

Mugler, Charles

Sur l'Histoire de quelques définitions de la
géométrie Grecque et les rapports entre la
géométrie et l'optique

In: L'Antiquité Classique, 26 - 1957 -p.331-345

15210 paf
MUGLER, C.
1957

~~D~~ Mugler Ch.

Math.

58 MUGLER CH., Sur l'histoire de quelques définitions de la géométrie grecque
[chez les Pythagoriciens] ; cf. Sciences : Mathématiques.

MUGLER CH., Sur l'histoire de quelques définitions de la géométrie grecque et
les rapports entre la géométrie et l'optique, I : La ligne droite, $\tau\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$, $\epsilon\pi\iota\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\eta\varsigma$,
 $\epsilon\lambda\acute{\epsilon}\gamma\chi\iota\sigma\tau\omicron\nu$: AC XXVI 1957 331-345. | La définition de la ligne droite
donnée par Euclide a été précédée d'une définition par la représentation sta-
tique de la $\tau\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$ et d'une autre, chez Platon, qui fait appel à la représentation
optique de l' $\epsilon\pi\iota\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\eta\varsigma$. Elle a été suivie, chez Archimède, par la défini-
tion de la droite comme chemin le plus court entre deux points. La science
optique des Grecs a dû retourner souvent à la définition par la $\tau\acute{\alpha}\sigma\iota\varsigma$.

L'Antiquité Classique
XXVI 1957 331-45

Louvain
VV 388

F 2429

V 4432

L'Antiquité Classique

SUR L'HISTOIRE DE QUELQUES DÉFINITIONS DE LA GÉOMÉTRIE GRECQUE ET LES RAPPORTS ENTRE LA GÉOMÉTRIE ET L'OPTIQUE

Author(s): Charles Mugler

Source: *L'Antiquité Classique*, T. 26, Fasc. 2 (1957), pp. 331-345

Published by: [L'Antiquité Classique](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/41644824>

Accessed: 07/09/2013 13:41

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



L'Antiquité Classique is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *L'Antiquité Classique*.

<http://www.jstor.org>

SUR L'HISTOIRE DE QUELQUES DÉFINITIONS
DE LA GÉOMÉTRIE GRECQUE
ET LES RAPPORTS ENTRE LA GÉOMÉTRIE ET L'OPTIQUE

par Charles MUGLER

I

La ligne droite : τάσις, ἐπιπρόσθεσις, ἐλάχιστον

La littérature scientifique des Grecs a conservé plusieurs définitions de la ligne droite ; une définition qu'on pourrait qualifier d'économique et dont la forme la plus ancienne est l'assimilation de la droite à un fil tendu ; une définition optique, où la ligne droite est assimilée à un rayon de lumière ; et, enfin, une définition cinématique ou phoronomique, où la ligne droite apparaît comme le lieu des points qui restent immobiles dans le mouvement d'un corps solide suspendu par deux de ces points. Ces trois représentations de la droite se trouvent réunies dans la description de l'édifice céleste du mythe d'Er, au 10^e livre de la *République* de Platon. Le fuseau de la Nécessité est « tendu » à travers le ciel et la terre ⁽¹⁾ et affecte donc la figure d'un fil soumis à la τάσις par laquelle se définissait, à cette époque, comme nous le verrons, la droite ; mais il apparaît aussi comme une « lumière directe » ⁽²⁾, c'est à dire comme un faisceau délié de lumière n'ayant subi ni réflexion ni réfraction, et satisfait par conséquent aux conditions de rectitude que Platon lui-même formulera un peu plus tard dans le *Parménide* ; faisant, enfin, fonction d'axe du monde ⁽³⁾, le fuseau de la Nécessité

(1) διὰ παντός τοῦ οὐρανοῦ καὶ γῆς τεταμένον 616 B.

(2) φῶς εἰθὺ *ibid.*

(3) ἐκ δὲ τῶν ἀκρῶν τεταμένον Ἀνάγκης ἄτρακτον, δι' οὗ πάσας ἐπιστρέφεσθαι τὰς περιφοράς, 616 C.

répond aussi à la définition cinématique de la droite formulée par Platon au livre IV de la *République* (1). Deux de ces trois représentations sont réunies, entre autres, dans une notation du *Timée*, où l'axe du monde est caractérisé comme étant « tendu » à travers l'univers (2).

L'examen du rapport mutuel de ces trois définitions au point de vue de l'existence mathématique est un problème du plus haut intérêt philosophique. Mais nous ne pouvons nous y arrêter ici. Notre tâche doit se borner à une enquête historique sur la présence de ces trois représentations géométriques dans la pensée des savants grecs. L'histoire de la troisième définition, comme axe d'un corps solide animé d'un mouvement de révolution, se réduit à très peu de choses. Elle n'a pas été retenue telle quelle par les géomètres. Elle est implicitement contenue dans le premier postulat d'Euclide qui, en demandant qu'on puisse mener une droite de tout point à tout point, emploie le singulier *εὐθεῖαν γραμμήν*, dans l'axiome apocryphe [9], d'après lequel deux droites ne peuvent enfermer entre elles aucune aire finie, et dans une définition citée par Proclus (3), d'après laquelle la droite est la ligne qui « reste quand les extrémités restent ». Les deux premières, au contraire, occupent une place très importante parmi les premiers principes sur lesquels les géomètres, de Thalès à Ptolémée, ont fondé leur science, et leurs destinées, souvent étroitement liées, peuvent se poursuivre à travers plusieurs siècles dans les travaux des mathématiciens, des astronomes et des opticiens.

L'idée de définir la droite comme la figure prise par un fil tendu a été suggérée aux géomètres grecs par les procédés de certains artisans et des ingénieurs topographes. Maçons, charpentiers, architectes travaillaient *ἐπὶ στάθμην*, ou *κατὰ στάθμην* (4), c'est à dire en se servant d'un cordeau tendu. Les Égyptiens auraient désigné (5) leurs constructeurs par un nom que les Grecs rendaient

(1) καὶ κατὰ μὲν τὸ εὐθὺ ἐστάναι. κτλ. 436 E ; sur ce passage, cf. mon *Platon et la recherche* etc., p. 27.

(2) περὶ τὸν διὰ παντὸς πόλον τεταμένον, 40 B.

(3) ἡ τῶν περάτων μερόντων καὶ αὐτῇ μένουσα. In *Eucl.*, ed. FRIEDLEIN, p. 110.

(4) La *στάθμη*, le cordeau, figure déjà dans les comparaisons homériques, cf. *Iliade*, XV, 410 ; Ulysse travaille le bois *ἐπὶ στάθμην*, cf. *Odyssée*, V, 245 et XVII, 341.

(5) Cf. Clem. Strom., I, 15, 69 ; D.V.⁷ 68 B 299.

par *ἀρπεδονάπται*, ce qui veut dire « ceux qui attachent et tendent des cordes » (1). Cette habitude de réaliser dans la pratique la ligne droite au moyen du cordeau se traduit dans la langue par de nombreuses expressions formées avec la racine *ten-*, du verbe simple *τείνειν* à des composés comme *ἰθυτενής* (2), *ἰθυτένεια* (3) ou *εὐθύτονος* (4). Nous ne savons pas à quel moment de l'histoire de la géométrie pré-euclidienne, ni par qui, la définition de la droite par la tension d'un fil a été formulée pour l'usage des géomètres. Tout ce que nous pouvons affirmer c'est que cette définition a existé. Proclus, dans son commentaire à Euclide, cite parmi d'autres définitions de la droite, une définition présentant la droite comme « la ligne tendue vers une extrémité » (5), sans indication ni de date, ni d'auteur, et il se réfère plusieurs fois dans ce livre à la *τάσις*, à la tension, comme propriété fondamentale de la droite (6).

Cette représentation est visiblement à la base d'une partie de la terminologie géométrique de Platon. Dans l'interrogation de l'esclave du *Ménon*, Socrate désigne ainsi la diagonale du carré comme le segment « qui est tendu d'un sommet au sommet » (7) opposé, avec un emploi de *τείνειν* que nous retrouverons dans certains cas dans la construction de l'expression verbale par laquelle les géomètres remplaceront plus tard l'ancien *τείνειν*, de *ἐπιζευγνύναι*, *ἐπιζυγνύνειν*. L'opération consistant à inscrire une aire donnée dans un cercle donné est désignée par lui par *ἐντείνειν* (8), et le nom

(1) Cf. Th. HEATH, *A history of greek mathematics* I, pp. 121, 122. L'auteur a raison de traduire par « rope-stretchers ». Il ne suffit pas de nouer et d'attacher les cordes, il faut les tendre. Sur la valeur de ce texte comme source historique, en particulier sur l'authenticité douteuse de la partie attribuée à Démocrite, cf. W. KRANZ, *D.V.*?, II, p. 209.

(2) Cf., entre autres, Ptolémée, *Géogr.*, 9, 23.

(3) Cf. entre autres, Ptolémée, *Géogr.*, 9, 29 ; le fragment attribué à Géminus dans *Damianos Schrift über Optik*, éd. R. SCHÖNE, Berlin 1897, p. 24.

(4) Cf. Athénée Méc., éd. WESCHER, p. 5.

(5) *ἐπ' ἄκρον ἐστὶ τεταμένη γραμμή*, éd. FRIEDLEIN, p. 110 ; *αὕτη γὰρ ἐστίν... ἣν καὶ ἑτεροί... ἐπ' ἄκρον τεταμένην εἰρήκασιν*, p. 117 ; cf. aussi pp. 198, 215, 316.

(6) *τῶν εὐθειῶν ... τῇ ἐπ' ἄκρον τάσει*, p. 301 ; *ἐπὶ δὲ τῶν εὐθειῶν ἡ ἐπ' ἄκρον τάσις*, *ibid.* ; *διὰ τὴν ἐπ' ἄκρον τάσιν τῆς εὐθείας*, p. 316.

(7) *τῆς ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν τεινούσης τοῦ τετραπόδος*, 85 B.

(8) *εἰ οἷόν τε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τριγώνον ἐνταθῆναι*, 86 E.

abstrait de cette opération, l'inscription, est *ἡ ἔντασις* (1). De même l'opération consistant à appliquer une aire le long d'un segment de droite est désignée par Platon par *παρατείνειν* (2), sans doute parce que cette opération se réduit à une série de constructions, de *τάσεις*, de segments de droite. Une partie des expressions formées avec la racine *τεν-* disparaîtra du vocabulaire géométrique au moment où les géomètres remplaceront l'ancienne définition de la droite, par la *τάσις*, par des définitions nouvelles. Les deux opérations de *l'έντείνειν* et du *παρατείνειν* s'appelleront ainsi *ἐγγραφεῖν* et *παραβάλλειν*. L'image du fil tendu reste cependant encore directement présente dans les termes *ὑποτείνειν*, *ἡ ὑποτείνουσα* qui se maintiennent après Platon (3) chez Aristote (4), Eudème (5) et dans toute la littérature géométrique à partir d'Euclide. Elle est indirectement présente dans l'expression verbale *ἐπιζευγνύναι*, *ἐπιζευγνύειν*, qui se substitue à l'ancien *τείνειν* à partir d'Aristote. Désignant à l'origine la construction d'un pont ou d'une route rectiligne entre deux points au moyen du cordeau, ce terme passe dans la terminologie géométrique, où il est réservé à la ligne droite à l'exclusion de toute autre ligne. En général, les géomètres emploient *ἐπιζευγνύναι*, *ἐπιζευγνύειν* d'après le schéma *ἐπιζευγνύναι εὐθεῖαν ἀπό τινος σημείου ἐπὶ τι σημεῖον* (6) mais, à partir d'Archimède surtout, la droite peut elle-même être le sujet de cette expression verbale, et on dira *ἡ εὐθεῖα ἡ ἐπιζευγνύουσα τὰ σημεῖα* (7), comme Platon avait dit *ἡ γραμμὴ ἡ τείνουσα ἐκ γωνίας εἰς γωνίαν* (8). Dans les traités de géométrie, le verbe *ἐπιζευγνύναι*, *ἐπιζευγνύειν* désigne donc tantôt l'opération consistant à joindre deux points par une droite, tantôt la propriété de la droite de relier d'une façon unique deux points.

(1) *περὶ τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ* (sc. τοῦ χωρίου) *εἰς τὸν κύκλον*, 87 B.

(2) *τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν*, *Rep.* VII, 527 A ; *παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιοῦτῳ χωρίῳ ὅλον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ᾗ*, *Ménon*, 87 A.

(3) Cf. *Timée*, 54 D.

(4) Cf. *Meteor.*, 376 a 12.

(5) Cf. *Simplicius Phys.*, 62, 32.

(6) Cf. *Aristt. Meteor.*, 375 b 21 ; 376 a 17 et p. ; Eudème dans *Simpl. Phys.*, 64, 20 ; 67, 22 et p. ; Autolycus, *De Sphaera prop.*, 2, 6 et p. ; *Eucl. Elem.*, I, prop. 1, 2, etc.

(7) Cf. *τᾶς ἐπιζευγνυούσας τὰ πέριχα αὐτᾶν*, *Archim.*, *De lineis spir. prop.*, 28, et p.

(8) Cf. plus haut.

Mais en dépit de ces survivances, la définition de la droite par la *τάσις* avait été remplacée entre temps par d'autres définitions. A la représentation de la droite comme figure d'équilibre d'un fil tendu s'était d'abord substituée celle de la droite comme forme du rayon lumineux ou, dynamiquement parlant, comme trajectoire de la lumière dans sa propagation d'un point de l'espace à un autre. Le premier énoncé scientifique de cette définition se trouve chez Platon. Dans le *Parménide* ⁽¹⁾, à une date, par conséquent, sensiblement postérieure à celle du *Ménon*, où la terminologie relative à la droite est encore entièrement déterminée, comme nous venons de le voir, par la représentation de la *τάσις*, Platon définit en effet la droite en ces termes : *καὶ μὴν εὐθύ γε, οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν (ἄκροιον) ἐπιπροσθέον* ⁽²⁾ ἥ, qui présentent la droite comme une ligne telle que si on y choisit deux points au hasard, tout point intermédiaire entre ces deux éclipse chacun des deux. Aristote ⁽³⁾ cite cette définition platonicienne sans en nommer l'auteur, Proclus ⁽⁴⁾ l'attribue formellement à Platon, et les deux citations contiennent une forme du verbe *ἐπιπροσθεῖν*. Ce texte est de la plus grande importance pour l'histoire non seulement de la géométrie, mais aussi de l'optique. Nous avons dit plus haut que la réalité physique à laquelle la ligne droite se trouve assimilée dans cette nouvelle définition est le rayon lumineux, c'est à dire un faisceau très délié d'une lumière émise par un corps incandescent. Ceci résulte de l'emploi de la métaphore astronomique de l'*ἐπιπρόσθησις*, c'est à dire de l'éclipse ou de l'occultation. Dire qu'un point *Γ* d'un segment de droite AB éclipse, *ἐπιπροσθεῖ*, chacune des deux extrémités A et B revenait à affirmer, d'après le sens des termes *ἐπιπροσθεῖν*, *ἐπιπρόσθησις* dans les textes astronomiques ⁽⁵⁾, que *Γ* intercepte pour B la lumière qui serait émise par A et, réciproquement, pour A la lumière qui serait rayonnée par B. Or l'*ἐπιπρόσθησις* des astronomes est indépendante de toute hypothèse sur le mécanisme de la perception visuelle. Dans

(1) 137 E.

(2) Sur la restitution, au point de vue philologique, de la forme *ἐπιπροσθέον* au texte de Platon, cf. mon article *Sur deux passages de Platon*, *R.E.G.*, t. LXIX, 1956, fasc. 1, pp. 20 sq.

(3) *Top.*, 148 b 26.

(4) *In Eucl.*, p. 109.

(5) Pour une analyse plus détaillée du sens de ces termes, cf. *Sur deux passages de Platon*.

une éclipse de lune, par exemple, la lune cesse d'être éclairée parce que la terre s'interpose, *ἐπιπροσθεῖ*, entre elle et le soleil, et non pas parce qu'un obstacle empêche le flux visuel, qui conditionne la perception visuelle dans certaines théories optiques de l'antiquité, d'aller de notre œil jusqu'à la lune. La définition platonicienne de la droite est donc fondée exclusivement sur la loi physique de la forme rectiligne du rayon *lumineux* et ne présume rien sur la forme d'un éventuel ⁽¹⁾ rayon *visuel* ⁽²⁾. Cette constatation est indispensable pour la compréhension des traités d'optique. A moins de faire cette distinction entre le rayon lumineux et le rayon visuel et de borner la représentation physique, sur laquelle est fondée la définition de Platon, au rayon de lumière, la proposition fondamentale de certains de ces traités, à savoir la rectitude du rayon visuel, se réduit, comme nous le verrons, à une tautologie.

Mais avant que Platon ait pu songer à identifier ainsi la droite, qu'il avait d'abord lui-même conçue, avec ses contemporains, comme la figure d'équilibre d'un fil tendu, à la trajectoire de la lumière, il avait fallu vérifier par l'expérience si le rayon lumineux était effectivement orienté dans la direction d'un fil tendu entre la source lumineuse et l'objet ponctuel atteint par la lumière. Cette expérience a certainement été faite avant Platon ou du temps de Platon. Elle a été reprise plusieurs fois au cours de l'histoire de la science optique. La préface à la réédition du traité d'optique d'Euclide par Théon d'Alexandrie nous décrit une pareille expérience ⁽³⁾. Il est vrai que l'auteur omet d'indiquer le point crucial pour nous, à savoir la manière dont l'expérimentateur vérifiait si le centre de la source lumineuse, le trou percé dans le premier écran et la tache de lumière sur le second écran étaient en ligne droite. Mais nous savons par d'autres textes que la vérification se faisait *κατὰ στάθμην*, par un fil tendu entre la source lumineuse et la tache éclairée sur le second écran. L'auteur d'un fragment traitant d'optique, qu'on a quelquefois attribué à Geminus et que

(1) Sur l'histoire de la représentation des rayons visuels cf. entre autres, A. E. HAAS, *Antike Lichttheorien*, dans *Archiv für Gesch. der Philos.*, 1907, pp. 345-386 ; A. LEJEUNE, *Euclide et Ptolémée*, Louvain 1948, pp. 18 sq. et *passim* ; Ch. MUGLER, *Sur quelques fragments d'Empédocle*, dans *Revue de Philol.*, t. XXV, 1951, fasc. 1, pp. 54 sq.

(2) Sur la nature du rayon visuel, cf. A. LEJEUNE, *op. laud.*, pp. 33 sq.

(3) Cf. *Euclidis Opera omnia*, éd. HEIBERG, VII, p. 146.

R. Schöne a édité à la suite des pages de Damien sur des questions d'optique, se sert, à propos de la propagation rectiligne de la lumière qui est selon lui la loi commune à toutes les théories optiques, des trois expressions *κατὰ στάθμην, ἡ ἰθυτένεια* et *ἡ τάσις* ⁽¹⁾, ce qui prouve bien que la ligne droite, à laquelle les théoriciens assimilaient la trajectoire de la lumière, était définie par eux comme la figure d'équilibre d'un fil tendu et que, conséquemment, leur moyen de vérification était le cordeau. De même Proclus, en parlant de la réalisation matérielle d'une droite, nomme côte à côte le moyen « plus gros » des cordes et des fils et celui, « plus fin », des rayons de soleil ⁽²⁾. Ce n'est qu'une fois qu'on eut reconnu l'identité, démontrée par ces expériences, entre la figure d'équilibre d'un fil tendu et la trajectoire de la lumière, qu'on put substituer à l'ancienne définition de la droite par la *τάσις* la nouvelle définition par l'*ἐπιπρόσθις*.

La découverte de cette identité eut des conséquences considérables pour la langue scientifique des Grecs. Nous avons déjà vu qu'un certain nombre d'expressions, formées au moyen de la racine *ten*, disparaissent de la terminologie géométrique après Platon, à la suite de l'abandon de l'ancienne définition de la droite par la *τάσις*. Les opticiens, au contraire, accusent la tendance à fixer la loi physique de la forme rectiligne du rayon lumineux dans leur terminologie en appliquant au rayon lumineux et, par extension, au rayon visuel, la métaphore de la tension. Aristote dit ainsi, dans une page de polémique contre les partisans de l'émission de rayons visuels par l'œil, qu'il est absurde de prétendre que la perception visuelle s'opère par une substance matérielle sortant de l'œil et « tendue jusqu'aux astres » ⁽³⁾. Plutarque, cherchant à

(1) εἴτε ἀπορρέοντα εἰδῶλα ... εἴσω τῶν ὄψεων εἰσδύεται κατὰ στάθμην ἐνεχθέντα ... μόνον δὲ σκοπεῖ (sc. ἡ ὀπτική) εἰ σώζεται καθ' ἐκάστην ὑπόθεσιν ἡ ἰθυτένεια τῆς φορᾶς ἢ τάσεως, *Damianos Schrift über Optik*, éd. R. SCHÖNE, Berlin 1897, p. 24.

(2) δι' εὐθειῶν ... αἰσθητῶν, τότε μὲν ἀκριβεστέρων, ὥς διὰ τῶν ἀκτίνων τῶν ἡλιακῶν, τότε δὲ παχύτερων, οἷον διὰ σπάρτων καὶ στάθμης, *In Eucl.*, p. 39, 40.

(3) ἄλογον δὲ ὅλως τὸ ἐξιόντι τινὶ τὴν ὄψιν ὀρεῖν, καὶ ἀποτείνεσθαι μέχρι τῶν ἀστρῶν, *De sensu* 438 a 25 ; cf. aussi ἡ ὄψις ἐκτείνεται ἐν ἡ ἀσθενεστέρα γίνεται καὶ ἐλάττων, *Meteor.* 374 b 11 ; μακροτέραν γὰρ ἀποτείνομένη ἡ ὄψις, *ibid.*, 375 a 32 ; ἀπὸ γὰρ μικροῦ ἐνόπτρου πόρρω ἀποτείνομένη ἡ ὄψις ἀσθενὴς γίνεται, *ibid.*, 377 b 33 ;

expliquer l'inaptitude des vieillards à voir de près dans l'hypothèse des rayons visuels, dit qu'un cône ⁽¹⁾ formé de tels rayons est « tendu de chacun de nos yeux » ⁽²⁾ vers les objets. Dans l'aperçu de la perception visuelle que Galien donne dans son traité de physiologie, il compare constamment les rayons visuels à des cheveux ou à des fils d'araignée tendus entre l'organe de la vue et les objets sensibles, et il parle de la « tension » de ces rayons ⁽³⁾. La métaphore de la *τάσις* des rayons, tant lumineux que visuels, est particulièrement fréquente chez les commentateurs d'Aristote. Dans son commentaire au *De sensu* d'Aristote, Alexandre caractérise ainsi la théorie de l'émission de rayons visuels en disant que « des rayons... sont tendus entre notre œil et les objets visibles » ⁽⁴⁾, et dans son traité *De l'âme*, il est question de la *τάσις* et du *τόνος* des rayons et de la *τονική κίνησις* du flux visuel ⁽⁵⁾. Même langage chez Olympiodore ⁽⁶⁾. Dans son petit livre sur l'optique,

cf. aussi, dans le corpus aristotélicien, ὑπὸ γὰρ μικροῦ ἐνόπτρου πόρρω ἀποτείνομένη ἀσθενὴς γίνεται (sc. ἡ ὄψις), *Probl. phys.* 912 b 33 ; et *passim*.

(1) Sur le cône visuel cf. LEJEUNE pp. 33 sq.

(2) ἀκτίνων ... μέχρι τῶν ὀρωμένων ἀποτείνομένων. *In de sensu*, éd. P. WENDLAND, Berlin 1901, p. 28, 3 ; cf. aussi : τὸ διὰ τῶν ὀφθαλμῶν ἐκπίπτον φῶς ... καὶ μέχρι τῶν ἄστρον ἀποτείνεσθαι πεφυκεν. Alex. Aphrod., *Scripta minora*, éd. J. BRUNS, Berlin 1887, p. 127, 37 ; et *passim*.

(3) ἐπεὶ γὰρ ἀποτείνεται τῶν ὀφθαλμῶν ἑκατέρου κῶνος, *Quaest. Conv.*, I, 8, 625 F.

(4) ἀπὸ τῆς κόρης ... ἄλλας εὐθείας γραμμὰς παμπόλλας ὥσπερ ἀράχνας τινὰς λεπτάς ἐφεξῆς ἀλλήλων ἐκτεταμένας, *De usu partium libri*, XVII, éd. G. HELMREICH, Leipzig 1909, X, 815 ; τρίχα λεπτήν ἢ ἀράχην ἀκριβῶς διατεταμένην ἀπὸ τῆς κόρης ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου *ibid.* ; ὁδὸς εὐθεῖα ... μὴδ' ἐκτρεπομένη τῆς κατ' εὐθείας τάσεως, *ibid.* ; et *passim*.

(5) ἅτε μὴ συνεχοῦς ἐπὶ τὰ πέρατα τῆς τάσεως γενομένης, κτλ. *Scripta min.* 130, 29 ; τὸν τόνον τὸν ἀπὸ τῆς ὀψεως ἴοντα, *ibid.*, 132, 4 ; ἡ τονική κίνησις, *ibid.*, 130, 27 ; 131, 6 ; et *passim*.

(6) τὸν οὐρανὸν κvanoῦν χρῶμα δοκοῦμεν ἔχειν ... διὰ τὸ ἐπὶ πλέον ἐκτείνομένην (sc. τὴν ὄψιν) διάστημα ἐξασθενεῖν, *In Arist. Meteora*, éd. G. STÜVE, p. 234, 18 ; ἐπειδὴ ἐπὶ πλέον ἐκτείνεται... ἡ ὄψις ποικίλα χρώματα ὀρᾷ κτλ., *ibid.* 234, 24 ; αὐταὶ (sc. αἱ ἀκτίνες) ἐν τὸν ὥτε ραὶ οὔσαι διαλύουσι τὰ περὶ τὸν ὀρίζοντα νέφη κτλ, *ibid.* 259, 23 ; ἐπειδὴ οὐκ εἰσὶν ἐκεῖναι ἐν τὸν οἰ διὰ τὸ ἐπὶ πλέον δίστασθαι κτλ, *ibid.* 259, 26 ; et *passim* ; pour l'affaiblissement du rayon visuel, Olympiodore se sert des expressions ἄτονος, ἀτονία, ἀtoneῖν ; cf. pp. 219, 21 ; 237, 31 ; 239, 10 ; 250, 21 ; et p. et *passim*.

Damien désigne la propagation rectiligne de la lumière solaire par le verbe ἀποτείνεσθαι et par le nom ἡ ἐπέκτασις (1). Ces quelques exemples, dont la liste pourrait encore être augmentée, nous donnent une idée de la fréquence que la métaphore de la τάσις des rayons atteint dans la littérature optique. Le grec avait, certes, formé, indépendamment de toute optique théorique, un certain nombre d'expressions fondées sur la représentation de rayons tendus entre l'œil et l'objet. Euripide fait ainsi adresser à Iphigénie la prière à son père de « tendre » vers elle un regard affectueux (2). On peut citer dans le même ordre d'idées l'adjectif ἀτενής, attesté depuis Hésiode et employé plus tard dans la locution ἀτενὲς βλέπειν, et les expressions verbales ἀτενίζειν et ἐνατενίζειν (3). Mais dans les textes optiques, la métaphore de la τάσις est fondée sur une analyse théorique des phénomènes de la lumière et de la vue, et l'intuition populaire reçoit une sanction scientifique.

Mais la géométrie grecque ne s'est pas arrêtée à la définition de la droite donnée par Platon. Euclide adopte une nouvelle définition de la droite, d'après laquelle cette ligne « est située de la même manière par rapport à tous ses points » (4). Cette définition euclidienne ne semble plus rien contenir de l'ancienne représentation de la droite comme figure d'équilibre d'un fil tendu entre deux points, et elle cache aussi soigneusement la seconde propriété de la droite, celle de coïncider entre deux de ses points avec le rayon lumineux. Peut-être l'expression ἐξ ἴσου κείσθαι désignait-elle, dans la pensée d'Euclide, la constance de cette deuxième propriété sur toute l'étendue de la ligne et son indépendance du couple de points particuliers choisi. Mais elle n'était pas claire. Elle pouvait aussi désigner la propriété, bien plus générale, de l'homéométrie, c'est à dire la possibilité d'amener

(1) ὅσον μὲν γὰρ διάστημα τὸ ἡλιακὸν ἀποτείνεταί φῶς, *Damianos*, éd. R. SCHÖNE, 16, 5 ; ἡ τοῦ ἡλιακοῦ φωτὸς ἐπέκτασις, 16, 11.

(2) Μέθεες νῦν ὄφρυν ὄμμα τ' ἔκτεινον φίλον, *I.A.*, 648.

(3) διὰ τί θατέρον καταληφθέντος ὀφθαλμοῦ ὁ ἕτερος ἀτενίζει μᾶλλον ; *Corpus Aristt. probl. phys.* 957 b 18 ; τῇ ὅφει πρὸς μὲν τὰ ἄλλα ἀτενίζοντες, *ibid.* 959 a 24 ; cf. aussi les expressions ἀτονος, ἀτονία, ἀτονεῖν servant à caractériser la fatigue de la perception visuelle, en particulier dans les pages optiques d'Olympiodore, par exemple *In Aristt. Meteor.*, éd. STÜVE, pp. 219, 22 ; 230, 19 ; 237, 32 ; et *passim*.

(4) εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κείται, *El. I def.*, 4.

en coïncidence n'importe quelle partie d'une droite avec n'importe quelle autre partie. Mais cette propriété là, la droite la partage, comme certains géomètres après Euclide le reconnaîtront, avec la circonférence et avec la spirale cylindrique ⁽¹⁾. Le soin qu'Euclide avait pris, en renchérissant sur les principes de Platon, pour affranchir la définition de la droite à la fois de la représentation tactile du fil tendu et de la représentation visuelle du rayon lumineux, l'avait ainsi conduit à une formule obscure et inutilisable. La page embarrassée que Proclus lui a consacrée ⁽²⁾ nous donne une idée de la gêne qu'elle causait dès l'antiquité aux esprits réfléchissant sur les fondements de la géométrie.

L'insuffisance de la définition euclidienne fut surtout ressentie par les savants qui, à la suite d'Euclide lui-même, cherchaient à faire profiter la science optique de la rigueur et de l'ordonnance que la géométrie avait reçues dans les *Éléments*. Euclide se contente, il est vrai, de postuler dans la première définition de son traité d'optique, comme s'il avait à traiter un problème de géométrie pure, que « les droites menées à partir de l'œil » s'étendent à de grandes distances ⁽³⁾. Il assimile ainsi implicitement la forme du rayon visuel sortant de l'œil à une droite, c'est à dire à la ligne définie par lui dans les *Éléments* comme nous l'avons vu. Étant donné le caractère neutre de cette définition, l'hypothèse fondamentale de l'Optique d'Euclide n'implique aucune affirmation de caractère physique ou physiologique sur le rayon visuel, ni l'identité de sa structure avec celle du rayon lumineux, théorème physique qui n'allait pas de soi et qu'il fallait au moins énoncer, sinon prouver, ni la propriété de la *τάσις* qui avait été le fondement de la première définition de la droite. Le rayon visuel chez Euclide est simplement une ligne qui *ἐξ ἴσου κείται* pour tous ses points, et dès lors toute l'optique se réduit à une géométrie de droites soumises à certaines conditions.

Les successeurs d'Euclide, en optique, ont vu que, pour parer à cette neutralité physique, à ce refus de se prononcer sur la nature de ces rayons visuels avec lesquels ils avaient à opérer, il fallait abandonner la définition euclidienne de la droite et revenir, en

(1) Cf. Proclus in Eucl., pp. 105, 112 et *passim*.

(2) *Ibid.*, pp. 109 sq.

(3) *ὑποκείσθω τὰς ἀπὸ τοῦ ὀφθαλμοῦ ἐξαγομένους εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι διάστημα μεγεθῶν μεγάλων*, *Optica*, def. 1.

les modifiant au besoin, à l'une ou à l'autre des définitions anciennes de la droite. Il y avait *a priori* plusieurs possibilités. Si on revenait à la définition de Platon, l'identification du rayon visuel, au commencement d'un traité d'optique, avec une droite revenait à affirmer directement l'identité de structure du rayon visuel avec le rayon lumineux que représentait la droite du *Parménide* de Platon, de l'ὄψις avec l'ἀκτίς (1), et à étendre, indirectement, la propriété de la τάσις du rayon de lumière, pour lequel elle avait été vérifiée κατὰ στάθμην comme nous l'avons vu, au rayon visuel. Si on définissait, au contraire, la droite, à l'ancienne manière, comme la figure d'équilibre d'un fil tendu, c'est la τάσις qui se trouvait affirmée d'emblée pour le rayon visuel, dès la première phrase du traité d'optique, et l'identité de structure avec le rayon lumineux s'en suivait.

Le premier de ces deux chemins fut suivi par Théon d'Alexandrie dans sa réédition de l'*Optique* d'Euclide et par l'auteur de la *Catoptrique* dite d'Euclide (2). Théon, obligé de respecter dans la mesure du possible le texte d'Euclide, se borne à substituer — pour nous limiter strictement au problème qui nous préoccupe ici — au passage d'Euclide τὰς ἀπὸ τοῦ ὀμματος ἐξαγομένης εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι rédigé dans un style purement géométrique, les mots τὰς ἀπὸ τοῦ ὀμματος ὀφεις κατ' εὐθείας γραμμὰς φέρεσθαι, où l'assimilation des rayons visuels à des droites est au moins posée sous forme d'équation. Mais dans la préface à sa recension, que Heiberg considère comme une rédaction de notes prises par un des disciples de Théon (3), il précise qu'il entend concevoir la ligne droite, dans le sens de la définition de Platon, comme la forme que prend dans l'espace le rayon lumineux et que, dès lors, le premier ὁρος de l'*Optique* d'Euclide a pour lui la valeur d'une proposition de physique, puisqu'il consiste à étendre la loi qui régit les rayons lumineux aux rayons visuels (4). L'auteur de la *Catoptrique* est plus énergique. Il pose dans la première phrase de son traité l'iden-

(1) Sur l'emploi de ces deux termes, cf. LEJEUNE, pp. 19 sq.

(2) Sur l'attribution de cet ouvrage à Théon, cf. J. L. HEIBERG, dans les *Prolégomènes* à son édition des traités optiques, *Euclidis Opera*, Leipzig 1895, VII, pp. xliii sq.

(3) Cf. *ibid.*, p. 145, note.

(4) μεταβαίνειν ἐπὶ τὴν ὄψιν ... καὶ τὰς ἀπ' αὐτῆς ἐκχομένης ἀκτῖνας καὶ ὁμολογεῖν κατ' εὐθείας φέρεσθαι γραμμὰς καὶ ταύτας, *ibid.*, p. 146.

tité de structure entre le rayon visuel et le rayon lumineux en assimilant l'*ὄψις* à une droite, mais en précisant de suite qu'il entend la droite, à la manière de Platon, comme la ligne dont tous les points intérieurs éclipsent les points extrêmes ⁽¹⁾. Il va plus loin. Au cours de la démonstration de la proposition 16, il se réfère à la définition de la droite donnée par Platon en ayant soin, pour qu'il ne reste pas le moindre doute sur sa source, de désigner la droite par l'expression archaïque *τὸ εὐθύ* employée par Platon ⁽²⁾. On ne saurait exprimer plus clairement que la définition euclidienne de la droite est inutilisable pour les fins poursuivies par la science optique, en rendant en même temps hommage au génie de Platon.

La deuxième solution pour faire rentrer la théorie des rayons visuels dans la physique générale de la lumière eût consisté à retourner à la définition de la droite antérieure à celle de Platon, telle qu'elle a été conservée en partie par Proclus. Personne, cependant, ne semble avoir emprunté directement ce chemin. Mais la représentation de la *τάσις* était implicitement liée à un principe qu'il suffisait de dégager pour aboutir à une nouvelle définition de la droite, d'une généralité telle que les définitions antérieures en apparaîtront comme des applications particulières. Ce principe est celui de l'économie, et le penseur qui en reconnut pour la première fois la portée pour la géométrie de la droite fut Archimède. Sa conception de la droite servira chez certains théoriciens de l'optique de pont entre les concepts de rayon lumineux et de rayon visuel.

La propriété économique de la ligne droite était depuis longtemps un fait d'expérience ⁽³⁾. Architectes, marins, constructeurs de toute espèce avaient observé dès l'origine de leurs arts que la réalisation de la ligne tendue entre deux points était chaque fois accompagnée d'une économie sur la longueur de la corde, et bientôt ce fut *en vue* de cette économie, dans la *fin* de réduire au minimum le chemin, le temps, le matériel à employer, que les constructeurs traçaient des droites sur les plans de leurs routes, de leurs ponts et de leurs édifices. L'adjectif *εὐθύς* = direct, immédiat, attesté

(1) *ὄψιν εἶναι εὐθεῖαν, ἥς τὰ μέσα πάντα τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*, *ibid.*, p. 285.

(2) *ὁπέκεντο γὰρ ἡμῖν τὸ εὐθύ, οὗ τὸ μέσον τοῖς ἄκροις ἐπιπροσθεῖ*, *ibid.* p. 312.

(3) Il est probable, comme l'a fait observer A. Rome, que sa découverte remonte très loin dans la préhistoire.

comme qualificatif de la droite depuis Platon ⁽¹⁾, exprime cette idée d'économie. Mais personne, avant Archimède, n'avait songé à fonder la représentation de la droite sur l'économie comme propriété essentielle. Chez Euclide, la propriété économique de la droite, ou la propriété géodésique, comme on l'appelle souvent aujourd'hui, est l'objet d'une proposition démontrable dont la démonstration est commencée ⁽²⁾ effectivement dans le théorème I 20 des *Éléments*. Archimède, au contraire, admet d'emblée que la droite est « la plus courte de toutes les lignes ayant mêmes extrémités » ⁽³⁾ dans un postulat qu'il place, avec d'autres premiers principes, dont un postulat analogue pour le plan, au commencement de son traité *De la sphère et du cylindre*.

Il serait intéressant de savoir par quelles considérations le géomètre syracusain a été amené à cette réforme de la conception de la droite. On sait que parmi d'autres branches des mathématiques appliquées, il s'est occupé aussi d'optique et qu'il a écrit une *Catoptrique*, perdue à quelques fragments près, dans laquelle il avait déjà anticipé certains résultats de Ptolémée ⁽⁴⁾. A. Lejeune a réussi à reconstituer les procédés techniques d'Archimède dans la construction de son appareil optique et aussi, en partie, la critique à l'égard des représentations optiques antérieures que ses recherches personnelles avaient dû lui suggérer. Il est probable que cette critique s'était étendue jusqu'aux propositions fondamentales de l'optique, concernant la forme rectiligne ⁽⁵⁾ du rayon

(1) Sur l'historique de εὐθύς, cf. mon *Platon*, pp. 25 sq. (à la p. 28 il convient de rétablir les références des notes 1 et 2, qui ont été interverties par une faute d'impression).

(2) Elle n'est pas achevée. Pour la parfaire, il faut étendre la proposition I, 20 à des contours polygonaux et passer à la limite. Cf., entre autres, J. HADAMARD, *Leçons de géométrie élémentaire*, I, p. 28.

(3) Λαμβάνω δὲ ταῦτα · α. τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεΐαν.

(4) Cf. A. LEJEUNE, *ibid.*, pp. 52, 53 et *passim*, et du même auteur *La dioptré d'Archimède*, dans *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, série I, tome LXI, 1947, pp. 27-47.

(5) D'après un passage de la *Catoptrique*, conservée par Théon d'Alexandrie, Archimède admet que le rayon visuel se propage en ligne droite et est susceptible de κλάσεις, de réfractions ; Théon d'Alexandrie, *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste*, éd. A. ROME, dans *Studi e Testi*, 72, Rome 1936, p. 347. Cf. A. ROME, *Notes sur les passages des Catoptriques d'Archimède conservés par Théon d'Alexandrie*, dans *Annales de la Soc. scient. de Bruxelles*, 52, 1932, pp. 3-41.

visuel ou du rayon lumineux et que, par conséquent, la conception nouvelle de la droite a été inspirée à Archimède en partie par des réflexions sur les fondements de l'optique. Ce qui est certain, c'est que la représentation géodésique de la droite s'applique à l'optique avant toutes les autres branches de la physique mathématique. Aussi voyons-nous certains théoriciens de cette science se référer à Archimède pour énoncer les propriétés physiques des rayons visuels ou lumineux. Nous avons vu, en effet, qu'en partant des définitions de la droite d'après Platon ou d'après Euclide, l'affirmation de la forme rectiligne du rayon lumineux risquait de se réduire soit à une tautologie, soit à une proposition géométrique dépourvue de signification physique. La seule utilité physique de la droite ainsi définie avait été de servir de terme de comparaison entre le rayon de lumière et le rayon visuel. Avec la nouvelle conception d'Archimède, au contraire, l'affirmation de la forme rectiligne du rayon de lumière devenait une proposition de physique, puisqu'elle revenait à dire que la lumière réalise la plus grande économie possible, soit de dépense en matière ignée, si on se plaçait au point de vue statique, soit de temps pour ceux qui se plaçaient à un point de vue dynamique. Par extension, le rayon visuel se trouvait soumis au même principe d'économie. Dans son opuscule sur les fondements de l'optique, Damien souligne ainsi le caractère « brachistochrone » du rayon visuel en disant que la propagation rectiligne du flux visuel est non seulement un fait prouvé expérimentalement, δι' ὁργάνων, par Ptolémée, mais une exigence de la raison, puisque, si le rayon visuel doit arriver le plus rapidement possible à l'objet de la vue, il suivra comme trajectoire la ligne droite ⁽¹⁾ qui est, — et l'auteur cite ici presque textuellement Archimède — la plus courte de toutes les lignes ayant mêmes extrémités.

(1) *εἰ γὰρ μέλλοι τάχιστα ἡ ὄψις πρὸς τὸ ὁρατὸν ἀφικνεῖσθαι, ἐπ' εὐθείας ἐνεχθήσεται*, *Damianos*, éd. R. SCHÖNE, p. 4. Malheureusement, le raisonnement de Damien souffre beaucoup du fait que dans la suite il prétend que la propagation de notre rayon visuel, comme celle de la lumière dans le rayon de soleil, semble se faire instantanément et en quelque sorte en dehors du temps, *ἡ τῆς ἡμετέρας ὀψεως πρόοδος ἀχρόνως ἐπιτελεῖσθαι δοκεῖ*, *ibid.*, p. 16. Damien aurait évité cette faute, s'il avait appliqué le principe d'économie à la dépense de matière ignée dans la réalisation physique des rayons au lieu de l'appliquer au temps de propagation.

Mais la nouvelle conception de la droite comme ligne géodésique de l'espace transformait maintenant aussi la définition la plus ancienne de la droite, par la *τάσις*, en une proposition de physique. On ne dira plus désormais, confondant l'objet géométrique et le moyen pour le réaliser, que la droite est un fil tendu, mais l'image du fil tendu deviendra l'illustration de ce théorème de physique qu'un corps flexible et inextensible, soumis à une tension, réagit contre cette tension en occupant le moins de place possible entre deux de ces points.

L'initiative d'Archimède, qui fait ainsi apparaître désormais la *τάσις* à son tour comme un phénomène soumis au principe d'économie et apparenté, de ce fait, aux phénomènes de la lumière et de la vue, a sans doute contribué à répandre l'image de la tension dans la littérature optique avec la fréquence que nous avons vue plus haut. Elle présentait pour les théoriciens de l'optique géométrique l'avantage de ne rien présumer sur les représentations précises, à l'échelle de l'imperceptible, sur lesquelles les partisans des différentes écoles entendaient fonder les phénomènes optiques observables. Elle s'appliquait tout aussi bien aux flux matériels qui sont le substratum de ces phénomènes chez Empédocle, chez les atomistes et chez Platon, qu'à la perturbation du milieu par laquelle Aristote explique la lumière et la vue. Elle pouvait impliquer aussi bien la notion d'une *δαπάνη* minima en matière ignée que celle de la brachistochrone.

La représentation de la droite inventée par Archimède est donc la plus parfaite de celles que l'antiquité nous a léguées. Le Syracusain a eu le génie de voir que le principe d'économie, lié chez ses prédécesseurs à la réalisation matérielle d'une figure géométrique, était applicable à l'espace lui-même, et que la notion de ligne droite était parfaitement claire par cette représentation du chemin le plus court ou de la distance minima entre deux points. C'est un fait remarquable de l'histoire de la pensée scientifique que la définition la plus abstraite, la plus immatérielle de la droite a été trouvée non pas par Platon ni par les partisans de l'idéalisme géométrique, Euclide et ses disciples, mais par l'homme qui fut chez les Grecs le défenseur le plus résolu de l'application de la science à la réalité matérielle et le créateur de la mécanique rationnelle.

(à suivre)