

CIN
NUMER 155253 pag
Riquier, C.
1893

DE L'IDÉE DE NOMBRE

CONSIDÉRÉE COMME FONDAMENT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Αὐτὸ ὁ Ἀρχηγὸς γεωμετρικῶς.

1. Les spéculations mathématiques sont de deux sortes : les unes, réductibles à la seule notion de nombre entier, constituent dans leur ensemble la science du Nombre ou *Analyse mathématique*; les autres, quel qu'en soit l'objet, constituent dans leur ensemble les *Mathématiques appliquées* : la Géométrie, la Mécanique, la Physique mathématique sont les branches les plus importantes des Mathématiques appliquées.

En considérant sous leur véritable jour les extensions successives que recoit l'idée de nombre dans l'Analyse mathématique, on conçoit assez facilement que l'Analyse tout entière puisse, comme nous venons de le dire, se ramener à une seule et même notion fondamentale. Faute d'une exposition détaillée, que nous ne pouvons évidemment développer ici, nous nous bornerons à indiquer sommairement les traits essentiels de cette généralisation progressive. Nous examinerons ensuite ce que l'on doit penser des Mathématiques appliquées.

2. Nous nommerons *expression fractionnaire* ou *fraction* la simple

1. Ce mémoire, terminé des le mois de décembre 1892, a été adressé à la *Revue de Métaphysique et de Morale* dans les premiers jours du mois de janvier 1893.
2. Contrairement à l'usage, je considère la Géométrie comme une science appliquée; j'expose d'ailleurs plus loin les raisons de cette manière de voir.
3. Les considérations résumées dans les n^{os} 2, 3, 4, 5, concernant l'extension progressive de l'idée de nombre, ont été développées par M. Méray dans diverses publications, dont voici les titres :

Les fractions et les quantités négatives (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1890);

Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression « nombre incommensurable », et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1887);

Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale, chap. I.

La partie la plus importante de cette même question a été également traitée

association, dans un ordre déterminé, de deux entiers dont le premier s'appelle *numérateur*, et le second, essentiellement différent de zéro, *dénominateur*. La fraction qui a pour numérateur n et pour dénominateur d sera désignée par le symbole $\{n, d\}$.

Deux expressions fractionnaires, $\{n', d'\}$, $\{n'', d''\}$, seront dites de même *valeur*, si les produits entiers $n' d''$, $n'' d'$ sont égaux entre eux. On démontre sans peine : 1^o que deux fractions équivalentes à une même troisième sont équivalentes entre elles; 2^o que la formule générale des expressions fractionnaires équivalentes à une expression donnée $\{n, d\}$ est $\{v_1, \delta d\}$, où v, δ désignent les quotients de n, d par leur plus grand commun diviseur, et δ un entier arbitraire (différent de zéro).

Les diverses expressions fractionnaires qui ont pour numérateur l'entier zéro sont toutes équivalentes entre elles sans l'être à aucune autre, et l'on convient de dire que leur valeur commune est *nulle*.

Considérons deux expressions fractionnaires dont les valeurs soient inégales, adjoignons par la pensée à chacune d'elles toutes les expressions qui lui équivalent, et désignons par G_1, G_2 les deux groupes ainsi obtenus. Si dans ces groupes respectifs on choisit à volonté deux expressions,

$$\{n_1, d_1\}, \{n_2, d_2\},$$

il est facile de se convaincre que l'entier $n_1 d_2$, forcément différent de l'entier $n_2 d_1$, lui est ou constamment supérieur, ou constamment inférieur, indépendamment du choix opéré dans les groupes G_1, G_2 ; suivant qu'on se trouvera placé dans l'un ou dans l'autre cas, on dira que la valeur commune des expressions du premier groupe est *supérieure* ou *inférieure* à la valeur commune des expressions du second. On établit d'ailleurs fort aisément que si une première valeur est supérieure à une seconde, et celle-ci supérieure à une troisième, la première est supérieure à la troisième.

Notre définition de l'équivalence nous fournit de la manière la plus simple les diverses solutions du problème suivant : construire la

par M. Kronecker, de Berlin, qui ramène la notion de nombre irrationnel à celle de nombre rationnel; le point de vue adopté par M. Méray me semble toutefois préférable, et je me suis efforcé de l'améliorer encore, en montrant dans un sens qui m'a paru avantageux la définition des fractions arithmétiques, celle de l'équivalence des variantes qualifiées, la notion de valeur infinitésimale, etc.

DE L'IDÉE DE NOMBRE

CONSIDÉRÉE COMME FONDEMENT DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ¹

Ἄξις ὁ Ἀριθμὸς γεωμετρεῖ.

1. Les spéculations mathématiques sont de deux sortes : les unes, réductibles à la seule notion de nombre entier, constituent dans leur ensemble la science du Nombre ou *Analyse mathématique*; les autres, quel qu'en soit l'objet, constituent dans leur ensemble les *Mathématiques appliquées* : la Géométrie, la Mécanique, la Physique mathématique sont les branches les plus importantes des Mathématiques appliquées ².

En considérant sous leur véritable jour les extensions successives que reçoit l'idée de nombre dans l'Analyse mathématique, on conçoit assez facilement que l'Analyse tout entière puisse, comme nous venons de le dire, se ramener à une seule et même notion fondamentale. Faute d'une exposition détaillée, que nous ne pouvons évidemment développer ici, nous nous bornerons à indiquer sommairement les traits essentiels de cette généralisation progressive.

Nous examinerons ensuite ce que l'on doit penser des Mathématiques appliquées.

2 ³. Nous nommerons *expression fractionnaire* ou *fraction* la simple

1. Ce mémoire, terminé dès le mois de décembre 1892, a été adressé à la *Revue de Métaphysique et de Morale* dans les premiers jours du mois de janvier 1893.

2. Contrairement à l'usage, je considère la Géométrie comme une science appliquée; j'expose d'ailleurs plus loin les raisons de cette manière de voir.

3. Les considérations résumées dans les n^{os} 2, 3, 4, 5, concernant l'extension progressive de l'idée de nombre, ont été développées par M. Méray dans diverses publications, dont voici les titres :

Les fractions et les quantités négatives (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1890);

Sur le sens qu'il convient d'attacher à l'expression « nombre incommensurable », et sur le critérium de l'existence d'une limite pour une quantité variable de nature donnée (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1887);

Nouveau Précis d'Analyse infinitésimale, chap. I.

La partie la plus importante de cette même question a été également traitée

association, dans un ordre déterminé, de deux entiers dont le premier s'appelle *numérateur*, et le second, essentiellement différent de zéro, *dénominateur*. La fraction qui a pour numérateur n et pour dénominateur d sera désignée par le symbole $\{ n, d \}$.

Deux expressions fractionnaires, $\{ n', d' \}$, $\{ n'', d'' \}$, seront dites de même *valeur*, si les produits entiers $n' d''$, $n'' d'$ sont égaux entre eux. On démontre sans peine : 1° que deux fractions équivalentes à une même troisième sont équivalentes entre elles ; 2° que la formule générale des expressions fractionnaires équivalentes à une expression donnée $\{ n, d \}$ est $\{ \nu t, \delta t \}$, où ν , δ , désignent les quotients de n , d par leur plus grand commun diviseur, et t un entier arbitraire (différent de zéro).

Les diverses expressions fractionnaires qui ont pour numérateur l'entier zéro sont toutes équivalentes entre elles sans l'être à aucune autre, et l'on convient de dire que leur valeur commune est *nulle*.

Considérons deux expressions fractionnaires dont les valeurs soient inégales, adjoignons par la pensée à chacune d'elles toutes les expressions qui lui équivalent, et désignons par G_1 , G_2 les deux groupes ainsi obtenus. Si dans ces groupes respectifs on choisit à volonté deux expressions,

$$\{ n_1, d_1 \}, \{ n_2, d_2 \},$$

il est facile de se convaincre que l'entier $n_1 d_2$, forcément différent de l'entier $n_2 d_1$, lui est ou constamment supérieur, ou constamment inférieur, indépendamment du choix opéré dans les groupes G_1 , G_2 : suivant qu'on se trouvera placé dans l'un ou dans l'autre cas, on dira que la valeur commune des expressions du premier groupe est *supérieure* ou *inférieure* à la valeur commune des expressions du second. On établit d'ailleurs fort aisément que si une première valeur est supérieure à une seconde, et celle-ci supérieure à une troisième, la première est supérieure à la troisième.

Notre définition de l'équivalence nous fournit de la manière la plus simple les diverses solutions du problème suivant : construire h

par M. Kronecker, de Berlin, qui ramène la notion de nombre irrationnel à celle de nombre rationnel ; le point de vue adopté par M. Méray me semble toutefois préférable, et je me suis efforcé de l'améliorer encore, en modifiant dans un sens qui m'a paru avantageux la définition des fractions arithmétiques, celle de l'équivalence des variantes qualifiées, la notion de valeur infinitésimale, etc.

expressions fractionnaires de même dénominateur, dont les valeurs soient données. Cela posé, si l'on désigne par

$$\{ p, k \}, \{ q, k \}, \dots, \{ r, k \}$$

les h expressions fractionnaires dont l'ensemble constitue une solution quelconque du problème dont il s'agit, l'expression fractionnaire

$$\{ (p + q + \dots + r), k \},$$

déduite des précédentes par l'addition des numérateurs, varie, il est vrai, avec la solution considérée, mais garde une valeur constante, qui est, par définition même, la *somme* des valeurs proposées.

Si, des valeurs fractionnaires quelconques étant données, on en considère des expressions respectives quelconques

$$\{ a, b \}, \{ c, d \}, \dots, \{ l, m \},$$

l'expression fractionnaire

$$\{ (a c \dots l), (b d \dots m) \},$$

déduite des précédentes par la multiplication des termes semblables, varie encore avec les expressions choisies pour les valeurs proposées, mais garde une valeur constante, qui est, par définition même, le *produit* des valeurs proposées.

Quant à la *soustraction* et à la *division* des valeurs fractionnaires, nous les définirons, suivant l'habitude, comme les opérations inverses de l'addition et de la multiplication. Retrancher d'une valeur donnée une autre valeur donnée, c'est trouver une troisième valeur qui, ajoutée à la seconde, régénère la première. Diviser une valeur donnée par une autre valeur donnée, c'est trouver une troisième valeur qui, multipliée par la seconde, régénère la première.

En résumé, le point de vue purement arithmétique auquel nous venons de nous placer conduit exactement aux mêmes règles que le point de vue physico-arithmétique auquel on se place presque toujours.

Finalement, et bien qu'en fait la notion de fraction ait sa source incontestable dans la recherche d'un procédé commode pour mesurer les grandeurs concrètes, on peut lui assigner, comme origine logique, la recherche d'une commodité analytique. Effectivement, si dans le *monde des valeurs entières*, l'addition et la multiplication sont des opérations toujours possibles, il n'en est pas de même, à beaucoup près, de la soustraction et de la division : il n'existe, par exemple, aucun entier qui, ajouté à 4, reproduise 3 ; il n'existe non plus aucun

entier qui, multiplié par 5, reproduise 7. Or il résulte des règles posées ci-dessus que, dans le *monde des valeurs fractionnaires*, cette impossibilité éventuelle n'existe plus quand il s'agit de la division ¹. D'autre part, il résulte de ces mêmes règles que si l'on a à effectuer sur des valeurs données, dans le monde des entiers, une suite quelconque d'opérations (toutes possibles), l'entier qui en résulte finalement peut être obtenu à l'aide d'un artifice consistant : 1° à se transporter du monde des valeurs entières dans celui des valeurs fractionnaires, et à substituer respectivement aux entiers donnés les valeurs des fractions ayant pour numérateurs ces entiers mêmes et pour dénominateur l'unité ; 2° à effectuer, au lieu des calculs indiqués sur les entiers primitifs, les calculs parallèles sur les valeurs fractionnaires ainsi obtenues ; 3° à prendre le numérateur du résultat, préalablement réduit à sa plus simple expression.

Supposons maintenant qu'on ait à résoudre une question quelconque ressortissant au monde des entiers, et admettons, pour fixer les idées, que l'énoncé de cette question se traduise analytiquement par un groupe d'équations reliant certains entiers connus à d'autres entiers inconnus : on peut, d'après ce qui précède, assimiler tacitement ces diverses valeurs entières à autant de valeurs fractionnaires, puis chercher les solutions du nouveau système ainsi obtenu (ou plutôt celles d'entre elles dont les dénominateurs deviennent égaux à l'unité après réduction). *Toute question ressortissant au monde des valeurs entières peut donc se ramener à une question ressortissant au monde des valeurs fractionnaires* ; la plupart du temps elle se trouve ainsi généralisée, et l'on s'assure en tous cas l'avantage de *ne jamais être arrêté dans les transformations analytiques par des divisions impossibles*.

3. Voici comment il convient de définir les quantités positives et négatives.

A toute valeur fractionnaire non nulle on fait correspondre *deux* valeurs, que l'on qualifie l'une de *positive*, l'autre de *négative* ; à la valeur nulle on fait correspondre *une seule* valeur, que l'on qualifie de *neutre* : les diverses *valeurs qualifiées* ainsi obtenues sont, par convention, toutes distinctes entre elles. Deux valeurs qualifiées, l'une positive, l'autre négative, correspondant à une même *valeur absolue*, sont dites *opposées* ; la valeur neutre est considérée comme étant son

1. Excepté toutefois si le diviseur est nul.

opposée à elle-même. L'*addition* et la *multiplication* des valeurs qualifiées se définissent par des règles conventionnelles, dans le détail desquelles il est inutile que nous entrions; la *soustraction* et la *division* sont les opérations respectivement inverses des précédentes. Enfin, la valeur qualifiée a , distincte de b , lui est dite *supérieure* ou *inférieure*, suivant que la différence $a - b$ est positive ou négative : on démontre sans peine que si une première valeur qualifiée est supérieure à une seconde, et celle-ci supérieure à une troisième, la première est supérieure à la troisième.

On peut assigner aux quantités qualifiées une origine analogue à celle des fractions. Effectivement, si, dans le *monde des valeurs fractionnaires*, il se présente souvent des soustractions impossibles, cette impossibilité éventuelle se trouve entièrement supprimée dans le *monde des valeurs qualifiées*, en vertu des règles conventionnelles qui président à leur calcul. D'autre part, il résulte de ces mêmes règles que si l'on a à effectuer sur des valeurs données, dans le monde des fractions, une suite quelconque d'opérations (toutes possibles), le résultat cherché peut s'obtenir à l'aide d'un artifice consistant : 1° à se transporter du monde des valeurs fractionnaires dans celui des valeurs qualifiées, et à substituer aux valeurs absolues données les valeurs positives ou neutres qui leur correspondent respectivement; 2° à effectuer, au lieu des calculs indiqués sur les valeurs absolues primitives, les calculs parallèles sur les valeurs qualifiées qui leur ont été substituées; 3° à prendre la valeur absolue du résultat.

Toute question ressortissant au monde des valeurs absolues peut donc se ramener à une question ressortissant au monde des valeurs qualifiées; la plupart du temps, elle se trouve ainsi généralisée, et l'on s'assure en tous cas l'avantage de ne jamais être arrêté dans les transformations analytiques par des soustractions impossibles.

4. Nous nommerons *variante qualifiée* une valeur qualifiée variable dépendant de certains *indices*, c'est-à-dire de certains entiers indéterminés auxquels on peut attribuer tous les systèmes possibles de valeurs > 0 ¹.

Une variante qualifiée $a_{m, n, \dots}$ dépendant des indices $m, n, \dots$ est dite *infinitement petite*, si à toute valeur positive ϵ on peut faire cor-

1. Par exemple, le m^{me} terme d'une progression arithmétique ou géométrique dont le premier terme et la raison sont donnés, la somme des m premiers termes de cette progression, leur produit, etc., sont autant de variantes dont chacune dépend de l'indice m . Souvent une variante dépend à la fois de plusieurs indices.

respondre des entiers déterminés $\mu, \nu, \dots$ tels, que les relations *simultanées*

$$m \geq \mu, n \geq \nu, \dots$$

entraînent comme conséquence nécessaire la relation

$$\text{val. abs. } a_{m, n, \dots} < \text{val. abs. } \varepsilon.$$

En d'autres termes, une variante qualifiée est dite *infiniment petite*, si, à partir de valeurs suffisamment grandes de tous ses indices, sa valeur absolue reste constamment inférieure à celle d'une quantité positive donnée.

Une variante qualifiée $a_{m, n, \dots}$ dépendant des indices $m, n, \dots$ est dite *convergente*, si la variante qualifiée

$$a_{m'', n'', \dots} - a_{m', n', \dots}$$

dépendant des indices $m', n', \dots, m'', n'', \dots$, est *infiniment petite*. Telles sont, en particulier : 1° une variante *infiniment petite*; 2° une variante *immobile*, c'est-à-dire qui garde toujours la même valeur qualifiée, indépendamment des valeurs entières que l'on attribue aux indices.

Une variante qualifiée est dite *divergente* lorsqu'elle n'est pas convergente.

Deux variantes qualifiées

$$a_{m, \dots, p, \dots}, b_{n, \dots, p, \dots},$$

pouvant avoir un certain nombre d'indices communs, $p, \dots$, sont dites de même *valeur infinitésimale*, si la variante

$$b_{n, \dots, p', \dots} - a_{m, \dots, p', \dots}$$

dépendant des indices $m, \dots, n, \dots, p', \dots, p'', \dots$, est *infiniment petite*.

On tire de ces définitions d'importantes conséquences, que nous allons énumérer.

Deux variantes qualifiées équivalentes à une même troisième sont équivalentes entre elles.

Deux variantes qualifiées équivalentes entre elles sont nécessairement convergentes.

Toute variante convergente se transforme en une équivalente par la simple addition d'un *infiniment petit*, et définit dès lors quelque valeur infinitésimale (on évitera de confondre la *valeur infinitésimale* d'une variante avec ses *valeurs actuelles*, obtenues en attribuant aux indices des valeurs particulières quelconques).

Une variante divergente n'a pas de valeur infinitésimale, car elle

ne peut satisfaire, vis-à-vis d'aucune autre variante ni seulement d'elle-même, à notre définition de l'équivalence.

Toutes les variantes infiniment petites sont équivalentes entre elles, sans l'être à aucune autre variante convergente.

Si l'on ne considère une variante convergente non infiniment petite qu'à partir de valeurs suffisamment grandes de tous ses indices, ses valeurs actuelles possèdent la double propriété : 1° de conserver des valeurs absolues constamment supérieures à celle d'une quantité positive convenablement choisie ; 2° de conserver une qualification constante, qui est la même pour la variante dont il s'agit et pour toutes ses équivalentes.

Si l'on désigne par

(1) $A, B, \dots, L$

des valeurs infinitésimales données, et par

(2) $a, b, \dots, l$

des expressions quelconques de ces valeurs, chacune des expressions $a, b, \dots, l$ est une variante convergente dépendant de certains indices, et toute combinaison déterminée Ω d'additions, soustractions et multiplications à exécuter sur $a, b, \dots, l$ fournit une nouvelle variante ayant pour indices tous ceux des indices de $a, b, \dots, l$ qui sont distincts entre eux. Cela posé, la variante ainsi engendrée est convergente, et sa valeur infinitésimale est indépendante des diverses manières dont peuvent être choisies les expressions (2) des valeurs données (1); cette valeur infinitésimale constante est, par définition, le résultat de l'opération Ω exécutée sur les valeurs données.

Si l'on désigne par A, B deux valeurs infinitésimales données, dont la seconde ne soit pas la valeur commune aux diverses variantes infiniment petites, si l'on désigne en outre par a, b , deux expressions quelconques de ces valeurs, le quotient de a par b est une variante convergente dont la valeur infinitésimale ne dépend pas du choix que l'on peut faire parmi les expressions diverses des valeurs données A, B ; cette valeur infinitésimale constante est, par définition, le quotient de A par B .

La valeur infinitésimale qui appartient exclusivement aux diverses variantes infiniment petites sera dite *téléo-neutre*. Toute autre valeur infinitésimale sera dite *téléo-positive* ou *téléo-négative*, suivant que les valeurs actuelles de l'une quelconque de ses expressions finissent par rester constamment positives ou constamment négatives.

tives. De deux valeurs infinitésimales distinctes, la première sera dite *supérieure* ou *inférieure* à la seconde, suivant que la différence obtenue en retranchant la seconde de la première est téléo-positive ou téléo-négative : on démontre d'ailleurs sans peine que si une première valeur infinitésimale est supérieure à une seconde, et celle-ci supérieure à une troisième, la première est supérieure à la troisième. On nommera *opposée* d'une valeur donnée celle qui, par son addition avec la première, fournit une somme téléo-neutre. Enfin, une valeur infinitésimale sera dite *commensurable* ou *incommensurable*, suivant qu'elle admettra ou non quelque variante immobile au nombre de ses expressions : à toute valeur qualifiée correspond ainsi une valeur infinitésimale commensurable, et réciproquement.

L'extraction de la racine q^{me} d'une quantité positive peut être considérée comme l'origine logique des quantités infinitésimales. Si, étant donnée une valeur positive (invariable), on se propose d'en trouver une autre qui, par son élévation à la puissance q , puisse régénérer la première, le problème, ainsi posé, n'admet de solution qu'exceptionnellement, et pour un choix tout spécial de la valeur positive sur laquelle on doit opérer. Mais, dans le *monde des valeurs infinitésimales*, le problème change entièrement d'aspect, et l'extraction de la racine q^{me} d'une valeur positive, au lieu d'être impossible dans l'immense majorité des cas, devient au contraire toujours possible. On peut effectivement démontrer qu'étant donnée une valeur infinitésimale non téléo-négative, il existe une valeur de même nature, et une seule, régénérant la proposée par son élévation à la puissance q .

D'un autre côté, si l'on a à effectuer sur des valeurs qualifiées données une suite quelconque d'opérations (toutes possibles), le résultat peut s'obtenir à l'aide d'un artifice consistant : 1° à se transporter du *monde des valeurs qualifiées* dans le *monde des valeurs infinitésimales*, et à substituer aux valeurs qualifiées données les valeurs infinitésimales commensurables qui leur correspondent respectivement ; 2° à effectuer, au lieu des calculs indiqués sur ces valeurs qualifiées, les calculs parallèles sur les valeurs infinitésimales qui leur ont été substituées ; 3° à repasser du résultat, forcément commensurable, à la valeur qualifiée correspondante.

Toute question ressortissant au monde des valeurs qualifiées peut donc se ramener à une question ressortissant au monde des valeurs infinitésimales ; la plupart du temps, elle se trouve ainsi généralisée,

et l'on s'assure en tous cas l'avantage de *ne jamais être arrêté dans les transformations analytiques par l'impossibilité d'extraire la racine d'une quantité positive.*

5. Une *valeur imaginaire* est la simple association, dans un ordre déterminé, de deux valeurs infinitésimales que l'on nomme respectivement son *premier* et son *second élément*. Sans entrer dans le détail des règles conventionnelles qui président au calcul des imaginaires, nous nous bornerons à en signaler cette conséquence, que si l'on a effectuer sur des nombres infinitésimaux donnés une suite quelconque d'opérations (toutes possibles), le nombre infinitésimal qui en résulte finalement peut être obtenu à l'aide d'un artifice consistant : 1° à se transporter du *monde des valeurs infinitésimales* dans le *monde des valeurs imaginaires*, et à substituer aux nombres donnés des valeurs imaginaires ayant pour premiers éléments les nombres dont il s'agit avec des seconds éléments téléo-neutres; 2° à effectuer, au lieu des calculs indiqués sur les nombres primitifs, les calculs parallèles sur les imaginaires ainsi obtenues; 3° à prendre le premier élément de l'imaginaire résultante.

Toute question ressortissant au monde des valeurs infinitésimales peut donc se ramener à une question ressortissant au monde des valeurs imaginaires; la plupart du temps, elle se trouve ainsi généralisée, et l'on s'assure en tous cas l'avantage de ne jamais être arrêté dans les transformations analytiques par l'impossibilité de décomposer un polynôme entier à une variable en facteurs du premier degré.

6. Il conviendrait peut-être de nommer *Analyse infinitésimale* l'ensemble des théories ressortissant au monde des valeurs infinitésimales ou de leurs accouplements en imaginaires; cette partie de l'Analyse comprendrait alors essentiellement, outre le calcul différentiel et intégral, un certain nombre de théories élémentaires, telles que le calcul des radicaux arithmétiques ou la résolution de l'équation du second degré. Conformément aux observations finales des n°s 2, 3, 4, 5, rien n'empêche de recourir à des moyens tirés de l'Analyse infinitésimale pour traiter une question analytique dont l'objet même ne ressortirait pas au monde infinitésimal.

Après avoir montré, suivant notre dessein, comment les théories analytiques sont basées sur la seule notion du nombre entier, il nous reste à rechercher la véritable nature des Sciences mathématiques appliquées; quelques exemples, pris parmi les plus simples, suffiront à nous éclairer sur ce point.

7. Une proposition bien connue de géométrie élémentaire nous apprend que si les trois côtés d'un triangle rectangle sont évalués en nombres au moyen d'une unité commune, le carré du nombre qui mesure l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des nombres qui mesurent les deux côtés de l'angle droit. La proposition, ainsi formulée, semble ne pouvoir viser que des nombres actuels : le plus habile physicien, disposant des meilleurs instruments, et mesurant avec toute la précision possible les trois côtés de notre triangle, n'en trouvera effectivement jamais d'autres pour en exprimer les longueurs. Pourtant, si tel est bien le sens de l'énoncé, la proposition tombe en défaut dans mainte circonstance : en supposant, par exemple, les deux côtés de l'angle droit respectivement égaux à l'unité de longueur et au double de cette unité, le nombre actuel qui mesure l'hypoténuse devrait avoir pour carré $1 + 4$ ou 5 , ce qui est impossible. Il y a là une contradiction apparente qu'il importe de faire cesser ; mais nous devons, pour y parvenir, examiner préalablement deux questions.

8. Traduction en segments rectilignes des valeurs fractionnaires, qualifiées et infinitésimales.

La première idée qui vient à l'esprit, pour traduire à l'aide d'un segment rectiligne une expression fractionnaire $\{n, d\}$, c'est d'imaginer une demi-droite de longueur indéfinie, sur laquelle on suppose portés bout à bout, à partir de l'origine, n segments égaux à la $d^{\text{ième}}$ partie de l'unité de longueur. En exécutant physiquement l'opération dont il s'agit sur un certain nombre d'expressions fractionnaires, on constate que des expressions équivalentes donnent toujours le même segment rectiligne ; mais il est bien des cas où la possibilité même de cette exécution n'est plus concevable, car, pour une valeur de d suffisamment grande, la $d^{\text{ième}}$ partie de l'unité de longueur semble se réduire à un *point*, c'est-à-dire à une portion d'étendue presque imperceptible.

D'autres procédés sont plus fréquemment praticables : ainsi, en désignant par f une fraction donnée, et par f_m la plus grande fraction de dénominateur m qui ne lui soit pas supérieure, la différence $f - f_m$ est inférieure à $\{1, m\}$, et l'on peut convenir de représenter f à l'aide du segment rectiligne qui correspond à une valeur actuelle, suffisamment éloignée, de la variante fractionnaire f_m .

Dans les limites où ces procédés et autres du même genre sont physiquement exécutables, l'expérience nous permet de constater :

1° qu'à une même valeur fractionnaire correspondent des segments rectilignes d'apparence identique; 2° qu'à deux valeurs fractionnaires dont la première surpasse la seconde, correspondent deux segments rectilignes dont le premier surpasse le second, à moins toutefois qu'une petitesse excessive dans la différence analytique des valeurs ne rende imperceptible la différence physique des segments; 3° que lorsqu'une valeur fractionnaire résulte d'une combinaison additive et soustractive de plusieurs autres, le segment rectiligne correspondant au résultat peut s'obtenir en portant bout à bout, chacun dans le sens voulu, ceux qui correspondent aux diverses fractions combinées, etc. Nous supposerons toujours ces diverses concordances réalisées.

Pour traduire physiquement une valeur qualifiée, on imaginera une droite, indéfinie dans ses deux sens, sur laquelle on supposera porté, à partir d'une origine fixe, le segment rectiligne qui correspond à sa valeur absolue, soit dans tel sens déterminé, soit dans le sens opposé, suivant que la valeur qualifiée qu'il s'agit de représenter est positive ou négative. A toute valeur de cette espèce correspond ainsi un segment affecté de sens, et à toute croissance ou décroissance algébrique de la valeur considérée, un déplacement de l'extrémité du segment dans le sens positif ou négatif, à moins toutefois qu'une petitesse excessive de la variation analytique ne rende imperceptible le déplacement physique dont il s'agit. Lorsqu'une valeur qualifiée résulte d'une combinaison additive et soustractive de plusieurs autres, sa traduction physique peut s'obtenir en portant bout à bout, chacune dans le sens voulu, les longueurs qui correspondent aux valeurs absolues des diverses quantités combinées : pour les quantités positives ajoutées, ou négatives retranchées, les longueurs dont il s'agit doivent être portées dans le sens positif; pour les quantités positives retranchées, ou négatives ajoutées, elles doivent l'être dans le sens négatif.

Enfin, les valeurs infinitésimales elles-mêmes sont susceptibles d'une traduction physique de même nature. Effectivement, on aperçoit sans peine : 1° qu'à partir de valeurs suffisamment grandes des indices, la traduction des valeurs actuelles d'une variante qualifiée infiniment petite semble se réduire à un point; 2° que, sous cette même réserve, la traduction des valeurs actuelles d'une variante convergente conserve une apparence invariable; 3° que, pour deux variantes équivalentes, les apparences invariables auxquelles on

aboutit de part et d'autre sont identiques. Si donc, une valeur infinitésimale étant donnée, on convient de ne considérer chacune de ses expressions qu'à partir de valeurs suffisamment grandes des indices dont elle dépend, les segments rectilignes correspondant aux valeurs actuelles restantes des expressions dont il s'agit n'offrent à l'œil aucune différence perceptible, et ce segment rectiligne unique peut dès lors être considéré comme la traduction physique de la valeur donnée. Les mêmes observations doivent être faites à ce sujet que dans le cas des valeurs qualifiées.

9. Mesure des aires planes à contours rectilignes.

La mesure des aires, planes ou courbes, se ramène indirectement à celle des segments rectilignes; on leur substitue à cet effet des rectangles ayant pour base commune l'unité de longueur, et que l'on puisse regarder comme leur étant respectivement *équivalents*; il ne reste plus alors qu'à mesurer les hauteurs de ces rectangles. Quant à formuler dans un énoncé les conditions de cette équivalence toute physique, cela nous semble tout à fait impossible, et nous nous en abstenons; nous admettrons seulement, à titre de postulats : 1° que si nous sommes conduit, pour telles ou telles raisons, à considérer deux aires comme équivalentes à une même troisième, nous pourrons, sans qu'il faille recourir à des raisons nouvelles, les considérer comme équivalentes entre elles; 2° que si nous sommes conduit, pour telles ou telles raisons, à considérer une aire S comme supérieure à une deuxième S' , et celle-ci comme supérieure ou équivalente à une troisième S'' , nous pourrons, sans qu'il faille recourir à des raisons nouvelles, considérer S comme supérieure à S'' , etc.

Le premier cas qui se présente dans la mesure des aires est celui des aires planes à contours rectilignes, que nous avons actuellement à examiner.

Tout polygone est, comme on sait, décomposable en triangles; tout triangle est décomposable en deux fragments qui, juxtaposés d'une autre manière, le transforment en un parallélogramme de même base et de hauteur moitié moindre; enfin tout parallélogramme non rectangle est décomposable en deux fragments qui, juxtaposés d'une autre manière, le transforment en un rectangle de même base et de même hauteur. Toute aire polygonale équivaut donc à une somme (physique) de rectangles, et nous nous trouvons ainsi ramené à un cas unique. Nous établirons à ce sujet la propo-

sition suivante : *Le rectangle construit sur les segments rectilignes qui correspondent aux deux valeurs téléo-positives A, B, équivaut au rectangle construit sur l'unité de longueur et le segment rectiligne qui correspond au produit A.B* (on suppose essentiellement perceptibles les trois segments dont il s'agit).

A cet effet, nous désignerons par a_m la plus grande valeur commensurable de dénominateur m qui ne soit pas supérieure à A; par b_m la plus grande valeur commensurable de dénominateur m qui ne soit pas supérieure à B; par α_m, β_m les numérateurs respectifs de a_m, b_m ; enfin par θ_m, φ_m le quotient et le reste de la division du produit $\alpha_m \cdot \beta_m$ par m . Nous dirons en outre, pour faciliter le langage, qu'un rectangle est construit sur deux nombres, s'il a pour dimensions les segments rectilignes qui correspondent physiquement à ces deux nombres.

Cela posé, le rectangle construit sur a_m et b_m , c'est-à-dire sur

$$\{\alpha_m, m\} \text{ et } \{\beta_m, m\},$$

peut se décomposer en $\alpha_m \cdot \beta_m$ carrés égaux construits sur la $m^{\text{ième}}$ partie de l'unité de longueur, et la relation

$$(3) \quad \alpha_m \cdot \beta_m = m \cdot \theta_m + \varphi_m,$$

où l'on a

$$(4) \quad \varphi_m < m,$$

montre qu'une juxtaposition convenable des carrés dont il s'agit le transforme en une somme de deux autres rectangles respectivement construits sur le couple

$$(5) \quad 1, \{\theta_m, m\}$$

et sur le couple

$$(6) \quad \{\varphi_m, m\}, \{1, m\}.$$

Donnons maintenant à m des valeurs sans cesse croissantes. Les variantes a_m, b_m ayant pour valeurs infinitésimales A, B (il serait facile de le prouver), le rectangle construit sur a_m et b_m finit par devenir physiquement identique au rectangle construit sur A et B. Les relations (3), (4) donnent d'ailleurs

$$\begin{aligned} \{\alpha_m, m\} \cdot \{\beta_m, m\} &= \{\theta_m, m\} + \{\varphi_m, m^2\}, \\ \{\varphi_m, m^2\} &< \{1, m\}, \end{aligned}$$

d'où résulte que la variante $\{\theta_m, m\}$ a pour valeur infinitésimale A.B; et dès lors, le rectangle construit sur le couple (5) finit par devenir physiquement identique au rectangle construit sur 1 et A.B.

Enfin, le rectangle construit sur le couple (6) a pour base un segment moindre que l'unité de longueur, et pour hauteur la $m^{\text{ième}}$ partie de cette unité; il finit donc par devenir physiquement nul. On en déduit immédiatement la proposition à démontrer.

Si, au lieu d'un seul rectangle, on en considérait un nombre quelconque, trois par exemple, respectivement construits sur les couples de valeurs téléo-positives A et B, C et D, E et F, leur ensemble équivaldrait à un rectangle unique construit sur les valeurs 1 et $A.B + C.D + E.F$.

10. Désignons maintenant par A, B, C trois valeurs téléo-positives vérifiant la relation

$$A^2 + B^2 = C^2,$$

et par σ_A , σ_B , σ_C les segments rectilignes, supposés perceptibles, qui correspondent physiquement à ces trois nombres. Il résulte du numéro précédent que le carré construit sur σ_C équivaut à l'ensemble des carrés construits sur σ_A , σ_B : car ces deux surfaces équivalent à un même rectangle ayant pour base l'unité de longueur, et pour hauteur le segment rectiligne qui correspond à la valeur infinitésimale $A^2 + B^2$ ou C^2 . Considérant d'autre part le triangle rectangle qui a pour côtés de l'angle droit σ_A , σ_B , et construisant un carré sur chacun de ces côtés et l'hypoténuse, on démontre de la manière la plus simple que le dernier carré équivaut à l'ensemble des deux premiers, et par suite au carré construit sur σ_C . On ne fera d'ailleurs aucune difficulté d'admettre que deux carrés équivalents doivent avoir le même côté. On observera enfin que tous nos raisonnements sont indépendants du choix de l'unité de longueur, sous la réserve expresse que les segments σ_A , σ_B , σ_C , restent perceptibles, et l'énoncé de la célèbre proposition pourra dès lors se formuler comme il suit :

Si trois valeurs infinitésimales A, B, C, vérifient la relation $A^2 + B^2 = C^2$, les segments rectilignes, supposés perceptibles, qui en sont les traductions physiques, nous paraissent, quelle que soit d'ailleurs l'unité, respectivement superposables aux deux côtés de l'angle droit et à l'hypoténuse de quelque triangle rectangle.

11. Il importe, en vue de ce qui va suivre, de fixer avec la dernière précision le sens analytique du mot *limite*, comme aussi d'en traduire physiquement la définition.

Nous nommerons à cet effet *variante infinitésimale* une expression de tous points semblable à une variante qualifiée, si ce n'est qu'à

chaque système de valeurs particulières des indices correspond une valeur infinitésimale au lieu d'une valeur qualifiée.

Considérons une variante infinitésimale $v_{m, n, \dots}$ dépendant des indices $m, n, \dots$ et désignons par $\varepsilon_{m, n, \dots}$ une variante qualifiée aux mêmes indices, arbitrairement choisie sous les seules conditions d'être infiniment petite et de ne jamais atteindre la valeur neutre. A un système quelconque de valeurs particulières de $m, n, \dots$ correspond pour $v_{m, n, \dots}$ une valeur infinitésimale susceptible de diverses expressions : on choisira, suivant telle ou telle loi, quelque'une des expressions dont il s'agit, et à la variante qualifiée convergente a , ainsi choisie, on fera correspondre, suivant telle ou telle loi, une valeur qualifiée dont la différence à a finisse par devenir moindre en valeur absolue que $\varepsilon_{m, n, \dots}$ à partir de valeurs suffisamment grandes de tous les indices de a : cette valeur qualifiée, qui change avec les valeurs attribuées à $m, n, \dots$, engendre une variante qualifiée $b_{m, n, \dots}$ dépendant des mêmes indices que la variante infinitésimale proposée. Or le choix variable des éléments arbitraires que comporte l'opération précédente fournit diverses variantes qualifiées analogues à $b_{m, n, \dots}$ lesquelles sont forcément, comme on le démontre, ou *toutes équivalentes*, ou *toutes divergentes*. Cela étant, on dira que la variante infinitésimale proposée est *convergente* dans le premier cas, *divergente* dans le second ; dans le cas de la convergence, on dira en outre qu'elle *a pour limite* (ou qu'elle *tend vers*) la valeur infinitésimale commune aux variantes qualifiées telles que $b_{m, n, \dots}$.

Passons à l'interprétation physique. En attribuant à $m, n, \dots$ des valeurs particulières déterminées, on obtient respectivement pour $v_{m, n, \dots}$, $b_{m, n, \dots}$, $\varepsilon_{m, n, \dots}$ trois valeurs particulières dont la première est infinitésimale (4), et les deux autres qualifiées (3), mais à chacune desquelles correspond, comme nous l'avons vu (8), un certain segment rectiligne porté (dans un sens ou dans l'autre) sur une droite indéfinie à partir d'une origine fixe ; d'ailleurs, et par la manière même dont la seconde a été déterminée, la distance entre les extrémités finales des deux premiers segments rectilignes nous apparaît comme physiquement inférieure au troisième. Or les variantes qualifiées $b_{m, n, \dots}$, $\varepsilon_{m, n, \dots}$ étant, l'une convergente et l'autre infiniment petite, on voit qu'à partir de valeurs suffisamment grandes de $m, n, \dots$ le troisième segment devient imperceptible, tandis que le second conserve une apparence invariable : donc, à partir des mêmes

valeurs, le premier conserve une apparence invariable et identique au second. En d'autres termes, les segments rectilignes qui traduisent les diverses valeurs particulières d'une variante convergente infinitésimale aux indices $m, n, \dots$ coïncident, pour $m, n, \dots$ suffisamment grands, avec le segment rectiligne qui traduit la valeur de sa limite.

12. Nous plaçant désormais dans le monde des valeurs infinitésimales, nous nommerons *intervalle de* x_0 à X l'ensemble des valeurs qui ne sont ni inférieures à la plus petite, ni supérieures à la plus grande des deux valeurs données x_0, X ; nous nommerons en outre *amplitude* de cet intervalle la différence (téléo-positive) entre les deux valeurs extrêmes. Si à toute valeur x faisant partie de l'intervalle on fait correspondre, suivant quelque loi déterminée, une valeur $f(x)$, cette loi définit une *fonction* de la *variable* x dans l'intervalle considéré. La fonction $f(x)$ sera dite *continue* dans l'intervalle de x_0 à X , si, la variante infinitésimale v étant arbitrairement choisie sous les seules conditions d'être constamment située dans l'intervalle et de tendre vers quelque valeur a de cet intervalle, la variante $f(v)$ a pour limite $f(a)$.

On peut démontrer en toute rigueur la proposition suivante, que nous allons d'abord énoncer, et dont nous donnerons ensuite une interprétation physique : *Si la fonction $f(x)$ est continue dans l'intervalle de x_0 à X (où l'on suppose $x_0 < X$), on peut, une valeur téléo-positive α étant donnée, assigner une valeur téléo-positive β telle, que les relations simultanées*

$$\begin{aligned} x_0 &\leq x' \leq X, \\ x_0 &\leq x'' \leq X, \\ \text{opp. } \beta &< x'' - x' < \beta^1, \end{aligned}$$

entraînent la double relation

$$\text{opp. } \alpha < f(x'') - f(x') < \alpha.$$

En désignant par x une valeur quelconque appartenant à l'intervalle de x_0 à X , et par y la valeur correspondante de notre fonction, il est facile de représenter graphiquement le couple des valeurs x, y : à cet effet, on tracera dans un plan deux axes rectangulaires Ox, Oy , dont chacun soit indéfini dans deux sens opposés; sur ces deux axes on portera respectivement à partir du point O , et chaque fois dans

1. Nous désignons par les notations opp. β , opp. α , etc., les valeurs infinitésimales respectivement opposées à β , α , etc.

le sens voulu, les deux segments rectilignes OA, OB qui traduisent physiquement les valeurs infinitésimales x, y ; on mènera enfin par le point A une parallèle à Oy, par le point B une parallèle à Ox, et le point M où se coupent ces deux droites traduira à la fois, par sa seule position relativement aux axes, et la valeur x attribuée à la variable et la valeur correspondante y de la fonction.

Cela posé, désignons par ε un nombre téléo-positif assez petit pour que le segment rectiligne correspondant ait une étendue imperceptible; puis par θ un nombre téléo-positif inférieur à ε , et tel que les relations simultanées

$$\begin{aligned} x_0 &\leq x' \leq X, \\ x_0 &\leq x'' \leq X, \\ \text{opp. } \theta &< x'' - x' < \theta, \end{aligned}$$

entraînent la double relation

$$\text{opp. } \varepsilon < f(x'') - f(x') < \varepsilon;$$

intercalons alors, de x_0 à X , certaines valeurs choisies à volonté sous la seule condition que, dans la suite résultante

$$(7) \quad x_0, x_1, x_2, \dots, x_r, X,$$

formée de termes sans cesse croissants, la différence d'un terme au suivant soit toujours moindre que θ ; désignons enfin

par x_k, x_{k+1} , deux valeurs consécutives quelconques de la suite (7);

par y_k, y_{k+1} , les valeurs correspondantes de la fonction;

par $Oa_k, Oa_{k+1}, Ob_k, Ob_{k+1}$, les traductions physiques de x_k, x_{k+1} sur Ox, et de y_k, y_{k+1} sur Oy;

par μ_k, μ_{k+1} les quatrièmes sommets des deux rectangles respectivement déterminés par le groupe des trois points O, a_k, b_k et par celui des trois points O, a_{k+1}, b_{k+1} .

Il résulte de la manière même dont les nombres ε, θ ont été choisis, que les points a_k, a_{k+1} de Ox nous paraissent coïncider l'un avec l'autre, et que le même phénomène a lieu pour les points b_k, b_{k+1} de Oy; on peut donc l'affirmer également des points μ_k, μ_{k+1} , et dès lors la suite des points

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r, M,$$

correspondant respectivement aux valeurs (7) et en nombre limité comme elles, présente à notre œil l'aspect d'une courbe sans solution de continuité. Que si l'on nous demande comment il peut se faire que la coïncidence apparente du premier point μ_0 avec le second μ_1 ,

puis du second μ_1 avec le troisième μ_2 , et ainsi de suite, n'entraîne pas la coïncidence apparente de tous ces points avec le premier μ_0 , nous répondrons qu'un semblable raisonnement, dont la forme est calquée sur certains raisonnements analytiques, n'a plus aucune valeur quand on l'applique à des objets physiques.

13. Lorsqu'une fonction de x est continue dans un intervalle déterminé, on peut établir par un raisonnement en forme l'existence de deux valeurs $c_0, C (c_0 \leq C)$, jouissant de la double propriété que nous allons énoncer : 1° toute valeur c remplissant la double condition

$$c_0 \leq c \leq C$$

est atteinte au moins une fois par la fonction pour quelque valeur de x située dans l'intervalle dont il s'agit; 2° aucune valeur inférieure à c_0 ni supérieure à C ne peut être atteinte par la fonction pour aucune des valeurs de x situées dans le même intervalle.

Désignons alors par $f(x)$, comme précédemment, une fonction continue dans l'intervalle de x_0 à X ($x_0 < X$). On peut, d'une infinité de manières, diviser cet intervalle en intervalles partiels, c'est-à-dire former une suite de valeurs croissantes dont la première soit x_0 et la dernière X . Imaginons que de semblables états de division, respectivement désignés par les symboles

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots,$$

se succèdent indéfiniment suivant une loi Λ , arbitrairement choisie sous la réserve expresse que, un nombre téléo-positif quelconque α étant donné, on puisse assigner pour m une valeur à partir de laquelle les intervalles partiels correspondant aux états de division successifs demeurent tous d'amplitude inférieure à α . A tout intervalle partiel fourni par quelqu'un des états

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m, \dots$$

faisons correspondre, suivant une loi déterminée Ψ , l'une des valeurs que prend la fonction dans l'intervalle partiel considéré. Désignons enfin par v_m la somme des résultats obtenus en considérant successivement chaque intervalle partiel de l'état λ_m et multipliant son amplitude par la valeur de $f(x)$ qui lui correspond en vertu de la loi Ψ . Cela posé, on démontre que la variante infinitésimale v_m tend vers une limite indépendante des lois Λ et Ψ . Cette propriété, essentiellement analytique, est susceptible d'une application physique que nous allons faire connaître, en supposant, pour plus de simplicité,

que la valeur de $f(x)$ ne soit jamais téléo-négative quand x varie de x_0 à X .

Il résulte, en premier lieu, du numéro précédent que la valeur de notre fonction dans l'intervalle de x_0 à X se trouve figurée par un arc de courbe continu et limité, et les intervalles partiels analytiques dont il s'agissait tout à l'heure par autant de segments rectilignes portés bout à bout sur l'axe Ox et occupant toute la partie de cet axe située entre les ordonnées extrêmes de l'arc. A chacun de ces segments partiels correspond d'abord un arc partiel de la courbe, puis, en vertu de la loi Ψ , une ordonnée particulière dont la longueur se trouve physiquement comprise entre les distances maximum et minimum des points de l'arc partiel à Ox . Quant à la quantité v_m , elle mesure, comme nous l'avons établi (9), la somme des divers rectangles qui, dans l'état λ_m , ont pour bases les segments partiels marqués sur Ox et pour hauteurs les ordonnées particulières correspondantes; en d'autres termes, cette quantité v_m se trouve physiquement traduite par la hauteur d'un rectangle R_m , équivalent à la somme des précédents et construit sur l'unité de longueur comme base. Or la propriété analytique ci-dessus énoncée nous montre qu'à partir d'une valeur de m suffisamment grande, la hauteur du rectangle R_m , et par suite ce rectangle lui-même, conservent une apparence invariable, et que cette limite physique R du rectangle R_m est indépendante du choix qu'on a pu faire pour les lois Λ et Ψ .

Cela étant, si, pour une même loi Λ , on nomme Ψ' , Ψ'' les deux lois particulières qui à chaque intervalle partiel d'un état de division quelconque font correspondre respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs que prend $f(x)$ dans cet intervalle, si l'on désigne en outre par v'_m , v''_m ce que devient v_m et par R'_m , R''_m ce que devient R_m pour les deux lois Ψ' , Ψ'' , il est de toute évidence physique que l'aire S comprise entre l'axe Ox , l'arc de courbe et ses deux ordonnées extrêmes est, pour toute valeur de m , supérieure à la somme de rectangles qui a pour mesure v'_m , mais inférieure à la somme de rectangles qui a pour mesure v''_m ; elle se trouve donc comprise entre R'_m et R''_m , et, comme ces deux rectangles finissent par conserver une même apparence invariable R , qui d'ailleurs ne dépend nullement de la loi Λ , rien ne semble plus naturel que de considérer l'aire S comme équivalente au rectangle R .

14. Nous pourrions, après la mesure des aires planes, rechercher celle des volumes, puis, adjoignant à la notion infinitésimale de

continuité la notion, également infinitésimale, de *dérivée*, étudier la rectification des lignes courbes, la complanation des surfaces courbes, considérer un point matériel soumis à un mouvement quelconque, et définir, pour un instant quelconque, la vitesse, l'accélération, la force, etc. Sans entrer dans le détail de toutes ces questions, indiquons brièvement quelques-uns des résultats auxquels elles conduisent.

Pour mesurer un arc de courbe, on déduit de sa définition *analytique* une valeur *analytique* à l'aide de considérations infinitésimales tellement imaginées, qu'il semble on ne peut plus naturel de regarder comme équivalents en longueur l'arc curviligne *physique* qui traduit cette définition et le segment rectiligne *physique* qui traduit cette valeur. Pour mesurer une aire ou un volume, on procède de façon analogue, et la valeur analytique qui en résulte fournit, par sa traduction physique en un segment rectiligne, soit la hauteur d'un rectangle équivalent ayant pour base l'unité de longueur, soit la hauteur d'un parallélépipède rectangle équivalent ayant pour base le carré construit sur l'unité de longueur.

On nomme *point matériel* une portion de matière contenue dans une portion d'étendue presque imperceptible. Cela étant, si l'on désigne par x, y, z trois fonctions d'une même variable t , et que l'on traduise les variations analytiques simultanées de t, x, y, z par les variations physiques simultanées 1° du temps, 2° de la position d'un point matériel (considéré isolément) par rapport à trois axes rectangulaires (considérés comme fixes) : on obtient comme figuration un mouvement du point. Attribuant alors à la variable t une valeur particulière quelconque, considérons, avec les valeurs correspondantes des trois fonctions x, y, z , celles de leurs dérivées premières; puis, à partir de la position du point qui traduit physiquement le système des valeurs considérées de x, y, z , portons, parallèlement aux trois axes et chaque fois dans le sens voulu, les segments rectilignes qui traduisent physiquement les valeurs des trois dérivées premières; construisons sur ces trois segments un parallélépipède, et considérons en longueur, direction et sens la diagonale qui part de leur commune origine pour aboutir au sommet opposé : la grandeur géométrique ainsi obtenue se nommera la *vitesse* du point matériel à l'instant considéré. La même construction, effectuée en substituant aux dérivées premières les dérivées secondes de x, y, z , nous fournira, pour l'instant dont il s'agit, la valeur de

l'accélération. Nommons enfin *masse* du point matériel certaine constante téléo-positive idéalement et invariablement liée au point, multiplions les dérivées secondes de x, y, z par cette constante, et répétons une troisième fois notre construction en substituant aux dérivées secondes les produits ainsi obtenus : la résultante géométrique de l'opération nous donnera, pour l'instant considéré, la valeur de ce qu'on est convenu d'appeler la *force* agissant sur le point. Une vitesse, de même qu'une accélération ou une force, ne se trouve entièrement déterminée que si l'on suppose à la fois connues la longueur, la direction et le sens du segment rectiligne qui la représente : en d'autres termes, elle se trouve physiquement mesurée, non par un segment rectiligne absolu, mais par un système de trois segments rectilignes respectivement comptés, dans tel ou tel sens, sur trois axes rectangulaires.

La manière toute conventionnelle dont nous venons de définir la force qui agit sur un point matériel considéré isolément, fixe le sens exact de certaines locutions qui peuvent sembler étranges au premier abord. Lorsqu'on dit, par exemple, que le mouvement observé d'un semblable point matériel est produit par l'attraction d'un centre fixe, s'exerçant en raison inverse du carré de la distance, cela signifie simplement qu'on peut assigner trois fonctions x, y, z d'une même variable t , possédant conjointement les deux propriétés suivantes : 1° si l'on mène par le centre, considéré comme fixe, un système de trois axes rectangulaires, également considérés comme fixes, la traduction physique ci-dessus indiquée des variations simultanées de t, x, y, z , reproduit le mouvement du point ; 2° la construction physique ci-dessus indiquée pour obtenir la force à un instant quelconque du mouvement donne un segment dirigé du point matériel vers le centre fixe, et mesuré en longueur par l'expression $\frac{\mu}{x^2 + y^2 + z^2}$, où μ désigne une constante téléo-positive ¹.

Lorsqu'on dit que les mouvements observés de trois points matériels sont produits par leurs attractions mutuelles s'exerçant en raison directe des masses et en raison inverse du carré des distances, cela signifie simplement que l'on peut assigner neuf fonctions $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$ d'une variable t , possédant conjointement les

1. Nous voulons dire que le segment dont il s'agit est superposable à celui qui traduit physiquement le nombre $\frac{\mu}{x^2 + y^2 + z^2}$.

propriétés suivantes : 1° si par un point de l'espace, considéré comme fixe, on mène un système de trois axes rectangulaires également considérés comme fixes, la traduction physique des variations simultanées de ces dix quantités reproduit les mouvements simultanés des trois points; 2° en désignant par A_1, A_2, A_3 les points dont il s'agit, par m_1, m_2, m_3 les masses respectivement attribuées à ces points, et par f une constante téléo-positive, la diagonale du parallélépipède rectangle que nous sommes convenus de construire pour obtenir à un instant déterminé la force agissant sur le point A_1 , se trouve être en même temps la diagonale d'un parallélogramme ayant ses côtés respectivement dirigés suivant les demi-droites $A_1 A_2, A_1 A_3$, et respectivement mesurés par les nombres

$$\frac{f m_1 m_2}{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}, \frac{f m_1 m_3}{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2}.$$

Les forces agissant respectivement sur les points A_2, A_3 jouissent d'une propriété géométrique toute semblable.

15. Les divers exemples traités ou indiqués dans ce qui précède nous semblent éclaircir suffisamment la véritable nature des sciences appliquées : elles ne sont, au fond, qu'un ensemble d'objets analytiques auxquels s'adaptent telles ou telles illustrations physiques. Aucune ne peut, en bonne philosophie, être envisagée autrement, et il n'est pas jusqu'à l'antique Géométrie qui, sous peine de demeurer inintelligible, ne doive se plier à cette conception. Qu'est-ce en effet que les idées de point, de ligne, de droite, de surface? On n'y peut voir, indépendamment de l'Analyse, que le simple souvenir de certaines images physiques, telles qu'une pointe d'aiguille, un fil délié, un fil à la fois délié et fortement tendu, une plaque extrêmement mince, une gaze extrêmement fine. Comment s'expliquer, avec de pareilles définitions, que le côté et la diagonale du carré n'aient pas de commune mesure? Comment concevoir que la longueur de la circonférence soit la limite du périmètre d'un polygone inscrit variable dont le plus grand côté diminue indéfiniment, alors que les côtés de ce polygone, tant qu'ils sont perceptibles, se distinguent de la circonférence, et, dès qu'ils ne le sont plus, cessent par là même de pouvoir être mesurés? Si l'on ne subordonne entièrement la Géométrie à l'Analyse, tout n'y est que confusion et contradiction; tout s'explique et s'éclaircit au contraire, si l'on consent à ne lui attribuer qu'une existence d'emprunt. Dire que le côté et la diagonale du carré sont entre eux

dans le rapport incommensurable $\sqrt{2}$, c'est dire que deux segments perceptibles, physiquement déduits des valeurs infinitésimales A , $A\sqrt{2}$, nous paraissent, quelle que soit l'unité de longueur, respectivement superposables au côté et à la diagonale d'un carré. Dire que le périmètre d'un polygone inscrit variable dont le plus grand côté diminue indéfiniment a pour limite la longueur de la circonférence, c'est substituer à la définition analytique de telle fonction et aux propriétés analytiques de telles variantes certaines images physiques qu'elles évoquent naturellement dans l'esprit. Partout ailleurs que dans l'Analyse, les considérations infinitésimales sont vides de sens; le raisonnement subtil à l'aide duquel on s'efforce parfois d'établir, contre toute évidence, que le plus rapide coureur ne saurait atteindre une tortue, n'est donc qu'un vain sophisme, puisque des considérations de ce genre y sont faussement appliquées au temps et à l'espace. Nous demandons qu'on en finisse avec les points inétendus, les pures lignes, les pures surfaces, les durées physiques indéfiniment décroissantes, et autres chimères du même genre; l'état d'esprit que leur contemplation suppose était sans doute fort excusable chez les Grecs d'il y a deux mille ans : y persister aujourd'hui serait du pur fétichisme.

16. En résumé, donc :

1° La notion de nombre entier étant supposée acquise, on peut définir tour à tour le nombre fractionnaire, le nombre qualifié, le nombre infinitésimal et le nombre imaginaire, sans avoir à faire intervenir jamais la moindre considération relative aux grandeurs concrètes; l'édifice analytique se trouve ainsi exclusivement basé sur la notion fondamentale de nombre entier.

2° L'élément mathématique de toute science appliquée est exclusivement analytique, mais donne lieu à une évocation continuelle de certaines images ou apparences physiques.

Quant aux réalités qui peuvent se cacher sous ces apparences, il n'en saurait être question ici : en dépit du préjugé contraire, la Science, impuissante à les atteindre, n'a rien à démêler avec l'Absolu.

C. RIQUIER,

Professeur à la Faculté des Sciences de Caen.