissenschaftliche Ursprünge ihres Inhalts weit mehr ins Gewicht fallen als die $\psi\phi\phi\phi\tau$ -arithmetische LvGuU, so zum Beispiel arithmetische Techniken der Geometer und vor allem auch die Musiktheorie. Schließlich ist daraus, daß die pythagoreischen Mathematiker ihre „freie Lehre“ strikt von der mathematischen Praxis ihrer Zeit abgrenzten, natürlich keineswegs der Schluß zu ziehen, daß ihnen diese praktische Mathematik unbekannt gewesen wäre und daß sie aus den Inhalten dieser Logistik nicht Anregungen und Themen erhielten.

Wir haben also davon auszugehen, daß die Entwicklung der LvGuU zu einer Lehre sich vermittelnder Sätze nicht immanent in den Grenzen dieser Lehre erfolgte, sondern im Zuge einer Integration dieser Lehre in die von den Pythagoreern im Laufe des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. ausgearbeitete Arithmetik. Die rein arithmetische LvGuU, wie sie Euklid überliefert, hat die Form einer beweisenden Theorie auf der Grundlage der übergreifenden Arithmetik der Bücher VII–IX. Die überlieferten Beweise sind also keinesfalls für eine Rekonstruktion der Entwicklung des Zusammenhangs der Lehre in den Grenzen dieser Lehre heranzuziehen. Nur die Sätze können als authentische Dokumente der alten LvGuU angesehen werden; was aus ihnen für die Rekonstruktion zu erschließen ist, haben wir im Vorangehenden zu erschließen versucht. Die Beweise, denen wir uns am Schluß unserer Rekonstruktion zuwenden, gehören dagegen zur Reformulierung der Lehre bei ihrer Integration in jene übergreifende Arithmetik. Das ist im Auge zu behalten.

Aggregation zweiter Stufe

Wie gelingt es nun der rein arithmetischen LvGuU, in den Beweisen einen Zusammenhang zwischen den Sätzen zu explizieren? Sehen wir uns zunächst die Beweise der Additions-, Subtraktions- und Multiplikationssätze daraufhin an. Wie bereits vermerkt, stützen sich die Beweise der Additions- und Subtraktionssätze (IX/21–27) auf das Distributivgesetz, wie es in den Grenzen der pythagoreischen Arithmetik durch die Theoreme VII/5 und 7 bewiesen wird. Dagegen stützen sich die Multiplikationssätze (IX/28 und 29) in ihren Beweisen auf zwei der Additionssätze, IX/28 auf IX/21 und IX/29 auf IX/23. Dieses Sich-Stützen der Sätze verdient nähere Aufmerksamkeit. Der Beweis des Satzes IX/28 lautet:

„c entstehe dadurch, daß eine ungerade Zahl a eine gerade b vervielfältigt. Ich behaupte, daß c gerade ist.

Da a, indem es b vervielfältigt, c bildet, so ist c aus soviel Zahlen = b zusammengesetzt, wie a Einheiten enthält (VII/Def. 15). Nun ist b gerade; c ist also aus geraden Zahlen zusammengesetzt. Setzt man aber beliebigviele gerade Zahlen zusammen, so ist die Summe gerade (IX/21); also ist c gerade – q. e. d.“

Der in den Beweisen explizierte Zusammenhang zwischen den Additions- und Multiplikationssätzen stellt sich als ein Zusammenhang des aufeinander Aufbaus dar. Die Multiplikationssätze können auf die Additionssätze aufbauen, weil die Multiplikation als eine wiederholte Addition verstanden wird, und daraufhin der Beweis, daß aus einer bestimmten Vervielfältigung gerader oder ungerader Zahlen mit geraden oder ungeraden bestimmte Eigenschaften des Produkts folgen, auf die additive Zusammensetzung und ihre bereits bewiesenen Gesetzmäßigkeiten rekurrieren kann.

Es zeigt sich ohne weiteres, daß der so explizierte Zusammenhang der Sätze weder aus den Elementen stammt, mit denen in ihnen operiert wird, noch aus den aus diesen Elementen aggregierten Resultaten; er stammt vielmehr aus dem Zusammenhang der aggregierenden Operationen selbst: Die Multiplikation läßt sich auf die Addition zurückführen, und rückführbar ist sie, weil sie als zusammengesetzte Addition verstanden wird.

Die Multiplikationsoperation wird also als ein Aggregat von Additionsoptionen aufgefaßt. Hier tritt uns das Aggregationsmodell gewissermaßen in einer höheren Potenz entgegen. Es bezieht sich hier nicht auf die arithmetischen Gegenstände, sondern auf die aggregierenden arithmetischen Operationen. Diese sind, wie der hier betrachtete Fall zeigt, ihrerseits in Operationen mit dem Status von Elementen (Ad-

ditionsoperationen) und in Operationen mit dem Status von aus diesen Elementen Aggregiertem (Multiplikationsoperationen) zu untergliedern. Das prinzipielle Modell aggregierender Erzeugung wird auf die aggregierenden Erzeugungen selbst angewandt. Die durchsichtige Logik erzeugender Konstruktion, die für die $\psi\eta\phi\alpha\iota$ -arithmetische LvGuU charakteristisch war, läßt sich also auf höherer Stufe wiederherstellen.

Wie aber auf $\psi\eta\phi\alpha\iota$ -arithmetischer Stufe diese durchsichtige Logik den Zusammenhang zwischen den Elementen und den aus ihnen zusammengesetzten Resultaten erschließen ließ – allerdings immer nur innerhalb des einzelnen Satzes –, so gestattet sie es nun, den Zusammenhang der Sätze selbst zu erschließen, weil zwischen den verschiedenen ihnen zugrunde liegenden Operationen ebenfalls der Zusammenhang zwischen Element und daraus Zusammengesetztem besteht. Voraussetzung dessen ist freilich, daß diese neuen Elemente und Aggregationen der mathematischen Beschäftigung gegenständlich zur Verfügung stehen; Voraussetzung ist also die sprachliche Repräsentation der arithmetischen Operationen.

Indirekter Beweis

Es ist nun interessant zu sehen, daß diese durchsichtige Erzeugungslogik in der rein arithmetischen Form der Lehre genauso wie schon auf der $\psi\eta\phi\alpha\iota$ -arithmetischen Stufe bei den sogenannten Divisionssätzen (IX/30–34) zu versagen scheint. Jedenfalls zeigt sich hinsichtlich der Beweistechnik zwischen den Sätzen IX/21–29 und den Sätzen IX/30–34 ein auffälliger Unterschied, der einer Zäsur gleichkommt. Für die Beweise der letzteren ist nämlich das in den Sätzen davor nicht verwandte Verfahren des indirekten Beweises kennzeichnend (IX/32, für den das scheinbar nicht gilt, stützt sich auf den indirekt bewiesenen Satz IX/13).

Wenn die pythagoreischen Mathematiker bei der Integration der LvGuU in ihre übergreifende Arithmetik zwischen den Additions-, Subtraktions- und Multiplikationssätzen auf der einen und den Divisionssätzen auf der anderen Seite einen solchen Unterschied machten, so liegt es nahe zu vermuten, daß dies durch die oben konstatierte Umkehrung der Schlußrichtung veranlaßt war, also durch den Umstand, daß die Sätze IX/30–34 im Unterschied zu denen davor nicht von Elementen und Operationen auf Eigenschaften des Erzeugten schließen, sondern umgekehrt von Eigenschaften des Erzeugten auf Erzeugungsmöglichkeiten mit den Elementen gerade und ungerade Zahlen. Daß in der Tat ein Zusammenhang zwischen dieser Umkehrung der Schluß-

richtung und der Verwendung des indirekten Beweises besteht, läßt sich an zwei der explizit klassifizierenden Sätze, nämlich IX/32 und 33, gut studieren. Die Beweise dieser Sätze lauten:

IX/32 „Man bilde von a , der Zwei aus durch Verdoppelung beliebigviele Zahlen b , c , d . Ich behaupte, daß b , c , d ausschließlich gerademal gerade sind.

Daß jede der Zahlen gerademal gerade ist, ist klar; denn sie entsteht durch Verdoppelung von der Zwei aus (VII/Def. 8). Ich behaupte, daß sie ausschließlich dies ist. Man nehme die Einheit hinzu. Da man dann beliebigviele Zahlen von der Einheit aus in Geometrischer Reihe hat und die Zahl nach der Einheit, nämlich a eine Primzahl ist, so läßt sich die größte der Zahlen a , b , c , d , nämlich d durch keine andere messen außer durch a , b , c (IX/13). Nun ist jede der Zahlen a , b , c gerade; also ist d ausschließlich gerademal gerade. Ähnlich läßt sich zeigen, daß auch b , c alle beide ausschließlich gerademal gerade sind – q. e. d.“

IX/33 „Von der Zahl a sei die Hälfte ungerade. Ich behaupte, daß a ausschließlich gerademal ungerade ist.

Daß sie gerademal ungerade ist, ist klar; denn ihre Hälfte, die ungerade ist, mißt sie gerademal (VII/Def. 9; VII/16). Ich behaupte, daß sie ausschließlich dies ist. Wäre a nämlich auch gerademal gerade, so ließe es sich durch eine gerade Zahl nach einer geraden messen (VII/Def. 8), so daß sich auch ihre Hälfte, die ungerade ist, durch eine gerade Zahl messen ließe (VII/Def. 6, 15; VII/18); dies wäre Unsinn. Also ist a ausschließlich gerademal ungerade – q. e. d.“

In jedem dieser Beweise ist die zu beweisende Erzeugungsmöglichkeit als *eine* Erzeugungsmöglichkeit ganz unproblematisch, sie ist „klar“ (vgl. in beiden Fällen den ersten Satz des Beweises). „Klar“ ist dies aufgrund der im Satz getroffenen klassifizierenden Bestimmung, die diese Erzeugungsart enthält. Dagegen ist es problematisch und erst zu beweisen, daß es sich dabei auch um die *einzige* Erzeugungsmöglichkeit handelt (vgl. in beiden Fällen den dritten Satz des Beweises). Das Problem ist, wie andere Erzeugungsmöglichkeiten als nicht in Frage kommend zu qualifizieren sind. Es wird dadurch gelöst, daß die alternativen Erzeugungsmöglichkeiten durchgeführt werden mit dem Ergebnis, daß die Durchführung scheitert.

Es ist also, wie dies Beispiel zeigt, die in diesen Sätzen thematisierte besondere Art des Zusammenhangs zwischen erzeugenden Operationen, der die konstruktive Erzeugungslogik selbst dann nicht gewachsen ist, wenn sie auf die Erzeugungshandlungen angewandt wird. Der in diesen Beweisen zur Verhandlung stehende Zusammenhang zwischen Erzeugungshandlungen ist nicht von der Art des Zusammenhangs zwischen Elementen und daraus Zusammengesetztem. Wenn alternative Erzeugungsmöglichkeiten durchprobiert werden, um herauszufinden, welche von ihnen scheitert, dann geht es vielmehr um die Frage, ob er-

zeugende Operationen miteinander bestehen können oder sich ausschließen.

Der Zusammenhang zwischen Operationen nach Art des Aggregationsmodells thematisiert das Einschlußverhältnis von Operationen und dies auch nur implizit. Kompatibilität und Ausschluß aber lassen sich auf seiner Grundlage nicht thematisieren. Zur Thematisierung dieses Verhältnisses benutzten die pythagoreischen Mathematiker den indirekten Beweis. Was wir uns anläßlich der in den Sätzen IX/30–34 vorliegenden Klassifikation an den Definitionen der geraden und ungeraden Zahl klarmachten, und zwar in bezug auf das sprachlich abgebildete Verhältnis bestimmter Negation, tritt uns nun entsprechend am indirekten Beweis erneut entgegen, allerdings in einer wesentlich komplizierteren Form.

Für sich genommen stehen die alternativen Erzeugungsmöglichkeiten, von denen eine mittels des indirekten Beweises eliminiert werden wird, keineswegs im Verhältnis der Negation zueinander. In dies Verhältnis geraten sie vielmehr durch eine äußerliche Rücksicht, nämlich durch den zunächst nur behaupteten Sachverhalt, daß nur durch eine der alternativen Möglichkeiten die Zahlen der betreffenden Zahlklasse erzeugt werden können. Aber auch bezogen auf die Erzeugung der Zahlen dieser bestimmten Klasse negieren sie sich nicht unmittelbar wechselseitig. Erzeuge ich nämlich eine Zahl dieser Klasse gemäß der behaupteten Möglichkeit, so ist damit keineswegs etwas darüber ausgemacht, ob sich diese Zahl auch gemäß der Alternative erzeugen läßt oder nicht. Die Alternative muß sich vielmehr in bezug auf die Erzeugung einer Zahl der betreffenden Klasse gewissermaßen selbst disqualifizieren.

Wie geht das vor sich? Die alternative Möglichkeit disqualifiziert sich selbst, indem sie bei der Erzeugung einer entsprechenden Zahl zu Widersprüchen führt. Diese Widersprüche bestehen in der wechselseitigen Negation bestimmter notwendiger Teilmomente der Erzeugungshandlung. Nehmen wir zum Beispiel den Beweis des Satzes IX/33 (vgl. oben): Die Erzeugung einer geraden Zahl, deren Hälfte ungerade ist, durch zwei gerade Faktoren unterstellt die Hälfte dieser Zahl zugleich als gerade und ungerade, was „Unsinn wäre“, ἀτοπον (gewöhnlich wird bei Euklid der Widerspruch, den der indirekte Beweis freilegt, mit dem Wort ἀδύνατον („unmöglich“) gekennzeichnet). Gerade und ungerade Zahl sind in ihrer Erzeugung als sich wechselseitig negierende gesetzt; die Erzeugung der einen ist unmittelbar die Negation der anderen.

Aus diesem Scheitern der ins Auge gefaßten alternativen Möglichkeit wird beim indirekten Beweis nun der Schluß gezogen, daß die an-

dere Erzeugungsmöglichkeit nicht nur, wie von Anfang an feststand, eine Möglichkeit der Erzeugung des betreffenden Resultats darstellt, sondern die einzige. Die alternativen Erzeugungsmöglichkeiten, die für sich durchaus zusammen bestehen können, stehen in bezug auf das bestimmte Resultat jetzt in einem Verhältnis der Negation. Die Berechtigung dieses Beweises der Inkompatibilität der alternativen Möglichkeiten liegt aber darin, daß die Inkompatibilität abgeleitet ist aus dem Nachweis einer bestimmten Negation, eines wechselseitigen Ausschlußverhältnisses zwischen Handlungsmomenten der einen Erzeugungsmöglichkeit.

Der indirekte Beweis ist natürlich gar nicht anders als sprachlich zu führen. Seine Anwendung in der Arithmetik der Pythagoreer des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. dokumentiert also wiederum, daß sich die Mathematik der Sprache als eines neuen Mittels der Erkenntnis bemeistert hat, ja, daß die Mathematik aufgrund dieses neuen Mittels zur beweisenden Theorie entwickelt wurde. Zugleich zeigt der indirekte Beweis erneut, daß die Sprache zum spezifischen Mittel der mathematischen Erkenntnis wird, weil sie die mathematischen Erzeugungshandlungen gegenständlich repräsentiert und so der Erkenntnis zur Verarbeitung darbietet. Es zeichnet aber den indirekten Beweis spezifisch aus, daß es mit seiner Hilfe den pythagoreischen Mathematikern gelang, auf der Grundlage der Repräsentationsleistung der Sprache Einblick in die Kompatibilitäts- beziehungsweise Ausschlußverhältnisse der erzeugenden Operationen zu gewinnen und sich so für die Durcharbeitung des inneren Vermittlungsgefüges der Lehre eine neue, der durchsichtigen Logik konstruktiver Erzeugung noch verschlossene Dimension des Zusammenhangs der Sätze zu eröffnen.

Arithmetik und Dialektik

In den Beweisen der pythagoreischen Arithmetik, wie sie uns die Bücher VII–IX der „Elemente“ Euklids bewahrt haben, findet sich das Verfahren des indirekten Beweises auffällig häufig. Offenbar wurde diese Beweistechnik von den pythagoreischen Mathematikern sehr geschätzt. Man kann sich darüber hinaus fragen, ob ihre häufige Verwendung vielleicht ein Indiz dafür ist, daß sie auch historisch die erste ausgearbeitete und bewußt gehandhabte Beweistechnik gewesen ist. Jedenfalls muß es zu denken geben, daß die Formen des direkten Beweises erst in der Syllogistik des Aristoteles, also um die Mitte des 4. Jahrhunderts v. u. Zt., eine explizite Ausarbeitung erfuhren, während den Dia-

logen Platos zu entnehmen ist, daß die dialektische Kunst, die sich des indirekten Beweises bedient, offenbar bereits im 5. Jahrhundert eine ausgearbeitete methodische Form gefunden hatte⁷⁰.

Diese dialektische Kunst ist nun für die historische Rekonstruktion der wissenschaftlichen Mathematik in der klassischen Periode Griechenlands von außerordentlichem Interesse. Es scheint nämlich nicht etwa so zu sein, daß das Verfahren des indirekten Beweises eine Errungenschaft der Mathematiker darstellt. Vielmehr spricht vieles dafür, daß die pythagoreischen Mathematiker dies Verfahren von der philosophischen Dialektik, das heißt von der Argumentationstechnik übernahmen, mit der seit der Wende vom 6. zum 5. Jahrhundert v. u. Zt. Philosophen in ihren Disputationen Behauptungen bewiesen. Das früheste Dokument dieser Beweistechnik ist das Lehrgedicht des Eleaten Parmenides. Zenon, der etwas jüngere Freund und Schüler des Parmenides, dessen Wirken jedenfalls in die erste Hälfte des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. fällt, scheint der erste gewesen zu sein, der diese Beweistechnik bewußt und virtuos handhabte. Für Aristoteles soll Zenon als der Erfinder der Dialektik gegolten haben⁷¹.

Wie A. Szabó im dritten Teil des bereits mehrfach zitierten Buchs nachgewiesen hat, trägt die wissenschaftliche Mathematik der klassischen Epoche in vielen markanten Punkten, die wesentliche Momente ihres Aufbaus als beweisende Theorie betreffen, eindeutige Spuren der Herkunft aus der philosophischen Dialektik. Diese Spuren sind so zahlreich, daß es als wenig wahrscheinlich gelten muß, daß die pythagoreischen Mathematiker vielleicht parallel und unabhängig zur Entwicklung der Dialektik durch die Eleaten diese Beweistechnik innermathematisch entwickelt haben. Es kommt hinzu, daß die auf A. Tannery zurückgehende Auffassung, die Pythagoreer hätten sich nicht nur am Beginn, sondern auch während des 5. Jahrhunderts v. u. Zt. in prinzipieller Gegnerschaft zur eleatischen Philosophie befunden, nicht haltbar scheint. Bei allen Widersprüchen zwischen den beiden philosophischen Strömungen ist doch nicht zu übersehen, daß die Pythagoreer im Laufe des 5. Jahrhunderts wesentliche Züge der eleatischen Philosophie aufnahmen.

Gerade als die Urheber der wissenschaftlichen Arithmetik, die wir in den Büchern VII–IX der „Elemente“ Euklids vor uns haben, müssen die Pythagoreer der eleatischen Philosophie prinzipiell aufgeschlossen gegenübergestanden haben. Dies zeigte sich uns bereits bei dem Blick auf den philosophischen Kontext des Aggregationsmodells als Modell erklärender, beweisender Theorie. Die pythagoreische Arithmetik, die dort als „Rettung“ der Arithmetik angesichts der eleatischen Negation

des „Vielen“ bezeichnet wurde, macht es unbezweifelbar, daß die pythagoreischen Mathematiker sich genötigt sahen, die Mathematik auf Fundamente zu stellen, die mit der eleatischen Philosophie vereinbar sind.

Das Verfahren des indirekten Beweises gehört nun selbst zu diesem Kontext. Es ist in der eleatischen Philosophie wie auch später bei Plato unauflöslich verknüpft mit der Negation des Werdens und der Negation des Anschaulichen.

Der Zusammenhang mit der Negation des Anschaulichen liegt auf der Hand. Das Verfahren des indirekten Beweises ist in der Tat vollkommen frei von jeder Stützung auf Anschauliches, es kennt keine sinnliche Evidenz. Vielleicht erklärt sich die offenkundige Wertschätzung des indirekten Beweises durch die pythagoreischen Mathematiker nicht zuletzt daraus, daß es ihnen – wenigstens auf dem Gebiet der Arithmetik – mit diesem Beweisverfahren gelungen war, das Stadium der Demonstration an anschaulichen Repräsentanten der mathematischen Gegenstände endgültig zu überwinden. Vor diesem Hintergrund scheint mir auch Szabós These⁷² plausibel, daß die Entdeckung der Irrationalität keine „Grundlagenkrise der griechischen Mathematik“⁷³ auslöste, zu schweigen von einer dadurch herbeigeführten angeblichen Bevorzugung der Geometrie⁷⁴, die es in Wirklichkeit nicht gab⁷⁵. Wenn der Beweis der Irrationalität ein einschneidendes Ereignis der griechischen Mathematikentwicklung war, dann im Gegenteil gerade als entscheidender Triumph des gedanklichen Beweises über die anschauliche Demonstration. Denn die Irrationalität läßt sich in der Tat nicht anschaulich demonstrieren, sondern nur theoretisch beweisen – bewiesen aber wurde sie vermittels des indirekten Beweises (vgl. das Theorem X/115 a).

Was nun den Zusammenhang zwischen indirektem Beweis und der Negation des Werdens angeht, so gilt es zu sehen, daß der für den indirekten Beweis charakteristische Schluß von der Negation der einen Möglichkeit auf die Affirmation der anderen eine bestimmte Fixierung der zur Debatte stehenden Bestimmungen voraussetzt, und zwar in doppelter Weise oder genauer auf zwei Ebenen. Zum einen müssen die alternativen Möglichkeiten als Alternativen gefaßt sein, also so, daß ihre Unterschiedenheit festgehalten werden kann und sie nicht ineinander übergehen oder verfließen. Zum anderen beruht, wie wir sahen, die Eliminierung der einen der Möglichkeiten auf dem Nachweis, daß sie Momente beinhaltet, die sich wechselseitig ausschließen. Dieser wechselseitige Ausschluß beruht aber auf der Fixierung und Verselbständigung der Seite der Gegensätzlichkeit dieser Momente; da jedes von beiden

die Negation des anderen ist, sind sie ja auch unmittelbar identisch, und ihr Verhältnis wechselseitiger Negation erweist die Unselbständigkeit ihres Gegensatzes, zeigt sie als Momente einer übergreifenden Einheit, eben als Momente der erzeugenden Handlung. Die Logik des indirekten Beweises ist die des Entweder-Oder. Sie beruht auf der isolierenden Fixierung einer bestimmten Form des Verhältnisses der in Frage stehenden Bestimmungen, auf der Abstraktion vom Zusammenhang dieser Verhältnisformen. In dieser Abstraktion vom Zusammenhang der Bestimmungen und ihrer Verhältnisse realisiert der indirekte Beweis die Abstraktion vom Werden. Wie die philosophische Tradition von Parmenides über Zenon bis hin zu Plato zeigt, ist der indirekte Beweis so sehr das ausgezeichnete und zunächst auch einzige Mittel, diese Negation zu realisieren, daß es nicht statthaft scheint, innerhalb dieser Tradition das eine getrennt vom anderen betrachten zu wollen.

Bis zu einem gewissen Grade emanzipiert von den Beweis Zwecken dieser philosophischen Strömung tritt uns der indirekte Beweis als eine, wenn auch anscheinend besonders geschätzte, Beweistechnik in der pythagoreischen Arithmetik entgegen. Wenn Plato das indirekte Beweisverfahren als die Methode der Mathematiker kennzeichnet⁷⁶, so ist daraus zwar gewiß nicht zu schließen, daß dies Beweisverfahren mathematischen Ursprungs ist. Doch ist dieser Bemerkung zumindest zu entnehmen, wie eingebürgert dies Verfahren zu Platos Zeit in der Mathematik war. Vielleicht darf man aber darüber hinaus auch den Schluß ziehen, daß es erst durch diese Verwendung in der Mathematik relativ frei von den Beweisabsichten bestimmter philosophischer Strömungen erscheinen und sich damit der Beargwöhnung entziehen konnte, es sei am Ende bloß ein sophistischer Argumentationskniff; daß ihm also erst als Methode der Mathematiker die Anerkennung als gediegenes und bewährtes theoretisches Mittel zufiel, dessen Seriosität Plato auch für seine Argumentation reklamiert. Gediegen aber ist dieses Mittel in der Arithmetik, wie sich zeigte, weil die in dieser Beweistechnik fungierenden Negationsverhältnisse nicht eine sprachliche Zutat sind, sondern sprachliche Abbildungen gesetzmäßiger Beziehungen der Erzeugungshandlungen mit den Repräsentanten der arithmetischen Gegenstände, und zwar auf der Grundlage, daß diese Handlungen in der Sprache gegenständlich repräsentiert sind.

4. Resümee: Sprache und wissenschaftliches Denken

Gegenstand dieser Untersuchung war die Genese der Wissenschaft im engeren Sinne, der Wissenschaft als beweisender Theorie, deren erste Gestalt das antike Griechenland der klassischen Periode in der wissenschaftlichen Mathematik hervorbrachte. Wir rekonstruierten deswegen die Entwicklung des wahrscheinlich ältesten $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha$ der wissenschaftlichen Mathematik der Griechen, der arithmetischen LvGuU. Wir konzentrierten uns dabei auf die „objektive Grundlage“ dieser Entwicklung, in der Möglichkeit und Gesetzmäßigkeit dieser Entwicklung enthalten sind und worin ihr Resultat, die beweisende Theorie, unabhängig von den Intentionen der Beteiligten Bestand hat: Unser Interesse galt den gegenständlichen Mitteln der damaligen Mathematik und dem Gebrauch, den die Pioniere der wissenschaftlichen Mathematik, die Pythagoreer des 5. Jahrhunderts v. u. Zt., von ihnen machten. Was konnten wir hinsichtlich dieser „objektiven Grundlage“ rekonstruieren?

Der in den „Elementen“ Euklids tradierten LvGuU ging eine ältere, aus verschiedenen Indizien zu erschließende LvGuU voraus, deren gegenständliche Mittel die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ waren, das heißt die Rechensteine, mit denen auf dem Rechenbrett in der damaligen Rechenpraxis arithmetische Operationen durchgeführt wurden. Der Gebrauch, den die Pythagoreer von diesem gegenständlichen Mittel machten, war dadurch gekennzeichnet, daß sie die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ nicht zum Rechnen benutzten, sondern zur Erforschung gewisser Eigenschaften und arithmetischer Gesetzmäßigkeiten der ganzen Zahlen.

Bis in die Epen Homers läßt sich ein griechisches Wort für Zahl ($\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{\omicron}\varsigma$) zurückverfolgen, das – modern ausgedrückt – die Mächtigkeit von Mengen beliebiger diskreter Objekte bezeichnete. Das Wort repräsentierte also diese Mächtigkeit als einen von jeder bestimmten Menge unabhängig fixierbaren ideellen Gegenstand, repräsentierte eine erste Gestalt des Abstraktums „Zahl“. Dies muß als eine spezifische intellektuelle Voraussetzung der damaligen Rechenpraxis angesehen werden, von der her auch die Repräsentationsleistung der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ zu verstehen ist: Die mit ihnen gelegten Gebilde repräsentieren nicht Mengen bestimmter, sondern beliebiger Objekte der materiellen Produktion; sie repräsentieren auch nicht Vielfache oder Teile eines gegenständlichen Meßstandards; es handelt sich vielmehr um spezifische Realisationen des Abstraktums „Zahl“. Bei dieser Ausgangslage ließ sich mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$ nicht nur rechnen, sondern sie konnten auch dazu benutzt wer-

den, die Zahlen als Zahlen zu untersuchen. Der „freie“ Gebrauch der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ durch die Pythagoreer bestand somit darin, daß sie das in der damaligen Rechenpraxis gebräuchliche Mittel der Repräsentation von Zahlen verwendeten, um das Abstraktum „Zahl“ als Abstraktum zum Gegenstand ihrer Erkenntnistätigkeit zu machen.

Bildeten also die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ die erste Grundlage für die pythagoreische Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen und ihrer arithmetischen Gesetzmäßigkeiten, so bestimmten sie auch Reichweite und Grenzen dieser Untersuchungen. Wir führten für die erstaunliche Reichweite dieser Untersuchungen zwei Beispiele an und hatten sogar zu konstatieren, daß bestimmte, mit dem Repräsentationsmittel $\psi\eta\phi\omicron\iota$ zu gewinnende Einsichten in arithmetische Gesetzmäßigkeiten mit den entwickelteren Mitteln der späteren Arithmetik des klassischen Griechenland nicht nachvollzogen werden konnten. Auf der anderen Seite deckte unsere Rekonstruktion der LvGuU die Grenzen auf, die dies gegenständliche Mittel den arithmetischen Untersuchungen zog.

$\Psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch werden Einsichten über Eigenschaften der Zahlen und ihre arithmetischen Gesetzmäßigkeiten dadurch gewonnen, daß die Gesetzmäßigkeiten der Umformung von Zahlen mit bestimmten Eigenschaften in andere mit bestimmten Eigenschaften durch entsprechende Umformungsoperationen mit den Repräsentanten dieser Zahlen, also durch gegenständliche Konstruktionshandlungen mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Gebilden, demonstriert und die daran ablesbaren Umformungsgesetzmäßigkeiten sprachlich fixiert werden – zum Beispiel: Eine aus geraden Zahlen zusammengesetzte Zahl ist ihrerseits gerade (IX/21). Die Richtigkeit solcher Einsichten ist $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch immer nur durch den wirklichen Vollzug der Umformungsoperationen demonstrierbar. Eine Grenze zeigte sich auch darin, daß mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$ als gegenständlichem Mittel dieser Arithmetik Gesetzmäßigkeiten der Zahlen nur kasuistisch auszuloten sind. Einsicht in den Zusammenhang der verschiedenen, durch wirklich vollzogene Konstruktionen demonstrieren und sprachlich fixierten Umformungsgesetzmäßigkeiten ist $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetisch nicht zu gewinnen.

Der Zusammenhang dieser einzeln gefundenen Gesetzmäßigkeiten beruht auf dem Zusammenhang der Handlungen, die die mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$ in spezifischen Formen realisierten Zahlarten umformen. Diese Umformungshandlungen werden aber durch die $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Gebilde nicht repräsentiert; sie sind vielmehr in ihnen erloschen. An diesen Gebilden läßt sich also nichts über sie ablesen. Es bedarf eines Mittels der gegenständlichen Repräsentation dieser Handlungen, um Einsicht in ihren Zusammenhang und damit in den Zusammenhang der entdeckten

arithmetischen Gesetzmäßigkeiten zu erlangen. Wenn den Pythagoreern die Überwindung der Grenzen der $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -arithmetischen LvGuU gelang, so deshalb, weil sie die Sprache als gegenständliches Mittel der Repräsentation dieser Operationen verwendeten.

Die Verwendung der Sprache als Mittel der Repräsentation von Handlungen ist natürlich keine Erfindung der Pythagoreer, sondern wohl so alt wie die Sprache selbst; und auch die sprachliche Repräsentation ideeller Gegenstände muß zu den vorgefundenen Bedingungen der pythagoreischen Arithmetik gerechnet werden. Es kommt hier vielmehr darauf an zu begreifen, welche Möglichkeiten sich die pythagoreischen Arithmetiker dadurch verschafften, daß sie die Sprache gezielt einsetzten, um die spezifischen Gegenstände und Operationen ihrer wissenschaftlichen Tätigkeit gegenständlich zu repräsentieren. Sie versetzten sich damit nicht allein in die Lage, aus den Operationen mit diesen neuen Repräsentanten ihrer ideellen Gegenstände weitere Erkenntnisse zu gewinnen; sie eröffneten sich darüber hinaus damit den Weg, in einer spezifisch neuen Weise Wissenschaft zu betreiben. Die in den „Elementen“ Euklids tradierte LvGuU, so dürftig auch ihr mathematischer Inhalt ist, belegt den Sprung, den die wissenschaftliche Erkenntnis mit diesem Gebrauch der Sprache als einem spezifischen gegenständlichen Mittel wissenschaftlicher Arbeit machte.

Wir überzeugten uns davon, daß die von Euklid überlieferte LvGuU ein zusammenhängendes $\mu\acute{o}\theta\eta\mu\alpha$ ist, in dem die einzelnen Sätze aufeinander aufbauen. Wir konnten an ihr studieren, daß und wie ihre Erfassung des Zusammenhangs zwischen den arithmetischen Gesetzmäßigkeiten, die in den einzelnen Lehrsätzen behandelt werden, auf der Einsicht in den gesetzmäßigen Zusammenhang der Umformungsoperationen beruht, die aufgrund der sprachlichen Repräsentation dieser Operationen erlangt werden konnte. Wenn die von Euklid tradierte Lehre darüber hinaus auf die Repräsentation der Zahlen durch $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Gebilde und auf die Demonstration der arithmetischen Gesetzmäßigkeiten durch wirklich vollzogene Konstruktionen mit diesen Gebilden verzichten konnte, so beruhte die Möglichkeit dessen ebenfalls auf dieser Einsicht und ihren gegenständlichen Voraussetzungen.

An den Wörtern $\acute{\alpha}\rho\tau\iota\omicron\varsigma$ (gerade) und $\pi\epsilon\pi\iota\sigma\sigma\acute{o}\varsigma$ (ungerade) konnten wir uns klar machen, daß – ganz anders, als wenn die entsprechenden ideellen Gegenstände durch $\psi\eta\phi\omicron\iota$ realisiert werden – aus diesen sprachlichen Bezeichnungen keinerlei Einsicht in Eigenschaften und Gesetzmäßigkeiten der ideellen Gegenstände zu erhalten ist. Wenn dagegen aufgrund der sprachlichen Repräsentation der Umformungsoperationen mit den $\psi\eta\phi\omicron\iota$ -Gebilden, die diese ideellen Gegenstände re-

präsentieren, Einsichten in den gesetzmäßigen Zusammenhang dieser Operationen gewonnen sind, wird es auch möglich, die Bedeutung der sprachlichen Bezeichnungen der ideellen Gegenstände umzuformen, und zwar dadurch, daß man sie *definiert*. Und es spricht alles dafür, daß den Pythagoreern das Verdienst zukommt, als erste die Technik des Definierens bewußt verwendet zu haben.

Dies belegen zum Beispiel die altertümlichen Definitionen der geraden und ungeraden Zahl (VII/Def. 6 und 7). Bei diesen Definitionen, so konnten wir uns überzeugen, handelte es sich nicht um konventionelle Bezeichnungsfixierungen. Ihnen lag vielmehr die erreichte Einsicht in den gesetzmäßigen Zusammenhang zwischen den Operationen zugrunde, die die mit $\psi\eta\mu\alpha\iota$ gelegten Repräsentanten der ideellen Gegenstände umformen. Erst diese Einsicht machte das Verhältnis des ideellen Gegenstands zu seinem sprachlichen Repräsentanten zu einem Problem, das untersucht und dadurch gelöst werden konnte, daß die Bedeutung des sprachlichen Repräsentanten dieser Einsicht entsprechend sprachlich fixiert wurde. Mit dieser sprachlichen Fixierung der gewonnenen Erkenntnisse enthaltenden Bedeutung in den Definitionen war aber der ideelle Gegenstand selbst in neuer Form repräsentiert und konnte in neuer Weise zum Gegenstand der Untersuchung gemacht werden. Mit den Definitionen hatten sich die Pythagoreer eine entscheidende Voraussetzung geschaffen, um arithmetische Gesetzmäßigkeiten unabhängig von der unmittelbaren Präsenz der $\psi\eta\mu\alpha\iota$ -Gebilde im Umgang mit den sprachlichen Repräsentanten der ideellen Gegenstände finden und in einer diesem neuen Repräsentationsmittel entsprechenden Form demonstrieren, nämlich sprachlich ableiten zu können. Der Entwicklung der Wissenschaft zur beweisenden Theorie war damit der Weg geebnet.

Unsere Untersuchung kam also zu dem Ergebnis, daß die „objektive Grundlage“ der Genese der Wissenschaft im engeren Sinne, der Wissenschaft als beweisender Theorie, in der Verwendung der Sprache als eines spezifischen gegenständlichen Mittels wissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung bestand. Dies Ergebnis wirft vielleicht mehr Fragen auf, als es beantwortet: Verfügten denn nicht alle Völker auf einer den damaligen Griechen vergleichbaren Entwicklungsstufe auch über eine für diese wissenschaftliche Verwendung geeignete Sprache? Warum machten sie dann nicht ebenfalls solchen Gebrauch von ihr? Zeigt sich uns der *Genius* „des griechischen Geistes“ vielleicht darin, daß er auf die – nachher einfach aussehende – Idee kam, die Sprache so zu verwenden? An den Schluß dieser Untersuchung seien einige Bemerkungen zu den historischen Entwicklungsbedingungen der Mittel wissenschaftlicher

Arbeit gesetzt, die wir als Grundlage der Genese einer beweisenden Theorie im antiken Griechenland rekonstruierten.

Eine scheinbare Selbstverständlichkeit verdient Aufmerksamkeit: Die untersuchte Verwendung der Sprache für die wissenschaftliche Erkenntnis setzt voraus, daß die gesprochene Sprache schriftlich repräsentiert werden kann. Kein Beweis der inhaltlich weitgehend trivialen LVCuU ist ohne diese Voraussetzung denkbar.

Die Herkunft der griechischen Schrift ist im wesentlichen geklärt. Die griechischen Kolonisten in Ionien entwickelten um die Wende vom 2. zum 1. Jahrtausend v. u. Zt. aus dem phönizischen Zweig der welthistorisch allem Anschein nach ältesten Buchstabenschrift, des auf das 13. Jahrhundert datierten nordsemitischen Alphabets, eine 24 Buchstaben umfassende, Konsonanten und Vokale enthaltende Buchstabenschrift. Sie wurde dank der dominanten Stellung, die die ionische Kultur unter den griechischen Stämmen nach dem Niedergang Mykenes bis zu den Perserkriegen innehatte, und dank der Verbreitung durch den Handelsverkehr zur Schrift aller Griechen.

Der scheinbar äußerliche Umstand, daß die Griechen über eine *Buchstabenschrift* verfügten, hatte weitreichende Konsequenzen und kann auch nicht als zufällig zustande gekommen angesehen werden. Wenn wir Buchstabenschriften in dieser Zeit bei den Völkern und Stadtstaaten der asiatischen Mittelmeerküste finden, die nach dem Untergang des minoischen Staats den Seehandel zwischen den Anrainern des Schwarzen und Mittelländischen Meeres bestimmten, während die Ägypter und die verschiedenen Reiche des Zweistromlandes Silbenschriften verwendeten, so verweist das auf eine unterschiedliche Rolle der Schrift im Reproduktionsprozeß der verschiedenen Gesellschaften. In den Großreichen Mesopotamiens und Ägyptens war die Schrift Arbeitsmittel einer Kaste von Staatsfunktionären. Wie die hohen Qualifikationsanforderungen, die die Silbenschrift mit ihren Hunderten von Zeichen verlangte, das Schreiben zur Tätigkeit eines eigenen Berufsstands gemacht hatten, so verhinderte die soziale Stellung dieser Berufsleute als Angehörige der privilegierten Beamtenkaste die Entwicklung oder Übernahme einer Buchstabenschrift. In den Gesellschaften dagegen, in denen die Fernhändler nicht mehr oder minder direkt Anhänger der staatlichen Zentralwirtschaft waren, führten die aus dem Handel erwachsenden Anforderungen an eine schriftliche Fixierung der Sprache zur Entwicklung oder Übernahme von Buchstabenschriften, die keine Professionalisierung des Schreibens erforderten.

Die Verbreitung der Buchstabenschrift war also keineswegs zufällig, sondern stand im Zusammenhang mit dem Aufkommen eines relativ

selbständigen Handelskapitals in einigen Gesellschaften des östlichen Mittelmeerraums, zu denen auch das griechische Ionien zu zählen ist. Die Buchstabenschrift machte das Mittel der Repräsentation der gesprochenen Sprache zu einem jedem zugänglichen Mittel. Sie führte gewissermaßen zu einer Demokratisierung der Schriftsprache. Und wie die Verbreitung, Tradierung und Pflege dieser Schrift Entwicklungsansätze und erste Formen einer bürgerlichen Gesellschaft zur Voraussetzung hatte, so diente sie der aufkommenden bürgerlichen Klasse nicht nur in ihrer Geschäftspraxis, sondern wurde auch zu einem der wichtigsten Mittel ihres ideologischen Kampfs mit der aristokratischen Grundbesitzerklasse.

In einigen Teilen des antiken Griechenland verschafften die Demokratisierung der Schrift und die Aufklärung, mit der die entstandene Bourgeoisie der Aristokratie ideologisch entgegentrat, der Sprache eine gesellschaftliche Bedeutung und Wertschätzung, die keine Parallele in der damaligen Welt hatte. Ausgehend von Ionien und kulminierend im athenischen Staat der klassischen Periode hatten bürgerliche Wirtschafts- und Verkehrsformen das gesellschaftliche Leben Griechenlands so tiefgreifend verändert wie in keiner Gesellschaft der damaligen Zeit. (Auf die Gründe für diese exzeptionelle Entwicklung bürgerlicher Gesellschaftsformen können wir hier nicht eingehen⁷⁷.) Die Bedeutung, die der Sprache in dieser Entwicklung zukam, zeigt z. B. die Rhetorik des 5. Jahrhunderts, die der Demokratisierung des Gerichtswesens ihre Blüte verdankte, oder das berühmte Scherbengericht, das ja eine des Schreibens fähige Mehrheit der freien Bürger dokumentiert. Bedeutung und Wertschätzung der Sprache ist auch daran zu ersehen, daß seit der Mitte des 5. Jahrhunderts über das Lesen und Schreiben hinaus das Studium der Trias von Grammatik, Rhetorik und Dialektik als Voraussetzung sprachlicher Bildung angesehen wurde. Schließlich ist an die Prosa-Literatur zu erinnern, die seit dem 6. Jahrhundert entstand, eine Literatur, die vorwiegend philosophische, wissenschaftliche oder doch wenigstens solche Inhalte behandelte, die Gegenstand geistiger Tätigkeit sind.

Bemerkenswert ist, daß diese Entwicklung seit dem Ausgang des 6. Jahrhunderts nicht mehr auf die Bourgeoisie beschränkt war. Auch bedeutenden Teilen der Aristokratie galten nun Philosophie, Wissenschaft und hochentwickelte sprachliche Bildung als Signum des in Muße lebenden Freien. Die *καλοκαγαθία* – ein nicht übersetzbarer Ausdruck für die Idealvorstellung einer vollendeten Verwirklichung des menschlichen Wesens – umfaßte auch für sie nicht mehr nur die Ausbildung körperlicher und musischer Fähigkeiten. Am deutlichsten

drückt sich diese Wandlung in der Tatsache aus, daß sich nun auch die aristokratische Gegenauflärung wissenschaftlicher Argumentationsweisen bediente und dabei – wie die eleatische und später die platonische Philosophie zeigen – wesentlich zur Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens beitrug.

Die geistige Tätigkeit dieser in Muße lebenden Klassen war nicht allein von der materiellen Produktion getrennt. Anders als in den Großreichen Mesopotamiens und Ägyptens geschah sie darüber hinaus nicht im Kontext einer zentralen Verwaltungs- und Wirtschaftstätigkeit des Staates. In Griechenland prägte die Öffentlichkeit des staatlichen Lebens die geistige Tätigkeit. Diese bestimmten historischen Bedingungen geistiger Tätigkeit setzten der Auslotung der Möglichkeiten, die in den verfügbaren gegenständlichen Mitteln der geistigen Tätigkeit enthalten waren, einerseits Grenzen, wie etwa der vergleichsweise niedrige Entwicklungsstand von Arithmetik, Algebra und Astronomie im klassischen Griechenland zeigt. Andererseits liefern erst diese konkreten historischen Bedingungen eine Erklärung, wieso es den griechischen Wissenschaftlern dieser Epoche gelang, die Möglichkeiten des sicherlich wichtigsten Mittels geistiger Tätigkeit, der Sprache, so herauszuarbeiten, daß in gewisser Weise von der Erfindung eines neuen Mittels wissenschaftlicher Arbeit gesprochen werden kann.

Diese „Erfindung“ ermöglichte den Sprung in der Wissenschaftsentwicklung, den die Genese der beweisenden Theorie darstellt. Damit erbrachte das klassische Griechenland vielleicht auch die entscheidende Vorleistung für die Zusammenführung und Integration der spezifischen Mittel geistiger Tätigkeit, die in verschiedenen Kulturen entwickelt worden waren, durch die hellenistische Wissenschaft. Auf dieser Grundlage gelang der hellenistischen Wissenschaft die weitere Herausarbeitung der allgemeinen Natur der ideellen Gegenstände der Wissenschaft, ihr herausragender Beitrag zu einer einheitlichen Weltgeschichte der Wissenschaft. So zufällig biografische Umstände immer sind, so „logisch“ erscheint es von dieser Überlegung her, daß die Lebensdaten Euklids, sein Studium in Athen und seine Tätigkeit in Alexandrien, ihn gerade an das Ende der Wissenschaftsentwicklung im klassischen Griechenland und zugleich an den Beginn der hellenistischen Wissenschaft stellen.

- 75 V. d. MEER Nr. 59 S. 32 ff. Ein Paralleltext (Silbermaße) ist MLC 1854, MKT I S. 92 ff.
- 76 Vgl. auch metrologische Listen für andere Maße, z. B. HILPRECHT Nr. 29, Nr. 37, Nr. 38.
- 77 Die Datierung von Ist.T 7375, DELAPORTE (1912) S. 43 und Pl. 14, ist nur auf das Schriftbild gegründet (vgl. MKT I S. 10). Das gleiche gilt für die Datierung der Vielfachentafel v. d. MEER Nr. 61 nach Ur III (vgl. MKT I S. 50).
- 78 In den von NIES publizierten Wirtschaftstexten habe ich kein einziges Beispiel finden können, das Hinweise auf eine Multiplikation enthält.
- 79 Ist.T 7375, DELAPORTE (1912) S. 43 und Pl. 14, vgl. auch ders. (1911).
- 80 Weitere terminologische Varianten vgl. MKT I S. 24 ff.
- 81 Vgl. NEUGEBAUER (1934) S. 8. Die Übersichten MKT I S. 8 ff. und MCT S. 12 enthalten nur noch ein weiteres Beispiel.
- 82 Vgl. die Übersichten MKT I S. 32 ff. und MCT S. 19 ff.
- 83 CBM 10190 (= HILPRECHT Nr. 11); von Hilprecht noch als Vielfachentabelle der Zahl 150 fehlgedeutet, da die Mehrdeutigkeit der Zahlzeichen noch nicht erkannt worden war.
- 84 HILPRECHT Nr. 40; Paralleltext HILPRECHT Nr. 39.
- 85 Z. B. CBM 19814 (= HILPRECHT Nr. 35), CBM 19820 (= HILPRECHT Nr. 34), CBM 45005 (= HILPRECHT Nr. 33), HILPRECHT Nr. 31, Nr. 32, Nr. 36.
- 86 Sexagesimaltabellen der Längenmaße finden sich auf folgenden Tafeln (ausgezeichnete Einheit in Klammern soweit ermittelbar): AO 8865, MKT I S. 88 ff. (GAR); VAT 6220, MKT I S. 90 (GAR); HILPRECHT Nr. 41 (küş), Nr. 42 (GAR), Nr. 43 (GAR); CBS 7369, MCT S. 30; BM 92698, WEISSBACH S. 318 f. (2 Tabellen: GAR und küš); Ist.T 10994, MKT I S. 53; Ist.O 4108, MKT I S. 73 f. (küş); W 1923–366, MCT S. 34; CBS 8156, MCT S. 30; CBS 29.13.174, MCT S. 33.
- 87 Die Übersichten MKT I S. 68 ff. und MCT S. 19 ff. enthalten 28 Quadratzahltafeln, davon wahrscheinlich der überwiegende Teil aus der altbabylonischen Periode. Neben den Vielfachen- und Quadratzahltabellen wurden auch Tabellen mit der gleichen Struktur, aber mit der arithmetischen Gliederung der Längen- bzw. Flächenmaße gefunden; vgl. MCT S. 6 ff. sowie aus der kassitischen Periode Ist.A 20 + VAT 9734, MKT I S. 92.
- 88 Vgl. die Übersichten MKT I S. 35 ff. und MCT S. 24 ff.
- 89 In der Literatur ist immer nur von einer ‚metrologischen Tabelle‘ die Rede. Soweit ich ermitteln konnte, handelt es sich in allen bekannten Beispielen um Tabellen von *Längenmaßen*, vermutlich um Sexagesimaltabellen und nicht nur um Listen. Es sind dies die Tafeln: Ist.T 10994, MKT I S. 53; VAT 6220, MKT I S. 90; CBS 7369, MCT S. 30; CBS 8156 ebd.; CBS 29.13.174, MCT S. 33.
- 90 VAT 6505, MKT I S. 270 ff.; vgl. hierzu BMT I S. 226 ff.
- 91 CBS 1215, BMT I S. 230 ff. Vgl. auch BRUINS (1971) S. 241 f.
- 92 Überschen von BRUINS (1973) S. 179, dessen Kritik an der Deutung von Sachs in BMT I damit hinfällig wird. Die These von BRUINS, die Tafel und alle übrigen Rechentafeln seien nur ‚Schultexte‘ einer souverän gehandhabten Kopfrechentechnik, zeigt m. E. wie notwendig es ist, die Historiografie

um eine theoretisch fundierte und empirisch abgesicherte Rekonstruktion der Entwicklung des arithmetischen Denkens zu ergänzen.

- 93 VAT 7535, Vorders. Zeile 22 und 23, MKT I S. 306 f.
- 94 Die 13 bekannten Fälle sind aufgelistet in SACHS (1946) S. 212 Fn. 24.
- 95 YBC 10529, MCT S. 16.
- 96 F. Lewis Collection M 10, BMT II S. 152 f.
- 97 Vgl. z. B. NEUGEBAUER (1934) S. 175 ff.; WUSSING S. 44 ff.; VOGEL (1959) S. 45 ff.
- 98 Z. B. in AO 8862, MKT I S. 108 ff.
- 99 Vgl. MKT I S. 208.

Zu: *Rechensteine und Sprache*

- 1 Vgl. hierzu MITTELSTRASS S. 29 passim.
- 2 WUSSING S. 56.
- 3 KLAUS/KRÖBER S. 83.
- 4 BECKER (1964) S. 22.
- 5 KLAUS/KRÖBER S. 85, S. 112.
- 6 MALSCH S. 12.
- 7 WHITEHEAD S. 12.
- 8 STRUIK S. 33.
- 9 SZABÓ S. 288 ff.
- 10 Vgl. z. B. PLATO Politeia 524d–526c.
- 11 Vgl. STRUIK S. 35–42, und WUSSING S. 58, S. 62 f., S. 75.
- 12 Text bei BECKER (1964) S. 29 ff.
- 13 Vgl. DIELS-KRANZ 58 B 1.
- 14 WUSSING S. 83.
- 15 PLATO Timaios 52 b; vgl. die Passage ebd. 50 c ff.
- 16 ARISTOTELES Zweite Analytik 79 a, Physik 193 b, Metaphysik 1077 b–78 b.
- 17 Ders. Metaphysik 1005 b 19 ff.; vgl. auch SOLMSEN S. 126.
- 18 SZABÓ S. 378 passim, bes. S. 382 ff., S. 410 f., S. 416.
- 19 DIELS-KRANZ 21 B 7.
- 20 Ebd. 29 B 2 und 3.
- 21 Ebd. 29 A 24 und B 4.
- 22 Die Numerierung und alle Zitate nach: EUKLID.
- 23 PROKLOS S. 66.
- 24 Vgl. dazu vor allem HEATH und van der WAERDEN.
- 25 DIELS-KRANZ 23 B 2.
- 26 BECKER (1936).
- 27 KLAUS/KRÖBER S. 95; STRUIK S. 37.
- 28 THAER S. 439; WUSSING S. 84.
- 29 BECKER (1964) S. 38; REIDEMEISTER S. 34; vgl. aber auch THAER S. 438 ff.
- 30 Vgl. z. B. ARISTOTELES Zweite Analytik, bes. 72 b und 83 b–84 a.
- 31 KLAUS/KRÖBER S. 95; WUSSING S. 72 f.
- 32 Vgl. z. B. PLATO Politikos 278 a–b; ARISTOTELES Metaphysik 1014 a 26–b 2.

- 33 MENNINGER Bd. 2 S. 106.
- 34 SZABÓ S. 348 f.
- 35 PLATO Politeia 525 d–526 a (Übers. v. Schleiermacher).
- 36 Vgl. dazu SEXTUS EMPIRICUS Bd. 2 X § 260–61.
- 37 Vgl. die Ausführungen Platos unmittelbar vor der zitierten Politeia-Passage.
- 38 DIELS-KRANZ 29 B 2 und 3.
- 39 Ebd. 28 B 8,6.
- 40 Z. B. ebd. 28 B 8,25.
- 41 ARISTOTELES Metaphysik 987 b 14–18 (Übers. v. Bonitz).
- 42 Vgl. dazu auch LUKREZ I 782–89.
- 43 Vgl. für Parmenides vor allem DIELS-KRANZ 28 B 8, für Zenon ebd. 29 B 4.
- 44 ARISTOTELES Metaphysik 986 a 22 ff.
- 45 DIELS-KRANZ 28 B 8, 53 ff.
- 46 ARISTOTELES Metaphysik 986 a 22 ff.
- 47 Ebd. 985 b 26–986 a 3.
- 48 Ebd. 990 a 8–12.
- 49 SEXTUS EMPIRICUS Bd. 1 III 18 § 152.
- 50 ARISTOTELES Metaphysik 986 a 3 (Übers. v. Bonitz).
- 51 DIELS-KRANZ 23 B 2 (Übers. v. Diels).
- 52 Vgl. MENNINGER Bd. 2 S. 104 ff.
- 53 Vgl. ARISTOTELES Metaphysik 1092 b 12; BECKER (1964) S. 34 f.
- 54 ARISTOTELES Metaphysik 986 a 26.
- 55 Ders. Physik 203 a 13–15; BECKER (1964) S. 35 f.
- 56 Vgl. CANTOR S. 161 ff.
- 57 ARISTOTELES Metaphysik 986 a 22 ff.
- 58 Vgl. CANTOR S. 160.
- 59 Vgl. BECKER (1964) S. 36 f.
- 60 CANTOR S. 168.
- 61 REIDEMEISTER S. 51.
- 62 Vgl. BECKER (1936).
- 63 So explizit im Beweis des Theorems IX/31.
- 64 BECKER (1936) S. 544 f.
- 65 Vgl. SZABÓ S. 359 f.
- 66 So z. B. bei PARMENIDES (DIELS-KRANZ 28 B 8,22).
- 67 PLATO Nomoi 895 e.
- 68 Vgl. SZABÓ S. 269 u. S. 361.
- 69 Ebd. S. 168 ff.
- 70 SOLMSSEN S. 129; vgl. auch das erste Kapitel von KAPP.
- 71 DIELS-KRANZ 29 A 1 und 10.
- 72 SZABÓ S. 125, S. 286 ff.
- 73 HASSE/SCHOLZ.
- 74 Vgl. z. B. WUSSING S. 81, S. 89 f., S. 100 ff., bes. S. 104 ff.
- 75 Vgl. PLATO Timaios 50 c–52 b.
- 76 Vgl. z. B. ders. Theaitetos 162e i. V. m. dem Diskurs 163d–164b.
- 77 Ich verweise hierzu auf THOMSON.

Zu: Beobachten, Kalkulieren, Eingreifen

- 1 Vgl. BROCKMEIER/ROHBECK.
- 2 DIJKSTERHUIS S. 519.
- 3 Zit. nach HECKSCHER, S. 282 f.
- 4 DAVENANT, I, S. 128.
- 5 Vgl. z. B. SCHUMPETER, I, S. 443.
- 6 MILL, S. 156.
- 7 BACON, S. 24.
- 8 NEWTON: Optics, S. 260 f. (übers. nach DIJKSTERHUIS, S. 546).
- 9 DIJKSTERHUIS, S. 520.
- 10 Z. B. NEWTON: Principia, S. 39 f.
- 11 WOLFF, S. 317.
- 12 NEWTON: Principia, S. 39. Mit „die zwei ersten Gesetze“ meint Newton die beiden ersten seiner drei Axiome oder „Grundsätze oder Gesetze der Bewegung“. Er formuliert sie selbst wie folgt:
„1. Gesetz. Jeder Körper beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Zustand zu ändern.
2. Gesetz. Die Änderung der Bewegung ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und geschieht nach der Richtung derjenigen geraden Linie, nach welcher jene Kraft wirkt.“
- 13 WOLFF, S. 317.
- 14 NEWTON: Principia, S. 39.
- 15 GALILEI: Discorsi, S. 159.
- 16 Die hier von Galilei verwendeten Begriffe wie „schwerer Körper“ und „natürlich beschleunigte Bewegung“ verweisen auf den auch bei Galilei noch durchgängigen aristotelischen Sprachgebrauch und die traditionelle Trennung einer „natürlichen“ von einer „erzwungenen“ Bewegung. Galilei erklärt die Bedeutung der von ihm verwandten Termini wie folgt: „... so haben wir uns dennoch entschlossen, diejenigen Erscheinungen zu betrachten, die bei den frei fallenden Körpern in der Natur vorkommen, und lassen die Definition der beschleunigten Bewegung zusammenfallen mit dem Wesen einer natürlich beschleunigten Bewegung.“ Discorsi, S. 147.
- 17 Vgl. die Beispiele bei HERMANN, S. 161, und BLUMENBERG, S. 49 f.
- 18 COHEN, S. 115.
- 19 GALILEI, Discorsi, S. 162 f.
- 20 SCHUMACHER, S. 34.
- 21 OLSCHKI, S. 414.
- 22 Vgl. BROCKMEIER, C.III.
- 23 LEONARDO DA VINCI, MS E 55 r (Institut de France).
- 24 GALILEI: Discorsi, S. 3.
- 25 GEYMONAT (1980), S. 62; dazu auch KLEMM (1970) und (1964).
- 26 Vgl. zum Sarpi-Brief und seiner Einschätzung DRAKE, S. 100 f.; bei Drake findet sich auch eine philologisch und biographisch genaue Nachzeichnung