

ZWEITER BAND

ANTIKE
UND
GEGENWART

5342 auf
WAERDEN, B.L. v.d.
1978.

WAERDEN B. L. VAN DER, *Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie* : AIIES XVIII 1977-78 343-357. | Die Postulate 1-3 bei Euklid, sowie die Axiome 1-3 und 7-8, die Konstruktionen 1,1-3 ; 1,9-12 und 1,22-23 und Lehrsätze 1,4 ; 1,7-8 und 1,26 sowie 1,5-6 waren wahrscheinlich bereits in den Elementen des Hippokrates von Chios (um 430 vor Chr.) so formuliert, wie wir sie bei Euklid finden. Dabei kann man die Axiome 1-3 und 7-8 wohl schon den Pythagoreern zuschreiben.

11861

Die Postulate und Konstruktionen in der frühgriechischen Geometrie

B. L. VANDER WAERDEN

1. Einleitung

Die Analyse von E. NEUENSCHWANDER¹ hat ein neues Licht auf die Entstehungsgeschichte der ersten vier Bücher der Elemente EUKLIDS geworfen. Sie hat gezeigt, daß das zweite und das vierte Buch in allen Hauptsachen von den PYTHAGOREERN herrühren und daß auch im dritten Buch große Teile den PYTHAGOREERN zuzuschreiben sind. Es muß eine Abhandlung aus der Schule der PYTHAGOREER gegeben haben, in der die Gedankengänge der Bücher 2, 3 und 4 systematisch entwickelt und begründet wurden. EUDEMOS hat diese Abhandlung gekannt und einen ganzen Beweis daraus zitiert. Den Namen des Autors dieser Abhandlung kannte EUDEMOS aber nicht: er schreibt den von ihm zitierten Beweis und einige andere Entdeckungen einfach „den PYTHAGOREERN“ zu.

Gewisse Teile des ersten Buches waren den PYTHAGOREERN ebenfalls bekannt, aber andere Teile, insbesondere die, in denen von Parallelogrammen die Rede ist, haben nach NEUENSCHWANDER erst zur Zeit des EUDOXOS ihre heutige Gestalt erhalten. Das Parallelenpostulat (Post. 5) und die darauf beruhende Parallelentheorie stammen vermutlich in der heutigen Form aus der Zeit des EUDOXOS².

Die folgende Arbeit fußt auf den Ergebnissen von NEUENSCHWANDER, geht aber in der Analyse der älteren Teile noch weiter. Es soll gezeigt werden, daß die Konstruktionspostulate 1–3 und die darauf fußenden Konstruktionen I 1–3, I 9–12 und I 22–23 zusammen mit den Kongruenzsätzen I 4, I 7–8 und I 26 und den Sätzen über gleichschenklige Dreiecke (I 5–6) eine Einheit bilden. Diese Postulate und Propositionen sind durch logische Verknüpfungen und wörtliche Zitate miteinander verknüpft. Zu dieser Einheit gehören auch die Axiome 1–3 und 7–8, die in den Beweisen zum Teil wörtlich zitiert werden. Wahrscheinlich waren die genannten Postulate, Axiome, Konstruktionen und Lehrsätze in den „Elementen“ des HIPPOKRATES von Chios (um 430 vor Chr.) bereits so formuliert, wie wir sie bei EUKLID finden.

¹ E. NEUENSCHWANDER: Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, *Archive for History of Exact Sciences* 9 (1973), S. 325–380.

² Siehe auch E. NEUENSCHWANDER: Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids, *Archive for History of Exact Sciences* 14 (1975), S. 91–125.

Schwieriger ist es, das Verhältnis dieser „Elemente“ zu dem etwas älteren Werk der PYTHAGOREER zu klären. Es ist sehr gut möglich, daß die PYTHAGOREER schon Axiome formuliert und ihre Geometrie deduktiv aus den Axiomen hergeleitet haben, aber die Konstruktionspostulate, in denen das Ziehen und Verlängern von Geraden und das Ziehen von Kreisen unter ganz bestimmten, eng umgrenzten Bedingungen verlangt wird, hat wohl erst HIPPOKRATES von Chios aufgestellt. Die Konstruktionen I 1–3, I 9–12 und I 22–23 wurden von ihm so eingerichtet, daß darin nur die in den Postulaten 1–3 geforderten Grundkonstruktionen verwendet wurden.

Die eben formulierten Thesen habe ich im Dezember 1975 in Oberwolfach vorgetragen und begründet. Am Ende des gleichen Monats erschien eine Arbeit von SEIDENBERG³, die sich in vielen Punkten mit meiner Arbeit berührt. Auch SEIDENBERG faßt die Postulate 1–3 nicht als Existenzaussagen, sondern als Konstruktionspostulate auf, und er hält ebenfalls die Postulate 4 und 5 für spätere Zusätze. Ich freue mich über die grundsätzliche Übereinstimmung. Die weiteren, sehr interessanten Ausführungen SEIDENBERGS über Beweise und Konstruktionen in den Sulvasutras fallen außerhalb des Rahmens der vorliegenden Arbeit.

2. Die Postulate

Die ersten drei Postulate EUKLIDS sind Konstruktionspostulate. Sie lauten in wörtlicher Übersetzung:

1. Gefordert soll sein, von jedem Punkt zu jedem Punkt eine gerade Linie zu ziehen,
2. und eine begrenzte Gerade zusammenhängend gerade zu verlängern,
3. und mit jedem Mittelpunkt und Abstand einen Kreis zu zeichnen.

Von völlig anderer Art sind die letzten zwei Postulate. Gefordert wird jetzt nicht eine Handlung, sondern ein Sein:

4. *καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι.*

Das heißt etwa:

4. Und daß alle rechten Winkel gleich sind.

Der Hauptsatz, der nur im ersten Postulat steht und nachher nicht wiederholt wird, lautet nach wie vor *Ἡτήθηω*: gefordert soll sein. In den ersten drei Sätzen richtet die Forderung sich an den Schüler: Er soll ziehen, verlängern oder zeichnen. Diese drei Grundkonstruktionen soll er ausführen können, damit er alle späteren Konstruktionen nachvollziehen kann. Die vierte Forderung richtet sich aber an die rechten Winkel: sie sollen gleich sein. Grammatikalisch ist die Satzkonstruktion die gleiche, aber der Sinn des Wortes „fordern“ ist ein völlig anderer.

Das fünfte Postulat, das berühmte EUKLIDISCHE Parallelenaxiom, ist in seiner Formulierung ähnlich wie das vierte. Von zwei Geraden wird unter gewissen Bedingungen gefordert, sich zu treffen.

³ A. SEIDENBERG: Did Euclid's Elements, Book I, Develop Geometry Axiomatically?, *Archive for History of Exact Sciences* **14** (1975), S. 263–295.

Die ersten drei Postulate sind aus einem Guß. Die in ihnen formulierten Grundkonstruktionen bilden die notwendige Grundlage für die anschließenden Konstruktionen des ersten Buches I 1–3, I 9–12 und I 22–23. Da diese Konstruktionen wiederum die Grundlage der Konstruktionen im zweiten, dritten und vierten Buch bilden, müssen sie alt sein. „Alt“ heißt hier: sie waren zur Zeit von ARCHYTAS, PLATON und EUDOXOS schon bekannt.

Das fünfte Postulat ist nach NEUENSCHWANDER¹ und IMRE TÓTH⁴ jüngerem Datums: es wurde vermutlich erst in der Schule von EUDOXOS oder noch später so formuliert, wie wir es bei EUKLID finden.

Aus diesen Gründen nehme ich an, daß es vor EUDOXOS in den damals benutzten Elementarbüchern nur drei Postulate gab und daß die Postulate 4 und 5 erst später angehängt wurden.

Wir werden sehen, daß PROKLOS in seinem Euklidkommentar nur die Postulate 1–3 als echte Postulate anerkennt. Da EUKLID fünf Postulate hat, muß PROKLOS wohl eine andere Quelle als EUKLID benutzt haben. Ich vermute, daß diese Quelle ein Werk von GEMINOS war, das PROKLOS auch sonst in seinem Euklidkommentar ausgiebig benutzt hat.

3. Proklos über die Postulate

PROKLOS schöpft in seinem Euklidkommentar hauptsächlich aus vier Quellen, nämlich EUKLID, GEMINOS, PAPPOS und PLATON. Zwar zitiert er auch andere Autoren, aber diese Zitate stehen meistens innerhalb von längeren Abschnitten aus GEMINOS oder PAPPOS. GEMINOS wird insgesamt mehr als 20mal zitiert. Das Werk des GEMINOS, das PROKLOS so ausgiebig benutzt hat, war nach TANNERY⁵ eine Art Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften in mindestens sechs Büchern. Einige Zitate handeln von den Wissenschaften im allgemeinen, andere mehr speziell von der Geometrie oder von der Astronomie. Man hat den Eindruck, daß PAPPOS sich mehr für bestimmte geometrische Lehrsätze und Begriffe interessierte, GEMINOS aber mehr für die Prinzipien der Geometrie und der Wissenschaften im allgemeinen.

Besonders häufig, nämlich siebenmal, wird GEMINOS in dem Kapitel des Euklidkommentars zitiert, der von den Postulaten und Axiomen handelt (PROKLOS, Buch 3, p. 178–198 FRIEDLEIN). Beim Schreiben dieses Kapitels hat PROKLOS offenbar den GEMINOText dauernd vor Augen gehabt.

Gleich am Anfang dieses Kapitels bespricht PROKLOS den Unterschied zwischen Postulaten und Axiomen. Er vergleicht die Postulate mit Problemen und die Axiome mit Theoremen. In einem Postulat wie in einem Problem wird verlangt, etwas zu *konstruieren*, während ein Axiom wie ein Theorem eine *Einsicht* formuliert.

Dieselbe Auffassung wird nachher (p. 182) noch einmal formuliert und ausdrücklich GEMINOS zugeschrieben. PROKLOS schreibt nämlich:

⁴ I. TÓTH: Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum. *Archive for History of Exact Sciences* 3 (1967), S. 249–422.

⁵ P. TANNERY: *La géométrie grecque* (Paris 1887), insbesondere p. 18–19.

Ebenso wie ein Problem sich unterscheidet von einem Theorem, so ein Postulat von einem Axiom, obwohl beide unbewiesen bleiben. Ein Postulat wird angenommen, weil es leicht zu konstruieren ist, und ein Axiom wird angenommen wegen der leichten Einsicht. In dieser Weise unterscheidet GEMINOS die Postulate von den Axiomen.

Anschließend gibt PROKLOS zwei abweichende Meinungen über den Unterschied zwischen Postulaten und Axiomen wieder. Eine dieser Meinungen, nämlich die von ARISTOTELES, hatte er früher (p. 76) schon wiedergegeben. Jetzt (p. 182–183) setzt er noch einmal die drei sich widersprechenden Ansichten einander gegenüber, ohne selbst Stellung zu nehmen.

PROKLOS bemerkt ganz richtig, daß nach der ersten Ansicht – der von GEMINOS – die sogenannten Postulate 4 (Gleichheit der rechten Winkel) und 5 (Parallelenpostulat) keine echten Postulate sind. In der Folge sagt er noch zweimal (p. 184 und 185), daß es nach GEMINOS nur drei echte Postulate gibt, nämlich die Konstruktionspostulate 1–3, in denen das Ziehen von geraden Linien und Kreisen gefordert wird. GEMINOS ist also mit der Aufzählung der fünf Postulate, so wie sie sich in den meisten Euklidhandschriften findet, nicht einverstanden.

Wie SEIDENBERG bemerkt hat (³, p. 279) gibt es auch Euklidhandschriften, die nur drei Postulate bringen und die sogenannten Postulate 4 und 5 unter die „allgemeinen Einsichten“ klassifizieren. GEMINOS stand also mit seiner Ansicht nicht allein: es gab auch andere, die nur die drei Konstruktionspostulate als echte Postulate anerkannten. Ich vermute, daß sie damit einer alten Tradition aus der Zeit vor EUDOXOS folgten. Von der sprachlichen Seite her sind wir schon früher zu dem Schluß gelangt, daß die „Postulate“ 4 und 5 vermutlich nachträglich angehängt wurden.

Nach PROKLOS (p. 76 FRIEDLEIN) betrachtete ARISTOTELES die Aussage „Alle rechten Winkel sind gleich“ als typisches Beispiel eines Postulates. Die Aufnahme der Postulate 4 und 5 scheint also zur Zeit des ARISTOTELES schon vollzogen worden zu sein. Andererseits erhielt die Parallelentheorie, wie NEUENSCHWANDER nachgewiesen hat, erst in der Schule des EUDOXOS ihre heutige, auf Postulat 5 beruhende Form. Die sprachlich so merkwürdigen Postulate 4 und 5 wurden also vermutlich in der Zeit zwischen EUDOXOS und ARISTOTELES an die ersten drei angehängt.

Nach PROKLOS (p. 67) verfaßte THEUDIOS von Magnesia gerade in dieser Zeit eine neue Zusammenstellung der „Elemente“. Es ist sehr gut möglich, daß die uns heute vorliegende Formulierung der Postulate und der „allgemeinen Einsichten“ von THEUDIOS herrührt.

4. Hypothesen, Postulate und Axiome

In der zweiten Vorrede zu seinem Euklidkommentar (p. 76 FRIEDLEIN) sagt PROKLOS ganz richtig, daß EUKLID am Anfang seines Werkes die Prinzipien auseinandergesetzt hat. Dann fährt er fort:

Sodann unterscheidet er (EUKLID) diese allgemeinen Prinzipien in Hypothesen, Postulate und Axiome.

Bei EUKLID heißen die drei Arten von Prinzipien anders, nämlich:

Definitionen (*ὅροι*),

Postulate (*ἀιτήματα*),

Allgemeine Einsichten (*κοίνας ἔννοιαι*).

PROKLOS bringt die beiden Einteilungen teilweise zur Übereinstimmung, indem er „Axioma“ und „allgemeine Einsicht“ für ein und dasselbe erklärt. Jedoch der Unterschied in der Terminologie ist sehr bemerkenswert.

Die Bezeichnung der Prinzipien als „Hypothesen“, „Postulate“ und „Axiome“ ist bestimmt älter als die EUKLIDISCHE Terminologie. Zum Beleg dafür möchte ich PLATON und ARISTOTELES zitieren.

PLATON sagt im Staat 510 C:

Ich denke, du weißt, daß die Leute, die sich mit der Geometrie und den Rechnungen und ähnlichen Dingen beschäftigen, ihren Untersuchungen bestimmte Voraussetzungen zugrunde legen, wie z.B. das Ungerade und das Gerade, die Figuren und die drei Arten von Winkeln und anderes, was damit verwandt ist. Diese Dinge machen sie zu *Hypothesen*, als ob sie für jeden klar wären, und sie halten es nicht für nötig, sich selbst oder anderen Rechenschaft darüber zu geben ...

Die Beispiele von Hypothesen, die PLATON hier gibt, sind

- 1) das Ungerade und das Gerade,
- 2) die Figuren,
- 3) die drei Arten von Winkeln.

Die drei „Hypothesen“ sind nicht Aussagen, sondern *Begriffe*. Die Hypothesen, von denen PLATON redet, sind also die Grundbegriffe der Arithmetik und der Geometrie. Nimmt man das Wort „Hypothese“ in diesem Sinn, so kann man die Aussage des PROKLOS, die Prinzipien der Geometrie seien „Hypothesen, Postulate und Axiome“ besser verstehen.

Das Wort Axioma kommt bei ARISTOTELES mehrfach vor. In der Metaphysik 1005a spricht ARISTOTELES von den „sogenannten Axiomen in den mathematischen Wissenschaften“. Er bemerkt, daß alle die Axiome gebrauchen, weil sie für alles Seiende gelten, aber daß alle sie jeweils nur innerhalb eines bestimmten Teilgebiet verwenden, auf das sich ihre Beweise gerade beziehen. An einer späteren Stelle (1061b) wiederholt er dasselbe noch einmal und zitiert als Beispiel das Axiom „Wenn von gleichen (Größen) gleiche abgezogen werden, sind die Reste gleich“, das ganz allgemein für alle Größen gilt, aber jeweils nur auf eine bestimmte Art Größen, z.B. auf Strecken oder Winkel oder Zahlen angewandt wird. Die Formulierung dieses Axioms bei ARISTOTELES ist fast wörtlich dieselbe wie bei EUKLID.

An einer anderen Stelle (Analyt. Post. 72 A 14) schreibt ARISTOTELES:

Das Axiom unterscheidet sich von der Thesis dadurch, daß jeder, der irgend etwas wissenschaftlich begreifen will, in seinem Besitz sein muß.

Aus diesen Zeugnissen sehen wir, daß Axiome von der Art des von ARISTOTELES zitierten Gleichheitsaxioms zu seiner Zeit in den mathematischen Wissenschaften (nicht nur in der Geometrie) gang und gäbe waren und daß sie zu

dieser Zeit schon Axiomata genannt wurden. Ferner sehen wir, daß der Wortlaut des 3. Axioms der Elemente EUKLIDS vor-Euklidisch ist.

Unsere These, wonach die Bezeichnung der Prinzipien als „Hypothesen“, „Postulate“ und „Axiome“ aus der Zeit vor EUKLID stammt, erscheint durch die hier angeführten Zeugnisse genügend belegt.

5. Die Axiome bei Proklos

Wenn PROKLOS Definitionen oder Theoreme aus den Elementen EUKLIDS zitiert, stimmt seine Formulierung meistens genau mit dem aus den Handschriften bekannten Text überein. Um so mehr fällt es auf, daß seine Formulierung der Axiome völlig von der üblichen verschieden ist. PROKLOS bringt nur fünf „Axiomata“, nämlich:

1. Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich (=EUKLID, Ax.1).
2. Und wenn Gleiche zu Gleichen hinzugefügt werden, sind die Ganzen gleich (=EUKLID, Ax.2).
3. Und wenn sie von Gleichen weggenommen werden, sind die Reste gleich (=EUKLID, Ax.3).
4. Und das Ganze ist größer als der Teil (=EUKLID, Ax.8).
5. Und was sich deckt, ist einander gleich (=EUKLID, Ax.7).

Die Axiome 4 und 5 von PROKLOS erscheinen bei EUKLID in umgekehrter Reihenfolge als „Allgemeine Einsichten“ 8 und 7. Der Wortlaut ist bei PROKLOS etwas kürzer als bei EUKLID. Die „allgemeinen Einsichten“ 4—6 und 9 sind bei PROKLOS weggefallen. Wie sind diese Abweichungen zu erklären?

Wir haben gesehen, daß PROKLOS in diesem Kapitel dauernd den Text des GEMINOS vor Augen gehabt hat. Wie GEMINOS, so verwirft auch PROKLOS die Postulate 4 und 5, wobei er sich bei Post. 4 auf GEMINOS, bei Post. 5 auf PTOLEMAIOS beruft. Könnte es nicht sein, daß er sich bei der Aufzählung der Axiome ebenfalls nach GEMINOS gerichtet hat?

Die Bezeichnung „Axiomata“ ist vor-Euklidisch, denn ARISTOTELES benutzt sie, wie wir gesehen haben. ARISTOTELES zitiert Axiom 3, also ist dieses Axiom vor-Euklidisch. Die Axiome 1—3 gehören offensichtlich zusammen und sie werden in der Proportionenlehre des fünften Buches, die allgemein EUDOXOS zugeschrieben wird, dauernd benutzt, also sind diese drei Axiome vor-Euklidisch. Nachher werden wir sehen, daß auch die Axiome 4 und 5 des PROKLOS (=8 und 7 bei EUKLID) vor-Euklidisch sind. Wir können also vermuten, daß GEMINOS die Axiomata 1—5 einer vor-Euklidischen Quelle entnommen und daß PROKLOS sie wiederum von GEMINOS übernommen hat.

Es wäre natürlich auch möglich, daß EUKLID ursprünglich nur 5 Axiome gehabt hat und daß die übrigen vier spätere Zusätze sind. Dann sind aber die Vertauschung der Axiome 4 und 5 und die sprachlichen Abweichungen zwischen PROKLOS und EUKLID schwer zu erklären.

6. Die Konstruktionen I 1–3

Die ersten drei Propositionen der Elemente sind Konstruktionen, und zwar

- I 1. Über einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten.
- I 2. An einem gegebenen Punkte eine einer gegebenen Strecke gleiche Strecke hinzulegen.
- I 3. Wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, von der größeren eine der kleineren gleiche Strecke wegzunehmen.

Bei der Konstruktion I 2 wird I 1 gebraucht und bei I 3 wiederum I 2. Die drei Konstruktionen gehören also zusammen.

Ein praktischer Zeichner würde das Problem I 3 viel einfacher lösen als EUKLID es tut. Wenn eine kleinere Strecke AB und eine größere CD gegeben sind, würde er um C einen Kreis mit Radius AB schlagen und diesen mit CD schneiden. Damit wäre das Problem I 3 mit einem Schlag gelöst, ohne I 1 und I 2 zu gebrauchen.

Warum macht der Autor der Konstruktionen I 1–3 es nicht so? Offenbar weil er nur die Konstruktionspostulate 1–3 verwenden will und nichts mehr. Das Postulat 3 verlangt, um einen gegebenen Punkt C mit einem gegebenen Abstand CE einen Kreis zu schlagen. Der Radius oder „Abstand“ CE selbst muß gegeben sein, nicht nur eine ihm gleiche Strecke AB .

PROKLOS gibt zur Konstruktion I 2 einen Kommentar, der im wesentlichen mit der hier gegebenen Erklärung übereinstimmt.

Wir sehen also, daß die Konstruktionen I 1–3 mit großer Kunst so eingerichtet sind, daß darin nur die Postulate 1–3 verwendet werden und sonst nichts. Die Konstruktionen I 1–3 sind also auf die Postulate 1–3 abgestimmt. Aber auch umgekehrt: die Postulate sind so eingerichtet, daß sie für die Konstruktionen des ersten Buches gerade hinreichen. Ich kann mir das nur so erklären, daß die Postulate und die Konstruktionen vom selben Autor herrühren.

Diese Erklärung stimmt auch mit dem überein, was man normalerweise erwarten würde. Ein Autor, der ein System von Axiomen oder Postulaten aufstellt, wird auch die ersten Folgerungen daraus ziehen: dazu sind die Axiome ja da. So ist es nicht nur bei NEWTON, PASCH, HILBERT und KOLMOGOROFF, sondern auch bei ARCHIMEDES in der Abhandlung „Von Kugel und Zylinder“ und bei ARISTARCHOS von Samos in der Abhandlung über die Abstände von Sonne und Mond⁶.

Von dieser Erkenntnis ausgehend, können wir nun weitere Teile des ersten Buches untersuchen.

7. Die Propositionen I 4–6

E. NEUENSCHWANDER¹ hat die wichtige Bemerkung gemacht, daß das Abtragen von Strecken am Anfang des Buches I durch ein anderes Verbum

⁶ TH. HEATH: *Aristarchos of Samos, The Ancient Copernicus*, Oxford 1913.

ausgedrückt wird als nachher in den Büchern I bis IV. Im Problem I3 wird verlangt, wenn zwei ungleiche Strecken gegeben sind, *von der größeren eine der kleineren gleiche Strecke wegzunehmen* (*ἀφαιλεῖν*, Aorist zu *ἀφαιρέω*). In den ersten Anwendungen, nämlich in I5 und I6, wird diese umständliche Formulierung fast wörtlich wiederholt. In I9 wird in einer einfacheren Situation, wo die Anwendung der Konstruktion I3 unnötig ist, dasselbe Verbum in der Form *ἀφηρήσθω* verwendet. Jedoch von I11 an wird in den planimetrischen Büchern immer eine einfachere Formulierung verwendet:

(I11) *καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ* es möge $\Gamma\Delta$ gleich ΓE hingelegt sein.

Wie NEUENSCHWANDER ganz richtig bemerkt, ist die Formulierung mit *ἀφαιρέω* umständlicher, aber präziser als die mit *κείσθω*. Beim „Hinlegen“ einer Strecke stellt man sich diese gewissermaßen als starren Gegenstand vor, den man aufnehmen und anderswo wieder hinlegen kann. Durch die Konstruktion I3 wird diese naive Anschauung überwunden: es wird gezeigt, daß man durch alleinige Anwendung der Postulate 1–3 eine Strecke von einer größeren „wegnehmen“ kann. Die wörtlichen Zitate von I3 in den Beweisen der Propositionen I5–6 zeigen, daß diese Propositionen sich direkt an I3 anschließen. Wir müssen als wahrscheinlich annehmen, daß I5–6 und I9 vom gleichen Autor stammen wie I1–3.

Der Kongruenzsatz I4 wird in I5 wörtlich zitiert. Er lautet:

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gleich zwei Seiten sind und der Winkel dem Winkel gleich ist, der von den zwei gleichen Strecken umfaßt wird, dann muß in ihnen auch die Grundlinie der Grundlinie gleich sein, das Dreieck muß dem Dreieck gleich sein und die übrigen Winkel müssen den übrigen Winkeln jeweils gleich sein, nämlich immer die, denen gleiche Seiten gegenüber liegen.

Die Formulierung ist wieder sehr umständlich und ganz präzise. Der Begriff „kongruent“ kommt nicht vor. Wenn gesagt wird, daß die Dreiecke einander „gleich“ sind, so ist damit nur die Flächengleichheit gemeint.

Zum Beweis wird das eine Dreieck mit dem anderen zur Deckung gebracht. Dreimal wird Axiom 7 „Was (sich) deckt, ist einander gleich“ angewandt. EUKLID hat bekanntlich die Tendenz, die „Deckungsmethode“ möglichst sparsam anzuwenden; in diesem Fall ließ sie sich aber nicht vermeiden.

8. Die fünf Axiome

Im Beweis von I4 wird, wie gesagt, Axiom 7 angewandt. Die Anwendung ist unvermeidlich. Man muß wohl annehmen, daß Axiom 7 um eben dieser Anwendung willen aufgestellt wurde. So kommen wir (ähnlich wie bei den Postulaten) zu dem Schluß, daß der Autor des Beweises von I4 derselbe ist, der Axiom 7 aufgestellt hat.

Axiom 1: „Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich“, wird in den Beweisen von I1 und I2 wörtlich zitiert. Wir können also dieses Axiom demselben Autor zuschreiben.

Axiom 3: „Wenn von Gleichem Gleiches weggenommen wird, sind die Reste

gleich“ wird in den Beweisen von I 2 und I 5 wesentlich benutzt. Also müssen wir wohl auch dieses Axiom demselben Autor zuschreiben. Das Axiom wird schon von ARISTOTELES erwähnt, also muß dieser Autor vor der Zeit des ARISTOTELES gelebt haben. Bemerkenswert ist, daß in diesem Axiom dasselbe Verbum $\alpha\varphiαιρέω$ vorkommt wie in I 3 und in den Beweisen von I 5–6 und I 9.

Axiom 2 lautet, wie erwähnt, bei PROKLOS so: „Wenn Gleiche zu Gleichen hinzugefügt werden, sind die Ganzen gleich“. Das Axiom bildet bei PROKLOS mit dem Axiom 3 eine sprachliche Einheit: das Subjekt ἴσα ist beiden Axiomen gemeinsam und wird in Axiom 3 nicht wiederholt. Also wird auch Axiom 2 dem gleichen Autor zuzuschreiben sein.

Axiom 8: „Das Ganze ist größer als der Teil“ wird im Beweis von I 6 wesentlich benutzt. Also war auch dieses Axiom dem Autor von I 1–6 bekannt. Zusammenfassend können wir schließen:

Die Postulate 1–3, die von PROKLOS formulierten Axiome 1–5 und die Propositionen I 1–6 bilden eine festgefügte Einheit, die höchst wahrscheinlich von einem Autor aus der Zeit vor ARISTOTELES herrührt.

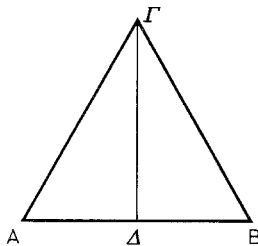
Können wir noch etwas weiter kommen? Ich glaube ja.

8. Die Propositionen I 7–11

Die Proposition I 7 ist ein Hilfssatz zum Beweis des zweiten Kongruenzsatzes I 8. Dieser ist analog zu I 4 formuliert, muß also wohl demselben Autor zugeschrieben werden. In der nächsten Konstruktion I 9 wird I 8 an entscheidender Stelle benutzt. Die Propositionen I 7–9 bilden also eine Einheit.

In I 9 wird zum letzten Mal das Abtragen einer Strecke durch das Verbum $\alpha\varphiαιρέω$ ausgedrückt, also bildet I 9 auch sprachlich eine Einheit mit I 1–8.

In der nächsten Konstruktion I 10 wird das gleichseitige Dreieck verwendet. Die Aufgabe lautet: Eine gegebene Strecke AB zu halbieren. Auf AB wird ein gleichseitiges Dreieck ABI errichtet, sodann wird der Winkel bei I halbiert. Eine unnötig komplizierte Konstruktion, die auf I 1 und I 9 beruht. Der Autor dieser Konstruktion ist wohl derselbe wie der Autor der Konstruktionen I 1–3 und I 9.



Das Problem I 11 lautet: Zu einer gegebenen Geraden von einem auf ihr gegebenen Punkte aus im rechten Winkel eine gerade Linie zu ziehen. In der Konstruktion wird wieder das gleichseitige Dreieck verwendet. Ich möchte daher I 11 noch zur Gruppe der „alten“ Propositionen I 1–10 hinzunehmen,

obwohl im Beweis, wie oben bemerkt, das Abtragen einer Strecke durch

$$\kappa\epsilon\acute{\iota}\sigma\theta\omega\ \tau\eta\ \Gamma\Delta\ \acute{\iota}\sigma\eta\ \eta\ \Gamma E$$

ausgedrückt wird.

9. Die Konstruktionen I 12, I 22 und I 23

Das Problem I 12 lautet:

Auf eine gegebene unbegrenzte Gerade von einem gegebenen Punkte aus, der nicht auf ihr liegt, eine senkrechte gerade Linie zu ziehen.

Es fällt auf, wie sorgfältig eine unbegrenzte Gerade von einer begrenzten unterschieden wird. Ebenso wurde in den Postulaten 1 und 2 zuerst verlangt, zwischen zwei Punkten eine begrenzte Gerade zu ziehen und sodann, diese zu verlängern.

Zum Problem I 12 gibt PROKLOS den folgenden Kommentar:

Dieses Problem hat zuerst OINOPIDES untersucht, der es nützlich fand für die Astronomie. Er nannte die Senkrechte in altertümlicher Weise *κατὰ γνώμονα*, weil der Gnomon in rechten Winkeln zum Horizont steht.

Auch die Konstruktion I 23 wird von PROKLOS dem OINOPIDES zugeschrieben, diesmal unter Berufung auf EUDEMOS. Das Problem lautet:

I 23. An eine gegebene Gerade in einem Punkte auf ihr einen geradlinigen Winkel zu konstruieren, der einem gegebenen geradlinigen Winkel gleich ist.

Bei der Lösung dieses Problems wird die vorangehende Proposition I 22 benutzt und fast wörtlich zitiert; die beiden Propositionen I 22 und I 23 gehören also zusammen. Ferner wird derjenige Teil des Kongruenzsatzes I 8, der hier gebraucht wird, wörtlich zitiert, in folgender Weise:

Da hier zwei Seiten AF , FE entsprechend gleich ZA , AH sind und die Basis AE gleich der Basis ZH , so folgt, daß der Winkel AFE gleich dem Winkel ZAH ist.

Einfacher wäre es gewesen, zu sagen, daß die drei Seiten des Dreiecks ΓAE gleich den drei Seiten des Dreiecks AZH sind. Der Autor hat die kompliziertere Formulierung der Proposition I 8 gewählt. Überhaupt wird die Proposition I 8 im ersten, dritten und vierten Buch immer in derselben Form zitiert: Zwei Seiten gleich zwei Seiten und Basis gleich Basis.

Die Proposition I 23 beruht, wie gesagt, auf I 23. Im Beweis von I 22 wird ganz zu Anfang eine „in A begrenzte, nach E hin unbegrenzte Gerade AE “ angenommen. Zu den beiden Begriffen „begrenzte Strecke“ und „unbegrenzte Gerade“, die bereits in den Postulaten und in I 12 deutlich voneinander unterschieden wurden, kommt also jetzt der Begriff der einseitig begrenzten Gerade hinzu.

Zwischen den Propositionen I 12 und I 22 – 23 bestehen also dreierlei Beziehungen. Erstens wurden die Probleme I 12 und I 23 beide von OINOPIDES (um 440) zuerst gelöst. Zweitens beruhen die Lösungen beide auf dem

Kongruenzsatz I 8, der in den beiden Beweisen jedesmal in derselben umständlichen Weise zitiert wird. Drittens tritt in der Formulierung von I 12 der Begriff „unbegrenzte Gerade“ auf und im Beweis von I 22 der damit verwandte Begriff „nach einer Seite unbegrenzte Gerade“. Die drei Propositionen I 12, I 22 und I 23 gehören also zusammen.

10. Die Struktur des ersten Buches der Elemente

Im Abschnitt 7 haben wir gesehen, daß die drei Konstruktionenpostulate mit den fünf ältesten Axiomen und den Propositionen I 1–6 eine Einheit bilden.

Im Abschnitt 8 sahen wir, daß auch die Propositionen I 7–11 zu dieser Einheit gehören.

Aus Abschnitt 9 ergibt sich, daß die Propositionen I 12 und I 22–23 eng miteinander und mit I 8 zusammenhängen. Ferner sind die Konstruktionen I 11 und I 12 einander ganz ähnlich: in beiden wird unnötigerweise je eine Strecke nach I 9 halbiert.

Also folgt, daß die drei ältesten Postulate, die fünf ältesten Axiome und die Propositionen I 1–12 und I 22–23 alle miteinander eine Einheit bilden: ein festgefügtes Ganzes, aus dem man keinen Teil ausschneiden kann. Es gibt eine umständliche, aber präzise Terminologie für das Abtragen von Strecken, die nur in diesem Teil vorkommt. Auch die sorgfältige Unterscheidung zwischen Strecken, Halbgeraden und unbegrenzten Geraden findet man nur hier. Das Parallelenpostulat, das sehr wahrscheinlich späteren Datums ist, wird in diesem Teil des ersten Buches noch nicht benutzt.

SEIDENBERG³ geht noch etwas weiter und betrachtet I 1–23 zusammen mit den drei Postulaten 1–3 als ein Ganzes. Bei I 16–22 habe ich aber Zweifel.

Das erste Buch besteht aus drei Teilen. Der erste, ganz einheitliche Teil, in dem der Nachdruck auf Konstruktionen und Kongruenzsätzen liegt, wurde eben genügend charakterisiert. Der zweite Teil, der die Parallelentheorie enthält und teilweise auf dem Parallelenpostulat beruht, hat vermutlich erst in der Schule des EUDOXOS seine heutige Form erhalten.

Der dritte Teil am Schluß des ersten Buches besteht aus zwei Propositionen I 47 und I 48, die sicher (wenn man von den Beweisen absieht) ganz alt sind. I 47 ist nämlich der „Satz des PYTHAGORAS“ und I 48 dessen Umkehrung. Diese Sätze werden in den Mönchenquadraturen des HIPPOKRATES benutzt. Auch im zweiten, dritten und vierten Buch, die in der Hauptsache von den PYTHAGOREERN herrühren, wird der „Satz des PYTHAGORAS“ vielfach verwendet. Der Beweis dieses Satzes, den wir bei EUKLID finden, ist vielleicht neueren Datums, aber der Satz selbst war den PYTHAGOREERN und HIPPOKRATES bekannt.

11. Hippokrates von Chios

Teil I des ersten Buches besteht, wie wir gesehen haben, aus 3 Postulaten, 5 Axiomen und (mindestens) 14 Propositionen I 1–12 und I 22–23. Wer war der Autor dieses Teiles? Ich meine, es war HIPPOKRATES von Chios.

Erstes Argument. Nach PROKLOS⁷ war HIPPOKRATES von Chios (um 430) der erste, von dem man weiß, daß er „Elemente der Geometrie“ zusammenstellte. Als Anfang einer solchen Zusammenstellung würde sich „Teil 1“ vorzüglich eignen.

Zweites Argument. HIPPOKRATES war ein Systematiker. Am Anfang seiner Abhandlung über die Mönchchenquadraturen bereitete er sich nach der Mitteilung des EUDEMOS⁸ zuerst eine Grundlage ($\acute{\alpha}\rho\chi\eta$), indem er zwei Sätze über die Verhältnisse von Kreisen und Kreissegmenten aufstellte. Beweisen konnte er sie wahrscheinlich nicht, denn die „Exhaustionsmethode“, von EUDOXOS gab es damals noch nicht. HIPPOKRATES stellte die Sätze vermutlich ohne Beweis an die Spitze seiner Abhandlung. Ebenso stellte der Autor des „Teiles 1“ 3 Postulate und 5 Axiome an die Spitze.

Drittes Argument. HIPPOKRATES interessierte sich sehr für Ungleichungen. In seinen Mönchchenquadraturen bewies er sehr sorgfältig, daß gewisse Mönchchen größer, andere kleiner als ein Halbkreis sind. Der Autor unseres „Teiles 1“ interessierte sich ebenfalls für Ungleichungen, denn in der Formulierung des Problems I 22 („aus drei Strecken, die drei gegebenen gleich sind, ein Dreieck zu errichten“) stellt er ausdrücklich die Bedingung, daß je zwei von den gegebenen Strecken zusammen größer sein müssen als die dritte.

Viertes Argument. Zum Teil 1 gehören die beiden Konstruktionen I 12 und I 23, die nach PROKLOS von OINOPIDES gefunden wurden. HIPPOKRATES von Chios war etwas jünger als sein Landsmann OINOPIDES. Es war also ganz natürlich, daß er die Konstruktionen des OINOPIDES in seine „Elemente“ aufgenommen hat. Zur Begründung dieser Konstruktionen braucht man den Kongruenzsatz I 8, also ist anzunehmen, daß auch dieser in den „Elementen“ des HIPPOKRATES vorkam.

Ich stelle mir das Verhältnis zwischen OINOPIDES und HIPPOKRATES so vor. HIPPOKRATES lernte von OINOPIDES, wie man mit Zirkel und Lineal ein Lot fällen und einen Winkel übertragen kann. Er überlegte sich daraufhin, welche Postulate gerade hinreichen, um die wichtigsten planimetrischen Konstruktionen auszuführen. Er überlegte sich auch, welche Lehrsätze notwendig sind um die Richtigkeit der Konstruktionen zu beweisen und welche Axiome gerade hinreichen, um diese Lehrsätze herzuleiten. Dann stellte er alles in seinen „Elementen“ systematisch dar.

12. Der Anteil der Pythagoreer

Welche Teile des ersten Buches stammen von HIPPOKRATES und welche von den PYTHAGOREERN? Wie verhalten sich die „Elemente“ des HIPPOKRATES zu der Abhandlung der PYTHAGOREER, aus der EUDEMOS den Beweis für den Satz von der Winkelsumme im Dreieck entnommen hat? Hatten die PYTHAGOREER schon Axiome, aus denen sie ihre Lehrsätze deduzierten?

⁷ PROKLOS: *Euklidkommentar*, ed. FRIEDLEIN, p. 66.

⁸ F. RUDIO: *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates* (Leipzig 1907).

Das sind schwierige Fragen, die nur teilweise mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit beantwortet werden können. Fangen wir mit der Chronologie an.

HIPPOKRATES war nach dem „Geometerkatalog“ des PROKLOS (S. 66 FRIEDLEIN) etwas jünger als OINOPIDES und dieser wiederum etwas jünger als ANAXAGORAS. OINOPIDES mag um 440 und HIPPOKRATES um 430 gelebt haben, jedenfalls nicht viel früher. „Die in Italien, die sogenannten PYTHAGOREER“ waren nach ARISTOTELES⁹ die ersten, die sich mit τὰ μαθήματα, d.h. mit den mathematischen Wissenschaften befaßten und sie vorwärts brachten. Sie lebten, ebenfalls nach ARISTOTELES, zur Zeit von LEUKIPPOS und DEMOKRITOS „und noch früher“. DEMOKRITOS wirkte um 430, also etwa zur Zeit des HIPPOKRATES. LEUKIPPOS war vermutlich etwas älter als DEMOKRITOS. Die PYTHAGOREER betrieben also die mathematischen Wissenschaften um 440 „und noch früher“, also vor der Zeit des HIPPOKRATES.

Unter den PYTHAGOREERN gab es zwei Richtungen: die „Mathematikoi“, die den Nachdruck auf die Mathemata, und die „Akusmatikoi“, die den Nachdruck auf die Akusmata, die überlieferten Sprüche, legten¹⁰. Der erste der Mathematikoi war nach der Überlieferung beider Gruppen HIPPASOS, der nach den Zeugnissen um 500 gelebt haben soll¹¹. Für die mathematisch orientierten PYTHAGOREER steht also der Zeitraum von 500 bis 440 zur Verfügung.

Der „Geometerkatalog“ des PROKLOS ist für die Zeit von ANAXAGORAS bis HIPPOKRATES sehr ausführlich, hat aber in der Zeit zwischen PYTHAGORAS und ANAXAGORAS große Lücken. Gerade in diese Lücke gehören HIPPASOS und die übrigen pythagoreischen Mathematikoi hinein. PROKLOS schreibt dem PYTHAGORAS Entdeckungen wie das Irrationale oder die Proportionen zu, die vermutlich erst von den PYTHAGOREERN gemacht wurden.

Zwischen 450 und 440 fand in Kroton und in anderen italischen Städten eine große Katastrophe statt, bei der viele PYTHAGOREER getötet wurden¹². Die Überlebenden wurden zerstreut. Spätere PYTHAGOREER wie PHILOLAOS und ARCHYTAS publizierten ihre Lehren unter ihrem eigenen Namen, nicht anonym. Ich vermute, daß die anonymen Mathematikoi, die ihre Theorien gemeinsam unter dem Namen „Die PYTHAGOREER“ bekannt machten, vor der Katastrophe gelebt haben. Auch von dieser Seite her kommt man wieder auf die Zeit zwischen 500 und 440, also auf die Zeit vor HIPPOKRATES.

HIPPOKRATES hat, wie wir gesehen haben, als erster die elementargeometrischen Konstruktionen systematisch untersucht und Postulate aufgestellt, die für diese Konstruktionen gerade genügen. Vor ihm gab es wohl einzelne Konstruktionen wie die zwei von OINOPIDES, aber keine systematische Theorie der Konstruktionen, die mittels Geraden und Kreisen ausgeführt werden können. Ich vermeide den üblichen Ausdruck „mit Zirkel und Lineal“, weil diese mechanischen Instrumente im Text der Postulate überhaupt nicht erwähnt werden.

⁹ ARISTOTELES, *Metaphysik* A 5, 985b.

¹⁰ Siehe dazu W. BURKERT: *Weisheit und Wissenschaft*, S. 187 – 202.

¹¹ Für die Begründung dieser Datierung siehe mein demnächst im Artemis-Verlag erscheinendes Buch „Die Pythagoreer“.

¹² K. VON FRITZ: *Pythagorean Politics in Southern Italy*, New York 1940.

Die PYTHAGOREER haben selbstverständlich auch Konstruktionen ausgeführt. Sie haben Strecken abgetragen und so Summen und Differenzen von Strecken gebildet. Im zweiten Buch ist immerfort von dem „von zwei Strecken aufgespannten Rechteck“ die Rede, also konnten die PYTHAGOREER rechte Winkel konstruieren, sei es mit einem Winkelhaken oder mit Zirkel und Lineal. Jedoch vermute ich, daß die drei Konstruktionspostulate nicht von ihnen aufgestellt wurden und daß sie das Abtragen von Strecken ganz unbekümmert mit dem Wort *κείσθω* bezeichneten. Dieses wird nämlich im zweiten und vierten Buch, die sicher von den PYTHAGOREERN stammen, regelmäßig verwendet.

Es wäre sehr einfach, wenn man sagen könnte: *ἀφαιρέω* deutet immer auf HIPPOKRATES und *κείσθω* auf die PYTHAGOREER. So einfach ist es aber nicht. Sondern: In den ersten Anwendungen der Konstruktion I3 verwendet HIPPOKRATES systematisch das Verbum *ἀφαιρέω* und fügt noch ausdrücklich hinzu: „die kleinere von der größeren“. In I9 läßt er diesen Zusatz weg und in I11, beim Errichten eines Lotes, schreibt er einfach *κείσθω*, wie es vor seiner Zeit üblich war. Übrigens handelt es sich in diesem Fall einfach um die Verdopplung einer Strecke. Diese kann man sehr einfach direkt auf Grund der Postulate 2 und 3 ausführen, ohne die komplizierte Konstruktion I3 anzuwenden, also brauchte man hier nicht durch das Verbum *ἀφαιρέω* an den Wortlaut von I3 zu erinnern.

Die Konstruktion I22 rührt, wie wir gesehen haben, ebenfalls von HIPPOKRATES her. Hier wäre es, streng genommen, nötig gewesen, an I3 zu erinnern, aber HIPPOKRATES (oder ein Späterer, der die Konstruktion vielleicht mit verändertem Wortlaut wiedergegeben hat) hat auch hier einfach *κείσθω* geschrieben. Wir dürfen also den Gebrauch dieses Wortes nicht als Merkmal für Pythagoreisches verwenden. Wenn wir pythagoreische Teile des Buches I identifizieren wollen, müssen wir anders vorgehen.

Die Geometrie der PYTHAGOREER war ein deduktives System, das wissen wir aus dem von EUDEMOS zitierten Beweis des Satzes von der Winkelsumme im Dreieck. In diesem Beweis wird der Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel bei Parallelen fast wörtlich zitiert, also war dieser Satz (I 29, erster Teil) den PYTHAGOREERN sicher bekannt.

Bei der Konstruktion der regulären Polygone im vierten Buch werden mehrmals Winkel halbiert; also müssen die PYTHAGOREER eine Konstruktion der Winkelhalbierenden gekannt haben. Bei der üblichen und auch bei der in I9 gegebenen, etwas abweichenden Konstruktion braucht man den Kongruenzsatz I8. Auch auf anderem Wege kann man einsehen, daß die PYTHAGOREER Kongruenzsätze gekannt haben müssen. Ohne sie kann man in der Elementargeometrie fast nichts beweisen.

Wie haben die PYTHAGOREER diese Kongruenzsätze bewiesen? Sicherlich mit der Deckungsmethode, die EUKLID ja auch nicht ganz vermeiden kann. Diese beruht auf Axiom 7: „Was (einander) deckt, ist einander gleich“. Es ist sehr gut möglich, daß die PYTHAGOREER dieses Axiom bereits formuliert haben.

Die Anlegung von Flächen mit oder ohne Exzeß oder Defekt, die die PYTHAGOREER nach EUDEMOS¹³ erfunden haben, beruht auf Umformungen

¹³ PROKLOS, *Euklidkommentar*, ed. FRIEDLEIN, p. 419.

von ebenen Flächen. Zu einem Rechteck wird ein flächengleiches Quadrat konstruiert, usw. Bei diesen Umformungen braucht man unbedingt die Axiome 2 und 3. Es könnte gut sein, daß die PYTHAGOREER diese Axiome bereits ausdrücklich formuliert haben.

Das Axiom 3: „Wenn von Gleichen Gleiche weggenommen werden, sind die Reste gleich“ wird von ARISTOTELES mehrfach zitiert als ein allgemeines Prinzip, das die Mathematiker auf Strecken, Zeiten, Winkeln oder Zahlen anwandten. HIPPOKRATES hat es wahrscheinlich nur auf Strecken, Winkeln und Flächen angewandt. Wer hat es auf Zahlen angewandt und wer auf Zeiten? Doch wohl die PYTHAGOREER, die nicht nur Geometrie, sondern auch Arithmetik und Astronomie betrieben.

Ein weiteres Argument. In meinem Aufsatz „Die Erkenntnistheorie der Pythagoreer“¹⁴ habe ich ein Fragment des DERKYLLIDES analysiert und gezeigt, daß die Grundgedanken dieses Fragmentes pythagoreisch sind. Am Anfang dieses Fragmentes steht:

So wie es in der Geometrie und Musik unmöglich ist, wenn man nicht die Hypothesen festgestellt hat, die nach den Prinzipien kommenden Sätze anzuknüpfen, ebenso ist es auch für die Astronomie nötig, sich vorweg über die Hypothesen zu verständigen, von denen aus die Lehre über die Planetenbewegung fortschreitet. An der Spitze der meisten mathematischen Abhandlungen steht die Annahme der Prinzipien, die als zugestanden behandelt werden.

Unter den Grundhypothesen der Astronomie wird auch das Prinzip der gleichmäßigen Kreisbewegung genannt, das GEMINOS¹⁵ ausdrücklich den PYTHAGOREERN zuschreibt. Unter den Hypothesen der Geometrie sind vermutlich Axiome zu verstehen, vielleicht auch Definitionen.

Aus allen diesen Gründen möchte ich die Axiome 1–3 und 7–8 den PYTHAGOREERN zuschreiben. Nur beim Axiom 7 „Das Ganze ist größer als der Teil“ bin ich nicht sicher.

Mathematisches Institut
Universität Zürich

(Eingegangen am 28. November 1977)

¹⁴ B.L. VAN DER WAERDEN: Die Erkenntnistheorie der Pythagoreer, *Rete* 1 (1972), S. 209–244.

¹⁵ GEMINOS: *Isagoge*, ed. MANITIUS, S. 11.