

Waerden, B.L. van der

Ausgleichspunkt, "Methode der Perser" und
indische Planetenrechnung

In: Archive for History of Exact Sciences
1 - 1960/62 - p. ?

5332 MF
WAERDEN, B.L. v.d.
1975

D332

Astr

² B.L. VANDER WAERDEN: Ausgleichspunkt, Methode der Perser und indische
Planetenrechnung. Archive Hist. Exact Sci. 1 (1961) p. 107-121.

V1075

A

Ausgleichspunkt, „Methode der Perser“ und indische Planetenrechnung

B. L. VAN DER WAERDEN

Zusammenfassung

Bekanntlich läßt *PTOLEMAIOS* in seiner Planetentheorie den Epizykelmittelpunkt so auf einem Exzenter laufen, daß die Bewegung, von einem Ausgleichspunkt *G* aus gesehen, gleichmäßig erscheint. Ist *E* die Erde, so liegt der Exzentermittelpunkt *Z* jeweils in der Mitte der Strecke *EG*. Eine Begründung dieser Hypothese gibt *PTOLEMAIOS* nicht. Wo hat er sie her?

In der indischen Astronomie ist eine Methode zur Berechnung der Mittelpunktsgleichung der Planeten üblich, die ebenfalls ohne Begründung in den Handbüchern steht. Bei dieser Methode werden die beiden Korrekturen $-f$ und z , die zur mittleren Länge zu addieren sind, zunächst vorläufig berechnet und halbiert; die Hälften werden zur mittleren Länge addiert und dann erst werden die definitiven Korrekturen $-f$ und z berechnet. Wiederum fragt es sich, wo die Autoren diese Methode her haben.

Wir werden nachweisen, daß sich die indische Rechenvorschrift als gute Näherung rechtfertigen läßt, wenn man den Ausgleichspunkt *G* genau so annimmt, wie *PTOLEMAIOS* es tut. Um also sowohl das Auftreten dieser Hypothese bei *PTOLEMAIOS* als auch die indische Rechenvorschrift zu erklären, braucht man nur anzunehmen, daß die Vorgänger des *PTOLEMAIOS* jene Hypothese bereits aufgestellt und daraus die erwähnte Näherungsmethode hergeleitet haben. Als Urheber der Hypothese und der Rechenmethode kommt von allen uns bekannten Astronomen nur *APOLLONIOS* v. *PERGA* in Betracht.

APOLLONIOS lebte 200 vor Chr., *ĀRYABHATA* 500 nach Chr. Als Zwischenglied zwischen der hellenistischen und der indischen Astronomie und Astrologie ist Persien anzunehmen. In der Tat finden wir eine zur indischen Methode äquivalente Rechenvorschrift mit einer kleinen Vereinfachung in den Tafeln des Arabers *AL-KHWĀRIZMĪ*, und arabische Autoren versichern uns, daß dieser die Methode von den Persern hat. Die Quelle des *KHWĀRIZMĪ* ist wahrscheinlich der *SHĀH ZĪJ*, eine arabische Übersetzung eines persischen Tafelwerkes. Siehe dazu *E. S. KENNEDY**.

§ 1. Der Ausgleichspunkt bei Ptolemaios

Sehen wir von Merkur ab, dessen Bewegung komplizierter ist, so bewegen sich die vier übrigen Planeten bei *PTOLEMAIOS* alle nach demselben Schema. Der Epizykelmittelpunkt *M* läuft auf einem exzentrischen Kreis, dessen Mittelpunkt *Z* in der Mitte der Strecke *EG* liegt. In *E* befindet sich die Erde und *G* ist der Ausgleichspunkt (*punctum aequans*), von dem aus gesehen die Bewegung des Punktes *M* gleichmäßig erscheint. Der Planet *P* läuft so auf dem Epizykel, daß die Richtung *MP* sich ebenfalls gleichmäßig dreht (Fig. 1).

* *KENNEDY*, E. S.: *Trans. Amer. Philos. Soc.* 46, 123, und *J. Amer. Orient. Soc.* 78, 246.

wegung auf Kreisen nachweisen wollten“, spricht PTOLEMAIOS ziemlich abschätzig: „Sie stellten es grundfalsch an und blieben die Beweise schuldig, so daß die einen das gesteckte Ziel überhaupt nicht, die anderen wenigstens einigermaßen erreichten.“ Sie versäumten „an der Hand klarer und einwandfreier Erscheinungen den zahlenmäßigen Betrag beider Anomalien und den mittleren Lauf der Planeten nachzuweisen und dann wieder, ohne beide zu scheiden, Lage und Reihenfolge der Kreise ausfindig zu machen ...“.

Uns interessieren hier besonders diejenigen Astronomen vor PTOLEMAIOS, die durch Kombination von Epizykeln und Exzentern unter Annahme bestimmter zahlenmäßiger Beträge der Exzentrizitäten und der Epizykelradien „das gesteckte Ziel wenigstens einigermaßen erreichten“.

Ich nehme an, daß diese Astronomen bereits trigonometrische Methoden benutzten. Ohne Trigonometrie ist es nämlich fast unmöglich, aus den Beobachtungen die Exzentrizitäten und Epizykelradien zu ermitteln und umgekehrt aus diesen Elementen und den mittleren Bewegungen Planetenpositionen zu berechnen.

Eine solche trigonometrische Astronomie, die auf der Annahme von Epizykeln und Exzentern beruht und die zwar weniger genau ist als die Theorie des PTOLEMAIOS, aber doch „das gesteckte Ziel einigermaßen erreicht“, finden wir bei den indischen Astronomen der „dritten Periode“¹, die um 500 nach Chr. mit ĀRYA-BHATA beginnt. Die meisten Forscher nehmen an, daß diese trigonometrische Astronomie letzten Endes auf die griechische zurückgeht, aber nicht auf PTOLEMAIOS, sondern auf dessen Vorgänger.

Vergleichen wir nun die Art, wie PTOLEMAIOS eine Planetenposition berechnet, mit der Rechenweise der indischen Astronomen und sehen zu, ob wir so etwas wie eine Halbierung der Strecke GE auch bei diesen entdecken können.

§ 3. Die Rechenweise des Ptolemaios

Kennt man die mittlere Bewegung eines Planeten und der Sonne, so kann man für jeden Zeitpunkt t die Winkel $x = AGM$ und $y = BMP$, die sich gleichmäßig mit der Zeit ändern, berechnen (Fig. 1). Der Radius ZM kann gleich 1 angenommen werden. Ist nun die Exzentrizität $EZ = ZG = e$ bekannt, so kennt man im Dreieck ZGM zwei Seiten ZM und ZG und den Winkel bei G , also kann man den Winkel f_1 bei M nach der Sinusregel

$$(1) \quad \sin f_1 = e \sin x$$

berechnen. Der Winkel bei Z ist dann

$$(2) \quad \alpha_1 = x - f_1.$$

Im Dreieck ZME kennt man nun zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel. Um die dritte Seite EM und die übrigen Winkel f_2 und α_2 zu berechnen, fällt PTOLEMAIOS auf die gegenüberliegende Seite das Lot EF und berechnet zuerst die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks EFZ . Im Dreieck EFM sind nun die beiden Katheten bekannt; man kann also nach PYTHAGORAS die Hypotenuse $EM = R$ und dann den Winkel f_2 berechnen. Die Summe

$$(3) \quad f_1 + f_2 = f$$

¹ Siehe G. THIBAUT, Art. „Astronomie“ im Grundriß der indo-arischen Philologie.

ist die „Mittelpunktsgleichung“, die man von x zu subtrahieren hat, um den Winkel x_2 bei E zu erhalten:

$$x_2 = x_1 - f_2 = x - f_1 - f_2 = x - f.$$

Um die Richtung EP zum Planeten zu erhalten, muß man noch eine zweite Korrektur z anbringen. Sie wird aus dem Dreieck EMP berechnet, in dem jetzt die beiden Seiten $EM=R$ und $MP=r$ (Epizykelradius) bekannt sind. Der Außenwinkel bei M ist $\gamma + f$, wobei γ sich gleichmäßig mit der Zeit ändert und f aus der vorigen Rechnung bekannt ist. Im Dreieck EMP kennt man also zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel und man kann den Winkel z wie vorhin berechnen.

Die Berechnung der zweiten Korrektur z verläuft bei den indischen Astronomen genau so, nur daß R durch 1 ersetzt wird, was besonders bei Mars eine schlechte Näherung ist. Die Berechnung der ersten Korrektur f ist aber bei den indischen Astronomen viel einfacher. Wenn die indischen Astronomen ihre Methoden von den Griechen vor PTOLEMAIOS übernommen haben, so müssen auch diese Näherungsmethoden gehabt haben, die einfacher waren als die exakte Rechnung nach PTOLEMAIOS und mit denen sie ihr Ziel „einigermaßen erreichten“.

§ 4. Näherungsformel für f

Von der zweiten Korrektur z sehen wir zunächst einmal ab. Wir wollen eine bequeme Näherung für f suchen. Die Exzentrizität e kann bei allen Planeten als so klein gegen 1 angenommen werden, daß Glieder mit e^3 zu vernachlässigen sind.

Die Sinusregel, auf das Dreieck ZEM angewandt, ergibt

$$(4) \quad \sin f_2 = e \sin(x_1 - f_2).$$

In dieser Gleichung kommt der unbekannte Winkel f_2 links und rechts vor. Nun unterscheidet f_2 sich von f_1 nur in der Größenordnung e^2 . Ersetzt man also rechts f_2 durch f_1 , so macht man auf der rechten Seite nur einen Fehler von der Größenordnung e^3 . In dieser Näherung erhält man

$$(5) \quad \sin f_2 = e \sin(x_1 - f_1) = e \sin(x - 2f_1).$$

In (1) und (5) kann man die Sinus der kleinen Winkel f_1 und f_2 durch die Bogen ersetzen. Der Fehler dieser Näherung ist ebenfalls nur von der Größenordnung e^3 . So erhält man, wenn alle Winkel in Bogenmaß gemessen werden:

$$(6) \quad f_1 = e \sin x,$$

$$(7) \quad f_2 = e \sin(x - 2f_1),$$

also

$$(8) \quad f = f_1 + f_2 = e[\sin x + \sin(x - 2f_1)].$$

Die Summe der beiden Sinus kann man, wieder mit einem Fehler der Größenordnung e^3 , durch $2\sin(x - f_1)$ ersetzen. So erhält man die ganz einfachen Formeln

$$(9) \quad f_1 = e \sin x,$$

$$(10) \quad f = 2e \sin(x - f_1),$$

$$(11) \quad x_2 = x - f.$$

Diese Formeln kann man so deuten. Mit dem Argument x bildet man die vorläufige Mittelpunktsungleichung $2f_1 = 2e \sin x$. Die Hälfte davon, also f_1 , zieht man von x ab. Mit dem Argument $x - f_1$ bildet man die definitive Mittelpunktsungleichung (10) und zieht sie wieder von x ab. So erhält man bis auf Glieder von der Größenordnung e^3 den richtigen Winkel $AEM = x_2$.

§ 5. Die Halbierung der Mittelpunktsungleichung bei den indischen Astronomen

Eine Rechenvorschrift, die den Formeln (9) bis (11) entspricht, findet sich bei den indischen Astronomen der dritten Periode, nämlich bei ĀRYABHATA², bei BRAHMAGUPTA³ und im Sūrya-Siddhānta⁴. Im Khandakhādyaka des BRAHMAGUPTA (übersetzt von P. C. SENGUPTA, Calcutta 1940) lautet die Vorschrift so:

II 18. "To the mean planet apply half the Sighra equation; from the planet thus corrected, calculate the equation of apsis, and apply half of it to the corrected mean planet. For the mean planet as corrected for the second time calculate the equation of apsis and apply the whole of it to the mean planet with which the calculation began. From the planet, thus corrected, calculate the Sighra equation and apply the whole of it to the last corrected planet."

Um diese Vorschrift zu verstehen, muß man wissen, daß "the equation of apsis" die Mittelpunktsungleichung f ist, und "the Sighra equation" die Korrektur z , die am Schluß noch zur Länge des Epizykelmittelpunktes M addiert werden muß um die Länge des Planeten P zu erhalten. Diese Korrektur z ist, wie es nach der Fig. 1 auch sein soll, eine Funktion des Argumentes $y + f$ oder des Winkels CMP . Wir schreiben also

$$z = \psi(y + f).$$

Die Funktion ψ wird im Khandakhādyaka für jeden einzelnen Planeten durch eine besondere Tabelle definiert. Die Tabelle beruht auf der Trigonometrie des Dreiecks EMP , wobei die Seite EM , wie schon erwähnt, gleich 1 angenommen wird.

Die indische Rechenvorschrift verlangt nun, daß zunächst mit dem Argument y ein vorläufiger Wert der Sighra-Gleichung

$$(12) \quad z_0 = \psi(y)$$

gebildet werden soll. Die Hälfte davon, also $\frac{1}{2} z_0$, ist zur mittleren Länge des Planeten, also auch zum Argument x zu addieren. Mit dem Argument $x + \frac{1}{2} z_0$ bildet man nun die vorläufige Mittelpunktsungleichung f_0 :

$$(13) \quad f_0 = \varphi(x + \frac{1}{2} z_0),$$

wobei φ eine gegebene Funktion ist. Diese Funktion φ berechnet man nach Khand. II 7 für jeden Planeten aus der Mittelpunktsungleichung der Sonne durch

² CLARK, W. E.: The Āryabhatīya of ĀRYABHATA, S. 60, Kap. III 23. Chicago 1930.

³ BRAHMAGUPTA: Brahma-Sphuta-Siddhānta II 40; Khandakhādyaka II 18 (ed. SENGUPTA). Calcutta 1941.

⁴ Sūryasiddhānta II 44; Übersetzung von BURGESS, J. Amer. Orient. Soc. 6.

Multiplikation mit einer Konstanten. Die Mittelpunktsungleichung der Sonne wird ihrerseits durch eine Tabelle geliefert, die nach der Formel

$$f_s = c_s \sin x_s$$

berechnet ist (s. SENGUPTAS Kommentar zur Übersetzung des Khand. I 16). Also ist die Funktion φ einfach eine Sinusfunktion, multipliziert mit einer Konstanten c :

$$(14) \quad \varphi(x) = c \sin x,$$

wobei c für jeden Planeten einen anderen Wert hat. Die Formel (13) kann demnach als

$$(15) \quad f_0 = c \sin(x + \tfrac{1}{2} z_0)$$

gelesen werden.

Die Rechenvorschrift des Khand. verlangt nun weiter, daß die Hälfte dieser Mittelpunktsungleichung f_0 von der korrigierten mittleren Länge des Planeten, also auch vom korrigierten Argument $x + \tfrac{1}{2} z_0$ zu subtrahieren ist:

$$(16) \quad x' = x + \tfrac{1}{2} z_0 - \tfrac{1}{2} f_0.$$

Mit diesem Argument x' hat man nun die endgültige Mittelpunktsungleichung

$$(17) \quad f = \varphi(x') = c \sin x'$$

zu bilden. Sie wird von der mittleren Länge des Planeten subtrahiert; daraus folgt, daß x jetzt durch $x - f$ und y durch $y + f$ zu ersetzen ist. Mit dem Argument $y + f$ bildet man schließlich die Korrektur

$$(18) \quad z = \psi(y + f);$$

d.h. z ist der Winkel bei E im Dreieck EPM mit Außenwinkel $y + f$ bei M , wobei aber die Seite $EM = 1$ gesetzt wird.

§ 6. Der Fall einer Konjunktion oder Opposition ($z_0 = 0$)

Um die indische Rechenvorschrift mit unserer früheren Näherungsformel zu vergleichen, betrachten wir einmal den Fall einer mittleren Konjunktion oder Opposition des Planeten. In diesem Fall ist $y = 0$ oder 180° und z_0 wird Null. Die Formeln der indischen Astronomen vereinfachen sich dann zu

$$f_0 = c \sin x$$

$$f = c \sin(x - \tfrac{1}{2} f_0)$$

$$x_2 = x - f.$$

Diese Formeln stimmen, wenn $c = 2e$ gesetzt wird, genau mit den Formeln (9) bis (11) des § 4 überein. Damit haben wir wenigstens im Prinzip einen Weg gefunden, die indischen Rechenvorschriften durch eine geometrische Theorie zu rechtfertigen. Es zeigt sich, daß die Halbierung der vorläufigen Mittelpunktsungleichung f_0 nach der indischen Rechenvorschrift genau der Halbierung der Strecke EG in der Fig. 1 entspricht.

§ 7. Der allgemeine Fall ($z_0 \neq 0$)

Wir nehmen im folgenden an, daß die Exzentrizität e und der Epizykelradius r so klein sind, daß die Glieder mit e^3 , $e^2 r$ und er^2 vernachlässigt werden können. Diese Annahme ist für Saturn, Jupiter, Venus und Merkur jedenfalls erfüllt. Für Mars ist er^2 nicht zu vernachlässigen, aber Mars ist ohnehin ein sehr schwieriger Planet.

Die nach der indischen Vorschrift berechnete Mittelpunkts-
gleichung möge von jetzt an mit f' bezeichnet werden. Nach (17) und (16) ist

$$(19) \quad f' = c \sin x' = c \sin \left(x - \frac{1}{2} f_0 + \frac{1}{2} z_0 \right).$$

Der Winkel z_0 ist von der Größenordnung r . Entwickelt man also die rechte Seite von (19) nach Potenzen von z_0 , so kann cz_0^2 vernachlässigt werden. So erhält man

$$f' = c \sin \left(x - \frac{1}{2} f_0 \right) + \frac{1}{2} c z_0 \cos \left(x - \frac{1}{2} f_0 \right).$$

In beiden Gliedern rechts kann $x - \frac{1}{2} f_0$ durch $x - f_1 = x_1$ ersetzt werden. Das ergibt

$$(20) \quad f' = c \sin (x - f_1) + \frac{1}{2} c z_0 \cos x_1.$$

Das erste Glied rechts in (20) ist die nach (10) berechnete Mittelpunkts-
gleichung f . Das zweite Glied ist ein extra Korrekturglied, das zu f addiert,
also von x subtrahiert werden muß. Nennt man das Korrekturglied k , so kann
man für (20) schreiben

$$(21) \quad f' = f + k.$$

Ist a die Länge des Apogeums, so ist die wahre Länge des Planeten schließlich durch

$$(22) \quad \lambda = a + (x - f') + z'$$

gegeben, wobei z' nach (18) durch

$$(23) \quad z' = \psi(y + f')$$

gegeben ist. Setzt man (21) in (22) ein, so erhält man

$$\lambda = a + (x - f) + (z' - k)$$

oder, weil $x - f$ bis auf Glieder von der Größenordnung e^3 gleich dem Winkel x_2
der Fig. 1 ist,

$$(24) \quad \lambda = a + x_2 + (z' - k)$$

mit

$$k = \frac{1}{2} c z_0 \cos x_1.$$

Die exakte Länge des Planeten nach Fig. 1 ist

$$(25) \quad \lambda = a + x_2 + z.$$

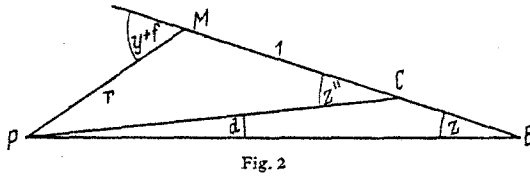
Wenn also $z' - k$ in der hier gebrauchten Näherung gleich z wäre, so wäre
die indische Rechenvorschrift gerechtfertigt. Um das zu untersuchen, betrachten
wir das Dreieck EMP .

Wegen der Kleinheit des Winkels f_2 ist ME genähert gleich MF , also gleich

$$MZ + ZF = 1 + \frac{1}{2} c \cos x_1.$$

Tragen wir also $MC=1$ auf ME ab (Fig. 2), so ist der Überschuß CE genähert gleich $\frac{1}{2} c \cos x_1$. Nach (18) und (23) wurde $z' = \psi(y+f')$ aus einem Dreieck von derselben Art wie PME , aber mit Seiten r und 1 und mit dem Winkel $y+f'$ bei M berechnet. Der Winkel $y+f'$ kann in der hier benutzten Näherung durch $y+f$ ersetzt werden. In dieser Näherung ist also z' gleich dem Winkel z'' bei C im Dreieck PMC . Das Korrekturglied, das man von z' oder z'' zu sub-

trahieren hat, um z zu erhalten, ist also der Winkel $CPE = d$. Die Sinusregel im Dreieck PCE ergibt



$$\sin d = \frac{EC}{PC} \sin z.$$

Da d sehr klein und z klein ist, können $\sin d$ und $\sin z$ durch d und z und PC durch 1 ersetzt werden:

$$(26) \quad d = EC \cdot z = \frac{1}{2} c (\cos x_1) z.$$

Vergleicht man das mit

$$(27) \quad k = \frac{1}{2} c (\cos x_1) z_0,$$

so sieht man, daß d und k in der hier zugrunde gelegten Näherung gleich sind. Damit ist die indische Rechenvorschrift gerechtfertigt.

Was hier geometrisch hergeleitet wurde, kann auch durch eine Reihenentwicklung der Korrekturglieder f und z bzw. f' und z' nach Potenzen von e und r verifiziert werden. Es zeigt sich dabei wieder, daß die Summe $-f + z$, die man nach der Methode des Ausgleichspunktes erhält, mit der nach der indischen Methode berechneten Summe $-f' + z'$ bis auf Glieder mit e^3 , $e^2 r$ und $e r^2$ übereinstimmt.

§ 8. Wer hat zuerst den Ausgleichspunkt eingeführt?

Wir stellen also die Vermutung auf, daß PTOLEMAIOS die Hypothese des Ausgleichspunktes G (mit Z in der Mitte von EG) von seinen Vorgängern übernommen hat und daß auf Grund eben dieser Hypothese die Näherungsformel entwickelt wurde, die wir bei den indischen Astronomen gefunden haben.

Diese Vermutung ist nicht sicher; denn man könnte auch annehmen, daß die Hypothese des Ausgleichspunktes und die indische Rechenvorschrift unabhängig voneinander durch Probieren gefunden wurden. Die Griechen haben versucht, die beobachteten Planetenörter durch ein geometrisches Modell darzustellen und sind dabei auf die Hypothese des Ausgleichspunktes gekommen. Andere — so könnte man annehmen — hätten versucht, eine Rechenvorschrift zu finden, die mit der Erfahrung gut übereinstimmt, und sie wären dabei auf die indische Rechenvorschrift gekommen. Die genäherte Übereinstimmung zwischen den beiden Theorien wäre dann dadurch zu erklären, daß beide recht gut zu

der Erfahrung stimmen⁵. Obwohl mir diese Erklärung unwahrscheinlich vorkommt, muß man doch mit der Möglichkeit rechnen.

Das soll uns aber nicht daran hindern, die zuerst aufgestellte Vermutung etwas weiter zu verfolgen. Wer mag wohl der Vorgänger des PTOLEMAIOS gewesen sein, der die Hypothese des Ausgleichspunktes aufgestellt hat, und wer hat die höchst ingeniose Näherungsformel aufgestellt, die die Inder uns überliefert haben?

In einer sehr interessanten Studie über Apollonios hat O. NEUGEBAUER⁶ überzeugend dargetan, daß APOLLONIOS der erste war, der eine mathematische Theorie zur Berechnung von Mond- und Planetenpositionen entworfen hat. Die Methode, die PTOLEMAIOS anwendet, um aus drei beobachteten Mondfinsternissen die Exzentrizität der Mondbahn oder (was damit äquivalent ist) den Radius des Mond-epizykels zu berechnen, stammt von APOLLONIOS. Diese Methode setzt aber die Trigonometrie voraus. ARISTARCHOS (um 280, etwa 80 Jahre vor APOLLONIOS) hatte sicher noch keine Trigonometrie, ARCHIMEDES höchst wahrscheinlich auch nicht. APOLLONIOS ist also der erste, der möglicherweise die Hypothese des Ausgleichspunktes aufgestellt haben könnte.

Nach APOLLONIOS und vor PTOLEMAIOS kennen wir nur einen großen Astronomen, nämlich HIPPARCHOS (um 130 vor Chr.). Von ihm wissen wir aber aus PTOLEMAIOS (Almagest IX 2), daß er keine Planetentheorie entwickelt, sondern nur festgestellt hat, daß alle damals existierenden Planetentheorien ungenügend waren. Falls also die Hypothese vom Ausgleichspunkt schon vor PTOLEMAIOS aufgestellt wurde, so scheint es mir wahrscheinlich, daß APOLLONIOS der Urheber war.

§ 9. Die Übermittlung nach Indien

Die Theorie der Exzenter und Epizykel und die Trigonometrie erscheinen in der indischen Astronomie erst gegen 500 nach Christus, aber in Persien früher. Die Zeugnisse dafür wurden von O. NEUGEBAUER in der Rezension eines Buches von RENOU und FILLIOZAT (Archives internat. d'histoire des sciences Vol. 8, No. 31, p. 168) zusammengestellt. NEUGEBAUER schließt aus diesen Zeugnissen, daß die hellenistische Astronomie und Astrologie in der nachchristlichen Zeit (besonders im 3. Jahrhundert) zunächst nach Persien übermittelt wurde und von dort nach Indien gelangte.

Es fragt sich nun, ob die Hypothese des Ausgleichspunktes selbst nach Indien gelangte oder nur die bequeme Rechenmethode, die nach unserer Vermutung letzten Endes auf der Annahme des Ausgleichspunktes beruhte.

Ich glaube, wir können diese Frage auf Grund der indischen Texte selbst mit ziemlicher Sicherheit beantworten. Die in § 5 erklärte Rechenmethode wird nämlich von allen erwähnten Autoren mit fast denselben Worten erklärt, aber vom Ausgleichspunkt redet keiner dieser Autoren, auch nicht in den Kapiteln, die vom Bau des Weltalls und den Bewegungen der Gestirne handeln. Daher

⁵ KEPLER hat bemerkt, daß man mit der Hypothese des Ausgleichspunktes die Marsbeobachtungen recht gut darstellen kann. Er hat die Hypothese noch etwas zu verbessern versucht, indem er das Zentrum Z nicht genau in der Mitte von EG annahm, aber er fand nachher, daß das nur dann eine Verbesserung ist, wenn Mars in der Nähe der Opposition (oder Konjunktion) steht.

⁶ NEUGEBAUER, O.: Scripta Mathematica 24, 5 (1959).

nehme ich an, daß die indischen Autoren die Rechenvorschrift einer persischen Quelle entnommen haben.

Diese Annahme wird, wie wir gleich sehen werden, von einer anderen Seite her bestätigt.

§ 10. Die „Methode der Perser“

SUTER hat 1914 die lateinische Übersetzung der Tafeln des AL-KHWĀRIZMĪ publiziert⁷. Über die Herkunft dieser Tafeln gibt es eine Notiz bei IBN AL-KIFTĪ, die bei SUTER (S. 33) so zitiert wird:

„Er (KHWĀRIZMĪ) stützte sich in seinen Tafeln auf die mittleren Örter des Sindhind, wich aber von ihm ab in den Gleichungen (der Planeten) und in der Schiefe (der Ekliptik); er setzte seine Gleichungen fest nach der Methode der Perser, und die Deklination der Sonne nach der Methode des Ptolemäus.“

Der „Sindhind“ ist nach der Überlieferung eine arabische Übersetzung eines indischen Siddhānta. In der Tat stimmen die mittleren Bewegungen, die in den Tafeln des KHWĀRIZMĪ angenommen wurden, genau mit den mittleren Bewegungen des Brahma-sphuta-siddhānta überein⁸. — Die maximale Deklination der Sonne ist nach den Tafeln $23^{\circ} 51'$, wie bei PTOLEMAIOS. Die erste und dritte Mitteilung von IBN AL-KIFTĪ sind demnach richtig; also werden wir der zweiten Mitteilung, daß AL-KHWĀRIZMĪ die Mittelpunktsgleichungen der Planeten nach der „Methode der Perser“ berechnet hat, ebenfalls Glauben schenken dürfen.

Was ist nun die Methode der Perser zur Berechnung der wahren Planetenörter?

In der Gebrauchsanweisung, die den Tafeln des KHWĀRIZMĪ vorangestellt ist, wird zunächst gelehrt, wie man den mittleren Ort eines Planeten, d. h. die Richtung zum Mittelpunkt des Epizykels findet. In Fig. 1 wäre das die Richtung GM , die sich im Laufe der Zeit gleichmäßig dreht. Die mittlere Länge L des Planeten heißt bei KHWĀRIZMĪ *elwacat* oder *medio planetarum*.

Die nächste Größe, die man braucht, ist der Winkel y , der Unterschied zwischen den Richtungen MB und MP . Bei den oberen Planeten (Saturn, Jupiter und Mars) ist MP die Richtung zum mittleren Ort der Sonne, also erhält man das Argument y , indem man den *elwacat* des Planeten vom *elwacat* der Sonne subtrahiert. Die Differenz y heißt *elheca* oder *argumentum*. Bei den unteren Planeten (Venus und Merkur) wird das Argument y direkt durch die Tafeln für die mittlere Bewegung gegeben; die mittlere Länge L von Venus und Merkur ist gleich der der Sonne.

Als nächstes ist das Apogeum zu bestimmen. Es heißt bei KHWĀRIZMĪ *Sublimatio*. In Kap. 12 werden feste Längen für die Apogeen angegeben:

Saturn . . .	$a = 244^{\circ} 55'$
Jupiter . . .	$a = 172^{\circ} 32'$
Mars . . .	$a = 128^{\circ} 24'$
Venus . . .	$a = 81^{\circ} 15'$
Merkur . . .	$a = 224^{\circ} 54'$
Sonne . . .	$a = 77^{\circ} 55'$

⁷ SUTER, H.: Die astronomischen Tafeln des MUHAMMED IBN MŪSĀ AL-KHWĀRIZMĪ in der Bearbeitung des MASLAMA ... und der lateinischen Übersetzung des ATHELHARD VON BATH. Kgl. Danske Vid. Seisk. Skrifter, 7. R., Hist. Fil. Afd. III, 1.

⁸ BURCKHARDT, J. J.: Enseignement math. 2^e (1956) = Verhandlungen der Schweiz. Naturf. Ges. 1956.

In den Tafeln findet man nicht dieses a , sondern ein korrigiertes Apogäum a' (*Sublimatio examinata* oder *definita*), das von y abhängt und ein wenig kleiner ist als a :

$$(28) \quad a' = a - \chi(y).$$

Der Spalte a' folgen zwei Spalten, die mit „*Examinatio ipsius elheza*“ und „*Examinatio ipsius centri*“ überschrieben sind, und die unseren Winkeln z und f entsprechen. Die *Examinatio elheza* (oder *Examinatio argumenti*, wie es im Manuskript C heißt) ist eine Funktion des Argumentes y und entspricht unserem $z_0 = \psi(y)$ — Gleichung (12). Nimmt man $y+f$ statt y als Argument, so erhält man unser z . Die *Examinatio centri* ist proportional einer Sinusfunktion und entspricht unserer *Mittelpunktsgleichung* f .

Vergleicht man nun die Spalte a' (*sublimatio examinata*) mit der Spalte z_0 (*examinatio elheza*), so zeigt sich, wie SUTER (S. 50) schon bemerkt hat, daß die Korrektur $\chi(y)$ in (28) genau die Hälfte des Betrages von z_0 ist:

$$(29) \quad \chi(y) = \frac{1}{2} |z_0| = \frac{1}{2} \psi(y).$$

Aus (28) und (29) folgt

$$(29a) \quad a' = a - \frac{1}{2} |z_0|.$$

Die Gebrauchsanweisung des KHWĀRIZMĪ (Kap. 10) sagt, daß man diese Formel nur dann benutzen soll, wenn das Argument y zwischen 0 und 180° liegt, also wenn (in unserer Bezeichnung) z_0 positiv ist. Liegt y zwischen 180 und 360°, so hat man zu a' noch den ganzen Betrag $|z_0|$ zu addieren; die Summe ergibt erst das korrigierte Apogäum⁹. Man hat also in diesem Fall, wo z_0 negativ ist,

$$(29b) \quad a' = a - \frac{1}{2} |z_0| + |z_0| = a + \frac{1}{2} |z_0|$$

zu setzen. Die Formeln (a) und (b) lassen sich zu

$$(30) \quad a' = a - \frac{1}{2} z_0$$

zusammenfassen.

Der Text fährt fort: „Dieses korrigierte Apogäum (a') ist vom *elwacat* (L) des Planeten zu subtrahieren. Die Differenz heißt *Centrum*.“ Das heißt, man hat

$$(31) \quad x_0 = L - a' = L - a + \frac{1}{2} z_0$$

zu bilden. Nun war aber $L - a$ unser früheres x , also ist das „*Centrum*“

$$(32) \quad x_0 = x + \frac{1}{2} z_0.$$

Mit diesem Argument, so sagt der Text, soll man die *Mittelpunktsgleichung* f bilden:

$$(33) \quad f = \varphi(x_0) = \varphi(x + \frac{1}{2} z_0).$$

⁹ Ms O: Si vero maius, in sublimationem examinatam et in examinationem argumenti intrandum est, iugendo itaque sublimationem hanc cum ipsius argumenti examinatione, totum istud sublimatio examinata nominandum est.

Diese Formel stimmt, wenn man f in f_0 umtauft, genau mit der früheren Formel (13) überein. Die Funktion φ der Tafel des KHWĀRIZMĪ ist, genau wie die Funktion φ der indischen Texte, proportional einer Sinusfunktion — siehe Formel (14).

Die genaue Übereinstimmung der Formel (33), zu der die „Methode der Perser“ schließlich führt, mit der Formel (13), die aus der indischen Rechenvorschrift abgeleitet wurde, bestätigt unsere in § 9 aufgestellte Vermutung, daß die indischen Autoren ihre Rechenvorschrift einer persischen Quelle entnommen haben. Dazu kommt, daß auch die maximalen Gleichungen der Planeten, also die Konstanten c in der Formel (14), bei KHWĀRIZMĪ und im Khandakhādya genau übereinstimmen.

Nach der indischen Rechenvorschrift müßte man nun aus x_0 ein korrigiertes Centrum

$$x' = x_0 - \frac{1}{2} f_0 = x + \frac{1}{2} z_0 - \frac{1}{2} f_0$$

bilden — siehe Formel (16) — und dann mit diesem Argument die endgültige Mittelpunktsgleichung f nach (17). Diese Komplikation ist bei KHWĀRIZMĪ fortgefallen: das nach (33) gebildete f_0 ist für ihn schon das endgültige f , das man von x_0 zu subtrahieren und zu y zu addieren hat. Das Ergebnis $x_0 - f$ heißt *Centrum examinatum* und $y + f$ heißt *Argumentum examinatum*.

Mit dem Argument $y + f$ geht man nun in die Tafel für z hinein und findet so die *Examinatio argumenti*

$$(34) \quad z = \psi(y + f)$$

wie nach der früheren Formel (18). Dieses z ist zum Centrum examinatum $x_0 - f$ zu addieren. Das Ergebnis $x_0 - f + z$ „nennen die Araber *elhacil*; wir werden es *Centrum ultimum* nennen“, sagt der Text (in einem anderen Manuskript heißt es statt Araber „Chaldäer“). Zu diesem *elhacil* ist das korrigierte Apogeum a' zu addieren. So erhält man schließlich die Länge des Planeten:

$$(35) \quad \lambda = a' + x_0 - f + z = a' + (L - a') - f + z = L - f + z.$$

§ 11. Wie ist man auf den Ausgleichspunkt gekommen?

Wir kehren zur griechischen Astronomie zurück und fragen: Wie ist der Urheber der Idee des Ausgleichspunktes (ob er nun APOLLONIOS oder PTOLEMAIOS oder anders hieß) auf diese Idee gekommen?

Schon die Babylonier haben gewußt, daß zur mittleren Bewegung eines jeden Planeten zwei Anomalien hinzukommen: eine auf die Sonne und eine auf die Ekliptik bezügliche Anomalie. Die erstere bewirkt die Stillstände und Rückläufigkeit; ihre Periode ist die synodische Periode des Planeten. Diese Anomalie kann durch ein Epizykelmodell sehr gut erklärt werden: das wußten APOLLONIOS und alle, die nach ihm kamen. Die andere Anomalie bewirkt, daß die Bewegung des Planeten in gewissen Teilen der Ekliptik schneller, in anderen langsamer vor sich geht. Bei der Sonne, wo es nur diese eine Anomalie gibt, kann man sie sehr gut durch ein Exzentermodell darstellen.

Um nun beide Anomalien zu erhalten, hat man die beiden Modelle miteinander zu kombinieren. So hat PTOLEMAIOS es jedenfalls getan und nach seinen eigenen, in § 2 zitierten Worten auch einige seiner Vorgänger. Man würde also zunächst einen Epizykel annehmen, dessen Mittelpunkt M mit gleichmäßiger Geschwindigkeit einen Exzenter durchläuft.

Es gibt verschiedene Mittel, die Exzentrizität und den Epizykelradius zu bestimmen. Die Exzentrizität bestimmt man bei den oberen Planeten am besten durch Beobachtung der Oppositionen. Wenn der Planet in P in Opposition zur mittleren Sonne steht, so fällt die Richtung EM mit der Richtung EP , die man beobachten kann, zusammen (Fig. 3). Hat man so drei Richtungen EM beobachtet, so kann man nach APOLLONIOS die Exzentrizität und die Richtung des Apogeums berechnen.

Als nächstes bestimmt man nun den Epizykelradius, etwa durch Beobachtung der Stillstände unter Benutzung der Sätze von APOLLONIOS. Nun stellt sich aber heraus, daß der Epizykelradius, den man annehmen muß, um die Planetenpositionen in der Nähe des Apogeums A richtig darzustellen, bedeutend größer ist (besonders für Mars) als in der Nähe des Perigeums. Der Fehler ist eben, daß der Punkt E zu weit vom Mittelpunkt Z entfernt ist. Würde man die Strecke ZE in E' halbieren und die Erde in E' stellen, so würde die Anomalie in bezug auf die Sonne richtig herauskommen, aber die Anomalie in bezug auf die Ekliptik wäre dann wieder zu klein. Dieser Übelstand kann durch Einführung eines Ausgleichspunktes G im Abstand

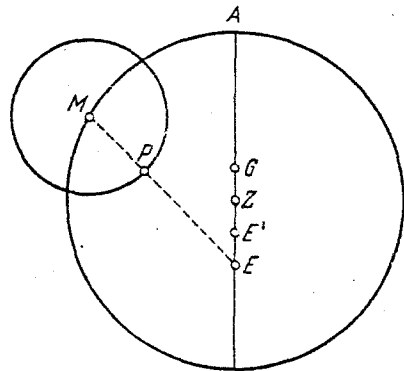


Fig. 3

$$GZ = ZE' = E'E$$

behalten werden. Wenn nämlich die Bewegung des Epizykelmittelpunktes M von G aus gleichmäßig erscheint und von E' aus beobachtet wird, so ist die Bewegung fast dieselbe als wenn sie von Z aus gleichmäßig erscheint und von E aus beobachtet wird.

In dieser Weise könnte man, durch „trial and error“, auf die Idee des Ausgleichspunktes gekommen sein. Wenn man dann versucht hat, auf Grund dieser Theorie Tafeln aufzustellen, die keine trigonometrische Rechnung, sondern nur Interpolationen, Additionen, Subtraktionen und Halbierungen erfordern, so könnte ein hervorragender Mathematiker wie APOLLONIOS sehr wohl die persisch-indische Rechenmethode gefunden haben.

Es fragt sich nun, ob es auch möglich ist, ohne die geometrische Idee des Ausgleichspunktes, rein durch Herumprobieren mit trigonometrischen Funktionen und Vergleich mit der Beobachtung, auf die persisch-indische Rechenvorschrift zu kommen. Vielleicht ist es möglich, aber ich halte es für sehr unwahrscheinlich, daß man so verfahren ist. In den Schriften von PTOLEMAIOS, ALBATTANI, KOPERNIKUS und KEPLER habe ich keine einzige Parallele dazu gefunden. Immer

wurde zuerst das geometrische Modell so lange modifiziert, bis es zur Erfahrung stimmte; dann erst wurden auf Grund des Modells exakte oder Näherungsformeln zur Berechnung der Planetenörter entwickelt.

Dieses Verfahren entspricht auch am meisten der wissenschaftlichen Zielsetzung der Griechen. Die Babylonier haben weitgehend mit empirischen Funktionen, mit arithmetischen Reihen bis zur dritten Ordnung gearbeitet, die sie möglichst gut den Beobachtungen angepaßt haben. Für die Griechen aber war das erste Ziel, „durch Zusammenstellung von gleichmäßigen Kreisbewegungen die Erscheinungen zu retten“. Wenn man die geometrische Theorie einmal hatte, wurden natürlich auch Tafeln zum Gebrauch der Astrologen berechnet, wie die Tafeln des *Almagest* oder die Handlichen Tafeln des *PTOLEMAIOS*. Am Anfang stehen aber stets geometrische Theorien, wie die des platonischen *TIMAIOS*, des *EUDOXOS*, des *HIKETAS*, des *KALLIPPOS*, des *HERAKLEIDES VON PONTOS*¹⁰, des *ARISTARCHOS*, des *APOLLONIOS*, des *HIPPARCHOS* und des *PTOLEMAIOS*.

Indische Trigonometrie

Die indischen Sinustafeln tabulieren nicht $\sin x$, sondern die „halbe Sehne“ $R \sin x$, wobei R ein beliebig gewählter Radius ist. Bei *ĀRYABHATA* (*Āryabhaṭīya* I 10) und im *Sūryasiddhānta* (II 15) ist R so gewählt, daß für kleine Winkel die halbe Sehne gleich dem (in Minuten ausgedrückten) Winkel ist, z. B.

$$R \sin 225' = 225'.$$

Zu diesem Zweck muß man R so wählen, daß der halbe Kreisumfang πR gleich $180^\circ = 10800'$ ist, also

$$R = \frac{10800}{\pi}.$$

Der Wert von π , den die indischen Astronomen immer annehmen, ist nach *Āryabhaṭīya* II 10

$$\pi = 3,1416.$$

*BHĀSKARA*¹¹ erklärt dazu, der Wert $\pi = 22/7$ sei für die Praktiker genügend; aber der genaue Wert sei $3927/1250$. Nun ist $22/7$ bekanntlich der Wert des *ARCHIMEDES*. *EUTOKOS* schreibt in seinem Kommentar zu der Kreismessung des *ARCHIMEDES*:

„*APOLLONIOS VON PERGA* löste dasselbe Problem in seinem *Okytokion*, wobei er andere Zahlen benutzte und die Approximation genauer machte ... aber das Ziel des *ARCHIMEDES* war, einen Näherungswert für den praktischen Gebrauch zu finden ...“. *EUTOKIOS* erwähnt weiter Leute, die „Multiplikationen und Divisionen von Myriaden“ benutzten, um genauere Werte des Verhältnisses des Kreisumfanges zum Durchmesser zu finden.

¹⁰ Für die Systeme von *TIMAIOS*, *HIKETAS* und *HERAKLEIDES* siehe B. L. VAN DER WAERDEN, *Die Astronomie der Pythagoreer*. Amsterdam: N.-Holland Publishing Co. 1951.

¹¹ *COLEBROOKE*, H. TH.: *Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanscrit of BRAHMEGUPTA and BHASKARA*, p. 87. London 1817.

Die Stelle bei BHĀSKARA, wo neben dem genauen Wert $3927/1250 = 3,1416$ die Näherung $22/7$ erwähnt wird, die „für den Praktiker genügend“ sei, entspricht so genau den Worten des EUTOKIOS, daß ich eine gemeinsame Quelle annehmen möchte. Dann aber muß der Wert 3,1416 dem APOLLONIOS zugeschrieben werden. Der Nenner dieser Zahl ist eine Myriade (10000) und auch EUTOKIOS spricht von „Multiplikationen und Divisionen von Myriaden“.

Dividiert man 10800 durch 3,1416 und rundet, wie ĀRYABHATA es in seiner Sinustafel immer tut, auf ganze Minuten, so erhält man für den „Sinus totus“

$$R = 3438$$

wie ĀRYABHATA es auch angibt. Es ist sehr gut möglich, daß das Prinzip dieser Sinustafel auf APOLLONIOS zurückgeht.

So rundet sich das Bild, das wir uns von dem großen Mathematiker und Astronomen APOLLONIOS machen können. Sein Werk war nicht nur in der exakten Mathematik, sondern auch in der Approximationsmathematik bahnbrechend. Er war wahrhaftig der Vater der mathematischen Astronomie.

Mathematisches Institut der Universität
Zürich

(Eingegangen am 3. Juni 1960)