

Pythagore ou la musique au service des mathématiques

François Baskevitch¹

fbaskevitch@orange.fr

Table

Histoire et histoires : mise au point.....	2
Les pythagoriciens et la musique grecque ancienne.....	2
L'école et la pensée pythagoricienne.....	3
Le nombre comme concept.....	7
Les obstacles à une physique pythagoricienne.....	9
Les pythagoriciens et les mathématiques musicales.....	11
La théorie des premiers harmoniciens.....	12
La hauteur du son : tension ou longueur de la corde.....	13
La division de l'octave des pythagoriciens : la théorie harmonique.....	16
Production des sons sur une corde tendue par la méthode des harmoniques.....	16
La révolution harmonique de l'octocorde.....	17
Le monocorde des pythagoriciens : un instrument de mesure.....	21
La mesure des intervalles sur le monocorde.....	22
Rapports, proportions, médiétés.....	26
La médiété pythagoricienne 6, 8, 9, 12.....	28
De l'impossibilité de partager de façon égale une octave ou une quarte.....	28
L'harmonie, un outil mathématique.....	30
Les apports réels des pythagoriciens : la mesure des intervalles et les rapports.....	31
Le mythe de Pythagore acousticien.....	32
Bibliographie.....	34
Auteurs anciens.....	34
Sources secondaires	35

¹ François Baskevitch est ingénieur retraité et docteur en histoire des sciences (Université de Nantes, 2008). Actuellement (depuis 2022) : Chercheur associé (histoire des sciences), Unité de Recherche Crises (EA 4424), Université Paul-Valéry Montpellier 3.

Pythagore ou la musique au service des mathématiques

Histoire et histoires : mise au point

En grec ancien, ἱστορία (*historia*) signifie « recherche », « information », « exploration ». Tous les historiens le savent, lorsque Hérodote, au ^v^e siècle avant notre ère (= AEC), écrit ses *Histoires*, il fait un travail d'enquêteur, il explore les sources à sa disposition et publie des informations sur son époque et celles qui la précèdent. C'était la démarche d'Aristote lorsqu'il écrit son *Histoire des animaux*, et celle de Théophraste dans son *Histoire des plantes*, mais également celle de Buffon avec sa monumentale *Histoire naturelle*. On sait que au cours des siècles, cette Histoire est devenue principalement narrative. Il arrive même encore de lire que l'histoire est un récit. Les religions ont principalement été à la manœuvre, tant leur propension à raconter permet toutes les manipulations grâce notamment au phénomène d'identification avec les héros. En effet, les héros et les événements sont indispensables à tout récit, les romanciers le savent bien. L'histoire des sciences n'échappe pas au phénomène et, malgré son développement finalement récent, les légendes et le mode narratif abondent encore dans des ouvrages qui nous racontent Archimède, Galilée ou Edison. Pythagore est un de ces héros, et il convenait de faire cette courte mise au point.

Une étude sur les théories de l'acoustique dans l'Antiquité grecque peut difficilement éviter un tel personnage, tant son aura a traversé l'histoire des idées à propos du son et d'une de ses applications principales, la musique. Ce chapitre ne concerne pas la nature physique du son mais de ces sons organisés par l'homme et qu'on nomme « musique ». Les Grecs anciens, comme d'autres civilisations, ont pensé cette organisation des sons et en ont élaboré des théories dont l'histoire est celle de l'« acoustique musicale ». Cette théorie des sons organisés, qu'on appellera bientôt l'harmonie, entretient des rapports étroits avec un autre domaine de réflexion abstraite, les mathématiques.

Les pythagoriciens et la musique grecque ancienne

La théorie musicale de la Grèce antique a largement contribué à l'élaboration des systèmes en usage dans la musique occidentale, et plus encore dans la musique arabe. Les systèmes grecs ont été construits à partir d'une pratique des musiciens qui chantaient en jouant d'un instrument à cordes appelé *phorminx*. Cet instrument comprenait quatre cordes pendant la période archaïque, puis sept vers le VI^{ème} siècle avant notre ère lorsqu'il prit le nom de lyre. La problématique posée à ces musiciens est l'accord de ces cordes entre elles, c'est à dire la définition des intervalles musicaux qu'elles encadrent, et la détermination des degrés correspondants, en donnant un nom à ces « notes ».

C'est ici que les mathématiques sont venus « en aide » aux musiciens qui s'accommodaient jusque là de leurs qualités auditives et d'une pratique transmise par l'enseignement de la musique. Pythagore, ou plutôt les pythagoriciens, sont à l'origine de cette mathématisation de la musique, et nous allons tenter de reconstituer la démarche de ces novateurs en évitant les approximations séduisantes du discours narratif.

On peut toutefois renverser cette thèse généralement adoptée dans la littérature par son inverse : c'est la théorie musicale qui est venue en aide aux mathématiques en permettant une 3représentation simple des rapports de nombres et des opérations associées. C'est d'ailleurs pour cette raison que la musique est considérée par Archytas puis par Platon, comme des sciences sœurs, aux côtés de l'astronomie, de l'arithmétique et de la géométrie². Plus tard, la musique fera partie du corpus d'enseignements mathématiques au sein du quadrivium médiéval promu par Boèce au VI^{ème} siècle de notre ère.

L'école et la pensée pythagoricienne

Pythagore a créé son école, sorte de société secrète qui se propose d'approfondir la connaissance, sans la partager, à la fin du VI^{ème} siècle AEC. Selon plusieurs sources concordantes, on considère aujourd'hui que Pythagore n'a rien écrit. Ceci n'est pas étonnant, puisque nous ne disposons d'aucune trace, ni même d'évocation, de *textes longs*

² Archytas de Tarente, DK 47 B1, 5-7 : « [...] ils nous ont laissé des connaissances claires, ainsi que sur la géométrie et les nombres et plus que tout, sur la musique. Car ces sciences nous semblent être sœurs. ». Platon, *République*, VII, 530d : « Il semble que, de même que les yeux ont été formés pour l'astronomie, les oreilles ont été formées pour le mouvement harmonique, et que ces deux sciences sont sœurs, comme l'affirment les pythagoriciens, et comme nous l'admettons, nous aussi ». D'autres classifications ont été proposées, comme celle de Geminus. Voir à ce sujet : Bernard Vitrac, « Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne », in *Archives de Philosophie* 68 (2005) p. 269-301.

écrits en prose avant la seconde partie du v^{ème} siècle en Grèce, époque à laquelle ils apparaissent alors en nombre. On sait qu'auparavant, les textes longs étaient rédigés en vers et étaient appris par cœur (poèmes, tragédies et comédies, et également textes philosophiques, comme ceux de Parménide ou d'Empédocle). Il est probable que vers -440 un problème technique ait été résolu concernant les supports d'écriture propre à cette région (peut-être l'encollage des papyrus)³. Nous disposons de peu de données sur les supports d'écriture de cette époque et le sujet est peu traité. (Fin de cet aparté qui ouvre pourtant des perspectives aux historiens des techniques en Grèce ancienne).

L'aura de Pythagore couvre la région du sud de la Grande Grèce, autour des villes côtières de Métaponte, de Tarente et de Crotone qui entourent le Golfe de Tarente. Les livres sur sa vie et son école écrits au v^{ème} et au iv^{ème} siècle AEC ont disparu, ce qui alimente bien entendu le mystère et les histoires qui souvent tiennent lieu d'Histoire. Aristote a écrit un ouvrage *Sur les pythagoriciens* et Aristoxène est l'auteur d'une *Vie de Pythagore*. Ces deux ouvrages aujourd'hui perdus ont sans doute été lus jusqu'aux premiers siècles de notre ère et ont alimenté les biographies de cette époque (celles de Porphyre, de Jamblique et de Diogène Laërce).

Au iii^{ème} siècle AEC, Ératosthène a établi une chronologie des siècles précédents et il est sans doute à l'origine d'une confusion qu'on ne conteste plus aujourd'hui, entre notre Pythagore et un probable homonyme plus ancien qui avait brillé sur les stades comme athlète ; cette confusion avait amené des incohérences chronologiques telles que la mort de Pythagore à l'âge de 112 ans. On connaît à peu près l'année de sa disparition, vers -495, et il semble qu'il soit né vers -560. Pythagore serait arrivé à Crotone vers -530, peut-être après des voyages qui l'auraient mené de son île ionienne natale vers l'Égypte et, a-t-on dit, en Mésopotamie. Il est presque impossible d'établir avec certitude la biographie, la chronologie et même la doctrine de Pythagore, tant les sources sont contradictoires et souvent hagiographiques donc peu fiables, mais abondantes⁴.

³ Les Égyptiens écrivent alors sur des papyrus depuis plusieurs siècles. Il s'agit d'étroites et longues bandes constituées par la tige de la plante, et assemblées par collage pour constituer des rouleaux. Le papyrus et la colle (probablement une sorte d'argile fine) provenaient de la même région du delta du Nil. Pour leur part, les Mésopotamiens écrivaient sur des tablettes d'argile. les Grecs gravaient sur la pierre et écrivaient sur des tablettes de bois et sur des tessons de céramique. Il semble que les Ioniens utilisaient des peaux animales.

⁴ Luc Brisson commente avec malice la pauvreté des sources fiables sur Pythagore et son école : « Suivant le principe qui prévaut dans le domaine de l'érudition et qui veut que la production savante croisse en proportion inverse de l'information disponible, la littérature secondaire sur Pythagore et les pythagoriciens est foisonnante et difficile à maîtriser ». Luc Brisson, « Platon, Pythagore et les pythagoriciens » in M. Dixsaut et A. Brancacci, *Platon, source des présocratiques, exploration*, Paris, Vrin, 2002, p. 21-46.

Les travaux menés par les philologues et les érudits depuis le XIX^{ème} siècle indiquent que la pensée pythagoricienne primitive a été transmise jusqu'aux premiers siècles essentiellement par Hippase (début du V^{ème} siècle) et par Philolaos (fin du V^{ème} siècle), disciples de l'école qui disparaît vers -440. Selon Diogène Laërce et d'autres biographes, Platon aurait acheté les trois livres de Philolaos qui aurait ainsi trahi la règle du secret en écrivant. L'ouvrage disparu de ce pythagoricien de Crotone, un *Péri phuséôs* (*Sur la nature*), aurait été copié et lu par plusieurs auteurs aux époques alexandrine et romaine. On dispose de quelques fragments plus ou moins authentiques cités par des auteurs tardifs. Un autre écrit est connu grâce à une longue citation dans le chapitre que Diogène Laërce consacre à la vie de Pythagore ; il a été transmis par Alexandre Polyhistor, et aurait été l'œuvre d'un platonisant du III^{ème} siècle AEC, selon l'étude consacrée à ce texte par A.-J. Festugière⁵.

Le courant mystique qu'on désigne sous le nom de néo-pythagorisme a connu un succès important au cours des premiers siècles de notre ère. Les *Vie de Pythagore* de Porphyre et de Jamblique, écrites vers cette époque, se sont de tous temps très bien vendues, mais elles sont à lire avec précautions, tant les anecdotes apocryphes se mêlent aux sources anciennes rapportées par ces auteurs. C'est regrettable, car il n'y a rien de pire pour l'historien que les légendes pour obscurcir la connaissance, et celles-là abondent. Compte tenu du caractère hagiographique de ces deux *Vies de Pythagore*, de Jamblique et de Porphyre, on ne peut pas les considérer comme des sources fiables pouvant nous renseigner sur une période et sur une pensée élaborée huit siècles auparavant⁶. On ne s'y référera donc qu'avec une grande prudence.

Le pythagorisme ancien a bien existé comme courant philosophique, et il subsiste quelques traces de cette pensée dans les écrits disponibles du IV^{ème} siècle AEC – on lit souvent que Platon est sensiblement influencé par le pythagorisme – et chez quelques Académiciens plus tardifs : on cite généralement Speusippe et Xénocrate comme représentants de ce courant platonicien pythagorisant. Par ailleurs, la lecture de plusieurs textes d'Aristote (dont le livre A de la *Métaphysique*) nous délivrent quelques aspects de la pensée pythagoricienne.

⁵ A.-J. Festugière, « Les mémoires pythagoriques cités par Alexandre Polyhistor », in *Revue des études grecques*, 58, 1945, p. 1-65.

⁶ Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres* (vers 200), livre XIII, trad. sous la direction de M.-O. Goulet-Cazé, Paris, Le Livre de poche, 1999. Porphyre, *Vie de Pythagore* (vers 270), édi. et trad. E. des Places, Paris, Les Belles Lettres, 1982. ; Jamblique, *Vie de Pythagore* (vers 310), intr., trad. et notes par L. Brisson et A. Ph. Segonds, Paris, Les Belles Lettres, 1996.

L'histoire des théories musicales grecques est particulièrement contaminée par ce Pythagore mythique dont on ne sait pas grand chose et sur qui on raconte tout et n'importe quoi. Par exemple, tous les théoriciens de la musique de l'Antiquité tardive se réfèrent au fameux système pythagoricien, contribuant au succès de la mythique « gamme de Pythagore ». Rappelons que Pythagore n'a, très probablement, rien écrit et que tout ce qu'on a raconté sur la vie de cet homme date de 800 ans après qu'il a vécu. En réalité, le système musical grec a probablement été constitué sur une longue période, et ses promoteurs sont presque tous inconnus, sans doute parce qu'ils ne bénéficiaient pas de cette aura « médiatique » qui a propulsé le mythe pythagoricien.

La plupart des sources sur la théorie harmonique des Grecs sont des extraits d'ouvrages tardifs, nous ne disposons que de très peu de textes originaux des théoriciens de la musique grecque⁷. Parmi eux, Aristoxène de Tarente est l'auteur d'un ouvrage important, les *Éléments harmoniques*, qui, loin d'encenser les pythagoriciens, développe une approche davantage centrée sur la pratique musicale que sur les mathématiques. Un autre texte d'un auteur inconnu mais attribué à Euclide expose la théorie harmonique dans ses rapports avec les mathématiques ; intitulé *La division du canon*, il est daté de la fin du IV^{ème} siècle AEC. Les *Problèmes musicaux* d'Aristote ne sont pas d'Aristote, mais probablement d'un auteur de la période hellénistique tardive, tout comme le *Sur la musique* longtemps attribué à Plutarque⁸. Les autres textes sont tous datés des premiers siècles de notre ère, inspirés par le mouvement néo-pythagoricien propre à cette époque⁹. Un fragment est souvent cité comme source d'information sur la théorie harmonique, c'est celui d'Archytas de Tarente, extrait d'un ouvrage de Porphyre (III^{ème} siècle EC).

Il est fréquent de lire qu'Archytas de Tarente était pythagoricien, c'est inexact. Né dans la Grande Grèce dans le dernier tiers du V^{ème} siècle, Archytas a reçu un enseignement pythagoricien, comme tous les lettrés de ces villes du sud de notre Italie. Il semble qu'à cette époque, c'était là le passage obligé pour ceux qui se destinaient à la gestion de la cité et aux suffrages des habitants ou à la connaissance de la nature et du monde. De nombreux savants ont reçu cet enseignement ou ont été imprégnés de cette culture : parmi ceux dont on dispose de quelques fragments, on peut citer les musiciens

⁷ La plupart de ces sources sont disponibles en traduction anglaise dans l'ouvrage d'Andrew BARKER, *Greek Musical Writings*, 2 tomes, Cambridge University Press, 1989.

⁸ RUELLE, Charles-Émile. *Problèmes musicaux d'Aristote (traduction et commentaire)*. In: *Revue des Études Grecques*, tome 4, fascicule 15, 1891. pp. 233-267. Ps-Plutarque, *De la musique*, édition critique et explicative par Th. Reinach et H. Weill, Leroux, Paris, 1900.

⁹ Pour ceux qui ont laissé une trace : Nicomaque de Gérase, Théon de Smyrne, Aristide Quintilien, Boèce et d'autres dont les textes ont été popularisés par Ch. Émile Ruelle (RUELLE, Charles-Émile, *Sept textes d'auteurs sur la musique antique*, traduction française avec commentaires, Pottier de Lalaine, Paris, 1887).

Hippase, Glaucos, Philolaos et Aristoxène, les médecins Pausanias, Philistion, les médecins-physiciens Alcmeon et Empédocle, le botaniste Ménestor, et notre Archytas, musicien, mécanicien, mathématicien et moraliste.

Cependant, recevoir un enseignement ne signifie pas forcément adhérer aux thèses du maître une fois la maturité intellectuelle atteinte ; et c'est pour avoir négligé cette banalité que, par la suite, on fera pythagoriciens certains philosophes qui n'en avaient reçu que l'enseignement¹⁰. Comme Empédocle avant lui, et comme Aristoxène après lui, Archytas singularise sa pensée et se dégage du dogme.

Par ailleurs, selon plusieurs sources, on sait que le fonctionnement social de l'école est très strict : il impose un régime alimentaire végétarien, de longues périodes de silence avant de pouvoir s'exprimer, une obligation au secret et de nombreux interdits. Tout ceci a fait l'objet d'une littérature anecdotique abondante jusqu'à aujourd'hui.

Le nombre comme concept

La pensée pythagoricienne est centrée d'une façon presque mystique sur le nombre et sur l'harmonie, concept issu de la rencontre entre l'arithmétique, la géométrie, l'observation astronomique et l'étude des intervalles musicaux. Selon Aristoxène (cité par Stobée), « il semble que Pythagore ait porté l'intérêt le plus vif à la recherche sur les nombres, et que, au lieu de s'en tenir à l'usage qu'en font les marchands, il l'ait fait fortement progresser, allant jusqu'à assimiler toutes choses à des nombres »¹¹. En effet, si le dénombrement est une pratique ancienne, chez les Mésopotamiens et les Égyptiens notamment, cette démarche était avant tout utilitariste. L'apport de Pythagore à l'histoire des idées serait donc de concevoir les nombres comme des entités autonomes et abstraites qui sont à l'origine des mathématiques.

Pour les pythagoriciens, les principes de l'être ne sont pas dans les causes matérielles comme chez les philosophes ioniens qui invoquent l'eau ou l'air comme principe des choses, ni dans le feu d'Héraclite, mais dans la dualité immatérielle de l'un et de l'illimité. Selon Aristote qui résume leur ontologie, « l'infini lui-même et l'un lui-même sont la

¹⁰ L'assimilation de la pensée de ces philosophes au pythagorisme s'est effectuée à l'époque du néo-platonisme, à partir du II^e siècle, notamment avec Porphyre et Jamblique qui ont beaucoup contribué à la légende de Pythagore (ils sont l'un et l'autre auteurs d'une *Vie de Pythagore*). Parmi ces auteurs qualifiés de pythagoriciens, outre Archytas, on note Xénocrate, Eudoxe et même Parménide et Empédocle.

¹¹ DK 58 B2, Stobée, *Eclogae*, I, Préface, 6 ; Wehrli, fr. 23.

substance des choses dont ils sont les prédicats ; c'est pourquoi, pensent-ils, la substance de toute chose est nombre »¹².

Le déterminisme numérologique qui caractérise les pythagoriciens les incite à repérer les rencontres remarquables entre les nombres qui, pour eux, ne sont jamais fortuites. Ils agrègent ces nombres en séries et leur confèrent des propriétés magiques dont la signification demeure assez obscure. La série 1, 2, 3, 4 constitue la *tétractys* ou « quaternaire », aux propriétés singulières : la somme de ces nombres génère la décade, structure supposée parfaite et génératrice du monde. Théon de Smyrne, néo-platonicien du II^{ème} siècle EC, témoigne de l'importance de la *tétractys* ou quaternaire¹³ :

L'importance du quaternaire (*tetractys*) qu'on obtient par addition (c'est-à-dire 1, 2, 3, 4) est grande en musique, parce qu'on y trouve toutes les consonances. Mais ce n'est pas seulement pour cela que tous les pythagoriciens lui font l'honneur du premier rang : c'est aussi parce qu'il semble renfermer toute la nature de l'univers. C'est pour cette raison que la formule de leur serment était : « J'en jure par celui qui a transmis dans nos âmes le quaternaire, source de la nature éternelle ». *Celui qui a transmis*, c'est Pythagore ; ce qui a été dit de la *tétractys* paraît venir en effet de ce philosophe.

De même, comme dans d'autres civilisations, le chiffre 7, a des vertus sacrées : c'est un nombre premier et donc sans rapport avec ses proches ; ce nombre sacré – mais craint – donne lieu à des commentaires sur les septenaires comme chez Hippocrate ou dans le *Περὶ ἑβδομάδος* (*Péri hebdomados*) d'Anatolius d'Alexandrie (néo-pythagoricien du III^{ème} siècle). On peut également citer la série 6, 8, 9, 12 qui construit les règles de l'harmonie musicale, on y reviendra. Les carrés et les cubes sont traités avec égards, et génèrent les nombres dits plans et solides.

Parmi les dogmes métaphysiques des pythagoriciens, on retient l'immortalité de l'âme et la métempsycose héritées, semble-t-il, des Égyptiens. Les pythagoriciens sont, selon Aristote, à l'origine du mythe de l'harmonie céleste : après avoir affecté un nombre de la décade à chaque planète, cette théorie raconte que les mouvements des astres produisent des sons en harmonie que nous n'entendons pas parce que nous y sommes accoutumés¹⁴. La

¹² Aristote, *Métaphysique*, A, 5, 987a18, trad. M.-P. Duminil et A. Jaulin, GF, Paris, 2008.

¹³ Théon de Smyrne, *Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, ed. grec et trad. française J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892, p. 155.

¹⁴ L'harmonie des astres a été décrite et réfutée par Aristote (*Du ciel*, II, 9, 291a-b). Cette théorie poétique a été maintes fois évoquée dans l'histoire des théories musicales et de l'astronomie. On retient notamment le grand astronome (et astrologue) Johannes Kepler qui en a fait un ouvrage célèbre publié en 1619, *Harmonices mundi*. Voir Gérard Simon, *Kepler, astronome astrologue*, Paris, Gallimard, 1979. Voir également Dominique Proust, *L'harmonie des sphères*, Seuil, Paris, 2001.

science pythagoricienne se résume à un principe, « les choses sont nombres »¹⁵. Les nombres, par leur déconnexion du réel sensible créent l'abstraction, et le pythagorisme a marqué une étape importante dans le processus de conceptualisation propre au bassin méditerranéen¹⁶. La confluence de la géométrie ionienne avec la recherche ésotérique sur les nombres, que Pythagore (ou un autre, peu importe) ramène de Mésopotamie, associée également avec une connaissance cosmologique encore inédite, ont forgé cette nouvelle approche du savoir : l'attribution et la distribution des nombres à chaque élément constituant le monde. La science pythagoricienne a déconnecté le nombre de la quantité pour lui donner son autonomie et le considérer comme un concept. On ne dénombre plus des objets, on joue avec des nombres abstraits, en les additionnant, en les mettant en scène dans des figures, en les multipliant, les uns avec les autres, puis par eux-mêmes. On invente la « raison », le λόγος (*logos*), archétype de nos rapports numériques, qui consiste à additionner à un nombre entier une partie de lui-même. Mais jouer avec les nombres ne suffit pas, les pythagoriciens racontent une histoire du monde, une mythologie dans laquelle chaque chose importante est figurée par un nombre, en fonction de qualités intrinsèques ou arbitraires attribuées à ces choses.

Les obstacles à une physique pythagoricienne

La physique pythagoricienne (du moins le peu qu'on en connaisse) s'inscrit contre le naturalisme ionien d'Anaximandre dans un idéalisme mystique, décrivant le monde comme un ordre parfait et immuable dans lequel les éléments sont en rapports numériques les uns avec les autres. La cosmologie pythagoricienne se crée sur une structure numérique issue de la partition de l'octave musicale selon les rapports qui définissent les intervalles consonants d'octave et de quarte. Ces rapports sont basés sur des combinaisons des nombres 2 et 3 et de leurs multiples ; on les retrouve dans le fameux triangle formant la *tétractys*¹⁷. Voici comment Aristote nous explique la physique

¹⁵ Sur l'importance du nombre comme essence des choses, ou comme représentation, nous ne pouvons que nous en remettre à Aristote et à son panorama des idées philosophiques qui l'ont précédé, dans le premier livre de la *Métaphysique*. Aristote y critique les pythagoriciens, et il est difficile de faire la part des choses, entre le dénigrement et l'exposé objectif de la pensée pythagoricienne et des autres courants présocratiques. Aristote, *Métaphysique A* (livre I), chapitres 3 à 5.

¹⁶ Le bassin méditerranéen est à comprendre ici au sens large, incluant le « croissant fertile » : Mésopotamie, Assyrie, Phénicie et haute vallée du Nil.

¹⁷ La tétractys, τετρακτύς, est la suite des quatre premiers entiers, dont la somme égale 10, « nombre quaternaire ». On la représente par un triangle formé par des points disposés sur quatre lignes (1 ; 2 ; 3 ; 4). Ce triangle présente, pour les pythagoriciens, un certain nombre de propriétés quand on joue avec ces nombres (élévation au carré, par exemple).

pythagoricienne, avec toutes les précautions à prendre, compte tenu de son opposition à cette pensée¹⁸ :

Par nature, les nombres sont les premiers des êtres, et ils [les pythagoriciens] y voient plus d'analogie avec les choses et les phénomènes, qu'avec le feu, l'air ou l'eau ; par exemple, telle modification des nombres détermine la justice, telle autre l'âme et l'intelligence, telle autre le moment favorable, et à peu près ainsi de toutes les autres choses ; de plus, ils voyaient dans les nombres les propriétés et les rapports de l'harmonie ; et encore, comme la nature entière a été formée à la ressemblance des nombres, et que les nombres sont les premiers de tous les êtres, ils posèrent les éléments des nombres comme les éléments de tous les êtres, et le ciel tout entier comme une harmonie et un nombre.

L'idéalisme pythagoricien s'accommode mal des réalités de la nature. On imagine mal les pythagoriciens faisant des expériences et observant les altérations des phénomènes dans le temps. Leur démarche est de découvrir les principes, ἀύλως καὶ νοερώς (« d'une façon immatérielle et intellectuelle ») comme le dit Proclus. Pourtant, selon Aristoxène cité par Diogène Laërce¹⁹, Pythagore serait l'inventeur des poids et des mesures, ainsi que de l'instrument « monocorde » pour mesurer les intervalles musicaux ; mais il s'agit peut-être d'une même expérience, celle des cordes tendues par des poids qui détermineraient les intervalles musicaux²⁰. Ces deux figures antagonistes d'un même personnage confortent l'idée d'une pluralité des personnalités au sein de la mouvance pythagoricienne qui a probablement évolué entre -520 et -440, année généralement admise pour la disparition de l'école.

En dépit de cette expérience racontée bien plus tard, les pythagoriciens sont généralement décrits, par les successeurs les moins tardifs, et notamment par Aristote, comme de purs intellectuels absolument déconnectés de la réalité physique. Dès le IV^{ème} siècle, et encore pour longtemps, l'adjectif pythagoricien est synonyme de mathématicien, ce qui ne simplifie pas le travail des historiens et des biographes. Pourtant nombre de géomètres et d'arithméticiens, et parmi eux Archytas de Tarente, longtemps considéré comme pythagoricien, sont loin de partager le mysticisme des nombres qui constitue le fondement de la pensée pythagoricienne en rejetant les observations les plus évidentes de la réalité.

¹⁸ Aristote, *Métaphysique*, I, 5, 985b26-986a3.

¹⁹ Diogène Laërce, *Vies*, VIII, 14.

²⁰ Il s'agit de la légende des « marteaux de Pythagore ». Voir ma thèse : Baskevitch, François, *Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie*, thèse de doctorat d'histoire des sciences, (Jury : P. Bailhache, dir.), F. de Buzon, M. Blay, R. Muller, J. Rosmorduc, F. de Gandt), Nantes, 2008, p. 31-74.

En acceptant les nombres entiers comme seuls descripteurs du monde et des phénomènes, le pythagorisme s'enferme dans un système discontinu, discrétisant les processus et les décomposant en éléments indivisibles et juxtaposés, pourvu que l'ordre soit respecté.

Cette discrétisation implicite, conjuguée avec l'affirmation de l'infini, va rendre certaines thèses pythagoriciennes impossibles à concevoir, comme le mouvement. L'école éléate va s'engouffrer dans la brèche avec Parménide, puis Zénon d'Élée et ses célèbres paradoxes. Ce courant de pensée, qui s'établit vers la fin du VI^{ème} siècle en Campanie, expose une philosophie en opposition avec celle des pythagoriciens dont elle est contemporaine. Les philosophes éléates ont reçu une formation pythagoricienne qui a sans doute contribué à leur opposition au dogme. Cette formation pythagoricienne est favorisée par la proximité géographique avec Crotone, mais elle est compensée par leur attachement à la culture scientifique de l'Ionie qu'ils ont récemment quittée (la côte ouest de la Turquie d'aujourd'hui). La science ionienne, fondatrice de la science grecque, est portée, dès la fin du VII^{ème} siècle par Thalès, Anaximandre puis Anaximène. Elle construit sa cosmogonie en prenant pour principes soit l'eau (Thalès) soit l'air (Anaximandre et Anaximène) et le feu (Héraclite). Cette conceptualisation de la nature s'élabore sur l'observation et sur la perception, et cet empirisme contredit l'idéalisme pythagoricien. La pensée éléate est le produit de cette double influence : l'empirisme ionien et l'abstraction pythagoricienne. Les principaux représentants connus de l'école éléate sont Xénophane, Mélissos, Parménide et Zénon d'Élée.

A partir du V^{ème} siècle, la science qui se développe en Grande Grèce, l'Italie du sud, est fortement influencée par le pythagorisme. En revanche, le mysticisme qui accompagne cette pensée spéculative constitue pendant longtemps un obstacle à une étude mathématico-physique de la nature. Selon les textes qui nous sont parvenus, Parménide, Alcmeon, Philolaos et même Platon semblent éprouver des difficultés à identifier et à conceptualiser les phénomènes, tandis qu'Empédocle d'Agrigente, en Sicile, semble être l'initiateur de cette physique à inventer. Un peu plus tard, Archytas de Tarente est sans doute l'un des pionniers de cette démarche, dans la Grande Grèce du début du IV^{ème} siècle.

Les pythagoriciens et les mathématiques musicales

Parmi les thèmes favoris des exégètes de la pensée pythagoricienne, la théorie de l'harmonie fait l'objet d'une littérature abondante et, faute de sources fiables, pas toujours scientifique ni historique. Suffisamment de témoignages, pourtant, s'accordent pour attribuer aux pythagoriciens un travail important sur les intervalles musicaux et l'attribution de nombres et de rapports de nombres à ces intervalles. Ils sont à l'origine du travail des mathématiciens sur l'étude des proportions grâce à la partition de l'octave en intervalles définis par des rapports exacts.

Les lois physiques imposent un cadre à l'harmonie : un rapport de valeur 2 pour l'octave composée d'une quinte de rapport $3/2$ et d'une quarte de $4/3$ ²¹. La problématique des mathématiciens grecs est de définir les rapports qui déterminent les intervalles plus petits qu'on trouve entre les cordes d'une lyre. Comme les intervalles musicaux sont déterminés par des rapports, la manipulation de ces intervalles musicaux se ramène à effectuer des opérations sur les rapports numériques, ce qui constitue une innovation dans les mathématiques grecques, avec des applications pratiques comme les partages multiples (comment déterminer le tiers d'une moitié d'un terrain par exemple). C'est la raison de la présence de la musique dans l'étude des mathématiques aux côtés de l'arithmétique, de la géométrie et de l'astronomie au sein du *quadrivium* jusqu'au Moyen-Âge.

La théorie des premiers harmoniciens

La plupart des textes qui décrivent le système harmonique grec ancien sont de production tardive, et parmi eux la presque totalité provient de la Grèce des premiers siècles de notre ère. Les plus connus sont les *Harmoniques* de Ptolémée et son *Commentaire* par Porphyre qui cite longuement Archytas de Tarente, contemporain de Platon ; le traité *Sur la musique* attribué à Plutarque qui cite Héraclide du Pont (contemporain d'Aristoxène), le *Manuel d'harmonique* de Nicomaque de Gérase, les *Notions utiles pour la*

²¹ Pour les non musiciens : ces rapports musicaux consonants (octave, quarte, quinte) sont déterminés par une loi physique : partant de la fréquence d'un son (440Hz = *la*3, selon la dénomination conventionnelle), le double de cette fréquence est celle de l'octave (880Hz = *la*4). Le triple est celle d'une quinte au dessus (1320Hz = *mi*4 → *mi*3 = $440 \times 3/2 = 660$ Hz). La quarte est dans un rapport de $4/3$, donc 587Hz = *ré*3. Les accords *la*3-*la*4, *la*3-*mi*3, *la*3-*ré*3 sont dits « justes » ou consonants : ils sont « agréables » à l'oreille. Du fait de leur structure physique (naturelle), ces consonances existent dans les musiques de toutes les civilisations. D'autre part, $3/2 \times 4/3 = 2$, ce qui fait dire aux harmoniciens grecs qu'une quinte « plus » une quarte font une octave.

lecture de Platon de Théon de Smyrne, le *Commentaire sur le Timée* de Proclus. D'autres textes d'auteurs parfois inconnus ont été rassemblés au XVII^{ème} siècle par Meursius puis traduits en latin par Meibom²². Quelques auteurs latins ont également apporté leur contribution, comme Vitruve dans le livre V de son *Traité d'Architecture*, et Boèce dans *l'Institutio Musicae* ; on cite également Macrobe, Cassiodore et Marcianus Capella.

En revanche, les textes anciens sont rares et le plus souvent sous forme de fragments à l'authenticité parfois douteuse. C'est le cas des fragments de Philolaos, transmis par Nicomaque puis par Stobée, qui seraient les plus anciens témoignages de la théorie pythagoricienne. Parmi les textes anciens qui traitent de l'harmonie mathématique, outre celui d'Archytas, deux sont difficiles à authentifier et à dater, il s'agit de la *Division du canon* longtemps attribué à Euclide et de *l'Introduction harmonique* qui, selon Charles-Émile Ruelle (en 1884) serait d'un certain Cléonide. On dispose également des volumineux *Problèmes* du pseudo-Aristote qui ne sont pas antérieurs au III^{ème} siècle AEC : la section XI est consacrée à la voix et au son, et les *Problèmes musicaux* qui traitent de l'harmonie, en constituent la section XIX. Il existe également quelques fragments d'Ératosthène, de la même époque. Par bonheur, les musicologues accèdent à la connaissances des systèmes musicaux des Grecs Anciens grâce aux trois livres des *Éléments harmoniques* d'Aristoxène, jeune contemporain d'Aristote dont le discours polémique nous apprend beaucoup sur les différents systèmes musicaux. Platon a également écrit quelques passages sur la théorie musicale dans la *République* et dans *Timée*, qui ont considérablement influencé ses successeurs à l'époque des néo-platoniciens, et par la suite dans l'occident chrétien.

Sans entrer dans l'étude approfondie des systèmes musicaux grecs, on apprend par les critiques d'Aristoxène qu'il existait auparavant deux grands courants chez ceux qui traitent de musique et d'harmonique. Le plus connu de ces courants est celui des mathématiciens. Ils envisagent l'étude des intervalles comme un terrain favorable à l'étude des proportions. Guidés par la rigueur et l'abstraction, ils se soucient peu de savoir comment le musicien va pouvoir accorder sa lyre en ajustant un intervalle tellement petit qu'il est quasiment imperceptible, surtout si l'on tient compte des conditions techniques de fabrication des cordes, du chevillage, des variations de température, bref de la réalité. Mais comme on le sait, « le réel, c'est quand on se cogne », et les mathématiciens se sont souvent cognés lorsqu'ils se sont aventurés sur le terrain de la pratique musicale.

²² Meibom, *Antiquae musicae auctores septem*, Amsterdam, Elzevir, 1652 ; sept textes d'auteurs sur la musique antique (Aristoxène, Ps-Euclide, Nicomaque de Gêrèse, Alypius, Gaudentius, Bacchius l'Ancien, Aristide Quintilien, Marius Capella). Traduction française et commentaires : RUELLE, Charles-Émile, *Sept textes d'auteurs sur la musique antique*, Pottier de Lalaine, Paris, 1887.

Un autre courant est évoqué par Aristoxène, il est représenté par Lasos d'Hermione, musicien et facteur d'instruments, également théoricien de la musique du début du v^{ème} siècle. Il fabrique des *aulos* et on se doute que la problématique de la justesse est importante²³. On peut supposer que la préoccupation des facteurs d'*aulos* n'est pas d'obtenir des micro-intervalles insignifiants au regard de la marge d'erreur due aux variations de température. En effet, si les cordes peuvent être ajustées en les tendant plus ou moins, c'est beaucoup plus délicat pour les instruments à vent sur lesquels l'instrumentiste est contraint d'ajuster en bouchant plus ou moins les trous.

Aristoxène se place dans une position médiane : il enseigne la théorie de la musique et se place à la fois dans une position de rigueur mais aussi de pragmatisme. La lecture de ses *Éléments harmoniques* nous apprend beaucoup à la fois sur la méthode employée par les musiciens pour construire et transmettre leur théorie des systèmes harmoniques, mais aussi sur les travers rigoureux des mathématiciens, qui ne sont probablement pas musiciens (sinon ils ne développeraient pas des systèmes qui n'apportent rien à la pratique musicale).

Musiciens ou pas, les pythagoriciens du début du v^{ème} siècle ont fait leurs observations sur des instruments de musique, et sans doute sur le plus fréquent à cette époque, la lyre.

La hauteur du son : tension ou longueur de la corde

L'instrument le plus fréquent, en tout cas le plus représenté, est la lyre à sept cordes de longueurs égales (heptacorde). Cette lyre est accordée en deux quarts successives et conjointes²⁴. Les cordes intermédiaires sont laissées à la disposition de l'instrumentiste, selon différents « modes ». On dispose de peu de données sur la nature des cordes – probablement en boyaux – et sur la tension qu'elles pouvaient subir²⁵. Sur cette lyre traditionnelle, la hauteur des notes est déterminée par la tension des cordes qui sont de longueurs égales. Tout le vocabulaire grec de la hauteur des sons fait appel à cette notion de tension (*tasis* en grec, qui signifie parfois la note), pendant plusieurs siècles encore.

En revanche, depuis la Renaissance, les musiciens sont imprégnés du paradigme de l'instrument à cordes sur lequel la hauteur de la note est avant tout fonction de sa

²³ L'*aulos* est un instrument à vent qui ressemble à un hautbois plus simple.

²⁴ Dans cette partie, on évite les hypothèses et les polémiques sur l'étendue de la lyre heptacorde, ici retenue comme couvrant deux quarts conjointes.

²⁵ Annie Bélis, spécialiste de la question, a écrit plusieurs articles à ce sujet, par exemple : « À propos de la construction de la lyre », in *Bulletin de correspondance hellénique*, 1985, 109-1, p. 201-220.

longueur que l'on fait varier par la position des doigts qui pressent les cordes sur la touche, par exemple sur un violon. La tension, réglable au moyen de chevilles, est supposée constante pour chaque corde pendant l'exécution de l'œuvre musicale. Il est difficile de se représenter que, pour les Grecs anciens, seule la tension détermine la hauteur du son.

Trois paramètres interviennent pour déterminer la fréquence de la vibration d'une corde tendue. Galilée avait déjà présenté en 1638 cette loi physique intuitivement connue depuis longtemps²⁶ : « Il y a trois manières de rendre plus aigu le son d'une corde : la raccourcir d'abord, l'étirer ou plutôt la tendre davantage ensuite, enfin l'amincir ».

La loi a été mathématisée par Brook Taylor en 1713 :

$$f = \frac{1}{2l} \times \sqrt{\frac{T}{m}}$$

avec l la longueur de la corde, T sa tension et m sa masse linéaire.

La fréquence de vibrations d'une corde tendue, qui détermine la hauteur du son, dépend donc de sa longueur, de sa masse et de la tension. La masse est difficile à modifier de façon pratique, toutefois les grosses cordes font un son plus grave. La tension intervient pour donner la hauteur du son de la corde à vide mais la relation entre la fréquence et la tension n'est pas proportionnelle mais quadratique. C'est à dire qu'il faut un poids quatre fois plus élevé pour produire un son à l'octave (dont la fréquence est double). On doit au père de Galilée (Vincenzo), vers 1589, la vérification de cette loi, alors que depuis toujours on enseignait que la tension était proportionnelle à la hauteur de son²⁷. L'erreur transmise au cours des siècles avait peu d'importance puisque les musiciens tendaient la corde « à l'oreille » et qu'il n'avaient pas besoin pour cela de l'aide des mathématiciens.

La longueur de la corde déterminant la hauteur du son s'est finalement imposée, à la Renaissance, comme la plus pratique, tant pour le luthier que pour l'instrumentiste. On change la longueur en bloquant la corde avec le doigt, ce qui implique qu'elle soit à proximité d'une surface plane, la « touche » de l'instrument (luth, violon, guitare, etc.). Sur les instruments tels que la harpe ou le piano, chaque note dispose de sa propre corde, de

²⁶ Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques*, 1638, trad. M. Clavelin, A. Colin, Paris, 1970, p 80-85. Taylor Brook, « Of the motion of a stretched string », in *Phil.Trans.*, London, 1713, p. 53.

²⁷ V. Galilei, *Discorso intorno alla diversita delle forme del Diapason*, in Palisca, The Florentine Camerata, Yale University Press, New Haven, 1988. Voir l'approfondissement que j'ai développé dans : François Baskevitch, « Musique et science à Florence à la fin du XVIème siècle », in *Arts et Sciences à la Renaissance*, sous la dir. d'Évelyne Barbin, Paris, Ellipses, 2007, p. 189-214.

longueur adaptée. Et surtout, la relation entre la longueur et la fréquence est linéaire, c'est à dire que la longueur double d'une corde donnant une certaine note donnera cette même note à l'octave inférieure.

Pour remarquer cette relation, il a fallu l'observer. On ne sait pas comment les pythagoriciens ont été amenés à considérer la longueur des cordes comme déterminant la hauteur du son d'une façon toujours reproductible et identique, à une époque où, dans le monde grec, on accorde les cordes en les tendant plus ou moins. Il est fort possible qu'au cours de ses voyages en Égypte et en Mésopotamie, Pythagore ait observé les instruments à cordes inégales, des harpes, en usage depuis deux millénaires dans ces régions, comme on peut le vérifier sur plusieurs représentations iconographiques²⁸.

Quoi qu'il en soit, il est peu contestable que les pythagoriciens ont établi une relation entre les intervalles consonants et des nombres entiers en mesurant les longueurs de cordes tendues qui produisent les sons composant ces intervalles. En revanche, pour une raison inexplicée, les pythagoriciens n'ont pas inventé un instrument à cordes de longueurs inégales et les musiciens ont continué à utiliser leur lyre à cordes égales.

Pour les pythagoriciens, cette relation entre longueur de corde et hauteur de son n'était qu'une façon d'aborder la question des rapports arithmétiques, puisque la fonction est linéaire et continue. Ils ont alors affecté un nombre à chaque degré musical correspondant aux consonances produites en heurtant la corde et c'est sans doute cet usage inédit du nombre en musique qui représente l'innovation pythagoricienne.

La division de l'octave des pythagoriciens : la théorie harmonique

Avant Philolaos, disciple des pythagoriciens de la seconde moitié du v^{ème} siècle, l'harmonie est fondée sur la consonance de la quarte, définie par les cordes extérieures du tétracorde. Les sons intermédiaires, rendus par les deux cordes intérieures, sont laissés à l'appréciation de l'instrumentiste ou du chanteur, selon des modes sans doute variables avec les époques et peut-être avec les régions. La lyre heptacorde ancienne est formée de deux tétracordes conjoints qui couvrent deux quartes consécutives.

²⁸ Le passage, en Grèce, du système technique de la harpe à celui de la lyre constitue une rupture technique symétrique de celle qui affecte la Mésopotamie vers la fin du II^{ème} millénaire, avec l'arrivée d'instruments à cordes égales et caisse de résonance perpendiculaire au plan des cordes.

Cependant, selon certains historiens²⁹, on aurait accordé l'heptacorde en imposant l'octave entre les cordes extrêmes, au détriment de l'égalité des deux tétracordes. Dans le cas retenu ici de deux quarts conjointes, les cordes extrêmes ne font donc pas un intervalle consonant, car deux quarts consécutives forment à peu près un intervalle de sib-do (toujours en descendant chez les Grecs anciens), soit à peu près une septième mineure, intervalle dissonant à cette époque, tandis que l'intervalle consonant le plus proche est l'octave³⁰. Selon Plutarque, sur les premières lyres heptacordes (VII^{ème} et VI^{ème} siècles AEC), les musiciens ne jouaient le chant que sur les six cordes graves, en délaissant la *nète* (corde la plus aigüe), ce qui couvre un intervalle de sixte mineure, consonant celui-là (renversement de la tierce majeure), *lab-do*³¹.

Production des sons sur une corde tendue par la méthode des harmoniques

Les historiens s'accordent pour considérer que les pythagoriciens sont à l'origine de l'introduction d'une huitième corde, ce qui constitue une rupture dans le système technique musical des Grecs. Tentons une hypothèse qui serait une explication de la méthode employée par les pythagoriciens pour passer de l'heptacorde à l'octocorde. On ne peut pas concevoir que les musiciens se passent longtemps de l'intervalle d'octave. Munis de leurs deux tétracordes conjoints formant deux quarts (heptacorde), il ont une possibilité, évoquée ici comme une hypothèse, probable mais invérifiable. Il existe une possibilité de jouer l'octave aiguë de la corde grave, l'*hypate*. Il s'agit du mode d'attaque de la corde désigné par l'expression « jouer en harmonique » par les guitaristes d'aujourd'hui : on pose légèrement le doigt au milieu de la corde et on la pince. Le son produit est alors l'harmonique 2 du fondamental, c'est-à-dire l'octave. Cette hypothèse suppose que l'expérience est antérieure à l'usage du monocorde, puisqu'elle en est en quelque sorte le fondement expérimental.

Ces lieux particuliers sont situés aux points de partage (aux nœuds), à la moitié, au quart et au tiers de la longueur de la corde et produisent des sons à la l'octave, à la double octave et à la double quinte³². Il existait d'ailleurs, au V^{ème} siècle AEC, des instruments sur

²⁹ Notamment Édouard Zeller, *La philosophie des Grecs*, 1877 ; ainsi que H. Helmholtz, *Théorie physiologique de la musique*, Masson, Paris, 1868, p. 345 ; et d'autres commentateurs qui se fondent sur Nicomaque, *Manuel d'harmonique*, IX, 43 (mais ce passage n'est pas clair).

³⁰ L'intervalle de septième mineure demeure non-consonant quasiment jusqu'au XX^{ème} siècle, lorsque la « *blue note* » est importée des musiques non occidentales à gamme pentatonique (jazz, blues).

³¹ Ps-Plutarque, *De la musique*, édition critique et explicative par Th. Reinach et H. Weill, Leroux, Paris, 1900, p. 105. Cette configuration est celle du proto-éolien (heptacorde) cité dans la note 270 de Th. Reinach.

³² Les sons produits aux points de partage par la méthode des harmoniques ne sont pas les mêmes sons qui sont produit par le raccourcissement de la corde en appuyant fortement le doigt, comme on le fait quand on

lesquels on jouait selon ce mode, comme la *magadis*, qui avait la qualité de se jouer « en octaviant », c'est à dire en jouant « en harmoniques ». L'hypothèse présentée ici propose donc un heptacorde composé d'un assemblage de deux tétracordes conjoints égaux à une quarte, dont l'étendue couvre une septième mineure. L'octave aiguë (la *nète*) est produite « en octaviant » la corde grave, l'*hypate* qui se trouve être l'octave grave de la *nète*.

La méthode de jeu « par harmoniques » est sans doute à l'origine du passage à l'octocorde. Les pythagoriciens ont repéré des lieux de la corde qui correspondent aux degrés déterminant les intervalles consonants : la double octave, la quarte et l'octave. Les distances entre ces points sont alors définies, les pythagoriciens les ont forcément mesurées, en établissant des rapports : le quart de la corde pour la double octave, le tiers pour la quarte, et la moitié de la longueur pour l'octave. On peut penser que les pythagoriciens ont d'abord fait ces constatations sur une lyre, en observant les sons harmoniques, avant d'inventer un instrument plus adéquat, le monocorde.

La révolution harmonique de l'octocorde

Ce serait à l'époque de Pythagore qu'une huitième corde aurait été adjointe, près de la *mèse* (corde médiane). Les historiens de la musique grecque s'accordent sur ce point. Ce passage de sept à huit constitue sans doute une transgression car le nombre sept a un caractère sacré. Grâce à cette nouvelle disposition, les deux cordes extrêmes forment l'octave, et un nouvel intervalle est créé, le ton. L'ajout de cette huitième corde et la création du nouvel intervalle est d'une importance considérable dans l'histoire de l'harmonie occidentale puisqu'elle en constitue le fondement.

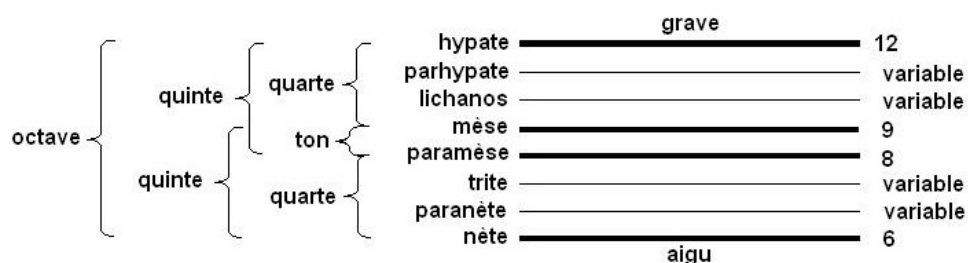
Si on veut à la fois conserver l'étendue de l'octave et la présence de deux tétracordes égaux formant une quarte, il est nécessaire d'adjoindre une huitième corde. C'est ce qu'ont fait les pythagoriciens selon ce que rapporte Nicomaque de Gérase³³ :

Pythagore est le premier qui, pour éviter que, dans la conjonction, le son moyen comparé aux deux extrêmes offrît l'unique consonance de quarte, d'une part avec l'*hypate*, d'autre part avec la *nète*, et pour obtenir que les extrêmes produisent en nous la consonance la plus agréable, c'est-à-dire celle d'octave de rapport double (ce qui ne se pouvait avec les deux tétracordes existants), intercala un huitième son qu'il plaça entre la *mèse* et la *paramèse* et qu'il fixa à la distance d'un ton entier de la *mèse*, à un demi-ton de la

joue sur une guitare. Ces sons correspondent aux frettes (petites barres transversales qui partagent le manche en intervalles inégaux) : $1/2$ = octave ; $3/4$ = quarte ; $2/3$ = quinte. Pour les harmoniques, aux mêmes points, on obtient : $1/2$ = octave ; $3/4$ = double octave ; $2/3$ = double quinte. Tout ceci doit sembler bien complexe pour qui ne maîtrise pas l'approche mathématique de l'harmonie, mais on se familiarise vite avec ces notions ...

³³ Nicomaque de Gérase, *Manuel d'harmonique*, trad. Ruelle, Baur, Paris, 1881, p. 17.

paramèse. La corde qui représentait auparavant la *paramèse* dans la lyre heptacorde est alors appelée *trite* (troisième à partir de la *nète*) et occupe cette position ; tandis que la corde intercalée se trouve la quatrième à partir de la *nète* et donne la quarte avec elle, consonance que faisait entendre dans le principe la *mèse* avec l'*hypate*.

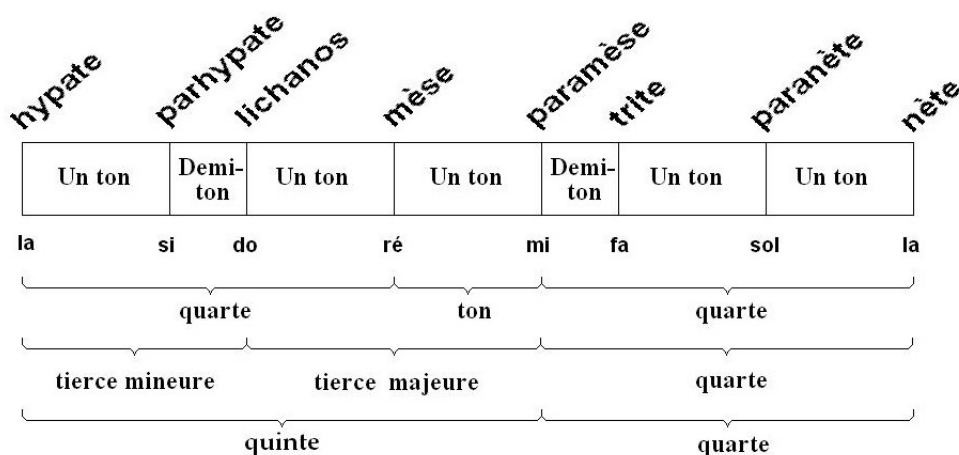


Octocorde pythagoricien
deux tétracordes disjoints séparés par un ton
l'octocorde couvre une octave

La question posée à présent, et que les pythagoriciens ont résolue, c'est le maintien des deux tétracordes égaux à une quarte : il est alors nécessaire d'ajouter un troisième intervalle pour compenser l'agrandissement de l'étendue. Et c'est la création de ce nouvel intervalle qui constitue la rupture cruciale avec le système ancien.

On a vu que la quarte vers le grave en partant de la *nète* détermine la position de la *paramèse*, troisième corde de l'heptacorde en partant de l'aigu. D'autre part, entre la *mèse* et l'*hypate*, au grave, l'intervalle est également une quarte.

Les pythagoriciens créent donc un intervalle entre *mèse* et *paramèse* qui sera d'un ton, et insèrent une corde, la *trite*, entre la *paramèse* alors déplacée et la *paranète*³⁴.



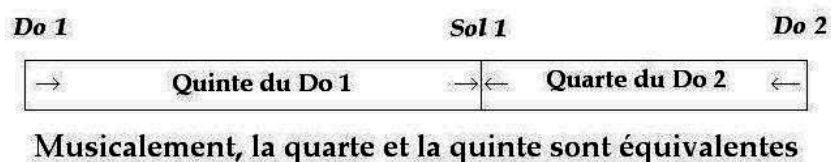
Octocorde pythagoricien
deux tétracordes disjoints séparés par un ton
l'octocorde couvre une octave
 genre diatonique

³⁴ L'explication de Nicomaque de Gêrase est un peu plus complexe, mais le résultat est le même.

En résumé, l'hypothèse proposée ici est que l'ancienne lyre heptacorde est composée de deux tétracordes égaux à une quarte et ne couvre donc pas une octave, laquelle est produite par harmoniques. La passage à l'octocorde s'est réalisé par l'ajout d'un nouvel intervalle égal à notre « ton majeur » (ré-mi) et l'ajout de la *trite*.

L'ajout d'une huitième corde établit donc l'octave comme la composition d'une quarte et d'une quinte. L'intervalle de quinte qui, musicalement parlant, est équivalent à une quarte, est une innovation pythagoricienne. Cette innovation ne se place pas dans le domaine musical (puisqu'elle a toujours existé), mais dans le domaine des mathématiques : la quinte est définie par le rapport $3/2$ et la quarte par le rapport $4/3$ qui est égal à $8/6$, et dont l'inverse est égal à $6/8$, donc à $3/2$.

Une quinte montante à partir du do1 est bien égale à une quarte descendante à partir de do2 :



A propos de cette innovation, une célèbre légende, rapportée par Nicomaque de Gêrasede au II^{ème} siècle de notre ère, a traversé toute l'histoire de l'harmonie lorsqu'on parle de Pythagore³⁵ : passant devant un atelier de forgeron, il aurait remarqué les sons produits par quatre marteaux de poids différents, et constaté que ces sons formaient des intervalles de quarte, de quinte et d'octave. Il aurait alors pesé ces marteaux et observé que leurs poids respectaient les proportions 6, 8, 9, 12. En transposant l'expérience à des cordes tendues par des poids dans les mêmes rapports, il en aurait déduit son système d'intervalles. Or, si l'expérience des marteaux est plausible, celle des poids tenseurs est impossible.

Il a fallu attendre le père de Galilée, Vincenzo Galilei, dans les années 1580, pour que quelqu'un ait le courage de vérifier l'expérience, avec pour conséquence l'invalidation de cette théorie. En effet, les hauteurs de son sont proportionnelles aux *carrés* des poids tenseurs, il aurait donc fallu une série du type 36, 64, 81, 144. En revanche, les marteaux constituent des résonateurs dont la fréquence est déterminée par leurs dimensions et non par leur masse. De toute façon, cette légende est apocryphe et sa première apparition se

³⁵ Nicomaque de Gêrasede, *Manuel d'harmonique*, trad. Ruelle, Baur, Paris, 1881, chap. VI, p. 19-21. Cette anecdote est également racontée par Macrobie (vers 400) et Boèce (480-524) ; elle a été reprise par tous les théoriciens de la musique jusqu'à la Renaissance.

trouve dans le traité néo-pythagoricien de Nicomaque de Gérase écrit vers le II^{ème} siècle. On peut admettre qu'il existait quelque chose qui ressemble à cette histoire mais qui aurait été largement romancée³⁶. On a également évoqué une expérience similaire faite par un disciple de Pythagore, Hippiase de Métaponte, à partir de disques de métal de différentes dimensions³⁷. La traduction d'un fragment, que A.-J. Vincent date d'avant Aristoxène, raconte la même histoire mais il s'agit ici de vases³⁸. Théon de Smyrne rapporte également que Lasos d'Hermione, à la même époque, avait utilisé à cet effet des vases remplis d'eau³⁹.

Ces consonances, les uns ont voulu les obtenir par des poids, d'autres par des longueurs, d'autres par des mouvements nombrés, d'autres encore par la capacité des vases.

On raconte que Lasos d'Hermione et les disciples d'Hippiase de Métaponte, ce dernier de la secte de Pythagore, ont observé sur des vases la rapidité et la lenteur des mouvements à l'aide desquels les consonances se calculent en nombres. Prenant plusieurs vases de même capacité et semblables, on a laissé l'un vide et l'on a rempli l'autre à moitié d'un liquide, puis on a frappé chacun d'eux, on a obtenu la consonance d'octave.

Laissant de nouveau un vase vide et remplissant l'autre au quart, on a obtenu, en les frappant, la consonance de quarte ; pour l'accord de quinte, on remplissait le tiers d'un vase : le rapport des espaces vides était, pour l'octave celui de 2 à 1, pour la quinte celui de 3 à 2, pour la quarte celui de 4 à 3.

Lorsqu'il s'agit de vases remplis d'eau, de disques de métal, ou même des marteaux de Pythagore, on a bien les rapports musicaux, puisque ces « instruments » se comportent comme des résonateurs linéaires et non comme des poids tenseurs de corde ; la loi physique est différente.

L'authenticité de cette expérience attribuée à Pythagore est généralement réfutée de nos jours, mais il convient de noter que A.-J. Vincent, au milieu du XIX^{ème} siècle avait

³⁶ Dans ma thèse je me suis amusé à imaginer une hypothèse qui pourrait réhabiliter en quelque sorte l'expérience de Pythagore. Elle rend possible la conservation des rapports de fréquences selon la suite 6, 8, 9, 12 avec des poids tenseurs proportionnels, en jouant sur la longueur des cordes dans ces mêmes rapports. Cf. François Baskevitch, *Les représentations de la propagation du son, d'Aristote à l'Encyclopédie*, thèse de doctorat, Centre François Viète, Université de Nantes, 2008.

³⁷ H. Diels, *Vorsokratiker*, trad. J.-P. Dumont, *Les présocratiques*, Gallimard, Paris, 1988, Hippiase, p. 79.

³⁸ A.-J. H. Vincent, « Fragments musicaux de l'Hagiopolite », in *Notices et extraits des manuscrits ...*, t. XVI-2, 1847, p. 266-273.

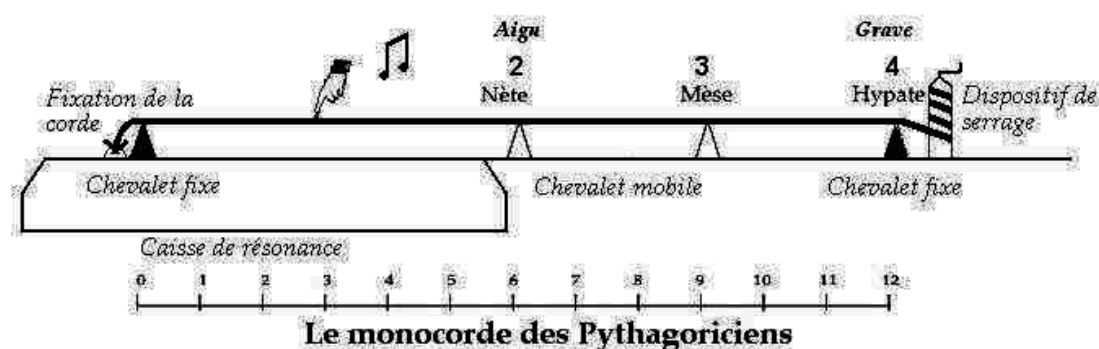
³⁹ Théon de Smyrne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, ed. grec et trad. française de J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892, p. 97.

suggéré une proposition très pertinente fondée sur la confusion d'un copiste entre les termes $\sigma\phi\tilde{\upsilon}\rho\alpha$ (« marteau ») et $\sigma\phi\alpha\tilde{\iota}\rho\alpha$ (« corps sphérique »)⁴⁰.

Le monocorde des pythagoriciens : un instrument de mesure

L'apport des pythagoriciens est fondé sur l'expérience pratiquée sur un instrument inventé pour l'occasion, le monocorde, sorte d'instrument à une corde qui semble-t-il était tendue sur une tablette munie d'un chevalet mobile.

Lorsque on pose fermement le doigt, ou un objet, sur une corde tendue sur une tablette, en formant deux segments exactement égaux, on obtient, en pinçant l'un des segments, le son de l'octave aiguë de la corde à vide.

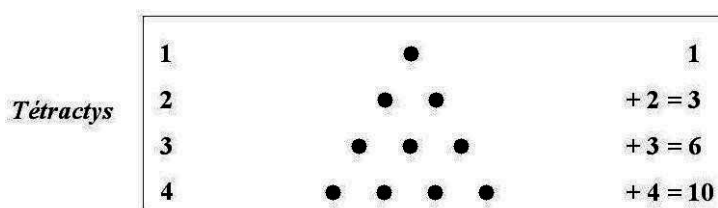


Cette représentation est une hypothèse :
nous ne disposons d'aucune trace archéologique d'un monocorde pythagorien.

L'octave du haut correspond à la moitié de la longueur de la corde, et sert de référence à la mesure et à la détermination des autres intervalles : les pythagoriciens ne mesurent pas, comme on le ferait de nos jours, à partir de la corde à vide, mais à partir de la note la plus aiguë, la *nète*, qui correspond au milieu de la corde à vide. Dès lors, les rapports déterminant les intervalles sont mesurés à partir de cette demi-corde, et sont donc toujours vers le grave, puisque la corde s'allonge.

Ils observent alors que, pour une même tension, les longueurs de cordes jouant les sons consonants sont dans des rapports de nombres entiers 2, 3, 4, puis, plus tard, de leurs multiples. Or, cette série de nombres composent ce qu'ils nomment la *tétraktys*, combinaison aux vertus magiques dans le cadre de l'approche mystique des nombres abstraits.

⁴⁰ A.-J. H. Vincent, *idem*.



La mesure des intervalles sur le monocorde

Nous quittons maintenant la lyre et ses cordes d'égales longueurs, pour prendre l'instrument sur lequel les pythagoriciens ont déterminé les rapports de l'harmonie, le monocorde. Ici, la tension est fixe et la longueur de la corde détermine le degré de la note : plus la corde est courte, plus le son est aigu, et la corde de longueur moitié de la longueur totale sonne à l'octave supérieure. Cette loi physique est toujours vérifiée, elle a été mathématisée au début du XVIII^{ème} siècle par Brook Taylor.

Il est essentiel, pour aborder l'étude des intervalles dans la musique grecque ancienne, d'oublier la représentation liée aux instruments à cordes modernes tels que le violon ou la guitare. Sur ces instruments, on part de la corde à vide, et on raccourcit sa longueur pour produire des notes plus aiguës. Sur le monocorde pythagoricien, c'est le contraire, on part de la demi-longueur de la corde et on l'allonge jusqu'à la longueur totale, ce qui rend le son plus grave.

Du point de vue mathématique, déterminer un rapport (un *logos*, λόγος, en grec), c'est d'abord faire une comparaison entre deux longueurs. Les rapports harmoniques sont définis par les longueurs de deux cordes. On commence par mesurer la différence entre les deux longueurs. Lorsque cette différence peut se compter plusieurs fois, sans reste, dans la petite longueur, on peut établir un rapport. Le nombre de fois où cette différence est contenue dans la petite longueur détermine le nombre et le nom du rapport (c'est le dénominateur de nos fractions). Ces rapports sont dits « épimores ».

L'étude sur le monocorde donne l'occasion d'approcher les mathématiques anciennes. Les rapports d'intervalles des pythagoriciens sont toujours supérieurs à 1. Ils expriment des longueurs de corde en prenant comme unité la longueur de corde qui produit la note aiguë, la *nète* ; les sons plus graves sont produits par des cordes plus longues, donc leurs nombres, associés aux longueurs, sont supérieurs à 1.

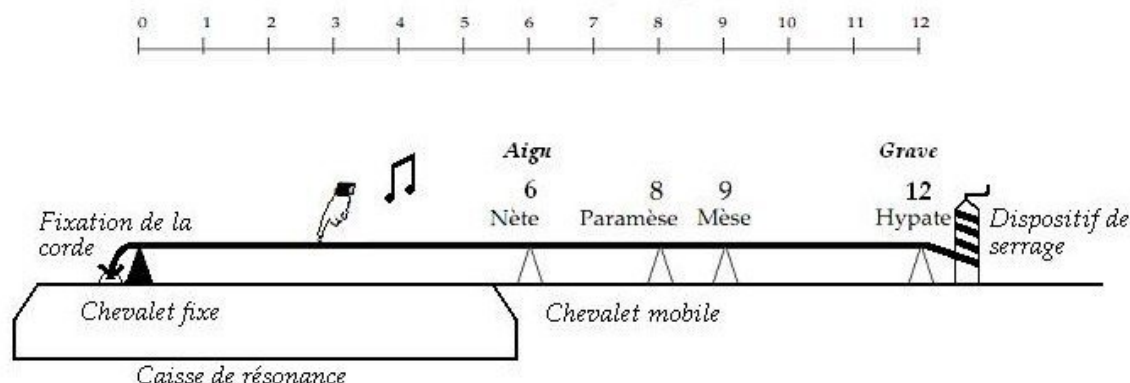
Par exemple, soit deux cordes dont les longueurs sont de 8 et 9 ; la différence entre les deux cordes est de 1 ; on compte combien de fois 1 peut se retrancher de la longueur de la petite corde, ici 8. La réponse est 8 fois, donc le rapport a pour nombre 8, ce sera notre dénominateur. On ajoute 1 au dénominateur, ce qui déterminera notre numérateur. En

faisant cela, nous avons ajouté à l'unité, ici $8/8$, une partie d'elle-même, ici $1/8$. Le rapport est donc noté $9/8$ (en notation moderne), ou *épogdoon* (= un huitième en plus de l'unité).

Ces rapports sont de la forme : $(1 + n) / n$, ou $1 + (1/n)$. Les Anciens leur ont donné le nom d'*épimore* pour exprimer qu'ils sont constitués de l'unité à laquelle on ajoute une partie d'elle-même (*épi* = au dessus ; *mora* = partie) ; dans les textes latins, on emploie *superparticularis*, qui sera traduit en français par « superparticulier », et parfois par « superpartiel ». Ce système constitue le socle de l'harmonie dite pythagoricienne car ils expriment les rapports des intervalles en principe consonants.

La dénomination des rapports se rapporte au nombre n , c'est à dire à notre dénominateur. Les noms anciens, issus du latin, de ces rapports *épimores* sont composés du préfixe *sesqui-* suivi du nombre, par exemple : sesquitiens (*sesquiertius*) pour la quarte $4/3$, sesquiquinte (*sesquiquintus*) pour $6/5$, sesquioctave (*sesquioctavus*) pour le rapport du ton $9/8$. Il existe d'autres rapports, plus complexes, qui correspondent aux intervalles non consonants, sous le nom d'*épimère* ou « superpartiens ».

Le monocorde des Pythagoriciens



Méthode des Pythagoriciens Longueurs mesurées sur le monocorde

On compare des longueurs de cordes, dans un premier temps à partir de la plus petite : la longueur de 0 à 6 (le 0 n'existe pas chez les Grecs, c'est ici une facilité).
On va mesurer la différence entre la corde longue et la petite corde qui mesure 6.
On cherche la position du chevalet mobile qui répond aux questions suivantes :
Combien de fois cette différence est contenue, sans reste, dans la petite corde ?
- 1 fois, alors on ajoute cette différence à la longueur de la petite corde: on obtient 12.
- 2 fois, alors on ajoute cette différence à la longueur de la petite corde: on obtient 9.
- 3 fois, alors on ajoute cette différence à la longueur de la petite corde: on obtient 8.

Le rapport (logos) qui correspond à 1 fois sans reste est appelé double, son nombre est 1.
Le rapport qui correspond à 2 fois sans reste est appelé hémiole, son nombre est 2.
Le rapport qui correspond à 3 fois sans reste est appelé épitríte, son nombre est 3.
En langage moderne, le rapport double est $2/1$, le rapport hémiole est $3/2$, le rapport épitríte est $4/3$.

Les rapports qui définissent les intervalles consonants sont toujours de la forme $n+1/n$, c'est à dire que le numérateur est toujours une unité de plus que le dénominateur.

On constate alors que ces longueurs mesurées produisent des sons consonants :
Si on prend comme référence la corde qui mesure 6 et qui produit le son. aigu (nète) :
La corde qui mesure 12 produit le son de l'octave grave (hypate)
La corde qui mesure 9 produit le son de la quinte grave (mèse)
La corde qui mesure 8 produit le son de la quarte grave (paramèse)

En appliquant les mêmes règles aux autres longueurs de corde, on détermine les rapports suivant qui définissent les intervalles correspondants :
- entre 8 et 12 on a un rapport de nombre 2, donc $3/2$ qui définit une quinte.
- entre 9 et 12 on a un rapport de nombre 3, donc $4/3$ qui définit une quarte.

Entre 8 et 9, on a un nouveau rapport superpartiel, puisque $9 = 8 + 1$, il est donc de $9/8$ et il définit un petit intervalle, le ton, qu'on appelle épogde.

A	AB	B		Nète	
	AB	AB/15	16/15		Un demi-ton plus grave que la nète
	AB	+	AB/9	10/9	Un ton mineur plus grave que la nète
	AB	+	AB/8	9/8	Un ton majeur plus grave que la nète
	AB	+	AB/5	6/5	Tierce mineure grave de la nète
	AB	+	AB/4	5/4	Tierce majeure grave de la nète
	AB	+	AB/3	4/3	Quarte grave de la nète
	AB	+	AB/2	3/2	Quinte grave de la nète
	AB	+	AB	2/1	Octave grave de la nète

Construction des intervalles au moyen des rapports épimores ($1 + 1/n$)

Les rapports déterminant les intervalles en notation moderne sont :

2/1, donc 2, pour l'octave

3/2 pour la quinte

4/3 pour la quarte (= $2 \times 2/3$: renversement de la quinte)

5/4 pour la tierce juste

6/5 pour la tierce mineure

9/8 pour le ton majeur

10/9 pour le ton mineur

16/15 pour le demi-ton

On note que, dans la représentation numérique, les rapports définissant les intervalles au sein d'une même octave sont toujours compris entre 1 et 2. On remarque aussi l'absence du 7. Les intervalles comprenant 7 sont exclus car ils sont considérés comme non consonants. Deux intervalles sont maudits jusqu'à Mozart : l'intervalle de septième mineure (deux quarts conjointes, rapport de $4^2/3^2 = 16/9$; exemple do-si $\flat$), et le triton, diabolique, composé de trois tons, rapport de $9^3/8^3 = 729/512$; exemple do-fa $\sharp$.

Toutefois, les rapports épimores sont consonants pour n compris entre 1 et 5. En effet, en dehors du 7 maudit, le rapport du ton, 9/8 est bien épimore, mais pas consonant, de même que pour les valeurs de n supérieures.

Le ton majeur (9/8) et le ton mineur (10/9) ont été proposés par Ptolémée (II^{ème} siècle de notre ère) et repris dans le système de Zarlino à la fin de la Renaissance. Ils ne diffèrent que d'un comma (dit syntonique = 81/80) et sont généralement considérés, dans le phrasé

musical, comme presque identiques. La différence est perçue sur les tierces : la tierce juste a un rapport de $5/4$, donc $80/64$, et la tierce pythagoricienne (ou plutôt platonicienne) de $81/64$: cette dernière paraît fausse à nos oreilles modernes. Les quintes sont toujours justes (sauf dans le tempérament mésotonique de la Renaissance). Le tempérament égal adopté pour les instruments d'aujourd'hui répartit l'erreur de justesse sur toutes les notes et la rend quasiment imperceptible, sauf pour une oreille très exercée. Nous reviendrons sur cette question, essentielle pour la musique occidentale.

Les intervalles épimores et leurs multiples sont considérés comme les seuls acceptables par l'harmonie occidentale, de l'Antiquité jusqu'au XVII^{ème} siècle.

Rapports, proportions, médiétés

La musique n'est pas seulement, chez les pythagoriciens, une source de plaisir pour celui qui chante, qui joue de la lyre ou qui écoute les plus talentueux ; c'est surtout une méthode d'approche de la partie des mathématiques qui traite des proportions. Lorsqu'on entend que la doctrine pythagoricienne accorde une grande importance à la musique, il s'agit plus précisément d'une partie de la théorie musicale, la théorie de l'harmonie. Dans le cadre de la numérologie pythagoricienne, l'harmonie permet d'aborder l'échelle non linéaire caractéristique de ce qu'on nomme aujourd'hui la gamme. En géométrie métrique la méthode de mesure consiste à établir une analogie entre deux domaines, la réalité mesurée d'une part, l'échelle des nombres d'autre part. En revanche, ici, on confronte la grandeur mesurée à la totalité de cette même grandeur : c'est la mesure d'un rapport.

Selon le papyrus Rhind qui comprend de nombreux passages à propos des mathématiques pratiquées par les Égyptiens du second millénaire AEC, les premières expressions des proportions sont de la forme $1/n$. On envisage le tout et *une* partie du tout, et on réalise des opérations à partir de ces rapports élémentaires. Les mathématiciens grecs (pythagoriciens) s'inspirent de ce système en créant d'abord les rapports dits *épimores* dans lesquels le numérateur excède le dénominateur d'une unité : $(n+1)/n$. Le nom du rapport est donné par le nombre présent au dénominateur.

La proportion est une égalité entre deux rapports dont l'expression est différente, par exemple $3/2 = 6/4$. L'utilité de la proportion est manifeste dans de nombreux problèmes, lorsqu'on cherche un quatrième membre répondant au troisième comme les deux premiers. Il s'agit d'une règle de trois : après avoir augmenté une quantité d'une partie d'elle-même, par exemple 8 augmenté d'un huitième donne $9/8$, il faut trouver la quantité qui respecte ce rapport, appliqué à 24, c'est donc 27. Les Égyptiens avaient élaboré une

méthode, dite de « la fausse position » qui leur permettait, par approximation, de trouver le terme manquant, les Grecs du VI^{ème} siècle ont probablement suivi cette méthode.

Le rapport est dénommé *logos* (λόγος), on dit aussi « raison », fait intervenir deux termes ; la proportion c'est l'*analogia* (ἀναλογία). Elle comprend au minimum trois termes qu'on suppose rangés en ordre décroissant ($a > b > c$). Dans les mathématiques grecques, on n'exprime pas les rapports comme des divisions, et on n'opère pas sur eux au moyen de multiplications ; on les définit entre eux comme des différences. Par exemple, on considère le *logos* présenté par la différence du premier terme et du second, puis du second avec le troisième : $(a - b) / (b - c)$. Quelques opérations sur les proportions vont donner corps à certaines *analogia* (proportions) aux propriétés particulières qu'on appelle les médiétés (μεσότης, *mésotès*), et dont l'apparition identifiée sous ce nom, date sans doute du V^{ème} siècle (peut-être Hippias). La première de ces médiétés qui met en jeu trois termes est ce qu'on appelle la médiété arithmétique (notre moyenne), c'est à dire que « le premier terme surpasse le second de la même quantité que le troisième surpasse le second »⁴¹. La seconde médiété, dite géométrique, est définie ainsi : « le premier terme est au second comme le second est au troisième ». Le « comme » exprime l'égalité des rapports. La troisième médiété, dite subcontraire puis harmonique à partir d'Archytas, est définie, entre a et c , comme suit : « quelle que soit la partie de lui-même dont le premier surpasse le second, le second surpasse le troisième de la même partie de ce troisième ». Généralement on note de cette façon les trois médiétés dites anciennes, entre trois termes a, b, c , tels que $a > b > c$:

la médiété est arithmétique si $(a - b) / (b - c) = 1$; d'où : $b = (a + c) / 2$

la médiété est géométrique si $(a - b) / (b - c) = a / b = b / c$; d'où $a / c = b^2$

la médiété est harmonique si $(a - b) / (b - c) = a / c$; ou $(1 / b) - (1 / a) = (1 / c) - (1 / b)$

On pense généralement que ces trois proportions particulières ont été identifiées en Grèce vers la fin du VI^{ème} siècle, de façon indépendante, et qu'au début du IV^{ème} siècle on les aurait rassemblées sous le terme médiétés. Archytas en donne les définitions précises dans un fragment transmis par Porphyre. Au III^{ème} siècle AEC, Euclide formalise ces proportions (*Éléments*, livre V et suivants) ; par la suite les mathématiciens procèdent à l'inventaire de toutes les médiétés possibles, ils en trouvent alors onze possibles. Les néo-pythagoriciens des premiers siècles donnent le nom de médiété musicale à une proportion entre quatre termes, héritée, disent-ils, des Babyloniens, qui réunit la médiété arithmétique à l'harmonique. Elle est souvent évoquée par les quatre nombres mystiques : 6,

⁴¹ Archytas dans Porphyre, *Comm. sur l'harmonique de Ptolémée*, DK 47 B2.

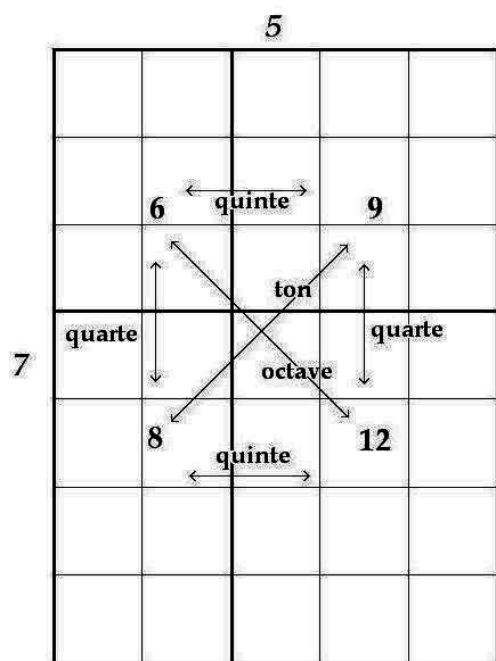
8, 9, 12. En effet 9 est le moyen terme arithmétique entre 6 et 12, et 8 le moyen terme harmonique entre ces mêmes 6 et 12 qui constituent les extrêmes⁴².

La médiété pythagoricienne 6, 8, 9, 12

Les premiers pythagoriciens ont construit l'arithmétique des proportions à partir des intervalles harmoniques produits par des longueurs de corde qu'il ont mesurées sur le monocorde. Les points de mesure correspondent aux longueurs 6, 8, 9, 12. Ces nombres forment deux proportions : $8/6 = 12/9$ et $9/6 = 12/8$; et deux médiétés :

médiété arithmétique entre 6, 9, 12 : $(12 - 9) / (9 - 6) = 12 / 12 = 9 / 9 = 6 / 6$

médiété harmonique entre 6, 8, 12 : $(12 - 8) / (8 - 6) = 12 / 6$



$$\frac{6 + 12}{2} = 9 \quad \left| \begin{array}{l} \text{médiété} \\ \text{arithmétique} \end{array} \right.$$

$$\frac{12 - 8}{8 - 6} = \frac{12}{6} \quad \left| \begin{array}{l} \text{médiété} \\ \text{harmonique} \end{array} \right.$$

$$\frac{a - b}{b - c} = \frac{a}{c}$$

autre propriété curieuse:

$$6 + 8 + 9 + 12 = 2^3 + 3^3 = 35$$

Propriétés numérológicas de la série 6, 8, 9, 12

Il est difficile de connaître le méthode employée par les pythagoriciens, mais, en appliquant ce qu'on sait de leurs pratiques arithmétiques, on peut supposer que la démarche consiste à procéder par différences et en appliquant la commensurabilité (le nombre de fois qu'une quantité est comprise sans reste dans une autre).

⁴² Pour l'histoire des médiétés, voir Abel Rey, *La science dans l'Antiquité*, t. II, *La jeunesse de la science grecque*, Paris, 1933, II, 5, « L'arithmo-géométrie pythagoricienne », p. 270-300. Voir également Bernard Vitrac, « Les mathématiques dans le *Timée* de Platon : le point de vue d'un historien des sciences », in *Etudes platoniciennes* 2 (2006) 11-78p. 27-29.

De l'impossibilité de partager de façon égale une octave ou une quarte

La partition de l'octave en intervalles déterminés par les nombres 6, 8, 9, 12 permet aux pythagoriciens de contourner élégamment l'impossibilité de diviser l'octave en deux parties « égales » : En effet, l'octave est constituée de deux quartes qui encadrent un intervalle unique, le ton, suffisamment petit pour jouer ce rôle de séparateur.

Le problème posé est de diviser l'octave en deux intervalles « égaux ». Pour cela, il faut trouver un intervalle défini par un nombre qui, multiplié par lui-même, donne le nombre affecté à l'octave, c'est-à-dire 2. La médiété qu'on appelle la moyenne géométrique ($c/b = b/a \Leftrightarrow b^2 = ac \Leftrightarrow b = \sqrt{ac}$), appliquée aux intervalles, permettrait de diviser l'octave en deux parties « égales » : $a = 1$ (tonique), $c = 2$ (octave), et b est le nombre définissant l'intervalle cherché, soit $\sqrt{2}$. En appliquant le même calcul pour diviser la quarte en deux intervalles « égaux », on obtient $2 / \sqrt{3}$; ces opérations sont inconcevables à l'époque des pythagoriciens qui ignorent les irrationnels. Par ailleurs, si on revient au domaine musical, l'intervalle constitué par le multiplicateur $\sqrt{2}$ (on sait le faire de nos jours, en multipliant la fréquence par 1,414) est proprement dissonant et très agressif à l'oreille ; c'est le triton, proscrit jusqu'au XVIII^{ème} siècle (*diabolus in musica*).

Toutes les constructions mathématico-musicales qui vont se succéder dans l'histoire de la théorie harmonique, depuis Pythagore jusqu'au XX^{ème} siècle, se résument à cette recherche désespérée du partage de l'intervalle en deux intervalles « égaux », exprimable par un rapport de nombres entiers, ce qui est impossible à cause de ces maudits $\sqrt{2}$ ou $\sqrt{3}$ qu'on ne peut pas éliminer. Ces recherches se résignent donc à diviser jusqu'à l'imperceptible des intervalles de plus en plus petits en deux parties inégales, mais proches de l'égalité, et à définir ces inégalités par des rapports de plus en plus petits, donc constitués de nombres de plus en plus grands ; par exemple, le rapport du comma dit pythagoricien, est égal à $3^{12} / 2^{19}$, soit 531 441 / 524 288 (= 1,0136)⁴³.

Le comma « zarlinien », ou « syntonique », est, quant à lui, apparu à la Renaissance lorsqu'on a retrouvé et accepté la tierce juste dans le système harmonique à la place du diton pythagoricien. Ce comma égal à 81/80 (rapport entre une tierce juste et deux tons majeurs) soit 1,0125. La différence entre les deux commas (pythagoricien et syntonique) est défini par l'intervalle nommé « schisma » (à ne pas confondre avec le schisma des Grecs), lui-même égal à $3^{16} / (5 \times 2^{23})$, soit environ 1,001 086, intervalle purement mathématique et

⁴³ La différence entre deux sons séparés d'un comma pythagoricien est peu perceptible musicalement, en tant que sons isolés, pour une oreille normalement constituée ; mais lorsque ces deux sons séparés d'un comma sont joués simultanément, ils produisent des battements parfois insupportables, par exemple 6 Hertz pour un *la* à 440 Hz.

qui, lui, est musicalement réellement imperceptible ; c'est également approximativement le rapport entre une quinte pure et une quinte au tempérament égal⁴⁴.

Les pythagoriciens ont donc déterminé que les intervalles musicaux consonants s'expriment selon des rapports spécifiques de nombres entiers construits sur la séquence 6, 8, 9, 12. Les successeurs, Hippase, Glaucos, Philolaos et Archytas (pour ceux que l'on connaît) vont explorer cette voie et la complexifier davantage en créant des intervalles nouveaux, parfois si petits qu'ils en deviennent imperceptibles à l'oreille, surtout avec les instruments de l'époque, et c'est Aristoxène, élève d'Archytas puis d'Aristote, qui mettra fin – provisoirement – à cette fuite en avant.

L'harmonie, un outil mathématique

La démarche des pythagoriciens est avant tout mathématique : l'invention de cet appareil de mesure, le monocorde, permet les opérations sur les rapports. La division de l'octave en intervalles définis par des rapports permet de convertir une échelle logarithmique – l'échelle musicale qui définit l'octave comme le rapport double – en échelle linéaire. Or, la première opération consiste à juxtaposer des intervalles : que se passe-t-il lorsqu'on « ajoute » un intervalle à un autre ? On forme un nouvel intervalle qu'il est intéressant de confronter aux deux autres en cherchant une relation, la composition de rapports.

L'opération de composition de ces rapports définissant les intervalles simule une addition de ces intervalles juxtaposés et se calcule en multipliant les rapports entre eux. Par exemple, lorsque qu'on dit qu'une octave (de rapport de longueur de corde égal à 2) est composée d'une quinte ($3/2$) *plus* une quarte ($4/3$), on effectue en réalité une multiplication des rapports : $3/2 \times 4/3 = 12/6 = 2/1$, rapport de l'octave.

Les pythagoriciens ont observé que les rapports de longueur de cordes définissant les intervalles consonants étaient tous de la forme $(n + 1 / n)$. En réalité, ils les définissent comme la somme d'un nombre et d'une partie de ce nombre (*épiméros logos*, ἐπιμερὸς λόγος). Ces rapports d'intervalles consonants font le bonheur des pythagoriciens car ils sont définis par les nombres de la séquence magique, la *tétractys* : 1, 2, 3, 4 (séquence qui fascine les pythagoriciens par ses curieuses propriétés, dont la plus évidente est la somme égale à 10).

⁴⁴ Imperceptible musicalement, mais qui, sur un orgue, par exemple, fait entendre un battement de deux secondes un *la* à 440 Hz avec un autre *la* à 442 Hz.

On rapporte que sur son lit de mort, Pythagore aurait enjoint ses disciples de travailler sur le monocorde (μονοχορδίζετε, *monochordizete*, ordonne-t-il en inventant le verbe « monocorder »)⁴⁵. Ce monocorde est un instrument qui n'est pas joué, mais qui représente le premier instrument de mesure des intervalles musicaux, et à ce titre, il a une importance considérable dans l'histoire des sciences. En effet, attribuer des nombres, ou plutôt des rapports de nombres aux intervalles musicaux, c'est réaliser une mesure, et cette démarche constitue un acte physico-mathématique, peut-être le seul que les pythagoriciens puissent revendiquer, dans le domaine de ce qu'on désigne souvent comme l'acoustique de Pythagore.

Les apports réels : la mesure des intervalles par les rapports

Les pythagoriciens ont introduit les nombres pour désigner la hauteur des sons, et les rapports pour mesurer les intervalles, on l'admet sans contestation historique. Par analogie, en se servant du monocorde, ils ont affecté aux longueurs de la corde des nombres entiers correspondant aux degrés. Ils ont donc créé une mesure de l'échelle musicale en attribuant à chaque niveau une grandeur. L'instrument de mesure monocorde va désormais se nommer le « canon » (κανών, *kanôn*, règle, modèle, principe). Cette introduction d'une démarche de mesure est très importante. La mesure est une comparaison, ou plutôt une modélisation, entre un domaine d'observation, la réalité, qui présente une grandeur variable, et un autre domaine, la représentation, qui a dans ce cas une structure numérique⁴⁶. Dans la musique, c'est une innovation essentielle et probablement la grande invention des pythagoriciens : mesurer la hauteur du son en mesurant la longueur de la corde qui le produit par rapport à une longueur de référence.

La seconde innovation des pythagoriciens, selon ce qu'on en sait, c'est la combinaison des rapports qui déterminent les longueurs de cordes correspondant aux intervalles musicaux de base. Il s'agit de l'octave et de la quarte, auxquels on ajoute un nouvel intervalle, le ton, (on l'appelle *épogde*), en passant de l'heptacorde à l'octocorde qui couvre une octave complète. La combinaison, ou la juxtaposition des intervalles, a nécessité la médiation d'une série de nombres qui ont la propriété de définir tous les rapports consonants par multiplication. Cette suite de nombres, qui, paraît-il, lui a été suggérée par « les Babyloniens », ou par les marteaux sonores des forgerons de la légende, c'est la célèbre séquence – une autre séquence magique, comme la *tétractys* – constituée par

⁴⁵ Aristide Quintilien, *Sur la musique*, livre III, ed. Jahn (1882), p.70 ; traduction et commentaire François Duysinx (Université de Liège), Droz, Genève, 1999, p. 181.

⁴⁶ Voir B. Vitrac, « Les mathématiques dans le *Timée* de Platon : le point de vue d'un historien des sciences », in *Etudes platoniciennes* 2 (2006) 11-78.

les nombres 6, 8, 9, 12 (et leurs sous-multiples). En effet, ce sont les plus petits nombres entiers qui respectent les proportions définissant l'octave ($6 \times 2 = 12$), la quinte ($6 \times 3 / 2 = 9$, et $8 \times 3 / 2 = 12$), la quarte ($6 \times 4 / 3 = 8$, et $9 \times 4 / 3 = 12$).

Dès lors, on peut spatialiser les intervalles sur une droite, le monocorde par exemple, en affectant ces nombres d'une part aux longueurs des cordes, et d'autre part aux degrés de l'échelle musicale : entre 6 et 12 on a une octave ; entre 6 et 8 on a une quarte, ainsi qu'entre 9 et 12 ; entre 6 et 9 et entre 8 et 12 on a une quinte. C'est alors qu'un nouvel intervalle apparaît, entre 8 et 9. Ce nouvel intervalle, qui sépare les deux tétracordes, sera plus tard nommé le « ton » ($3 / 2 \times 3 / 4 = 9 / 8$).

Le mythe de Pythagore acousticien

Pour en finir avec Pythagore, il convient de mettre à plat les connaissances que nous avons sur le philosophe et sur ses travaux. L'histoire des sciences doit considérer *a priori* comme suspects tous les témoignages tardifs qui ont travesti la réalité historique en n'apportant aucune trace écrite qui pourrait corroborer les histoires qu'on a racontées. Les écrits suspects en question – ceux des néo-pythagoriciens du II^{ème} et III^{ème} siècle, puis de Boèce au VI^{ème} siècle – datent d'environ huit cent ans après les travaux de l'école pythagoricienne, et nous devons confronter ces écrits suspects avec ceux qui nous ont été transmis, écrits durant les périodes intermédiaires. Or nous avons peu de traces fiables, et celles dont nous disposons ne nous permettent pas d'affirmer que Pythagore fut ce génie de l'acoustique qu'on se plaît à décrire encore aujourd'hui. Il n'a, en particulier jamais inventé la gamme pythagoricienne, ni le comma pythagoricien, ni le cycle des quintes, et Pythagore n'a jamais décrit une physique des sons.

Jusqu'à la disparition de leur école, vers -450, les recherches des pythagoriciens, souvent assimilées à des découvertes dans le domaine de l'acoustique, se résument à l'invention d'une nouvelle opération arithmétique, la composition de rapports par multiplication. On ne trouve aucune trace, chez les doxographes et chez les commentateurs de cette école, d'une quelconque étude sur la nature physique du son. En revanche, il est légitime d'accorder à l'école pythagoricienne – pourtant plutôt portée sur les spéculations que sur le travail d'atelier – la démarche typiquement physico-mathématique qui consiste à inventer un appareil, le monocorde, véritable instrument de mesure des intervalles et outil servant à effectuer des opérations de calcul sur les rapports numériques.

Pour reprendre quelques mots écrits en 1904, année de sa disparition, par Paul Tannery, helléniste et historien des sciences⁴⁷ :

L'œuvre de Pythagore en musique doit être rigoureusement limitée à la reconnaissance des rapports numériques concernant l'octave, la quinte et la quarte ; c'est-à-dire correspondant aux intervalles qui déterminent les sons fixes de la lyre, et qui sont exclusivement reconnus par les Grecs comme consonances.

Il semble bien que l'importance des contributions de Pythagore dans l'histoire de la théorie musicale soit bien inférieure à celle qu'on lui accorde généralement. Les historiens des sciences doivent souvent affronter les raconteurs d'histoires et assumer une fonction bien plus impopulaire, celle de briseurs de mythes.

⁴⁷ Paul Tannery, « À propos des fragments philolaïques sur la musique », in *Revue de philologie*, 28, 1904, p. 239.

Bibliographie

Auteurs anciens

ARISTOXÈNE (IV^eme siècle av. J.-C.), *Aristoxenou Harmonikôn Sôzomena*, Ed. critique et trad. en allemand Paul Marquard, Weidmann, 1868 ; *Éléments harmoniques*, Trad. de Charles É. Ruelle, Lalaine, Paris, 1871.

BOÈCE (V^eme siècle ap. J.-C.), Boethius, *De institutione musica*, Ed. G. Fiedlein, Teubner, Leipzig, 1867 ; *Institution de la musique*, traduction et commentaire Christian Meyer, Brepols, Turnhout, 2005.

CHAIGNET, Anthelme-Édouard, *Pythagore et la philosophie pythagoricienne. Contenant les fragments traduits de Philolaos et d'Archytas*. Paris, Didier, 1874.

DIOGÈNE LAËRCE, *Vies, doctrines et sentences des philosophes illustres*, traduction française sous la direction de Marie-Odile Goulet-Cazé, Le livre de poche, Paris, 1999.

DUMONT, Jean-Paul, traduction de l'édition de Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker : Les présocratiques*, Gallimard-Pléiade, 1988. Archytas : p. 518-539 ; Archytas in Porphyre, *Commentaires sur les Harmoniques de Ptolémée*, d'après ed. Düring : p. 533-535.

EUCLIDE (ps.), *La division du canon*, 1883, traduction de C.-Ém. Ruelle, in *Revue des Etudes grecques*, t XVII, 1883 ; BARBERA, André, *The Euclidean division of the canon, Greek and Latin sources*, University of Nebraska Press, Lincoln, 1991.

JAMBLIQUE, *Vie de Pythagore*, Les Belles Lettres, Paris, 1996, trad. L. Brisson.

MEIBOM, *Antiquae musicae auctores septem*, Amsterdam, Elzevir, 1652 ; RUELLE, Charles-Émile, sept textes d'auteurs sur la musique antique, traduction française avec commentaires, Pottier de Lalaine, Paris, 1887.

NICOMAUQUE DE GÉRASE, *Introduction arithmétique*, trad. Ruelle, Baur, Paris, 1881.

PHILOLAOS (V^eme s. av. J.-C.), *Fragments*, in Nicomaque de Gérase, *Introduction harmonique*.

PACHYMÈRES, Georges, *Quadrivium*, ed. A.J.H. Vincent, in *Notices et extraits des manuscrits*, t XVI-2, p 476 et suiv, 1847.

PLATON (IV^eme siècle av. J.-C.), *Timée*, trad. É. Chambry, Garnier Flammarion, Paris, 1969.

PLATON, *La République*, trad. et notes de Robert Baccou, Garnier Flammarion, Paris, 1966.

ps-PLUTARQUE, *De la musique*, texte grec et trad. Weill et Reinach, Leroux, Paris, 1900.

PORPHYRE, *Vie de Pythagore*, Le Belles lettres, Paris, 1982, trad. E. Des Places.

QUINTILIEN, Aristide (I^{er} siècle ap. J.-C.), *Sur la musique*, ed. Jahn (1882) ; traduction et commentaire François Duysinx (Université de Liège), Droz, Genève, 1999.

THEON DE SMYRNE, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, Trad. du grec au français J. Dupuis, Hachette, Paris, 1892.

WALLIS, John, « *Porphyrii in Harmonica Ptolemaei commentarius* », in *Operum Mathematicorum*, Oxoniae, , 1699. t III, p. 236-238.

Sources secondaires

BAILHACHE, Patrice, *Une histoire de l'acoustique musicale*, Editions du CNRS, Paris, 2001.

BARBERA, André, *The Euclidean division of the canon, Greek and Latin sources*, University of Nebraska Press, Lincoln, 1991.

BARKER, Andrew, *Greek Musical Writings : Harmonic and acoustic theory*, Cambridge Univ. Press, 2004.

BARKER, Andrew, *Scientific method in Ptolemy's Harmonics*, Cambridge Univ. Press, 2000.

BÉLIS, Annie, « À propos de la construction de la lyre », in *Bulletin de correspondance hellénique*, 1985, 109-1, p. 201-220.

BÉLIS, Annie, « Cithares, citharistes et citharôdes en Grèce », in *Comptes-rendus des séances de l'Académie des inscr. et belles-lettres*, Année 1995, Volume 139-4, p. 1025 – 1065.

BRISSON, Luc, « Platon, Pythagore et les Pythagoriciens » in M. Dixsaut et A. Brancacci, *Platon, source des présocratiques, exploration*, Vrin, Paris, 2002.

BURKERT, Walter, *Lore and Science in ancient Pythagoreanism*, Harvard Univ. Press, 1972.

DAREMBERG et SAGLIO, *Dictionnaire des Antiquités grecques et latines*, Hachette, Paris, 1877.

DÜRING, Ingemar : « Porphyrios Kommentar zur Harmonielehre des Ptolemaios », in *Göteborgs Höskolas Årsskrift*, vol. 38 n° 2. Göteborg 1932. (Verlag, Hildesheim ; New York , 1978 , Réimpression de l'éd. de Göteborg, 1932)

DÜRING, Ingemar : « Ptolemaios und Porphyrios über die Musik », in *Göteborgs Höskolas Årsskrift*, vol. 40, n° 1. Göteborg 1934.

FESTUGIÈRE, A.-J., « Les mémoires pythagoriques cités par Alexandre Polyhistor », in *Revue des études grecques*, 58, 1945, p. 1-65.

GEVAERT, F.-A. *Histoire et théorie de la musique dans l'Antiquité*, A. Braekman, Gand, 1881.

GOTTSCHALK, H.-B., « The De Audibilibus and peripatetic Acoustics », *Hermes*, 96, 1968, p 435-461.

HELMHOLTZ, Hermann, Trad. M. G. Gueroult : *Théorie physiologique de la musique fondée sur l'étude des sensations auditives*, Masson, Paris, 1868, - réédition J. Gabay, 1990.

HUFFMAN, Carl A., *Archytas of Tarentum : Pythagorean, philosopher, and mathematician king*, Cambridge University Press, 2005.

LATTARD, Jean, *Gammes et tempéraments musicaux*, Masson, Paris, 1988.

LEIPP, Émile, *Acoustique et musique*, Masson, Paris, 1980.

LIÉNARD, Pierre, *Petite histoire de l'acoustique*, Soc. Fr. d'Acoustique, Hermès, Paris, 2001.

LINDSAY, R. Bruce, *Acoustics, Historical and philosophical development*, Dowden Hutchinson Ross, Stroudsburg, Pennsylvania, 1974.

MARTIN, Th.-Henri, *Études sur le Timée de Platon*, Ladrangue, Paris, 1841.

- PROUST, Dominique, *L'harmonie des sphères*, Le Seuil, Paris, 2001.
- REINACH, Théodore, « La musique des sphère », in *Rev. des études grecques*, 13, Paris, 1900.
- REY, Abel, *Les sciences dans l'Antiquité (5 volumes)*, vol. II, Albin Michel, Paris, 1930.
- RUELLE, Charles-Émile, *Sept textes d'auteurs sur la musique antique*, traduction française avec commentaires, Pottier de Lalaine, Paris, 1887.
- RUELLE, Ch.-Émile, « Étude sur Aristoxène et son école » in *Rev. d'Arch.*, t XIV, Paris, 1857.
- TANNERY, Paul, *Pour l'histoire de la science hellène*, 1887, Gauthier-Villars, Paris, 1930.
- TANNERY, Paul, « Sur les intervalles de la musique grecque », in *Rev. des Études Grecques*, 15, 1902, p.336-352.
- TANNERY, Paul, « La division du canon », in *Revue des Études Grecques*, 1883.
- TATON, René, *La science antique et médiévale*, PUF, Paris, 1957.
- VINCENT, Alexandre-J.-H., « Notices sur trois manuscrits grecs relatifs à la musique », trad. et comm. in *Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque du roi*, 16-2, Paris, 1845.
- VITRAC, Bernard, « Les classifications des sciences mathématiques en Grèce ancienne », in *Archives de Philosophie* 68 (2005) p. 269-301.
- VITRAC, Bernard, , « Les mathématiques dans le *Timée* de Platon : le point de vue d'un historien des sciences », in *Etudes platoniciennes* 2 (2006) p. 11-78.
- VAN WYMEERSCH, Brigitte, « La tradition arithmétique en musique, l'exemple de Gassendi » in *Sciences et Techniques en Perspective*, 2e série, 8/1 (2004), p. 85- 97.