

5075
DURSTERS, E. J.
1936

C3
M150 21

DE OUDERE PHASEN DER GRIEKSCHE WISKUNDE¹⁾

De onderzoekingen, die in de laatste jaren over prae-Helleensche wiskunde zijn verricht en waarover hier eenigen tijd geleden verslag is gedaan, hebben een sterke wijziging teweeg gebracht in onze voorstellingen over de technische vaardigheid, die de Oostersche volkeren reeds lang voor den bloeitijd der Helleensche cultuur op arithmetisch en algebrassch gebied hadden verworven. Zij hebben echter nog niet kunnen bewerken, dat de moderne mathesis de wiskunden van Egypte en Babylon nu ook reeds met dezelfde gevoelens van verwantschap zou zijn gaan beschouwen, als zij het reeds lang de Grieksche heeft leeren doen. Nog steeds ziet zij, bij alle erkenning van de waarde van wat tot stand werd gebracht en van de mogelijkheden van ontwikkeling, die geopend werden, de prae-Helleensche mathesis als een vreemd wezen uit een voortgoed afgesloten periode; in de Grieksche daarentegen herkent zij met blijde verwondering haar eigen jeugd, vol van beloften, die sindsdien in vervulling zijn gegaan, vol ook reeds van daden, waarop later kon worden voortgebouwd.

Inderdaad is de zuivere mathesis, dit wonderlijk voortbrengsel van het Avondland, een vrucht van Helleenschen bodem en de verdiensten, die de Grieken zich door dit aandeel in de ontwikkeling van onze cultuur hebben verworven, zullen onverminderd blijven voortbestaan, hoeveel verrassingen over de technische vaardigheid van oudere volkeren ons bij verdergaande ontciffering der bronnen wellicht nog wachten. Zelfs zou men kunnen zeggen, dat de waarde van hun werk wordt verhoogd bij iedere onthulling van een hooger peil van de wiskundige techniek van hun voorgangers. Want telkens wanneer het blijkt, dat de Babyloniers, de Aegyptenaren of de Indiërs meer hebben geweten en meer hebben gekund, dan men vroeger altijd vermoed heeft,

¹⁾ Voordracht, gehouden te Leiden op 28 Jan. 1936.

en wanneer dan daarbij tevens aan het licht komt — wat tot dusver onveranderlijk aan het licht *is* gekomen — dat zij niettemin niet op het denkbeeld zijn gekomen, al die kennis en al die vaardigheid te ordenen in een logisch sluitend systeem, opgebouwd op de grondslagen van definitie en axioma en ontwikkeld uit kracht van het zuivere denken alleen, beseffen wij des te scherper, welk een scheppende daad de Hellenen in het opvatten en uitwerken van dat denkbeeld hebben verricht en hoezeer dus de redelijke opbouw der wiskunde, die voor ons haar meest wezenlijke kenmerk is, tot de groote dingen behoort, waardoor Hellas het aanzicht der wereld heeft veranderd.

Dit opstel bedoelt een poging, het tot stand komen van deze schepping in hoofdtrekken te schetsen, maar het moet helaas beginnen met de bekentenis, dat de werkelijk positieve en volmaakt betrouwbare gegevens, die ons voor deze reconstructie ter beschikking staan, uitermate schaarsch zijn. Hoe vreemd het ook moge klinken, we hebben het als feit te aanvaarden, dat we voor het onderzoek van de Babylonische wiskunde van ca 2000 v. Chr. een veel ruimere en veel meer volledige documentatie bezitten dan voor de kennismaking met de Grieksche wiskunde uit den bloeitijd der Helleensche cultuur. De oudste Grieksche wiskundige, wiens werken we althans in hoofdzaak kennen, is Euclides, die omstreeks 300 v. Chr. moet hebben geleefd, maar hij beduidt voor de periode, die ons in dit opstel zal bezighouden, de afsluiting en bekroning en hij kan ons dus beter leeren, waartoe de ontwikkeling der Grieksche mathesis in de eeuwen vóór hem heeft gevoerd, dan hoe ze is verlopen. Van de prae-Euclidische wiskunde zelf bezitten we slechts enkele authentieke fragmenten, een beperkt aantal berichten van tijdgenooten en verder mededeelingen van zeer uiteenlopende waarde bij schrijvers, die vele eeuwen na den tijd, waarin de gebeurtenissen zich afspeelden, hebben opgeteekend, wat de overlevering ervan getuigde of wat zij er zelf van vermoedden, raadden of phantaseerden. Naast deze drie bronnengroepen bestaat dan nog een andere: het voltooid systeem van Euclides zelf, dat in de eigenaardigheden van zijn structuur nog menige herinnering aan vroegere fasen van ontwikkeling bewaart.

Van al deze gegevens gebruik makend, hebben de historici der Grieksche wiskunde zich langzamerhand een beeld gevormd van

wat er in de periode van 600 tot 300 v. Chr., tusschen Thales van Milete en Euclides van Alexandria, op wiskundig gebied in Hellas kan zijn voorgevallen. Het is dat beeld, dat we hier zullen schetsen en er is dan nu bij voorbaat reeds aangeduid, hoezeer het berust op vergelijking en groepeerings van een groot aantal verschillende gegevens en welk een belangrijk aandeel de reconstructieve phantasie in het tot stand komen ervan gehad heeft. Dat brengt natuurlijk voor den historicus der wiskunde de voortdurende verplichting mee, zich bij iedere bewering bewust te blijven van de gronden, waarop ze berust en van de mate van betrouwbaarheid, die er aan toekomt. Laten we ons echter hier de weelde gunnen, ons van die noodzaak te ontdoen: laat de schets, die hier volgt, op dezelfde wijze worden beschouwd, als waarop men zou luisteren naar een archaeoloog, die, na nauwkeurige studie van de overblijfselen van een antieken tempel te hebben gemaakt, in een uur van ontspanning aan zijn phantasie den vrijen loop laat en nu probeert, er een indruk van te geven, hoe het gebouw naar zijn voorstelling er als geheel heeft uitgezien.

Omstreeks 600 v. Chr. dan moeten de Grieken — en men heeft hier, evenals in de geschiedenis der philosophie, voor alles aan de Ionische bewoners van de kusten van Klein-Azië te denken — op grond van wat ze door aanraking met de Babylonische, de Aegyptische en wellicht ook indirect met de Indische cultuur hadden gehoord en wat ze, daarop voortbouwend, zelf hadden gevonden, in het bezit zijn geweest van een bonte verscheidenheid van rekenkundige en algebraische vaardigheden en van meetkundige eigenschappen en methoden, berustend op traditie, op empirie of op intuïtie, een mengeling van juist en onjuist, van zeker en twijfelachtig, in den volsten zin van het woord een *rudis indigestaque moles* en ook zij waarlijk bestaande uit *non bene junctarum discordia semina rerum*.

Moest het voor Helleensche denkers, die het ontstaan der wereld als geheel zagen als een ordening van chaos tot kosmos, niet een aanlokkelijke opgave zijn, in dezen microchaos zelf orde te scheppen, het logisch voorafgaande vóór het logisch volgende te plaatsen en overal de archai, de principia, te zoeken, waaruit het denken door eigen kracht alles kon afleiden, wat tot dusver als in samenhang onbegrepen feitenmateriaal het geheugen had belast?

Het ontstaan van dit denkbeeld beduidt het geboortuur der mathesis en zeker hebben de Ionische natuurphilosophen reeds bijgedragen tot de verwekkelijking ervan. Spoedig echter verplaatst het tooneel van de grootste geestelijke activiteit der Grieksche wereld zich van de kusten van Klein-Azië naar Groot-Griekenland: te Krotoon in Zuid-Italië zetelt dan de school van Pythagoras, waarin de mathesis tot religie wordt, en een traditie, die door de moderne historische kritiek wel deerlijk geschokt, maar daarmee nog lang niet ontworteld is, zoekt in haar werkzaamheid den eigenlijken oorsprong zoowel van de zuivere geometrie als van de abstracte getallenleer. Dat ze zooveel deed, als de neo-Pythagoraëers later hebben beweerd, gelooven we niet meer; dat haar werk vaak verward is met wat meer dan een eeuw later de z.g. Pythagoraëers uit de school van Archytas van Tarente hebben gedaan, is maar al te waarschijnlijk. Maar ongetwijfeld heeft zij den redelijken opbouw der wiskunde sterk bevorderd: nog steeds gelooven we graag aan de juistheid van de mededeeling van Proklos, dat Pythagoras de empirisch gegroeide wiskunde vervormde tot een vrije wetenschap en dat hij haar stellingen op onstoffelijke wijze en door het denken alleen onderzocht; nog steeds schrijven wij een groot deel van den inhoud van de eerste zes, de planimetrische, boeken van Euclides op zijn naam en op dien van zijn school. Hier werd dus ook wel voor het eerst besef en in practijk gebracht, dat de logische reductie van een wiskundige bewering op dieper liggende en meer eenvoudige uitspraken tenslotte een einde moet nemen en dat het geheele denkbeeld van ordening in de ductieve ketens geen zin heeft, wanneer men zich niet voortdurend even scherp rekenschap geeft van wat men zegt als van wat men doet. Zoo bleek de noodzaak, een aantal niet verder bewijsbare grondstellingen, de axioma's, als uitgangspunt der redeneering te nemen en aan ieder betoog een omschrijving van de beteekenis der gebruikte termen te laten voorafgaan.

Hier werd dus ook veel bewust gemaakt wat men vroeger had aanvaard en gebruikt, zonder het uitdrukkelijk te vermelden en veel oude kennis vond hier voor het eerst zijn redelijk verband en zijn plaats in het systeem. Dat het vierkant, op de schuine zijde van een rechthoekigen driehoek als zijde beschreven, een even groote oppervlakte heeft als de vierkanten op de rechthoekszijden samen, werd hier niet slechts vermoed, geweten of op zijn best

in speciale gevallen intuïtief als juist erkend, maar in een logisch dwingend betoog bewezen en met het woord „bewijzen” heeft in de beschrijving der menschelijke denkactiviteit een nieuwe term zijn intrede gedaan en heeft het denken zelf een nieuwe en hoogere trede bestegen.

En daarbij kwam dan nog — niet minder beladen met toekomst-mogelijkheden dan de logische ordening der meetkunde — de ontdekking van de kosmische beteekenis van het getal. Snaren, die bij gelijke spanning, dikke en materiaal consonerende intervallen voortbrachten, bleken lengten te bezitten, die zich als de eenvoudigste natuurlijke getallen verhouden: 1 : 2 voor het octaaf; 2 : 3 voor de quint en zoo verder, en aan het zingenot, dat het oor bij het weerklinken dier intervallen ondervond, kon een abstracte genieting van den geest, die, muziek hoorend, telt zonder het te weten, als diepere grondslag worden gegeven.

Dat deze eene ontdekking zoo verstrekkende gevolgen kon hebben, niet alleen voor de wiskunde en de mathematische natuurwetenschap, maar voor de geheele Helleensche cultuur, is toe te schrijven aan een eigenaardigheid van het jonge Grieksche denken, die ook in de geschiedenis der filosofie tot uiting komt: de sterke neiging tot de onvervaarde sprongsgewijze inductie, die den moed geeft, om wereldomvattende beginselen te formuleeren naar aanleiding van een zeer karig feitenmateriaal. Men denke aan Thales: hem valt de levenwekkende invloed van het water op, de rol van vocht bij allerlei natuurlijke processen, het alzijdig voorkomen ervan en direct is hij met zijn conclusie klaar: de *φύσις* van het zijnde, de *natura rerum* is het water. Geen Grieksche denker van deze periode althans schrijft voor dergelijke gedachtesprongen terug: van de peripherie der verschijnselen naar het centrum van het wezen is voor hen slechts een stap. De Pythagoraëers zijn niet anders: met de gewaarwording der wel-luidendheid correspondeert het objectieve feit van de eenvoudige getalverhouding en getalverhoudingen beheerschen ook vaak de vormeigenschappen, die de meetkunde bestudeert: dus vormt de verhouding het wezen van wat ons als weluidend interval of als schoone vorm verschijnt.

En hiermee heeft het jonge denken over de natuur reeds alle remmen der bedachtzaamheid losgedraaid: van alle dingen geldt, dat wezenlijk slechts datgene is, wat door getallen kan worden

uitgedrukt. Korter: *τοὺς ἀριθμούς εἶναι αὐτὰ τὰ πράγματα*; dat de getallen de dingen zelf zijn. En dat inzicht blijft niet tot de aarde beperkt: ook de kosmos des hemels moet gebouwd zijn volgens eenvoudige getalverhoudingen en het is hare schoone overeenstemming, hare harmonie, die het geestelijk oor van den astronoom bij beschouwing van den sterrenhemel verneemt. *Ὁ ὅλος οὐρανός ἀρμονία ἐστὶ καὶ ἀριθμός*: de geheele hemel is harmonie en getal.

Dit zijn alles even overijlde conclusies als die Thales trok of een der andere natuurphilosophen. Toch is er tusschen de Pythagoraeërs en de Ionische denkers een groot verschil en dat verschil bestaat in het succes, dat zij met hun logisch in het geheel niet verantwoorde stap hadden. Het ziet er toch ook wel naar uit, dat voor het natuurwetenschappelijk denken de dingen inderdaad getallen zijn of, om het minder aphoristisch te zeggen, dat de natuurwetenschap slechts datgene kan kennen, wat ze in mathematische taal (en dat wil in laatste instantie toch zeggen met behulp van getallen) kan uitdrukken. Kant heeft later op grond van een ruimer ervaringsmateriaal ongeveer hetzelfde gezegd en onze tijd schijnt meer dan een andere aan zijn inzicht en aan het voor gevoel der Pythagoraeërs gelijk te geven.

Voor de Pythagoraeërs zelf was een der eerste consequenties van hun aperçu natuurlijk de enge verwantschap, ja identiteit van wiskunde en muziektheorie en de nauwe samenhang van beide met de astronomie. Het innige verband, dat de drie wetenschappen later in het quadrivium zou samenbinden, dateert uit dezen tijd. Aan de muzikale invloeden, die de wiskunde in haar eerste fasen heeft ondergaan, bewaart de latere Grieksche wiskunde bovendien nog menige herinnering: het woord harmonie heeft in haar terminologie even sterk mathematischen als muzikalen klank; menig hoofdstuk der arithmetica laat zich evenzeer als verhandeling over intervallen begrijpen als in zijn wiskundige beteekenis; voor de bewerking, die wij het quadrateren van een breuk noemen, zal de Grieksche arithmetica steeds verdubbelen van een verhouding blijven zeggen, omdat men, muzikaal gesproken, een interval verdubbelt, door het relatieve trillingsgetal tot de tweede macht te verheffen; de verhouding $2 : 1$ zal zij steeds samengesteld zien uit de verhoudingen $3 : 2$ en $4 : 3$, omdat een octaaf de som is van een quint en een quart.

We zullen de muzikale en ook de astronomische consequenties van de Pythagoraeïsche getallenleer echter verder laten rusten en ook slechts enkele woorden wijden aan de mystische en magische zijden, die zij bezit, aan de toevoeging van getallen aan abstracte begrippen, 1 aan het denken, dat steeds onbewegelijk in zich zelve rust, 2 aan de eeuwig wisselende meening, 5 aan het huwelijk, omdat even met vrouwelijk en oneven met mannelijk correspondeert, terwijl 5 de eerste som van een even en een oneven getal is, 7 aan de wijsheid enzovoort. We vermelden ook slechts terloops even de volmaaktheid van het getal 10, de heiligheid van den Tetraktus, d.i. de rij 1, 2, 3, 4 en gaan ook niet in op de theorie der perfecte getallen, die de som zijn van al hun echte deulers noch op die der bevriende getallenparen, waarvan elk de som is van al de echte deulers van het andere.

Dit alles blijft hier rusten, omdat het voor het hoofddoel van dit opstel speciaal aankomt op de functie van het getal in physichen en geometrischen zin, in den opbouw van stoffelijke lichamen en ruimtelijke vormen, maar het zou niet goed zijn geweest, er heelemaal over te zwijgen, omdat anders een wezenlijk aspect van de Grieksche wiskunde zou zijn verdoezeld. Typeerend vooral voor de oudere Grieksche mathematici is nl. de enge buurschap, die er in hun geest bestaat tusschen de behoefte aan wiskundige exactheid, dus aan helderheid en eerlijkheid van het denken, en de neiging tot ongebonden phantastische speculatie. Men heeft gesproken over de nuchterheid der Grieken en het sterk rationalistisch karakter van de wiskunde, die zij met zooveel succes hebben beoefend, zal menigeen wellicht goed in die voorstelling lijken te passen. Men beschouwt nu eenmaal mathematici over het algemeen bij voorkeur als een koele, hartstochtlooze, alle dingen zonder veel emotie overdenkende menschensoort en de term nuchter lijkt bij uitstek geschikt, deze combinatie van deze eigenschappen uit te drukken. Men mag daarbij echter niet over het hoofd zien, dat het voorrecht der wiskundigen, zich in hun mathematische productie te kunnen laten gaan, waarheen de phantasie der rede hen voeren wil, hen wel eens verleidt tot overschrijdingen van de grenzen van hun eigenlijk domein, waarvoor het woord nuchter heelemaal geen juiste karakteristiek meer is. Wiskundigen hebben meer dan eens de neiging vertoond, bij de studie der natuur de autoriteit van

het empirische feit maar liever te ontloopen om vrijelijk te kunnen berekeneeren, hoe de dingen wel zouden kunnen zijn ingericht en niet zelden ook zijn zij meegesleept in stroomingen van mysticisme of symbolismen, waarvoor men hen bij oppervlakkige beschouwing heelmaal niet vatbaar zou achten. Zij deden dit dan ook weer met een zekere koele grondigheid en consequentie en het is juist deze combinatie van het verstandelijke met het phantastische, die zoo vaak onbegrepen blijft. Men zou zich daarom mis schien op de karakteristiek van den nuchteren Griek een kleine aanvulling kunnen veroorloven, voorzover het de Griekse mathematici betreft; dit waren, zooals mathematici vaak zijn, nuchtere phantasten en men zou op velen van hen kunnen toepassen, wat Emerson van Plato zeide: niets koeler dan zijn hoofd, wanneer de flitsen van zijn verbeelding langs den hemel schieten.

Maar om tot de Pythagoraeï's terug te keeren: we lieten reeds uitkomen, dat de toepassingen van het axioma, „de dingen zijn getallen” zich ook tot op physisch en geometrisch gebied uitstrekken. De vorming van de getallen door voortdurende samenvoeging van onderling gelijksoortige eenheden levert a.h.w. het prototype voor den opbouw der ruimtelijke lichamen. Het element van opbouw is hier het punt: *μὲνός θεῶν ἐκονα*, eenheid met ligging, en in tegenstelling hiermee wordt de oorspronkelijke arithmetische eenheid dan een *σπεινὴ ἀβρός*, punt zonder plaats. Lijnen ontstaan door het aaneenrijgen van die ruimtelijke monaden en ook al overtreft het aantal daarvan iedere voorstelling, zoo blijft nochtans op hare verzamelingen het fundamentele begrip van den logos, de verhouding, van toepassing: lijnstukken verhouden zich als getallen. Vlakke figuren en lichamen zijn de oneindige verfijningen van stippatronen, zooals ze dienen om getallen weer te geven en waaraan deze hun indeeling ontleenen in driehoekige, vierkante, vijfhoekige enz.

Wat hebben we hier nu echter onder lichamen te verstaan: de stoffelijke die ons omringen of de ideale vormen der meetkunde? Die vraag is praematuur, want nog is de rationalisering der geometrie niet zoover gegaan, dat zij tot een idealisering is geworden. Nog wordt niet steeds bewust verschil gemaakt tusschen den meetkundigen driehoek en het driehoekig plaatje van steen of brons en het heeft nog geen zin, tusschen de materiele mona-

den der physica en de immateriele der geometrie te onderscheiden. Waartoe ook? Stof is immers slechts schijn en schijn — op dit punt zijn alle Griekse denkers het eens — is onbelangrijk. De dingen zijn getallen, de stoffelijke kubus evengoed als de geometrische; beide bestaan slechts uit kubische monadenpatronen of, als men een meer modernen term prefereert, uit kubische roosters.

Zoo weerspiegelt in de Pythagoraeïsche leer de geheele opbouw der wereld de discontinuïteit van de rij der natuurlijke getallen. Alles is veelheid en dus door deeling op te lossen in eenheden; de objecten van ons denken en van onze waarneming zijn slechts aggregaten, verzamelingen van zulke eenheden. Het zal niet noodig zijn uitvoerig te schetsen, van hoe fundamentele betekenis voor de ontwikkeling van het geheele wetenschappelijke denken deze leer geweest is. Slechts moge er even de aandacht op gevestigd worden, hoe verschillend hare lotgevallen zijn geweest op de twee gebieden, die, toen ze werd opgesteld, nog vrijwel vereenigd waren: natuur- en meetkunde. In de physica is ze eeuwenlang verdrongen geweest, tot ten slotte haar atomistisch beginsel heeft gezegevierd en het getal inderdaad in de kosmische betekenis is hersteld, die zij daarvoor postuleerde. In de meetkunde heeft ze afwisselend perioden van heerschappij en verdrukking gekend, tot ze ten laatste een van haar grondstellingen, de meetkundige atomistiek, heeft moeten opgeven, om de andere, de fundamentele positie van het getal betreffend, ook hier te zien aanvaarden.

De strijd om deze dingen, die zich vooral openbaart als een conflict tusschen atomistiek en continuïteitsbeschouwing of, als men wil, tusschen aggregaat en totaliteit, begint in de Griekse wijsbegeerte of wiskunde — deze twee begrippen zijn nog nauwelijks te scheiden — met het optreden van de Eleatische school; en wel is het de eervwaardige en geduchte figuur van Parmenides, *αἰδοῖός τε*, zooals Plato hem noemt, dien we het eerst zich zien verzetten tegen de pluraliteitsbeschouwingen der Pythagoraeï's. Het strijdpunt is dus dit: is datgene, wat ten grondslag ligt aan de verschijnselen, die wij in de stoffelijke wereld waarnemen, is het zijnde, *τὸ ὄν*, werkelijk een veelheid, zooals de Pythagoraeï's beweren, of is het één? Of, om het concreter te stellen: zal voortgezette deeling van een lichaam steeds

weer tot lichamen voeren, die één van aard zijn met het oorspronkelijke en dus op hun beurt weer vatbaar voor deeling? Of zal het lichaam opgelost worden in indivisibele bestanddeelen, waarvan het de verzameling, het aggregaat is? Parmenides verdedigt in zijn gedicht *megi pōwōs*, d.w.z. over den aard der dingen, de eerste opvatting met het duistere pathos van een ziener: het zijnde is en kan onmogelijk niet zijn; van het niet zijnde daarentegen kan het bestaan nooit bewezen worden. Het zijnde is niet ontstaan en niet vergankelijk; het is geheel eenig, onwrikbaar. Het kan niet ontstaan zijn: niet uit het zijnde, omdat het zijnde dan al moest bestaan; niet uit het niet zijnde, omdat uit niets niets voortkomt. Het zijnde is niet deelbaar, omdat het overal aan zich zelf gelijk is. Er is nergens een sterker zijn, dat zijn samenhang zou kunnen storen, noch een zwakker. Het is afgesloten naar alle kanten, vergelijkbaar met een goed afgeronden bol.

Wanneer er een lezer mocht bestaan, die deze saeculaire woorden hier voor het eerst vernieemt, zal hij wellicht niet onmiddellijk bereid zijn, de belangrijkheid van den gedachtengang, die er door wordt uitgedrukt, te erkennen. Dat het zijnde is en het niet zijnde niet, moet bij eerste kennismaking wel een banale tautologie lijken en de samenhang van deze beschouwingen met de fundamenteen der mathesis schijnt ver te zoeken.

We moeten echter niet de mogelijkheid, ja de groote waarschijnlijkheid over het hoofd zien, dat in de Grieksche philosophische lectuur woorden als *τὸ ὄν*, *τὸ μὴ ὄν*, het zijnde en het niet zijnde, *pōwōs*, de natuur, en dergelijke, een zeer speciale technische betekenis kunnen hebben gehad, die wij met onze letterlijke vertalingen niet meer benaderen. Het is in ieder geval zeer denkbaar, dat Parmenides, zich bezig houdend met de door alle denkers voor hem reeds met zooveel voorliefde behandelde vraag, wat toch het substraat mag zijn van de qualitatief onderscheiden materiën, waarmee de waaneming ons in contact brengt, noch water, noch lucht, noch vuur, noch het getal als zoodanig aanvaardt, maar, in een opvatting, die aan die van Anaximander verwant schijnt, een eenige materie als oerstof stelt, waarvan het wezen in de uitgebreidheid ligt en die dus met de ruimte identiek is. Als hij dat *τὸ ὄν* genoemd heeft, beduidt dit woord dus de uitgebreide materie of de volle ruimte; *τὸ μὴ ὄν*, waarvan het niet-bestaan met zooveel hartstocht wordt betoogd,

is dan het vacuum, dus alles, wat de Pythagoraeërs en na hen de atomisten nog tusschen de monaden of de atomen denken. En de schijnbare banaliteit, dat wat niet is niet is, blijkt dan in andere formulering de zwaar wegende bewering te bevatten, dat er geen vacuum mogelijk is.

Ineens blijkt nu de geheele passage een duidelijken en diepen zin te hebben; we hooren hier de beginselverklaring der Eleatische school in kwesties, die fundamenteel zijn voor de Grieksche wijsbegeerte niet alleen, maar voor het geheele werenschappelijke denken van alle tijden. We beperken ons tot de consequenties voor de wiskunde en wijzen er dus slechts terloops op, dat het bewijs voor het niet ontstaan zijn van het zijnde het geheele probleem van het worden ontolt, dat de Grieksche filosofen als geen ander bezig zal houden en waarvoor Aristoteles in zijn onderscheiding van potentia en actus een oplossing zal vinden, die eeuwenlang het Europeesche denken zal richten.

Dit alles blijft hier rusten, omdat de toepassing van de uitsproken beginselen op de wiskunde al verstrekkend genoeg is. Eigenlijk moest weer, als bij de Pythagoraeërs, gezegd worden: toepassing op wiskunde en physica. Want het is duidelijk, dat, zooals zij hun atomistische zienswijze geldig verklaarden zoowel voor wat wij physica als voor wat wij geometrische lichamen noemen, hier de overtuiging van de continuïteit van al het bestaande zoowel de materie der physica als de ruimte der geometrie geldt.

Die overtuiging impliceert al dadelijk het ideale karakter van de mathematische vormen: het continuum, hoever ook in deelen verdeeld, blijft in dien zin ongedeeld, dat een klein deel ervan met het geheel in wezen identiek is; de oppervlakken, die men in de ruimte denken kan, brengen geen scheiding teweeg of, zooals Parmenides het uitdrukt, zij maken het zijnde niet los uit den samenhang met het zijnde. Lijnen en punten krijgen al evenzeer een volstrekt ideaal karakter. De geometrie wordt hier voorgoed onttrokken aan de empirie en, kan men zeggen, de physica ook, maar zij slechts tijdelijk. De natuurwetenschap het onderzoek naar de natuur, den aard der dingen, wordt hier bij de wiskunde ingelijfd en dat is een voorspel van een beschouwingswijze, die bij latere Eleaten, Plato, Descartes, met nadruk als de juiste zal worden aangeprezen.

We gaan ook aan dezen zijweg voorbij: de verdere lotgevallen van de grondslagen der wiskunde vereischen al onze aandacht. Want het is wel duidelijk, dat door het enkele poneeren van het postulaat der continuïteit de strijd om die grondslagen niet was beslist, maar integendeel pas begon en tevens, dat de stijl, waarin Parmenides dien strijd voerde, in duistere toespelingen en felle invectieven tegen de blinde, doove, radelooze troep, die zijn en niet zijn voor het zelfde houdt, niet het meest geschikt was, om tot een snelle oplossing te komen.

Inderdaad schijnt de meening van Parmenides, dat het zijnde een eenheid is en geen veelheid, tegenspraak en spot te hebben uitgelokt, het eerste, naar we ons kunnen voorstellen, van de zijde der Pythagoraeërs, het tweede van die der empiristische sophisten, zooals Protagoras en Gorgias. Die tegenstand bracht echter een nieuwen en geduchten strijder voor de stelling der eenheid in het veld in de persoon van den leerling en jongeren vriend van Parmenides, den eeuwenlang miskenden en met de reputatie van aarts-sophist ten onrechte zwaar belasten Zenoon van Elea. Deze merkwaardige denker, dien de Grieken den vader der dialectiek noemen, heeft het Pythagoraeïsche standpunt bestreden en daar-door indirect het eigene verdedigd door het beginsel der pluraliteit ad absurdum te voeren. Om aan de hand van het weinige, dat van zijn redeneeringen over is, te toonen, hoe hij dat deed, willen we ons voorstellen, dat hij een discussie heeft gevoerd met een Pythagoraeër, voor wien we Antimedoon kiezen. Het gesprek moet dan ongeveer als volgt verlopen zijn:

ANTIMEDOON: Overal in de wereld weerspiegelt zich toch de vorming van het getal, de opbouw van een veelheid uit gelijksoortige eenheden. Beschouw b.v. een lijnstuk. Het is deelbaar in twee lijnstukken, die er elk de helft van zijn en elk van deze is op dezelfde wijze opnieuw te verdeelen. Denkt men zich echter die deeling steeds verder voortgezet, dan komen ten slotte als laatste elementen de indivisibele deelen, de punten, te voorschijn, waaruit het lijnstuk bestaat, zooals een getal bestaat uit eenheden.

ZENOON: Ik wil een oogenblik aannemen, dat inderdaad de verdeling in indivisibilia tot stand is gebracht. Maar hoe staat het nu met de afmetingen van die laatste deelen? Hebben ze nog lengte?

ANTIMEDOON: Mij dunkt van niet.

ZENOON: Maar als elk dier deelen een lengte nul heeft, hoe kan dan hun samenvoeging wel lengte hebben? De lengte van het geheele lijnstuk moet dus nul zijn.

ANTIMEDOON: Zij zullen dus nog wel lengte hebben.

ZENOON: Laten we dit even onderstellen. Maar wat moet ik van hun aantal denken? Is het eindig of niet?

ANTIMEDOON: Natuurlijk oneindig, want een lijnstuk is onbegrensd deelbaar.

ZENOON: Maar de samenvoeging van oneindig veel deelen, die elk lengte hebben, moet tot een oneindig groot lijnstuk voeren. Echter heeft het lijnstuk een eindige lengte. Ik kan het dus op geen van beide wijzen als verzameling van indivisibilia beschouwen.

ANTIMEDOON: Toch is het dat. Ik kan het b.v. voortgebracht denken door de beweging van een punt. Bevat het dan niet alle standen, die het bewegende punt achtereenvolgens heeft ingenomen?

ZENOON: Ik merk op, dat ik nooit betwist heb, noch van plan ben te betwisten, dat een lijnstuk punten bevat; ik ontken alleen, dat het uit punten bestaat. Overigens zou ik u willen raden, over de achtereenvolgende standen, die het bewegende punt inneemt, niet met al te groote zekerheid te spreken.

ANTIMEDOON: Hoe zoo, Zenoon?

ZENOON: Wel, neem eens aan, dat een punt in zijn beweging het lijnstuk AB doorloopt, dan moet het, alvorens in B te komen, toch in het midden C van AB geweest zijn?

ANTIMEDOON: Zeer zeker.

ZENOON: En voordat het in C kwam, in het midden D van AC?

ANTIMEDOON: Hoe zou het niet?

ZENOON: Welnu, Antimedoon, noem mij dan eens het eerste punt, dat het bewegende voorwerp na A bereikt heeft. Gij zwijgt? Geen wonder. Want, als gij een eerste punt noemt, wijs ik een eerder aan. En het lijkt dus, dat wanneer beweging werkelijk een achtereenvolgens bereiken van de punten van een lijnstuk is, zij niet beginnen kan, omdat het eerste punt geen volgend punt bezit.

Gij vindt dit niet overtuigend? Welnu, dan toon ik aan, dat de beweging, opgevat, zooals gij het doet, ook niet kan eindigen.

Maar het stuit me tegen de borst, het juist gezegde eenvoudig aan de zijde van B te herhalen. Sta mij dus een kleine variant toe. Gij weet, hoe snel ter been de held Achilleus was en hoe langzaam een schildpad voortkruipt. Welnu ik beweer, dat, als uwe opvatting van beweging de juiste is, Achilleus de schildpad niet zal kunnen inhalen, wanneer deze maar eenmaal een voorsprong op hem heeft. Immers laat aanvankelijk de schildpad in B en Achilleus in A zijn. Na eenigen tijd komt de held in B, maar vindt hij daar de schildpad nog? Integendeel: zij heeft zich intusschen naar C verplaatst, maar wanneer Achilleus zich gehaast heeft, om ook in C te komen, is zij in D en zoo voort in infinitum. Kunt gij, Antimedeon, mij het laatste punt noemen, waar de schildpad nog niet is ingehaald?

ANTIMEDOON: Nu begin ik te gelooven, Zenoon, dat gij niet ten onrechte den naam hebt, door uwe redeneeringen het zwakkere tot het sterkere te kunnen maken. Het is toch duidelijk, dat Achilleus de schildpad zal inhalen; ik kan zelfs het oogenblik berekenen, waarop hij het doet.

ZENOON: Mijn waarde Antimedeon, ik betwijfel noch de snelheid van den held, dien Homeros als *ποδάρκης* roemt, noch de rekenvaardigheid van een volgeling van den wijze van Samos. Maar ik heb niet gevraagd, te bewijzen dat of te berekenen wanneer het inhalen zal plaats vinden, maar te begrijpen, hoe het gebeuren kan, altijd, wanneer een lijnstuk de som is van al zijn punten.

ANTIMEDOON: Meen echter niet, dat gij mij reeds overtuigd hebt. Gij beroept er u voortdurend op, dat er oneindig veel punten liggen tusschen het begin- of eindpunt der beweging en het punt, dat gij op zeker oogenblik beschouwt; en gij schijnt het als ongerijmd te willen voorstellen, dat die oneindig vele punten in een eindigen tijd worden gepasseerd. Vergeet echter niet, dat ook de tijd onbegrensd deelbaar is, dat een tijdvak de som is van oogenblikken, zooals een lijnstuk het is van punten. Ik erken, dat ik niet precies kan zeggen, hoe het daar aan begin en eind der beweging toegaat, maar we kunnen toch, dunkt me, het zoo opvatten, dat in de oneindig vele oogenblikken van den tijd de oneindig vele punten van den weg worden gepasseerd.

ZENOON: Ik wil u weer even volgen in uwe opvatting van den tijd. Maar ik zie niet, dat dit de beweging begrijpelijker maakt.

Want, zeg mij eens, Antimedeon, bevindt zich op een bepaald oogenblik het bewegende punt in een indivisibel van den weg of niet? Ik zal u het antwoorden besparen; zegt gij ja, dan constateer ik, dat een vliegende pijl voortdurend in rust is, op dit oogenblik hier, op een ander elders. Wilt gij daarentegen volhouden, dat met een bepaald oogenblik niet het zijn in een bepaald indivisibel, maar de overgang van het eene indivisibel naar het volgende correspondeert, dan verzoek ik u, u eens even drie rijen indivisibilia voor te stellen, A, B en C, waarvan B in rust is, terwijl A en C zich met gelijke snelheden in tegen-gestelde richtingen langs B verplaatsen:

		S	P				
A	.	.	.	.	.	.	.
		Q					
B	.	.	.	.	.	.	.
C	.	.	.	.	.	.	.
		R	U	T			

Nu zullen P van A en R van C gelijktijdig Q van B passeeren; in het eene tijdsindivisibel, waarin P op de plaats van S kwam, heeft dus P het stuk TR van C voorbij zien gaan. Tusschen T en R ligt echter U en daardoor wordt het beschouwde tijdsinterval gedeeld in twee helften, waarvan een aan het passeeren van TU, een aan dat van UR is besteed. Dat is echter ongerijmd, want het is een indivisibel.

Waarschijnlijk heeft Antimedeon hierop wel weer een ander antwoord geweten, maar wij kunnen de beide Hellenen nu wel verder aan hun disputeerlust overlaten. We hebben al genoeg gehoord, om te beseffen van hoe groote beteekenis de Eleatische opvatting van de ruimte voor de ontwikkeling van mathesis en filosofie geweest is. In het midden moge nog blijven, of Zenoon wel heelemaal gelijk had en of Antimedeon zich niet beter had kunnen verdedigen. De hoofdzaak is nl. dat redeneeringen als deze konden worden gehouden, dat de kritische zin der wiskundigen werd wakker geschud en dat ze werden gewezen op hun onontkoombare plicht, hun geheele werkzaamheid tot in de uiterste diepten redelijk te doordenken. Want, wat verder ook de waarde van Zenoon's betoog moge zijn, een ding staat vast: de

Pythagoraeische opvatting van een continuüm als aggregaat was er voor goed door ad absurdum gevoerd; daarmee was echter een redeneermethode, die tot duister als volwaardig was beschouwd, bevestigd gebleken met de smet der empirie en belangrijke meetkundige stellingen waren op losse schroeven gezet.

Wat voor waarde kon men b.v. nog hechten aan de eigenschap, dat de inhouden van twee pyramiden met gelijke grondvlakken en gelijke hoogten gelijk zijn, als men overwoog, dat het bewijs daarvan gebaseerd was op het inzicht, dat doorsneden in beide lichamen op gelijke afstanden van het grondvlak aangebracht, even groot zijn en dat dus beide lichamen bestaan uit gelijke aantallen gelijke indivisibilia? En was het niet op grond van deze hulpstelling, dat Demokritos voor den inhoud van een pyramide het derde deel had gevonden van den inhoud van een prisma met hetzelfde grondvlak en dezelfde hoogte, een fundamenteel resultaat van de meetkunde der ruimte? Er verspreidt zich een stemming van twijfel. De Abderiet zelf, die in zijn atoomtheorie lijnrecht tegenover de Eleaten stelling had genomen door te verklaren, dat *τὸ μὴ ὄν*, het vacuüm, naast het zijnde, de materie, een zelfstandig bestaan voert, dus dat het niet zijnde er wel is, kon in zijn mathematisch werk niet doof blijven voor de ernstige waarschuwing van Zenoon. In een van de fragmenten, die van hem bewaard zijn gebleven, zien we hem verkeeren in de aporie, de denkerlegenheid, wat men toch moet denken van de doorsneden van een rechten cirkelkegel met vlakken evenwijdig aan het grondvlak. Zijn die doorsneden gelijk? Dan is het lichaam geen kegel, maar een cylinder. En zijn ze ongelijk, is dan de kegel niet, in plaats van glad, trapvormig? Is het niet een dilemma, Zenoon waardig? Want, wanneer men er aan tracht te ontkomen, door te zeggen, dat de doorsneden geen dikte hebben, rijst onmiddellijk weer de beangstigende vraag: hoe kan de kegel er dan uit bestaan? Of: wat zit er dan tusssen?

Het is duidelijk: wat Parmenides en Zenoon in de Grieksche wiskunde teweegbrachten, was niets minder dan een grondslagen-crisis, die een van de pijlers van het jonge gebouw der Pythagoraeische wiskunde ernstig moest schokken. En des te pijnlijker moest dit worden gevoeld, omdat intusssen reeds in eigen kring de ontdekking was gedaan, dat een ander fundamenteel leerstuk, dat misschien voor den bouw van het systeem nog wezenlijker

was dan de atomistische beschouwingswijze der meetkundige vormen, in zijn algemeenheid volstrekt onhoudbaar was.

Dat fundamentele leerstuk bestond hierin, dat men bij ieder tweetal lijnstukken, oppervlakken, inhouden of tijden meende te kunnen aannemen, dat men met twee grootheden te maken had, die zich tot elkaar verhouden als een getal tot een ander getal. Het was een overtuiging, die den grondslag van de geheele levens- en wereldbeschouwing raakte: hemel en aarde konden geen andere verschijnselen te zien geven dan zulke, die in wezen getal en verhouding waren.

Wreed moet die illusie zijn verstoord, toen een der leden der gemeenschap voor de volgende beschouwing de aandacht vroeg:

In den gelijkbenigen rechthoekigen driehoek met rechthoekszijden ter lengte 1 is het vierkant op de hypotenusa, dat immers gelijk is aan de som van de vierkanten op de rechthoekszijden, 2 groot. Wanneer nu de hypotenusa zich tot een rechthoekszijde verhoudt als getal tot getal, zeg als m tot n , moet hiervoor gelden $m^2 = 2 \cdot n^2$. Is de verhouding $m : n$ zoo ver mogelijk vereenvoudigd, dan zijn m en n niet beide even. Echter is m^2 zeker even, dus m zelf ook, dus is n oneven. Zij nu $m = 2m_1$, dan is $n^2 = 2 \cdot m_1^2$, dus n^2 en dus ook n even. Dus zou, zooals Aristoteles het uitdrukt, het evene gelijk zijn aan het onevene, wat ongetijmd is. Dus verhouden zich rechthoekszijde en hypotenusa van den bedoelden driehoek, of, wat op hetzelfde neerkomt, zijde en diagonaal van een vierkant niet als getallen.

Van den schrik en de opschudding, die deze onthulling in den kring der Pythagoraeërs moet hebben veroorzaakt, leeft een weerklank voort in de neo-Pythagoraeische overlevering. Het heet, dat het nieuwe inzicht als een diep geheim voor de profane buitenwereld verborgen werd gehouden en dat toen Hippasos het openbaar had gemaakt, hij als straf der goden in een schipbreuk ontkwam. Die schipbreuk is symbolisch te verstaan. Want, zooals een scholium op Euclides verklaart, al het irrationale in het heelal moet als iets onuitsprekelyks en vormloos verborgen blijven en wanneer een ziel op zulk een vorm van het leven stoot en deze toegankelijk maakt en in de openbaarheid brengt, wordt hij binnengetrokken in den Oceaan van het Worden en door de rusteloze stroomen daarvan omspoeld.

Inderdaad: vormloos en onuitsprekelyk! Kan er voor een

mathematicus iets ergers bestaan? En onuitsprekelijk, ἀροητος, wordt dan ook een der termen, waarmee men verhoudingen als die van zijde en diagonaal van een vierkant voortaan aanduidt en het wordt in de nuance van afschuw en huivering, die er aan eigen is, nog slechts overtroffen door den term ἀλογος voor een lijnstuk, dat ten opzichte van een ander lijnstuk het nieuw ontdekte verschijnsel vertoont. Want logos beduidt immers niet slechts en zelfs niet in de eerste plaats verhouding. Het is ook het woord en de rede en het is voor een wetenschap, die zich uitsluitend op de rede beroept en het heldere woordgebruik in hoogste eere houdt, een hoon, dat ze iets onredelijks, iets irrationaals, in haar domein moet dulden.

En dit is niet alleen een zaak van logisch of aesthetisch sentiment! Want een irrationale verhouding van twee lijnstukken is niet alleen onuitsprekelijk; zoolang men onder hun verhouding de verhouding verstaat van de aantallen malen, dat een derde lijnstuk als gemeene maat op beide begrepen is, bestaat het heele begrip niet meer. Want die gemeene maat is er niet: de lijnstukken zijn ἀσύμμετροι, asymmetrisch of incommensurabel.

Maar vrijwel de geheele vlakke meetkunde berust op de onderstelling, dat lijnstukken altijd symmetrisch, commensurabel, zijn en de ontdekking der irrationaliteit onthult dus plotseling de onbetrouwbaarheid van een der onwankelbaar gewaande fundamenten, waarop het geheele bouwwerk rust. En ziehier de tweede oorzaak van de crisis, die de jonge en veelbelovende Grieksche wiskunde in de periode van haar snelsten groei is komen bedreigen.

Het is niet onwaarschijnlijk, dat er op dit oogenblik twee vragen zullen rijzen, waarvan de eene vooral door mathematici zal worden gesteld en de andere door hen, die aan de mathesis slechts uit hun schooljaren een min of meer aangename herinnering bewaren. De eerste vraag luidt als volgt: was in de periode, waarin de beschouwingen der Eleaten algemeen waren doorgedrongen en waarin het verschijnsel der irrationaliteit geleidelijk in zijn volle draagwijdte werd begrepen, was dus, om het eenigszins te precieeren, tegen het einde van de 5e eeuw de ontwikkeling der Grieksche wiskunde werkelijk reeds zoover gevorderd, dat men haar zonder te overdrijven met een bouwwerk kan vergelijken, dat in zijn fundeering wordt bedreigd? Heeft het inderdaad zin van een crisis in haar grondslagen te spreken?

We kunnen deze vraag niet beter beantwoorden dan door een kort overzicht te geven van wat zij in dien tijd bereikt had, waarbij we ons, in verband met de plaats, waar de crisis was uitgebroken, tot de meetkunde beperken. Zij omvatte dan vooreerst in beginsel d.w.z. afgezien van den breeden uitbouw, die in den loop der eeuwen onvermijdelijk moest ontstaan, de geheele planimetrie en een groot deel der stereometrie en ze had daarin ook reeds problemen aangevat, die de kiem van een veel verdergaande ontwikkeling in zich bevatten, omdat ze met de elementaire hulpmiddelen niet oplosbaar bleken. De groote vraagstukken, een hoek in drie gelijke deelen te verdeelen, een kubus te construeeren, welks inhoud het dubbele is van dien van een gegeven kubus en een vierkant aan te geven, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven cirkel, achtereenvolgens bekend staand als trisectie van den hoek, verdubbeling van den kubus of Delisch probleem en quadratuur van den cirkel, hielden reeds lang de aandacht bezig. Hippokrates van Chios, die waarschijnlijk in het midden der 5e eeuw te Athene werkzaam was, had het Delisch probleem reeds herleid tot het vraagstuk, bij twee gegeven lijnstukken de twee midden-evenredigen te construeeren, dus bij twee gegeven lijnstukken a en b twee andere c en d , zoo te bepalen, dat

$$a : c = c : d = d : b$$

in welken vorm het voortaan altijd zal worden gesteld, en hij had voor het probleem van de quadratuur een toegangsweg geopend, die toen ter tijd veelbelovend moest lijken door aan te toonen, dat bepaalde door cirkelbogen begrensde oppervlakken, de naar hem genoemde *μηνίσκοι* of *lunulae* zich met elementaire hulpmiddelen in een vierkant lieten omzetten. Bovendien had hij het fundeeringswerk der meetkunde bevorderd door het samenstellen van een elementenverzameling, die een voorlooper van het latere beroemde werk van Euclides moet zijn geweest. Hippias van Elis had een transcendente kromme aangegeven, de z.g. quadratrix, waarmee zoowel de cirkelquadratuur als de trisectie van den hoek konden worden uitgevoerd. Over de verdiensten van Anaxagoras, die zich, toen hij te Athene gevangen was gezet, met de quadratuur van den cirkel bezig hield en wiens bewaarde fragmenten enkele diepe en heldere uitspraken over het oneindige bevatten, kunnen we slechts vermoedens uitspreken, maar van Demokritos kennen we als positieve bijdrage de in-

houdsbepaling van de pyramide, terwijl verder tal van titels van verloren gegane werken van de intense belangstelling getuigen, die hij, als alle Grieksche filosofen, in de wiskunde stelde. En daarbij kwam dan nog de krachtige beoefening, die de mathesis ondervond in den kring van geleerden, die zich in Tarente om Archutas verzamelden en die zich ook weer Pythagoraërs noemden. Hier werd o.a. de stereometrie zoover uitgebreid, dat de vijf regelmatige veelvlakken aan het licht kwamen, die zulk een belangrijke functie zouden vervullen in de kosmogonie van Plato en als we even overwegen, dat Archutas zelf een oplossing van het Delisch probleem gaf, waarin hij een ruimtekromme, die door doorsnijding van een torus en een cylinder was voortgebracht, sneed met een kegel, kunnen we er wel zeker van zijn, dat ook hier de kennis der meetkunde veruitging boven het tegenwoordig als elementair beschouwde gebied, dat men vaak, maar geheel ten onrechte, identificeert met het door de Grieken tot stand gebrachte.

Zooveel ter beantwoording van de eerste vraag, waarvan het bestaan werd verondersteld. Nu de tweede, de tegenwerping der niet-mathematici. Zij luidt als volgt: was er door het betoog van Zenoon en de ontdekking der irrationaliteit eigenlijk een fout in de wiskunde aan het licht gekomen; waren er stellingen onjuust gebleken, die men tot dusver voor waar had gehouden? En wanneer men haar hoort beantwoorden met de mededeeling, dat geen enkele eigenschap uit het systeem verworpen of zelfs maar gewijzigd behoefde te worden, zal zij misschien gevolgd worden door deze andere: maar deed het er dan zooveel toe, of men vasthield aan de tot dusver gehuldigde opvattingen, een lichaam als som van zijn doorsneden beschouwde en bij elk tweetal gelijksoortige grootheden een gemeene maat aannam?

We kunnen op deze wedervraag slechts reageeren met de opmerking, dat wanneer de Grieksche filosofen van wiskundig denken deze opvatting hadden gehad, zij niet de eminente mathematici zouden zijn geweest, die wij in hen leeren kennen. De wiskunde heeft in haar beste tijden altijd een zeer helder bewustzijn gehad van de grondslagen, waarop zij bouwt en zij voelt zich, ook wanneer schijnbaar alles naar wensch gaat, niet behagelijk, wanneer er in de diepte wat hapert. Er zijn dan méér twee mogelijkheden: ze verstevigt de fundamenteen, die ont-

reikend zijn gebleken; of ze bouwt opnieuw en schrikt er dan ook niet voor terug, van de pracht en den rijkdom van het oude stelsel alles te laten vallen, wat niet meer soliede in het nieuwe systeem kan worden ingepast.

De Grieksche wiskunde heeft den eersten weg gekozen. Zij is begonnen met middelen te zoeken, het verhoudingsbegrip in de meetkunde zoo lang mogelijk ongebruikt te laten en in het volgende systeem van Euclides wordt dan ook in de boeken I—IV een veel grooter gedeelte der planimetrie vóór de invoering van het verhoudingsbegrip afgehandeld dan het geval is in het tegenwoordige wiskunde-onderricht, waarin men zich nogal gemakkelijk in het huiveringwekkend geheim der irrationaliteit schikt. En verder heeft ze het ondernomen, en de theorie der verhoudingen, die door de ontdekking van dat geheim haar waarde had verloren en de methoden van inhoudsbepaling, die door de fatale ontmoeting met Zenoon krachteloos waren geworden, van een nieuw en steviger fundament te voorzien.

Een uiteenzetting van de nieuwe redenleer, die met een beroemde 19de eeuwse theorie van het irrationale getal in principe gelijkwaardig is, zou een diepere wiskundige scholing onderstellen dan bij den algemeenen lezer kan worden verwacht en de behandeling van de strenge Grieksche methoden ter bepaling van oppervlakten en inhouden zou, hoewel ze veel gemakkelijker te volgen zou zijn, weer meer plaatsruimte eischen, dan hier kan worden ingeruimd. We volstaan dus met het noemen van twee namen van wiskundigen, die, als niet alle teekenen bedriegen, in de overwinning van de grondslagencrisis een belangrijk aandeel hebben gehad. Het zijn Eudoxos van Knidos en Theaitetos van Athene, de eerste reeds lang beroemd als astronoom, maar zeer waarschijnlijk waard, ook onder de wiskundigen van alle tijden tot de grootsten te worden gerekend, de tweede reeds lang bij naam bekend, omdat Plato een dialoog naar hem noemde, waarin hij op zijn verdiensten voor de wiskunde zinspeelt, maar eerst sedert korten tijd opgemerkt als een der belangrijke figuren in de praë-Euclidische wiskunde.

En nu eenmaal zijn naam genoemd is, zijn we als het ware vanzelf beland in een geesteskring der Grieksche cultuur, die wel het allermeest in contact met de zuivere mathesis heeft gestaan, den kring van Plato en zijn akademie.

En daarmee roeren we tevens een probleem uit de geschiedenis van het filosofisch-mathematische denken aan, dat nog te ver van zijn oplossing af is, om er reeds met eenige zekerheid over te kunnen spreken, het probleem n.l. welke precies de relatie is geweest van de Platonische school tot de wiskunde van haar tijd, welke positieve bijdragen zij tot de technische ontwikkeling van het vak heeft geleverd, maar bovenal, wat haar wijsbegeerte voor het principieele inzicht in den eigen aard van het mathematische denken heeft beduid en welken invloed zij omgekeerd in haar filosofische werkzaamheid van de zuivere mathesis heeft ondergaan. Van deze vragen is de eerste nog het best te beantwoorden: het ziet er naar uit, dat Plato zelf in de wiskunde weinig nieuws tot stand heeft gebracht en dat verscheidene van zijn volgelingen, met name Menaichmos en zijn broeder Deinostratos, verder Theudios, Athenaios, Hermotimos en Philippos van Mende haar wel door nieuwe vondsten hebben verrijkt of haar systematischen opbouw hebben verbeterd.

Over de andere punten moeten we voorzichtiger spreken en daarom moge nog eens met nadruk worden herhaald, dat, wat er hier wordt over meegedeeld, niet mag worden opgevat als een reeks van volkomen gewaarborgde en punt voor punt door bewijspplaatsen te staven mathematisch-historische uitspraken, maar slechts als een waarschijnlijk betoog over iets, waarvan we geen nauwkeurige kennis bezitten.

Laten we dan, om te beginnen, overwegen, welk een natuurlijke voedingsbodem het Platonische begripsrealisme, dat tot uitdrukking komt in de ideeënleer, heeft moeten vinden in de opvattingen over het wezen van de geometrische vormen en de arithmetische entiteiten, die in de zuivere mathesis gangbaar waren. Alles, wat in de wereld der verschijnselen driehoekig heet, is te beschouwen als een onvolkomen materiele afdruk van een mathematischen driehoek, die een zelfstandig en onstoffelijk bestaan voert in een ideële wereld, waarvan wij zonder hulp der zintuigen door redelijke bezinning een exacte en apodictische kennis kunnen verwerven. Alles, wat zich hier aan ons voordoet als een verzameling van vijf elementen, onderscheidt zich van andere verzamelingen, die daarmee niet gelijkmachtig zijn, doordat het deel heeft aan de idee der vijfheid, waarvan de abstracte arithmetica ons de eigenschappen weer met nauwkeurigheid en

dwingende kracht leert kennen. Zoo doet ons de wiskunde de twee wijzen inzien, waarop de objecten der zinnenwereld in verband kunnen staan met de ideële vormen: door *μίμησις* of afbeelding in de geometrie; door *μέθεξις* of deelname in de arithmetica.

Men moet dit niet zoo opvatten, dat de geometrische vormen zelf ideeën zouden mogen heeten. Zij staan, zooals Aristoteles het uitdrukt, tusschen de wereld der verschijnselen en die der ideën in, omdat ze van de eigenschappen van deze laatste wel de onstoffelijkheid, de onveranderlijkheid en de eeuwigheid bezitten, maar daarentegen het kenmerk der eenigheid missen; immers een zelfde geometrische vorm herhaalt zich in het ideële gebied in on-eindige verscheidenheid.

Wat met dit „tusschen” bedoeld wordt, illustreert Plato zelf nog eens in de *Politeia* met behulp van het beeld van een in twee segmenten verdeeld lijnstuk, welks deelen zelf weer in dezelfde reden onderverdeeld zijn. Het eene, laagste, der twee oorspronkelijke deelen stelt de zintuigelijke waarneembare dingen voor, het tweede, hoogste, de dingen, die we door het zuivere denken leeren kennen. Van het eerste segment symboliseert het laagste deel de schaduwen of spiegelbeelden van de stoffelijke voorwerpen, die zelf door het hoogste worden voorgesteld. In het tweede segment correspondeert het laagste deel met de gedachte figuren en getallen der wiskunde, waarvan de tastbare voorstellingen, streep, stip, cijfer enz., die in het hoogste segment van het laagste deel thuishooren, slechts afschaduwingen en beelden zijn, die zelf weer in het laagste segment schaduwen en spiegelbeelden kunnen hebben. Het hoogste segment van het tweede deel echter verbeeldt de ideeën, waarvan de kunst der dialectiek zonder hulp van de zinnen, maar ook zonder op hypothesen te bouwen, zooals de wiskunde moet doen, een zuiver redelijke kennis verschaft.

Het wiskundig weten hoort dus thuis in de sfeer der *dianoia*, het zuivere, zekere en onweerlegbare denken, die *toto genere* onderscheiden is van het gebied der empirie, waar wij slechts *doxa*, meening, onexact vermoeden, kunnen verwerven. Toch is een zeker verband tusschen wiskunde en ervaring niet te loochenen. Dit verband is echter niet zoo, dat de wiskundige oordeelen uit de ervaring zouden zijn afgeleid (dit toch zou hun exact en apodictisch karakter onverklaard laten), maar het bestaat hierin, dat de ervaring de ziel prikkelt tot bezinning op de in haar slui-

merende mathematische vormen, die ze dan zonder steun van de zinnen uit eigen kracht kan voortbrengen en ontwikkelen.

De mathesis leert dus den overgang van materie tot vorm, van onexact vermoeden tot exact weten, van doxa tot dianoia; zij bevrijdt de ziel uit de boeien der zinnelijke waarneming en dwingt, den blik van het stoffelijke en bijzondere af op het ideëele en algemeene te richten. Is het niet duidelijk, dat zij de ware propaedeutische vormt voor het wijsgeerige denken? *Μηδεις ἀρεσκυκτητος εἰσὶτω μου τὴν στέγην* hééft boven de toegangspoort tot de Akademeia gestaan, misschien wel niet in stoffelijke letters, maar voor het geestelijk oor niet minder verstaanbaar.

Over de onontbeerlijkheid der wiskunde als element van intellectuele opvoeding spreekt Plato zich uitvoerig uit in het zevende boek der *Politeia*, waar hij de geestelijke vorming van de aanstaande leiders van den staat schetst. Hij spreekt daar eerst over de heilzame werking van de arithmetica, voorzoover men deze beoefent niet met het oog op handel en gewin, maar om door het denken door te dringen in het wezen der getallen, daarbij afziende van de zichtbare en tastbare voorwerpen, die met behulp van getallen kunnen worden geteld; kort verwijlend bij de bijkomstigheid, dat rekenkunde zoowel als meetkunde ook voor practische doeleinden bruikbaar kunnen worden gemaakt, maar vol spot over het streven, om aan die toepasbaarheid een argument voor de wenselijkheid van wiskunde-onderwijs te ontleenen, legt hij, ook bij de nu volgende bespreking der meetkunde, den vollen nadruk op de vormende waarde, die haar beoefening door den geest heeft; door haar wordt een zeker orgaan der ziel gereinigd en tot nieuw leven opgewekt, dat door andere bezigheden dreigt te worden verstikt en verblind en waarvan het behoud toch meer waard is dan dat van een myriade oogen, omdat het alleen kan helpen, de waarheid te zien. Schijnbaar, namelijk als men afgaat op de termen, waarvan zich de geometrie bedient, construeeren, aanpassen en derg. heeft zij weliswaar betrekking op practische handelingen met vergankelijke dingen, maar in werkelijkheid houdt zij, die geheel ter wille van redelijk inzicht beoefend wordt, een kennis van het eeuwige in; zij is daardoor een kracht, die de ziel omhoog trekt naar de waarheid en er moet dus met zorg voor worden gewaakt, dat men zich in den ideaalstaat vooral niet afzijdig houde van de geometrie.

Wie zoo sterk den nadruk legde op het zuiver intellectueele, alle verband met de ervaringswereld ontberende karakter der wiskunde, moest wel zeer strenge eischen stellen aan het peil van haar redeneeringen.

Vooreerst al inzake haar uitgangspunt. In het juist vermelde beeld van het in vier deelen gedeelde lijnstuk ziet Plato het als een zwakheid der wiskunde, dat zij van hypothesen moet uitgaan, dat zij, zooals hij het nader preciseert, het bestaan van even en oneven getallen aanneemt, van figuren, van drie soorten van hoeken en van soortgelijke begrippen op elk harer gebieden, zonder dat de noodzakelijkheid wordt gevoeld, hiervan nader rekenschap te geven. Het is niet twijfelachtig, wat hiermee bedoeld wordt: men voelt in deze woorden de kritiek op wat in een vroeg stadium der wiskunde een natuurlijk verschijnsel moet zijn geweest: het ontbreken van behoorlijke definities der fundamenteele begrippen en de ongemotiveerde aanname van het bestaan van een ding als noodzakelijk gevolg van zijn definitie. Het is niet moeilijk, hierbij tevens te denken aan een kritisch oordeel aangaande het stilzwijgend gebruik van expliciet formuleerbare grondstellingen.

Dan wat haar handelingen betreft. Het construeeren van figuren met behulp van werktuigen is slechts een ruwe verstoffelijking, een schaduwbeeld van de bewerkingen, die de meetkundige in zijn denken uitvoert. De Platonische opvatting der wiskunde eischt hier, zonder aandacht voor de vraag, welke hulpmiddelen het snelst tot het doel voeren, de uitdrukkelijke formuleering van een minimum aantal bewerkingen, waarvan de uitvoerbaarheid wordt gepostuleerd.

Hiermee is nu echter het geheele beginsel uitgesproken, dat in de *Stoicheia*, de *Elementen*, van Euclides zal worden verwezenlijkt: uiterste beperking in de drievoudige grondslagen van het systeem, in de als bestaand gedachte grondvormen, in de als uitvoerbaar gepostuleerde grondconstructies, in de als waar aangenomen grondstellingen; expliciete definitie van alle verder gebruikte termen, aangevuld door een existentiebewijs, dat het bestaan van het gedefinieerde ding waarborgt, doordat het aantoonst, hoe het kan worden geconstrueerd; ten slotte logische opbouw van het geheele systeem zonder beroep op het getuigenis der zinnen.

Zoo laten zich de groote denkbeelden, die de zuivere wiskunde tot op heden beheerschen, ongedwongen opvatten als consequenties van Plato's inzichten; het is onzeker, in hoeverre ze dit in feite zijn; maar vast staat, dat zijn wijsbegeerte en de wiskunde van Euclides geesteskinderen zijn van eenzelfden stam.

Hiermee is nu echter de vraag, wat de wiskunde voor het stelsel der Platonische filosofie heeft beteekend, nog nauwelijks aangeroerd. Voor een deel is die vraag wel met zekerheid te beantwoorden: de sterk mathematische aard van zijn denkwijze openbaart zich namelijk volkomen ondubbelzinnig in zijn neiging, de natuurwetenschap aprioristisch deductief te behandelen, in plaats van langs den weg der empirische inductie geleidelijk door te dringen tot wat achter de verschijnselen ligt. Niet de tonen, die wij hooren met ons lichamelijk oor; niet de sterren, die wij voor oogen zien bewegen, vormen het materiaal, dat den physicus en den astronoom tot uitgangspunt voor zijn onderzoekingen moet dienen; integendeel: de ware acoustiek, de ware astronomie laten zich met mathematische zekerheid opbouwen op grond van algemeene arithmetische of muzikale wetmatigheden. Tot het ware inzicht in het wezen der materie leidt niet de ervaring, aan stoffelijke lichamen opgedaan, maar de mathematische behandeling van de geometrische atoomvormen der elementen, die ons in vier der vijf regelmatige veelvlakken gegeven zijn.

Wat minder duidelijk is, zoo weinig begrepen nog, dat we zullen volstaan met dit punt slechts even aan te roeren, is de positie van het getal in de ideeënleer, is in het bijzonder de theorie der z.g. ideegetallen, waarover Aristoteles in twee boeken der *Metaphysica* zoo uitvoerig met zijn vroegeren meester polemiseert, de geheimzinnige leer van het Groot en Kleine en van de Onbepaalde Tweeheid. Wij zijn er nog ver van af, deze dingen in dien zin te verstaan, dat we ze kunnen nadenken en zoolang dit niet geschied is, kunnen we niet zeggen, dat we de beteekenis van de wiskunde in Plato's leer werkelijk doorgronden.

Maar laat dit zoo zijn. Want ook zonder dat we zijn doorgedrongen tot de diepste inzichten, hebben we in het voorafgaande reeds kunnen beseffen, hoe onontwarbaar in de Helleen-

sche cultuur de wiskunde met het wijsgeerig en het natuurwetenschappelijk denken is samengeweven en hoe groot daardoor de historische beteekenis is, die aan de beoefening der wiskunde in de klassieke oudheid moet worden toegekend.

E. J. DIJKSTERHUIS

181. E. J. Dijksterhuis, De oudere fasen der Grieksche wiskunde, Gids 1936, 153—179.

Der Vortrag gibt, gelegentlich unter Vorbehalten, ein anschauliches Bild der Entwicklung, die von Thales über die Altpythagoreer, Eleaten, den Kreis um Archytas, Hippokrates, Theodoros, Theaitetos, Eudoxos zur Akademie führt. Insbesondere wird die Berührung mit der Philosophie in Zenon — nach Tannerys Deutung der *lógoi* — und Platon beleuchtet.

Gids 1936

W 58