

Ein anderer arithmetischer Satz, der bei PLUTARCH von Chäronea (Quaest. conviv. V, 2, 4; 1003 F) und DIOPHANT (IV, 38) vorkommt, besagt, daß das Achtefache einer Dreieckszahl plus eins eine Quadratzahl ergibt:

$$8 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + 1 = 4n(n+1) + 1 = (2n+1)^2.$$

Auch dies läßt sich leicht aus einer $\psi\eta\phi\alpha\iota$ -Figur veranschaulichen:

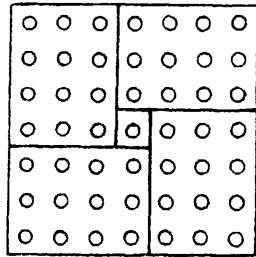


Fig. 8

7 · 7 zerfällt in 4 heteromöke Zahlen 3 · 4 und 1, oder in 8 Dreieckszahlen $\frac{1}{2}(3 \cdot 4)$ und 1.

2. Summierung der Quadrate und Kuben

Schon in einem babylonischen Text, der allerdings aus später (seleukidischer, also hellenistischer) Zeit stammt, aber auf ein älteres Vorbild zurückgehen dürfte, findet sich die Summe

der Quadratzahlen in der folgenden, ungewöhnlichen Form dargestellt:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{3}(1+2n)(1+2+3+\dots+n).$$

Diese Formel ergibt sich aus nachstehender Figur 9, die hier für $n=4$ wiedergegeben ist, sich aber natürlich beliebig verallgemeinern läßt. (Rekonstruktion von J. E. HOFMANN.)

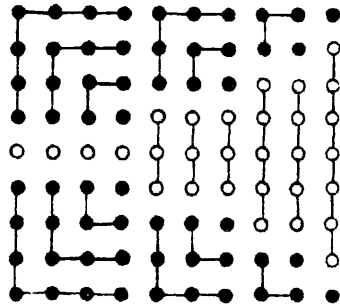


Fig. 9

Das große Rechteck enthält insgesamt $(1+2n)(1+2+3+\dots+n)$ Steine. Ein Drittel davon ist weiß, die beiden anderen Drittel, die jedes aus den Quadraten $1 \cdot 1$, $2 \cdot 2$, $3 \cdot 3 \dots n \cdot n$ bestehen, sind schwarz. Zerlegt man die Quadrate in ihre Gnomone, so sieht man, daß diese, ausgesteckt, in den Querreihen der weißen Steine wiederkehren. (Es gibt in unserer Figur, d.h. für $n=4$, 4 Gnomone zu 1, 3 Gnomone zu 3, 2 Gnomone zu 5 und einen Gnomon zu 7 Steinen.)

Die Summierung der Kuben, die sich bei den römischen Agrimensoren findet, ist sicher

den Griechen auch bereits bekannt gewesen. Das geht auch aus einer Bemerkung des NIKOMACHOS (II, 20) hervor, nach der die Kuben durch Summen ungerader Zahlen folgendermaßen dargestellt werden können:

$$1 = 1, \quad 8 = 3 + 5, \quad 27 = 7 + 9 + 11, \quad 64 = 13 + 15 + 17 + 19 \dots$$

Denn daraus ergibt sich:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 10^2 = (1+2+3+4)^2.$$

Allgemein ist in der Tat:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1+2+3+\dots+n)^2.$$

Das läßt sich nach AL-KARAĞI, einem arabischen Mathematiker des 10.–11. Jahrhunderts (vgl. seine „Al Fakhri“ genannte Algebra), der sich auch sonst oft griechischer Methoden bedient, auf figuralem Wege wie folgt beweisen:

Man umgibt die 1 mit sukzessiven Gnomonen von den Breiten 2, 3, ..., n. (In der Figur 10 ist $n=3$.)

Der Gnomon von der Breite 3 hat z. B. die Länge $1+2+3+2+1=9=3 \cdot 3$. Allgemein ist, wie wir wissen,

$$1+2+3+\dots+(n-1)+n+(n-1)+\dots+3+2+1=n^2.$$

Denn das ist ja gerade die Anordnung, die sich bei IAMBlichOS unter dem Namen „Dialos“ fand. Sachlich handelt es sich natürlich um die Summe der beiden Dreieckszahlen $\frac{1}{2}n(n+1)$ und $\frac{1}{2}(n-1)n$, die ein Quadrat n^2 ergibt.

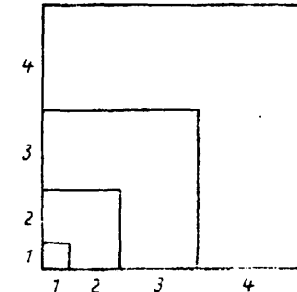


Fig. 10

Da nun der Gnomon die Breite n hat, umschließt er $n \cdot n^2 = n^3$ Einheiten. Die Gnomone unserer Figur stellen also die aufeinanderfolgenden Kubikzahlen dar, ihre Summe ist aber offenbar gleich dem Quadrat mit der Seite $1+2+3+\dots+n$. Damit ist der Satz bewiesen. Die erwähnten Beziehungen zu IAMBlichOS machen es sehr wahrscheinlich, daß dieser den Beweis von ALKARAĞI schon gekannt hat. Seinem ganzen Stil nach paßt er aber in die alpythagoreische Zeit.

3. Das „Epanthem“ des Thymaridas. (IAMBlich. in Nicom. p. 62, 18)

Unter dem Namen ἐπάνθημα („Überblüte“) des Pythagoreers THYMARIDAS (etwa zu PLATONS Zeit oder etwas früher) versteht man die folgende Lösung eines Systems simultaner linearer Gleichungen.

Es seien $n+1$ Unbekannte $x, x_1, x_2, \dots, x_n$ und $n+1$ bekannte Größen $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, s$ durch die Gleichungen verbunden:

$$x + x_1 + x_2 + \dots + x_n = s, \quad x + x_1 = a_1,$$

$$x + x_2 = a_2, \quad \dots, \quad x + x_n = a_n.$$

Dann sind die Unbekannten gegeben durch:

$$x = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - s}{n-1}, \quad x_1 = a_1 - x,$$

$$x_2 = a_2 - x, \quad \dots, \quad x_n = a_n - x.$$

Diese Lösung läßt sich durch folgende $\varphi\eta\varphi\alpha\iota$ -Figur (11) leicht gewinnen, in der $n = 4$ genommen ist:

Weiße Steine + Schwarze Steine = Ganze horizontale Zeilen

1	● ● ● ● ● ● ●	$x + x_1$	$x + x_1 = a_1$
2	○ ○ ○ ● ● ● ●	$x + x_2$	$x + x_2 = a_2$
3	○ ○ ○ ● ● ● ●	$x + x_3$	$x + x_3 = a_3$
4	○ ○ ○ ● ● ● ●	$x + x_4$	$x + x_4 = a_4$
5	○ ○ ○ ● ● ● ●	$x + x_5$	$x + x_5 = a_5$
Fig. 11		s	

Die x ersten Steine sind in allen Zeilen bis auf die erste weiß, die darauf folgenden schwarz; in der ersten Zeile sind alle Steine schwarz.

Schwarze Steine: $x + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$.

Weiße Steine: $(5 - 1)x$.

Alle Steine zusammen: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$.

Die weißen Steine sind alle Steine außer den schwarzen Steinen. Das bedeutet, wenn wir statt 5 allgemein n setzen:

$$(n - 1)x = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n - s.$$

Das ist aber die oben angegebene Formel.

Die Methode der $\varphi\eta\varphi\alpha\iota$ -Figuren ist noch mancher anderer Anwendungen fähig, von denen wir noch einige in Verbindung mit pythagoreischen zahlentheoretischen Betrachtungen kennenlernen werden, denen wir uns jetzt zuwenden.

β) Die Lehre vom Geraden und Ungeraden (Primitive Zahlentheorie)

1. Allgemeines

Die griechische *Zahlentheorie* muß schon am Ende des 5. Jahrhunderts eine beträchtliche Höhe erreicht gehabt haben, obwohl sie ihre abschließende strenge Begründung, wie sie uns heute im VII.–IX. Buch der euklidischen „Elemente“ vorliegt, wohl erst im 4. Jahrhundert, vielleicht durch THEÄTET, erhielt. Das geht daraus hervor, daß ARCHYTAS (einer der letzten Pythagoreer, ein älterer Zeitgenosse PLATONS) einen in der Musiktheorie vor kommenden zahlentheoretischen Satz beweist (Fragm. d. Vorsokr. [Diels], ARCHYTAS A 19 = BOETHIUS, de mus. III, 11), indem er sich auf einfachere, schon als bekannt vorausgesetzte arithmetische Sätze stützt, so daß man

den Eindruck gewinnt, es habe um jene Zeit (etwa um 400) bereits arithmetische „Elemente“ gegeben.

Aber dieser entwickelteren Zahlentheorie, die die fundamentale Methode der Auffindung des größten gemeinsamen Teilers („Euklidisches Teiler-Verfahren“) schon besessen haben muß, ging eine primitivere voraus, die sich im wesentlichen auf die „Lehre vom Geraden und Ungeraden“ beschränkt haben dürfte. Diese Lehre wird von PLATON öfter erwähnt, und zwar als etwas ganz Bekanntes, vielleicht schon zum Schulunterricht Gehöriges; sie wird von ihm als ἀριθμητική (ἐπιστήμη), als „Zahlentheorie“, bezeichnet, im Gegensatz zur λογιστική, der bloßen Rechentechnik.

Die Theorie der geraden und ungeraden Zahlen geht zweifellos auf die pythagoreische Arithmetik zurück. Sie hat einen späten Niederschlag gefunden in den Sätzen IX, 21–34 der „Elemente“, wozu auch noch der Satz über die vollkommenen Zahlen IX, 36 innerlich gehört, wie wir noch zeigen werden. Es gibt aber auch vereinzelte ältere Überlieferungen, im Fragment B2 des Epicharm, B5 des PHILOLAOS, in PLATONS „Parmenides“ (143 de), bei ARISTOTELES, Met. M 8, 1084, a4 usw.

Der eigentlichen Lehre vom Geraden und Ungeraden sollen einige Bemerkungen über die pythagoreischen arithmetischen Grundvorstellungen überhaupt vorausgeschickt werden, da diese für die mathematische Denkweise des pythagoreischen Kreises sehr charakteristisch sind.

Die Eins wurde in frühgriechischer Zeit nicht als Zahl angesehen. Noch EUKLID definiert (El. VII, def. 1, 2) die Zahl (ἀριθμός) als „Menge von Einheiten“ (μονάδων πληθος), die Eins selbst dagegen als „das, wonach jedes Ding eines genannt wird“. Ähnlich soll THALES die Zahl als „Gefüge von Einheiten“ (μονάδων σύστημα), der Stoiker CHRYSIPPOS dagegen (im 3. Jahrhundert vor Christus) die Eins als die „Einermenge“ (πληθος ἑν) bezeichnet haben (IAMBlichOS in Nicom. p. 11, 2–10), analog der eudoxischen Definition der Zahl als „begrenzte Menge“ (πληθος ὁρισμένον IAMBlichOS l. c. p. 10, 17), nicht ohne übrigens auf Widerspruch zu stoßen. Von einigen Pythagoreern wurde die Eins als die Grenze zwischen den ganzen Zahlen und den (echten) Brüchen angesehen. Auch die Zwei wurde mitunter nicht als Zahl erachtet. ([IAMBlichOS], Theologumena arithmeticae p. 9, 1 ff. [de Falco].) Das hängt mit der Unterscheidung und Definition der geraden und ungeraden Zahlen zusammen. Andererseits finden wir bei EUKLID mitunter (El. IX, 21–34) keinen Unterschied gemacht zwischen der Eins und den anderen Zahlen.

Ein Fragment des PHILOLAOS (B5) sagt, es gebe zwei Arten von Zahlen, ungerade und gerade (ἀρτιοὶ καὶ περισσοί), zugleich mit einem Dritten, dem Gerad-Ungeraden (ἀρτιοπεριττόν), das aus einer „Mischung“ (Synthese) der beiden ersten entstehe. Von jeder der beiden Arten gebe es viele Formen.

NIKOMACHOS (arith. I 7, 3–4) gibt verschiedene (angeblich) alte Definitionen der geraden und ungeraden Zahl.

1. Eine gerade Zahl kann durch dieselbe Operation in die größten (an Ausdehnung) und kleinsten (an Zahl) Teile geteilt werden (nämlich in zwei Hälften); während die ungerade Zahl nur in zwei ungleiche Teile geteilt werden kann.

2. Eine *gerade Zahl* kann sowohl in zwei gleiche als auch in zwei ungleiche Teile geteilt werden (außer der ursprünglichen Zweierheit, die nur in zwei gleiche Teile teilbar ist), aber ihre Teile müssen, wie sie auch zerlegt wird, von gleicher Art sein (d. h. beide gerade oder beide ungerade); während eine *ungerade Zahl* in jedem Fall in zwei ungleiche Teile, auch der Art nach, zerfällt.

Die Parenthese über die „ursprüngliche Zweierheit“ deutet darauf hin, daß die Zwei früher nicht zu den Zahlen gerechnet wurde und hier noch, nachdem der Sprachgebrauch sich gewandelt hatte, hinzugefügt wurde. PLATON jedoch spricht schon von der Zwei als gerader Zahl (Parm. 143e).

Die Bedeutung des Ausdrucks „gerad-ungerade“ bei PHILOLAOS (B 5) ist nicht mit Sicherheit festzustellen. Es kann die Eins gemeint sein, die ja nach den obigen Definitionen weder gerade noch ungerade ist, aber als Ursprung der geraden wie der ungeraden Zahlen gewissermaßen als potentiell gerade und ungerade angesehen werden kann.

Es kann aber auch folgende Einteilung der Zahlen gemeint sein:

1. *Gerade Zahlen*, die lediglich in gerade Faktoren zerlegt werden können. (EUKLID nennt sie ἀρτιόκεις ἀρτιοὶ μόνον, „nur gerademal gerade“.) Es sind die Potenzen von zwei, „die von der Zwei aus verdoppelten Zahlen“ (οἱ ἀπὸ δυάδος διπλασιαζόμενοι).

2. *Ungerade Zahlen*, die lediglich in ungerade Faktoren zerfallen.

3. *Gerad-ungerade Zahlen*, die sowohl gerade als auch ungerade Faktoren enthalten, das sind diejenigen geraden Zahlen, die nicht Potenzen von zwei sind (ARISTOTELES Met. M 8, 1084a 4).

Später unterscheiden die Neupythagoreer (NIKOMACHOS arith. I 8,4; I 9,1; I 10,1) (angeblich auf Grund alter Quellen) unter (3) noch zwei verschiedene Gruppen.

3a. Die Zahlen, deren *Hälfte ungerade ist*. Sie können (vielleicht auf verschiedene Weise) in einen geraden und einen ungeraden Faktor zerfallen, sind also „lediglich gerademal ungerade“ (ἀρτιόκεις περισσοὶ μόνον nach EUKLID). NIKOMACHOS nennt sie „gerademal ungerade“ (ἀρτιοπερισσοί).

3b. Die Zahlen, die eine *gerade Hälfte haben*, aber keine Zweierpotenzen sind. Sie können sowohl in zwei gerade als auch in einen geraden und einen ungeraden Faktor zerlegt werden. Bei EUKLID heißen sie „gerademal gerade und gerademal ungerade“ (ἀρτιόκεις ἀρτιοὶ καὶ ἀρτιόκεις περισσοί), bei NIKOMACHOS „ungerademal gerade“ (περισσάρτιοι), eine Bezeichnung, die einen willkürlichen Eindruck macht. (Vielleicht eigentlich περισσάρτιος ἀρτιόκεις ἀρτιοί?)

Die *Primzahlen* (πρῶτοι ἀριθμοί) werden zuerst in einem erhaltenen Fragment des SPEUSIPPOS, das aber bis auf PHILOLAOS zurückgeht, erwähnt (PHILOLAOS A 13 [Diels]: Theolog. Arithm. [Ast] p. 62). Sie sollen von THYMANIDAS „geradlinig“ (εὐθυγραμμικοί) genannt worden sein, weil sie nicht in Form eines Rechtecks figuriert werden können, sondern nur als eine Punktreihe sich darstellen lassen. Der Primzahlbegriff wird auch im Satz über die geraden vollkommenen Zahlen (EUKLID, El. IX, 36) verwendet (s. u. S. 49f.).

Unter Primzahlen werden oft nur die ungeraden Primzahlen verstanden, während der Zwei eine Sonderstellung eingeräumt wird. Sie heißt etwa bei THEON von Smyrna „quasi-ungerade“ (περισσοειδής), da sie nicht durch 2 teilbar ist. Doch nennen ARISTOTELES (Top. Θ 2: p. 157a 39) und EUKLID die Zwei eine Primzahl.

Auch der Begriff der *relativ primen Zahlen* muß schon alt sein, da er z. B. für die Definition eines unkürzbaren Bruchs notwendig ist, der spätestens am Ende des 5. Jahrhunderts bekannt ist.

Bemerkenswert sind ferner die Begriffe der „vollkommenen“ und der „befreundeten“ Zahlen.

Vollkommen heißt eine Zahl, die der Summe ihrer echten Teiler (einschließlich der Eins) gleich ist, wie z. B. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$, $496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$ (EUKLID El. VII, def. 22).

Befreundet heißen dagegen zwei Zahlen, wenn jede der Summe der (echten) Teiler (einschließlich der Eins) der anderen gleich ist, wie z. B. $220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142$ und $284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110$ (IAMBlichOS im Nicom. p. 35, 1–7).

Ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt, ist bis heute nicht bekannt; für gerade vollkommene Zahlen gab EUKLID eine Konstruktion (El. IX, 36), die nach IAMBlichOS, der freilich keinen Beweis dafür bringt, alle geraden vollkommenen Zahlen liefert. Erst EULER hat diese Tatsache bewiesen; der Beweis läßt sich indessen auch mit rein antiken Mitteln führen. Der euklidische Satz ist die Krönung des merkwürdigen Schlußabschnitts des IX. Buchs der „Elemente“ (21–34), der die alte „pythagoreische“ Lehre vom Geraden und Ungeraden, allerdings nicht mehr in ganz reiner Form, enthält; nach antikem Brauch wird er als Nachtrag am Ende der viel weiter gehenden arithmetischen Bücher gebracht, offenbar infolge seines historischen Interesses. Da diese kleine Theorie ein einfaches, leicht verständliches Beispiel griechischen mathematischen Denkens darstellt, sei sie hier kurz skizziert:

2. Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im IX. Buch der euklidischen „Elemente“

Die Theorie beginnt mit folgenden Definitionen:

1. Eine *gerade Zahl* ist eine in zwei gleiche Teile teilbare.
2. Eine *ungerade Zahl* eine solche, die nicht in zwei gleiche Teile geteilt werden kann, oder eine solche, die sich von einer geraden um eine Einheit unterscheidet.
3. *Gerademal gerade* heißt eine Zahl, die durch eine gerade Zahl geteilt eine gerade Zahl ergibt.
4. *Gerademal ungerade* eine solche, die durch eine gerade Zahl geteilt eine ungerade ergibt.
5. *Ungerademal ungerade* eine solche, die durch eine ungerade Zahl geteilt eine ungerade ergibt.

Dann folgen einige ganz einfache Sätze.

Satz 21. Wenn beliebig viele gerade Zahlen addiert werden, wird die Summe gerade sein.

Denn jede einzelne Zahl hat eine Hälfte, ihre Summe also auch, nämlich die Summe der Hälften der einzelnen Zahlen.

Satz 22. Wenn beliebig viele ungerade Zahlen addiert werden, ihre Anzahl aber gerade ist, ist ihre Summe gerade.

Denn wenn man von jeder von ihnen die Einheit wegnimmt, bleibt je eine gerade Zahl übrig (Def. 2). Die Anzahl der weggenommenen Einheiten ist gerade. Also ist nach Satz 21 die Summe der ursprünglichen Zahlen gerade.

Satz 23. Wenn die Anzahl der ungeraden Zahlen ungerade ist, ist ihre Summe ungerade.

Denn zieht man von der letzten Zahl die Einheit ab, so ist der Rest gerade. Die übrigen Zahlen sind eine gerade Anzahl, ihre Summe also nach Satz 22 gerade. Sie ergibt demnach zum Rest addiert eine gerade Zahl (Satz 21), daher nach Wiederhinzufügung der Einheit eine ungerade (Def. 2).

Ganz ähnlich lassen sich die folgenden Sätze 24–27 beweisen:

Satz 24. Wenn eine gerade Zahl von einer geraden abgezogen wird, ist der Rest gerade.

Satz 25. Wenn eine gerade Zahl von einer ungeraden abgezogen wird, ist der Rest ungerade.

Satz 26. Wenn eine ungerade Zahl von einer ungeraden abgezogen wird, ist der Rest gerade.

Satz 27. Wenn eine ungerade Zahl von einer geraden abgezogen wird, ist der Rest ungerade.

Es folgen nun etwas schwierigere und bedeutungsvollere Sätze, die den eigentlichen Kern der Theorie bilden.

Satz 28. Eine ungerade Zahl (a) mit einer geraden (b) multipliziert ergibt eine gerade Zahl.

Denn wenn a mit b multipliziert c ergibt, so besteht c aus so vielen gleichen Zahlen b als a Einheiten enthält; b ist aber gerade, c daher die Summe einer Anzahl von geraden Zahlen, also nach Satz 21 gerade.

Satz 29. Eine ungerade Zahl mit einer ungeraden multipliziert ergibt eine ungerade Zahl.

Beweis ähnlich wie bei Satz 28 (mit Hilfe von Satz 23).

Satz 30. Wenn eine ungerade Zahl eine gerade teilt, so teilt sie auch deren Hälfte.

Denn wenn die ungerade Zahl u die gerade g teilt, so möge sich c ergeben. Es ist also $u \cdot c = g$. Wäre nun c ungerade, so wäre nach Satz 29 g ungerade, gegen die Voraussetzung; u teilt also g gemäß einer geraden Zahl, sie teilt also auch ihre Hälfte.

Satz 31. Wenn eine ungerade Zahl zu einer Zahl (relativ) prim ist, so ist sie auch prim zur doppelten Zahl.

Denn es sei die ungerade Zahl u prim zu c . Wäre nun u nicht prim zu $2c$, so hätten u und $2c$ einen gemeinsamen Teiler d . Da u ungerade ist, müßte d es auch sein, also, da es $2c$ teilt, nach Satz 30 auch c teilen; u und c hätten also gegen die Voraussetzung einen gemeinsamen Teiler.

Satz 32. Die aus 2 durch (fortgesetzte) Verdoppelung erhaltenen Zahlen (d. h. die Potenzen von 2) sind *lediglich* gerademal gerade.

Denn, daß alle diese Zahlen gerademal gerade sind, ist aus ihrer Entstehung klar. Sie haben aber auch keinen ungeraden Teiler. Denn alle ungeraden Zahlen sind prim zur Zwei, also nach Satz 31 prim zu allen daraus durch fortgesetzte Verdoppelung entstandenen Zahlen.

(Der euklidische Beweis ist hier verwickelter und geht auf früher von ihm bewiesene Sätze der allgemeinen Zahlentheorie zurück. Er kann daher keinen Bestandteil der alten Lehre gebildet haben.)

Satz 33. Wenn eine Zahl eine ungerade Hälfte hat, ist sie *lediglich* gerademal ungerade.

Denn, daß sie gerademal ungerade ist, ist offenbar. Wenn sie aber auch gerademal gerade sein könnte, müßte sie von einer geraden Zahl nach einer geraden gemessen werden; es wäre also auch ihre Hälfte durch eine gerade Zahl teilbar, gegen die Voraussetzung. (Der letzte Schluß läßt sich leicht an einer $\psi\eta\phi\sigma\iota$ -Figur veranschaulichen.)

Satz 34. Wenn eine Zahl weder eine von der Zwei aus verdoppelte ist, noch eine ungerade Hälfte hat, so ist sie sowohl gerademal gerade als auch gerademal ungerade.

Daß sie gerademal gerade ist, leuchtet ein; denn sie hat ja keine ungerade Hälfte. Daß sie aber auch gerademal ungerade ist, sieht man, wenn man die Zahl halbiert, ihre Hälfte wiederum halbiert und dies so lange fortsetzt, bis man zu einer ungeraden Zahl (die von 1 verschieden ist!) kommt. Würde man nämlich nicht auf eine ungerade Zahl stoßen, so stieße man schließlich auf die Zwei. Dann aber wäre die Zahl, die fortgesetzt halbiert wurde, eine von der Zwei aus verdoppelte, was gegen die Voraussetzung ist.

Das ist im wesentlichen die „Lehre vom Geraden und Ungeraden“. Sie scheint sehr primitiv, gestattet aber doch verschiedene, durchaus nicht triviale Anwendungen, von denen wir im folgenden zwei bringen.

3. Der euklidische Satz über die vollkommenen Zahlen

EUKLID, Elemente XI, 36. Wenn von 1 beginnend durch Verdoppelung eine Reihe von Zahlen aufgestellt wird und ihre Summe eine Primzahl ergibt, so ist ihr Produkt mit der letzten Zahl eine vollkommene Zahl.

(Der euklidische Beweis ist nicht der ursprüngliche, sondern beruht auf einer ganzen Anzahl von in den vorausgehenden arithmetischen Büchern bewiesenen zahlentheoretischen Sätzen, während die Sätze IX, 21–34 keine Verwendung finden. Es ist jedoch möglich, den Satz auf Grund der alten Lehre vom Geraden und Ungeraden zu beweisen, deren Krönung er doch offenbar bildet. — Bemerkenswert ist das Auftreten des Begriffes der Primzahl.)

Beweis

Es seien die Zahlen $1, 2, 2^2 \dots 2^{n-1}$ vorgelegt, und ihre Summe ergebe eine Primzahl, z. B. $1, 2, 4$ ($1 + 2 + 4 = 7$) oder $1, 2, 4, 8, 16$ ($1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$). Dann ist ihr Produkt mit der letzten Zahl 2^{n-1} (also in den Beispielen: $7 \cdot 4 = 28$ bzw. $31 \cdot 16 = 496$) eine vollkommene Zahl.

In der Tat lassen sich sämtliche Teiler der Zahl $(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1})$ $2^{n-1} = p \cdot 2^{n-1}$, wo $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = p$ eine Primzahl ist, unschwer angeben. Es sind:

$$1, 2, 2^2 \dots 2^{n-2} 2^{n-1} \quad \text{z. B. } 1, 2, 4 \quad \text{bzw. } 1, 2, 4, 8, 16$$

$$p, 2p, 2^2 p \dots 2^{n-2} p \quad \text{z. B. } 7, 14 \quad \text{bzw. } 31, 62, 124, 248.$$

Gäbe es nämlich einen ungeraden Teiler u außer p (und der Einheit), so müßte er, nach Satz 30, auch die Hälfte von $2^{n-1}p$ teilen und davon wieder die Hälfte und so fort, bis man schließlich zur Hälfte von $2p$ käme, d. h. zu p selber. Aber das ist unmöglich, denn u kann die Primzahl p nicht teilen. Aber auch ein Teiler d , bei dessen fortgesetzter Halbierung man auf eine ungerade Zahl u' , die von p (und 1) verschieden wäre, stieße, ist unmöglich. Denn es wäre ja die ungerade Zahl u' als Teiler von d auch ein Teiler von $2^{n-1}p$, was unmöglich ist, wie zuvor gezeigt. Es bleiben also nur die (genügend kleinen) Zahlen übrig, die bei fortgesetzter Halbierung p oder 1 ergeben, d. h. die von 1 oder p aus verdoppelten Zahlen, wie wir sie bereits sämtlich angeführt hatten. Denn die nächste Zahl der oberen Reihe wäre 2^n , die offenbar $2^{n-1}p$ nicht teilt, und die nächste Zahl der unteren Reihe ist $2^{n-1}p$ selber.

Die Summe der angeführten sämtlichen Teiler läßt sich leicht berechnen. Es ist nämlich:

$$(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}) + (p + 2p + 2^2 p + \dots + 2^{n-2} p) \\ = p + p + 2p + 2^2 p + \dots + 2^{n-2} p = 2^{n-1} p.$$

Die Summierung der letzten (geometrischen) Reihe ist sehr einfach, und man braucht dazu nicht die allgemeine Summenformel für die geometrische Reihe, die EUKLID in IX, 35 beweist. Es ist nämlich offenbar:

$$p + p = 2p, 2p + 2p = 4p, 4p + 4p = 8p, \dots 2^{n-2} p + 2^{n-2} p = 2^{n-1} p.$$

Man kann diese Summierung (für $1 + 1 + 2 + 2^2 + \dots$) natürlich auch mittels einer $\psi\eta\phi\alpha$ -Figur durchführen, worauf hier nicht mehr eingegangen sei, ebensowenig wie auf den Beweis der Umkehrung des Satzes: Jede gerade vollkommene Zahl läßt sich durch die euklidische Vorschrift erzeugen.

4. Beweis für die Irrationalität der Quadratwurzel aus 2

Wie und wann die Inkommensurabilität der Seite und Diagonale des Quadrats zuerst bewiesen wurde, und ob ihr vielleicht die Entdeckung der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des regulären Pentagons vorausging (wie K. v. FRITZ meint), ist noch ungeklärt. Wir kommen noch

später darauf zurück. Jedenfalls scheint $\sqrt{2}$ die erste Wurzel zu sein, deren Irrationalität *arithmetisch* bewiesen wurde. Und zwar überliefern die meisten Euklidkodizes am Ende des X. Buchs der „Elemente“ als Nachtrag einer späteren Hand einen „alten Beweis“, der darauf hinausläuft, daß, wenn Quadratseite und -diagonale kommensurabel wären, dieselbe Zahl gerade und ungerade wäre. Auf einen derartigen Beweis spielt auch ARISTOTELES an (Anal. prior. I, 23 p. 41 a, 26–27).

Jedoch ist der in den EUKLID-Handschriften überlieferte Beweis ebenso wenig wie der euklidische Beweis für den Satz IX, 36 mit den primitiven Mitteln der Lehre vom Geraden und Ungeraden geführt, sondern setzt im Grunde die zahlentheoretischen Fundamentalsätze von der eindeutigen Darstellung eines Bruches durch relativ prime Zahlen voraus. Auch kann der Beweis leicht auf andere Wurzeln übertragen werden, so daß es unverständlich bliebe, daß eine solche Übertragung nicht stattgefunden hat. (THEODOROS von KYRENE hat, nach PLATON [Theätet, 147 d ff.] die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{17}$ einzeln bewiesen. Da $\sqrt{2}$ nicht erwähnt wird, ist anzunehmen, daß für diesen Fall allein der Beweis schon früher geliefert wurde.)

Nun ist aber in der Tat ein primitiver Beweis, der die $\psi\eta\phi\alpha$ -Methode benutzt, möglich, und wir geben ihn jetzt neben dem „euklidischen“ an.

I. Der „euklidische“ Beweis (in freier Wiedergabe)

Es sei $a:b$ das Verhältnis von Diagonale und Seite des Quadrats, in *kleinsten Zahlen*, die demnach relativ prim zueinander sind, so daß eine von ihnen gerade, die andere ungerade ist. (Daß diese Darstellung des Verhältnisses immer erzielt werden kann, wird in den Elementen der Zahlentheorie bewiesen.) Es ist $2 = a^2 : b^2$ oder $2b^2 = a^2$. Nun ist entweder a oder b , also entweder a^2 oder b^2 ungerade. Wäre a^2 ungerade, so wäre es der geraden Zahl $2b^2$ gleich, was unmöglich ist. Ist b aber ungerade, so muß a gerade, also a^2 durch 4 teilbar sein. $\frac{1}{2} a^2$ ist also noch durch 2 teilbar. Es ist aber $b^2 = \frac{1}{2} a^2$, also wäre wiederum eine ungerade Zahl (b^2) einer geraden ($\frac{1}{2} a^2$) gleich, was absurd ist.

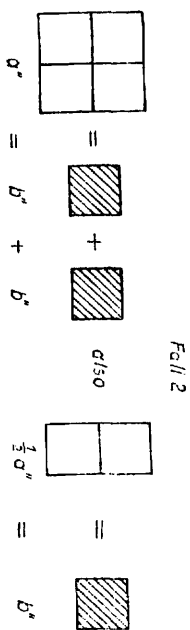
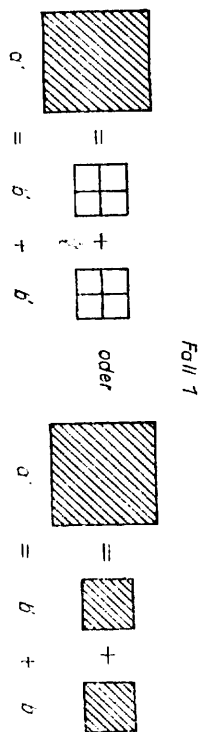
II. Primitiver Beweis

Es sei wiederum $a^2 = 2b^2$, wobei jetzt a und b nicht prim zueinander zu sein brauchen. Man denke sich die Zahl a^2 einmal und die Zahl b^2 zweimal mit Steinchen ausgelegt. Nun teile man, sofern und solange dies möglich ist, die Quadrate in 4 Teile, die Teilquadrate wieder in 4 Teile usw. Dies muß einmal ein Ende haben. (Denn die Viertelung geschieht durch Halbierung der beiden Quadratseiten, vgl. den Gedankengang des Beweises von IX, 34.)

⁵ Es ist hinreichend, daß a und b nicht beide durch 2 teilbar sind, was durch successive Halbierung leicht erreicht werden kann, da dadurch sich das Verhältnis $a:b$ nicht ändert. So bleibt man ganz im Rahmen der primitiven „diadischen“ Arithmetik.

Dabei sind verschiedene Fälle möglich:

1. Man kommt zuerst oder gleichzeitig mit der rechten Seite auf der linken Seite zu einer ungeraden Zahl a' . Rechts stehen dann auf jeden Fall zwei Zahlen $b' + b' = 2b'$, also eine gerade Zahl. Das ist unmöglich.
2. Man hat links noch eine gerade Zahl a'' , während rechts die Teilung in zwei ungeraden Zahlen $b'' + b''$ endet. Da die gerade Zahl a'' links ein gerades Quadrat ist, ist sie durch 4 teilbar, ihre Hälfte ist also noch gerade. Rechts aber steht die Zahl $2b''$, deren Hälfte ungerade ist. Teilt man also beiderseits durch 2, so kommt man auf einen Widerspruch.



Die dem Beweisgang entsprechenden Figuren (mit Steinchen ausgelegt zu denken) sind folgende (die schraffierten Quadrate sind ungerade, die viergeteilten gerade); die Figuren stellen das Stadium dar, in dem eine weitere Viertelung unmöglich wird (vgl. Fig. 12).

III. MATHEMATIK DES 5. JAHRHUNDERTS

a) Die quadratische geometrische Algebra der Pythagoreer

1. Pythagoreische Zahlen (Rationale rechtwinklige Dreiecke)

Die sogenannten „pythagoreischen Zahlen“ sind Zahltripel, die die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks darstellen können. Nach dem sogenannten „pythagoreischen Lehrsatz“, der aber schon den Babyloniern und durch diese den Indem des vorerwähnten Altertums bekannt war, ist in *jeden* rechtwinkligen Dreieck die Summe der Quadrate über beiden Katheten gleich dem Quadrat über der Hypotenuse. Aber nur in besonderen Fällen lassen sich die gegenseitigen Verhältnisse der Seiten in ganzen Zahlen ausdrücken, nämlich wenn $a^2 = b^2 + c^2$, wo a, b, c natürliche Zahlen sind.

Der einfachste Fall ist das Zahlentripel 3 4 5 und natürlich seine Vielfachen 6 8 10, 9 12 15 usw. Weitere aus Babylonien und Altindien bekannte Beispiele sind: 5 12 13, 7 24 25; 8 15 17, 12 35 37; 20 21 29. Man bemerkt, daß die beiden letzten Ziffern um 1 = 1², 2 = 2 · 1², 8 = 2 · 2² differieren.

Wie findet man solche pythagoreische Zahlen? Gibt es ein Verfahren, um sie sämtlich zu bestimmen? Die Antwort auf diese Fragen führt auf Betrachtungen, die einen Übergang von der geometrischen (γῆγοι-) *Arithmetik* der Pythagoreer zu ihrer eigentlichen geometrischen *Algebra* bilden.

Aus der Lehre von den figurierten Zahlen ist der Begriff des Gnomons bekannt. Legt man einen Gnomon um ein aus Steinchen gebildetes Quadrat, so erhält man wiederum ein solches, wobei der Gnomon eine ungerade Zahl von Steinen enthält. Man erhält nun offenbar drei pythagoreische Zahlen, wenn man dafür sorgt, daß der Gnomon ein (notwendig ungerades) Quadrat ist. Man braucht also nur aus der Reihe der Differenzen der Quadratzahlen die Quadrate herauszusuchen; die ersten sind offenbar 9 und 25:

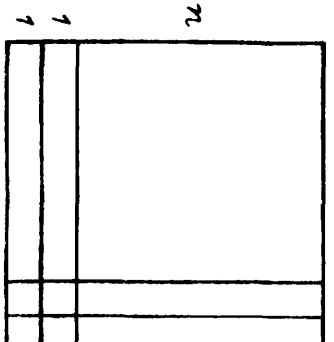
1	4	9	16	25	...	100	121	144	169	...
3	5	7	9	...	21	23	25	...		

Also: $9 + 16 = 25$ d. h. $3^2 + 4^2 = 5^2$ und $25 + 144 = 169$ d. h. $5^2 + 12^2 = 13^2$.

Bei dieser Konstruktion hat der Gnomon die Breite 1. Die allgemeine Regel ist in diesem Falle die folgende. Geht man aus von n^2 , so ist der Gnomon $2n + 1 = m^2$ zu setzen. Demnach ist $n = \frac{1}{2}(m^2 - 1)$ und $n + 1 = \frac{1}{2}(m^2 + 1)$. Die pythagoreischen Zahlen sind also $\frac{1}{2}(m^2 - 1)$, m , $\frac{1}{2}(m^2 + 1)$. Dabei ist m als ungerade anzunehmen.

Diese Regel wird in der Tat von Proklos (in Euklid p. 487, 7–21) den Pythagoreern zugeschrieben (vgl. Fig. 13).

Weitere pythagoreische Zahlen erhält man, wenn man für den Gnomon die Breite 2 wählt. Hier ist der Gnomon $2n + 4 + 2n = 4(n + 1)$; er ist also ein Quadrat, wenn $n + 1 = m^2$, er selbst mithin $(2m)^2$ ist. Dann ist $n = m^2 - 1$, $n + 2 = m^2 + 1$; die pythagoreischen Zahlen demnach: $2m$, $m^2 - 1$, $m^2 + 1$ (z. B. $8 = 2 \cdot 4$, $15 = 4^2 - 1$, $17 = 4^2 + 1$).



Diese Regel wird von Proklos (in Euklid p. 428, 21–429, 8) dem Platon zugeschrieben, ist aber sicher viel älter. (Man kann sie übrigens auch erhalten, indem man vom Quadrat mit der Seite n einen Gnomon von der Breite 1 abzieht und ihm einen ebensolchen hinzufügt; die beiden Gnomone sind dann $2n - 1$ und $2n + 1$, ihre Summe $4n$, welche ein Quadrat sein muß, was $n = m^2$, $4n = (2m)^2$ ergibt, wie zuvor.)

Man kann diesen Vorgehensweg verallgemeinern, indem man für die Breite des Gnomons eine doppelte Quadratzahl $2s^2$ wählt. Er beträgt dann,

zwischen den Quadraten n^2 und $(n + 2s^2)^2$ gelegen, $2s^2n + 2s^2n + 4s^4 = 4s^2(n + s^2)$. Er ist ein Quadrat, wenn $n + s^2 = m^2$, also $n = m^2 - s^2$ ist, und hat selbst den Wert $4s^2m^2 = (2sm)^2$. Endlich ist $n + 2s^2 = m^2 + s^2$, so daß man die pythagoreischen Zahlen $2sm$, $m^2 - s^2$, $m^2 + s^2$ erhält. Sind m und s , also auch m^2 und s^2 beide gerade oder beide ungerade, so sind $m^2 - s^2$ und $m^2 + s^2$ auch gerade Zahlen; man kann dann also alle drei pythagoreische Zahlen durch 2 teilen und erhält auch noch sm , $\frac{1}{2}(m^2 - s^2)$, $\frac{1}{2}(m^2 + s^2)$ als solche, außerdem aber natürlich alle ganzzahligen Vielfachen (vgl. Fig. 14).

Tatsächlich hat man damit bereits die allgemeinste überhaupt geltende Regel für pythagoreische Zahlen gewonnen, wie später EUKLID (El. X, 28 Lemma) bewiesen hat. Auch dieser Beweis könnte auf ältere Zeiten zurückgehen. Der Beweis, den EUKLID auf einen Satz (II, 6) seiner geometrischen Algebra stützt, ist in freier Wiedergabe etwa folgender.

Es sei $uv = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b)$, wo $u = c + b$, $v = c - b$; also $c = \frac{1}{2}(u + v)$, $b = \frac{1}{2}(u - v)$. Auf daß uv ein Quadrat sei, müssen u und v entweder selbst Quadrate oder wenigstens „ähnliche ebene Zahlen“ sein, d.h. solche, die durch ähnliche (gleich proportionierte) Rechtecke figurieren

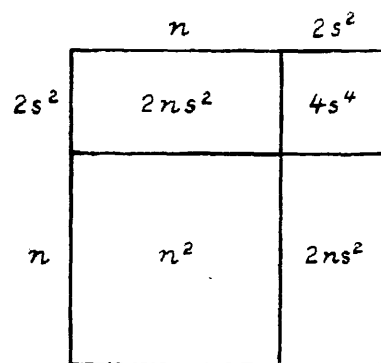


Fig. 14

werden können (VIII, 20). Ihre Seiten mögen sich wie k zu l verhalten, also etwa $u = km \cdot lm$ und $v = ks \cdot ls$ sein. Es ist dann $uv = k^2l^2m^2s^2$. Die drei pythagoreischen Zahlen sind offenbar $\sqrt{uv}$, b , c also $klms$, $\frac{1}{2}(klm^2 - kls^2)$, $\frac{1}{2}(klm^2 + kls^2)$.

(Es sei noch der Beweis von El. VIII, 20 nachgetragen: „Wenn zwei Zahlen a , b multipliziert eine Quadratzahl c^2 ergeben, sind sie ähnliche ebene Zahlen.“ Denn wenn $ab = c^2$, ist $a:c = c:b$. Die kleinsten Zahlen im

Verhältnis $a:c$ seien m , n und es sei $a = mz$, $c = nz$. Dann ist auch $c:b = m:n$ und es sei $c = my$, $b = ny$. Mithin ist $my = nz$ oder $m:z = n:y$, a und b sind also ähnliche ebene Zahlen, denn $m \cdot z$ und $n \cdot y$ sind gleich proportionierte Rechtecke.)

Die vorstehende Betrachtung läßt sich nach E. M. BRUNS und B. L. VAN DER WAERDEN⁶ auf eine bereits babylonische Berechnung rationaler Seiten rechtwinkliger Dreiecke zurückführen, die in einem Tabellentext „Plimpton 322“ enthalten ist. (O. NEUGEBAUER⁷ denkt sich die babylonische Betrachtung mehr nach Art der oben vorgeführten Gnomone durchgeführt.)

⁶ B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel und Stuttgart 1946, S. 125–128.

⁷ O. NEUGEBAUER, *The exact sciences in Antiquity*, Kopenhagen 1951, S. 35 bis 39, 49–52.

Wenn man nämlich die eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks gleich 1 setzt und dann die Bedingungen dafür sucht, daß die andere Kathete b und die Hypotenuse c rational werden, kommt man zu der Gleichung:

$$1 = c^2 - b^2 = (c + b)(c - b).$$

Es müssen dann $c + b$ und $c - b$ zwei reziproke Brüche sein, etwa p/q und q/p (wo p, q relativ prim), so daß man hat:

$$c + b = \frac{p}{q}, \quad c - b = \frac{q}{p},$$

woraus sich ergibt

$$c = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} \right) = \frac{p^2 + q^2}{2pq}, \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p} \right) = \frac{p^2 - q^2}{2pq}.$$

Man erhält damit die drei „pythagoreischen Zahlen“ (u. U. Brüche!)

$$1, \quad \frac{p^2 - q^2}{2pq}, \quad \frac{p^2 + q^2}{2pq}$$

oder nach Multiplikation mit $2pq$ die ganzen Zahlen:

$$2pq, \quad p^2 - q^2, \quad p^2 + q^2.$$

Das ist genau die EUKLIDISCHE Lösung, die sich damit als notwendige und hinreichende Bedingung für die Rationalität der drei Dreiecksseiten erweist. EUKLIDS Methode ist komplizierter, weil er sich nach Art der klassischen griechischen Mathematiker auf die Betrachtung ganzer Zahlen beschränkt; DIOPHANT denkt hierüber anders, denn er steht noch in altorientalischer Tradition.

2. Übergang zur geometrischen Algebra:

Der pythagoreische Lehrsatz

Die altindischen Geometer, die Verfasser der Śulva-Sūtra, operierten auf einem in Quadrate eingeteilten Boden, bedienten sich also eines Verfahrens, das der frühgriechischen geometrischen Arithmetik, die mit Steinen arbeitet, gleichwertig ist. Es findet sich bei ihnen auch eine klare Beschreibung der Bildung eines Gnomons, obwohl sie ein entsprechendes Fachwort nicht besitzen. Im Āpastamba Śulva-Sūtra heißt es (III, 9): „Man fügt das, was man mit der jeweiligen Verlängerung umzieht, an zwei Seiten hinzu und an der Ecke das Quadrat, welches durch die betreffende Verlängerung hervorgebracht wird.“

Die alten Inder und schon die Babylonier benutzten fortgesetzt den „pythagoreischen Lehrsatz“, und zwar allgemein, d.h. auch für den Fall, daß einige Seiten der Dreiecke irrational sind. Wie ist der Satz begründet bzw. seine Benutzung gerechtfertigt worden?

In Indien findet man keine Begründung in antiker Zeit; in Babylonien gibt es in einem Keilschrifttext eine Figur (15), die zum Beweis im Sonderfall des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks dienen kann. Es ist dieselbe, die in der berühmten Sklavenszene des platonischen Dialogs „Menon“ (82b–85b) den geometrischen Erörterungen des SOKRATES zugrunde gelegt wird. Alle Seiten eines Quadrats werden halbiert und die Teilpunkte zu einem zweiten Quadrat verbunden, das halb so groß ist wie das Ausgangsquadrat.

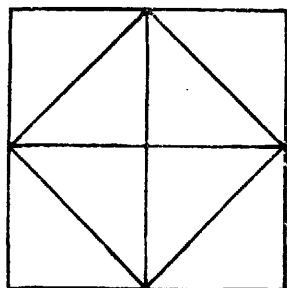


Fig. 15

In einem alten chinesischen Kalenderwerk, dem Chou-pei Suan-chin, wird die sogenannte „Figur des Seiles“ beschrieben, die im folgenden wiedergegeben ist (Fig. 16, 17). Der Name der Figur könnte auf die Sulva-Sūtra, die „Seil-Regeln“, hindeuten.

Ein Quadrat ist in $7 \cdot 7$ kleine Quadrate geteilt; ihm ist ein zweites Quadrat eingeschrieben, dessen Ecken die Seiten des ersten Quadrats im Verhältnis $3:4$ teilen. Das eingeschriebene Quadrat entsteht durch Wegnahme von vier halben oder zwei ganzen Rechtecken $3 \cdot 4$, enthält also $49 - 2 \cdot 12 = 25$ kleine Quadrate (Fig. 16). Teilt man die Fläche des großen Quadrats in anderer

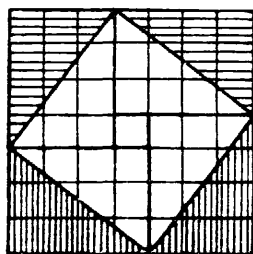


Fig. 16

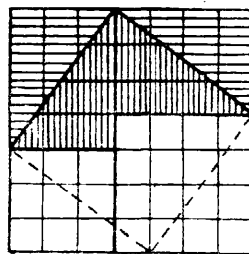


Fig. 17

Weise (Fig. 17), doch wiederum so, daß zwei Rechtecke $3 \cdot 4$ abgezogen werden, so behält man zwei Quadrate $3 \cdot 3$ und $4 \cdot 4$ übrig. Arithmetisch ist dies selbstverständlich; geometrisch bedeutet es, daß das Quadrat $5 \cdot 5$ über der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten 3, 4, 5 flächengleich ist der Summe der Quadrate $3 \cdot 3$ und $4 \cdot 4$ über den beiden Katheten.

Die chinesische Figur betrifft nur den speziellen Fall des Dreiecks mit den Seiten 3, 4, 5; aber die Betrachtung gilt offenbar ganz allgemein, sowohl für rationale als auch für irrationale rechtwinklige Dreiecke, sie stellt einen ganz allgemeinen „Zerlegungsbeweis“ für den pythagoreischen Lehrsatz dar, der sich übrigens auch bei dem arabischen EUKLID-Kommentator ANNARIZI findet. Ähnliche Figuren hat auch die spätere mittelalterliche indische Geometrie.

Ein derartiger Zerlegungsbeweis muß also in vorgriechischer Zeit in der oder jener Form vorhanden gewesen sein. Auch EUKLID bringt (El. I, 47) einen Zerlegungsbeweis, aber von anderer Art, der von PROKLOS in seinem Kommentar zur Stelle auch ausdrücklich ihm selbst zugeschrieben wird. Nun hat EUKLID im VI. Buch (31) noch einen ganz verschiedenen Beweis mittels Proportionen, der sich allerdings auf einen allgemeineren Satz, bei dem irgendwelche zueinander ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks verglichen werden, bezieht.

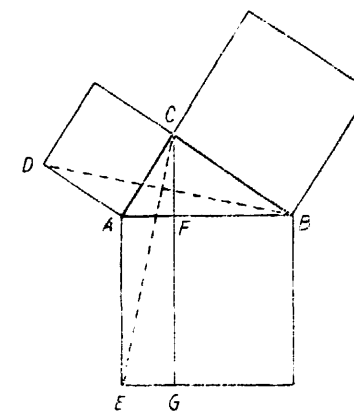


Fig. 18

Das Charakteristische aller dieser Beweise ist, daß das Quadrat über der Hypotenuse durch die verlängerte Höhe auf sie in zwei Rechtecke geteilt wird, die einzeln den Quadraten über den Katheten gleich sind. EUKLID macht in I, 47 von Proportionen grundsätzlich keinen Gebrauch, offenbar, um die Elemente der Geometrie von einer schwierig zu begründenden *allgemeinen*, d. h. auch für irrationale Verhältnisse geltenden Proportionalenlehre unabhängig zu machen. Die Flächengleichheit des Quadrats über AC und des Rechtecks $AFGE$ wird z. B. durch die kongruenten Dreiecke ABD und AEC vermittelt (Fig. 18).

Der ältere Beweis, der die Proportionalenlehre naiv benutzt, geht davon aus, daß die rechtwinkligen Dreiecke ABC , ACF , CBF (in denen die Winkel bei A und B übereinstimmen) ähnlich, ihre homologen Seiten also proportioniert sind (Fig. 19).

Es ist: $AF:AC = AC:AB$ und $BF:BC = BC:AB$

d. h. $AC^2 = AF \cdot AB$ und $BC^2 = BF \cdot AB$

also $AC^2 + BC^2 = AF \cdot AB + BF \cdot AB = (AF + FB) AB = AB^2$.

Der euklidische Beweis in I, 47 ist offenbar eine Abwandlung dieser Argumentation; in VI, 31 wendet EUKLID die Sache etwas anders. Ähnliche Figuren verhalten sich wie die Quadrate ihrer linearen (homologen) Dimensionen, also, sofern sie über den Seiten von ABC (den Hypotenusen der Dreiecke ABC , ACF , BCF) errichtet sind, wie AB^2 , AC^2 , BC^2 . Die ähnlichen Dreiecke ABC , ACF , CBF sind also auch diesen Quadraten proportional, d. h. diese unterscheiden sich von ihnen lediglich durch einen und denselben Proportionalitätsfaktor, sagen wir m . Er ist demnach $AB^2 = m \cdot ABC$, $AC^2 = m \cdot ACF$, $BC^2 = m \cdot CBF$. Nun ist offenbar: $ABC = ACF + CBF$, mithin $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

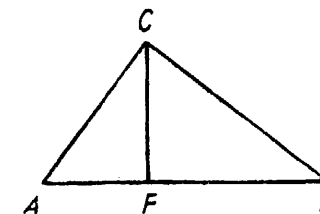


Fig. 19

Rechter⁸. Also ist BK^2 größer als $2BF^2$ oder EK^2 größer als $2KF^2$, mithin $EF^2 = EK^2 - \frac{1}{2}EK^2$ größer als $EK^2 - KF^2$. Folglich ist der Winkel EKF stumpf und das Segment $EKBG$ kleiner als ein Halbkreis.

Die „Einschiebung“ der Strecke EF zwischen Kreis und Gerade (OL führt auf folgendes quadratische Problem: Es genügt offenbar, den Punkt F zu bestimmen; denn die Verlängerung von BF geht durch E . Verbindet man noch A mit E , so ist das Dreieck ABE (bei E rechtwinklig⁹) ähnlich dem Dreieck EBG , da der Winkel EBG gemeinsam ist. Also ist $EB : AB = BG : BE$, d.h. $EB \cdot BE = AB \cdot BG = 2 \cdot AK \cdot \frac{1}{2} \cdot AK = AK^2$. Mithin: $(EF + EB) \cdot EB = AK^2$ oder $EF \cdot EB + EB^2 = AK^2$, d.h. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot AK \cdot EB + EB^2 = AK^2$, wo AK bekannt ist. Diese quadratische Gleichung für EB führt aber auf eine sogenannte „hyperbolische Flächenanlegung“, ganz analog der „stetigen Teilung“. (Siehe den folgenden Abschnitt.)

4. Lösung quadratischer Aufgaben. — „Flächenanlegung“

Quadratische Gleichungen, auch solche vom gemischten Typus, wurden, wie wir sahen, schon von den Babyloniern gelöst. Als ein weiteres Beispiel diene der folgende Text (Thureau-Dangin, Revue d'Assyriologie Vol. 33, p. 2—4):

„Ein Feld und seine Quadratseite addiert ist 0;45. 1 als Koeffizienten setztst du. Die Hälfte von 1 ziehst du ab: 0;30. Mit 0;30 multiplizierst du: 0;15. Zu 0;45 fügst du hinzu. Dann gibt es 1. Die Quadratwurzel ist 1. 0;30, das du mit sich selbst multipliziert hast, ziehst du von 1 ab; dann ist 0;30 die Quadratseite.“

Deutung

Die Aufgabe ist: $x^2 + 1 \cdot x = 0;45$ (vom Typus $x^2 + px = q$); zur Lösung wird nacheinander gebildet:

(in Zahlen)

$$1. \quad 1 - \frac{1}{2} \cdot 1 = 0;30$$

$$2. \quad (0;30)^2 = 0;15$$

$$3. \quad 0;15 + 0;45 = 1$$

$$4. \quad \sqrt{1} = 1$$

$$5. \quad 1 - 0;30 = 0;30$$

(in allgemeinen Formeln)

$$1. \quad 1 - \frac{1}{2}p$$

$$2. \quad \left(\frac{1}{2}p\right)^2$$

$$3. \quad \left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q$$

$$4. \quad \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q}$$

$$5. \quad \sqrt{\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q} - \frac{1}{2}p$$

⁸ Dieser Beweis wurde von E. J. DROSTENBURTS rekonstruiert (Die Elementen von Euklides, Groningen 1929—30, Bd. I, S. 30). — Zur Erneuerung des verlorenen griechischen Textes s. O. BECKING, Philologus Bd. 99 (1955), S. 213—316.

Erläuterung

Es ist identisch:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Also, da nach der Formel der Aufgabe: $x^2 + px = q$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q. \quad (\text{vgl. 3})$$

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}. \quad (\text{vgl. 4})$$

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}. \quad (\text{vgl. 5})$$

Die obige Identität drückt sich geometrisch, wenn man sich die Zahlen mit Steinchen ausgelegt denkt, durch Fig. 23 aus (EUKLID, EL. II, 4): $q = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}px$ ist der Quotient. Wenn die Fläche $q = a^2$ als Quadrat gegeben ist (worin ja jede Figur verwandelt werden kann), so läßt sich $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = a^2$ sofort als Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten $\frac{1}{2}p$ und a konstruieren, und, wenn man davon $\frac{1}{2}p$ abzieht, erhält man x .

Diese Figur ist keine andere als die in II, 4 der „Elemente“, die Methode ist die der „quadratischen Ergänzung“.

Die Hauptmethode der griechischen geometrischen Algebra aber ist die sogenannte „Flächenanlegung“ (vgl. PROCLUS in EUKLID, p. 419, 15—420, 12).

Die parabolische Flächenanlegung

(EUKLID, EL. I, 42—44) besteht in der Konstruktion eines Rechtecks jenseits einer gegebenen Strecke c , das eine vorgeschriebene Fläche $a \cdot b$ (ebenfalls in der Form eines Rechtecks gegeben) hat. Dies geschieht mit Hilfe des Satzes von den „Ergänzungsparallelogrammen“, gemäß Figur 24. c liegt in der Verlängerung der Seite a . Man ergänzt das Rechteck $b \cdot c$, dessen Diagonale die Verlängerung der anderen Seite b schneidet. Man ergänzt wiederum zum Rechteck und erhält endlich das gesuchte Rechteck $c \cdot x$ durch Verlängerung der ersten Seite b .

Die beiden anderen Fälle sind die der *elliptischen* und der *hyperbolischen Flächenanlegung*: An eine gegebene Strecke ist ein Rechteck gleich einer gegebenen Fläche (die in der Form eines Quadrats vorgelegt werden kann) mittels einer Konstruktion, die sich aus der euklidischen Beweisfigur des pythagoreischen Satzes ergibt (es ist in Fig. 18, 44², 44³, 44⁴, so anzulegen.

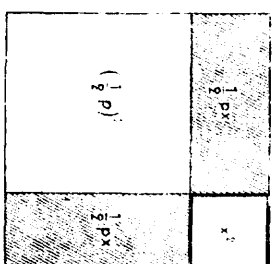


FIG. 23

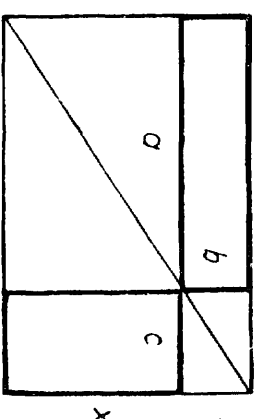


FIG. 24

daß das am Rechteck über der Strecke fehlende bzw. überschießende Flächenstück ein Quadrat wird. Der erste ist der „elliptische“, der zweite der „hyperbolische“ Fall.

Zur Lösung der Aufgabe dienen die beiden folgenden Sätze der „Elemente“ (II, 5 und 6):

II, 5: „Wird eine Strecke AB in gleiche (durch C) und ungleiche (durch D) Teile geteilt, so ist das aus den ungleichen Teilen gebildete Rechteck $AD \cdot BD$ zusammen mit dem Quadrat der Strecke zwischen den beiden Teilpunkten BD gleich dem Quadrat der halben Strecke BC .“

II, 6: „Wird eine Strecke AB in gleiche Teile durch C geteilt und um eine Strecke BD verlängert, so ist das aus der ganzen Strecke AB und der hinzugefügten Strecke BD gebildete Rechteck zusammen mit dem Quadrat der halben Strecke BC gleich dem Quadrat aus der Summe der halben Strecke BC und der Zusatzstrecke BD .“

Die Beweise ergeben sich aus der Umbildung des gesuchten Rechtecks über AD in einen Gnomon, der dann zum Quadrat ergänzt wird.

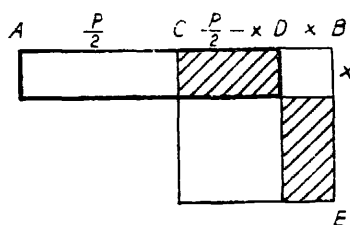


Fig. 25

Figur zu II, 5 (elliptischer Fall)

$$px - x^2 = q$$

$$AC = CB = \frac{1}{2}p, \quad BD = x$$

Rechteck über $AD = px - x^2$
Gnomon $CBE = q$

Aus den beiden Theoremen ergibt sich leicht die konstruktive Lösung der Aufgabe.

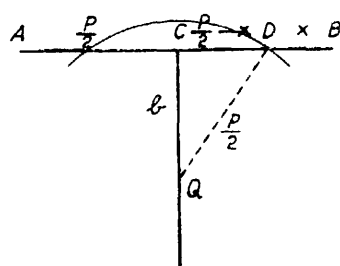


Fig. 27. Elliptischer Fall

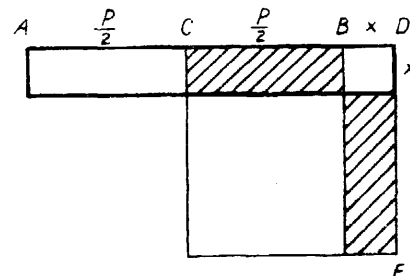


Fig. 26

Figur zu II, 6 (hyperbolischer Fall)

$$px + x^2 = q$$

$$AC = CB = \frac{1}{2}p, \quad BD = x$$

Rechteck über $AD = px + x^2$
Gnomon $CDE = q$

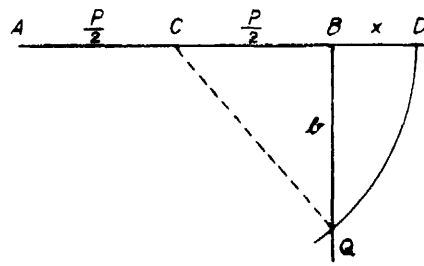


Fig. 28. Hyperbolischer Fall

1. *Elliptischer Fall* (Fig. 27): Man errichte im Mittelpunkt C der Strecke AB das Lot $CQ = b$ (wo $q = b^2$) und schlage mit $\frac{1}{2}p$ als Radius um Q den Kreis, der CB in D schneidet; x ist dann gleich BD . — Die Möglichkeitsbedingung ($\delta\iota\omicron\rho\iota\sigma\mu\acute{o}\varsigma$) ist dafür, daß b kleiner als $\frac{1}{2}p$ ist.

Beweis

$$CD^2 + CQ^2 = QD^2, \quad \left(\frac{1}{2}p - x\right)^2 + q = \left(\frac{1}{2}p\right)^2$$

oder

$$\left(\frac{1}{2}p\right)^2 - px + x^2 + q = \left(\frac{1}{2}p\right)^2,$$

$$\text{d. h. } x^2 + q = px.$$

2. *Hyperbolischer Fall* (Fig. 28): Ist q als Quadrat (b^2) gegeben, so errichte man im Punkte B der gegebenen Strecke $AB = p$ ein Lot BQ von der Länge b und schlage um den Mittelpunkt C von AB mit CQ als Radius einen Kreis, der AB bzw. seine Verlängerung in D schneidet; BD ist dann gleich x .

Beweis

Es ist $CB^2 + BQ^2 = CQ^2$, d. h.

$$\left(\frac{1}{2}p\right)^2 + q = \left(\frac{1}{2}p + x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}p\right)^2 + px + x^2,$$

$$\text{also } q = px + x^2.$$

Daß diese Konstruktion die alte pythagoreische ist, wird durch die euklidische Methode zur Lösung des Problems der stetigen Teilung (II, 11) bewiesen. In diesem Fall ist $q = p^2$, also $b = p$. Die zu lösende Gleichung ist $x^2 + px = p^2$ oder $p(p - x) = x^2$, d. h. $p : x = x : (p - x)$.

Die Konstruktionen, die EUKLID selbst in VI, 28, 29 gibt, sind verwickelter und behandeln allgemeinere Aufgaben, wenigstens in geometrischer Hinsicht; er macht dabei von der allgemeinen Proportionenlehre Gebrauch, während die geometrische Algebra des II. Buchs der „Elemente“ gerade den Zweck hat, diese zu vermeiden. In den „Data“ (Satz 58, 59) hat EUKLID noch eine andere Darstellung des Sachverhalts gegeben, die der babylonischen Weise sehr nahe kommt. Als Beispiel diene:

Hyperbolischer Fall (Data 59; vgl. Fig. 26): „ AB wird durch C halbiert, also ist CB gegeben. Quadrat über CB ist konstruierbar, also gegeben. Rechteck über AD plus Quadrat über CB , die Summe gleich Quadrat über CD , ist gegeben. Also ist Quadrat über CD gegeben, mithin auch die Seite CD . Also ist auch $x = DB$ (als Differenz von CD und CB) gegeben.“ Die einzelnen Schritte sind der babylonischen Rechnung ganz analog. ($AB = p$, Rechteck über $AD = q$, $BD = x$).

Auch die *babylonischen Normalformen*, auf die in späterer Zeit die quadratischen Aufgaben reduziert zu werden pflegen, $xy = q$, $x + y = p$ und $xy = q$, $x - y = p$ finden sich in den Sätzen 84, 85 der „Data“ wieder; ihre Lösung wird auf die vorhin genannten Sätze 58, 59 zurückgeführt.

Die geometrische Algebra des II. Buchs der „Elemente“ gestattet alle algebraischen Operationen 1. und 2. Grades geometrisch, das bedeutet für irgend welche durch Strecken darstellbare Größen, durchzuführen. So stellt z.B. die parabolische Flächenanlegung eine Division dar ($ab = cx$ d.h. $x = ab : c$). Die Verwandlung eines Rechtecks ($a \cdot b$) in ein Quadrat bedeutet die Ausziehung der Quadratwurzel ($ab = x^2$, $x = \sqrt{ab}$).

Der Grund für den systematischen Ausbau dieser geometrischen Algebra, deren erste Anfänge ins hohe Altertum zurückgehen (Altindien und vielleicht Babylonien!), war die Entdeckung des Irrationalen. Darüber wird im folgenden Abschnitt berichtet, nachdem zunächst noch einige Näherungsmethoden für Wurzeln erörtert worden sind.

IN DAS MATHEMATISCH DENKEN DER ANTIKE

b) Approximationen für irrationale Wurzeln

1. Näherungsverfahren für die Quadratwurzeln

Schon in babylonischer Zeit war die Näherung $a \pm \frac{b}{2a}$ für die Quadratwurzel aus $a^2 \pm b$ bekannt, ebenso in Altindien und sicher auch in frühgriechischer Zeit. Später tritt die Formel bei HERON (Metric. p. 18, 22–20, 5 Schöne) auf. Sie wird schon in alter Zeit *wiederholt* angewandt, um die Güte der Näherung fortgesetzt zu steigern. So wurde die indische Näherung für $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}$$

aus der babylonischen Approximation $\sqrt{2} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}$ hergeleitet und diese wahrscheinlich durch folgende Überlegung: $\sqrt{2}$ liegt zwischen 1 und 2; das Einfachste ist, das arithmetische Mittel $\frac{1+2}{2}$ zwischen 1 und 2 als erste Näherung zu nehmen. Nun ist $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2 + \frac{1}{4}$ oder $2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Nach unserer Regel ist demnach:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{4} : \frac{2 \cdot 3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4}.$$

Weiter ist:

$$\left(\frac{17}{12}\right)^2 = \frac{289}{144} = 2 + \frac{1}{12^2}.$$

Also:

$$2 = \left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{12^2}.$$

Demnach ist:

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{1}{12^2}} = \frac{17}{12} - \left(\frac{1}{12^2} : \frac{2 \cdot 17}{12}\right) = \frac{17}{12} - \frac{1}{12 \cdot 2 \cdot 17} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34}.$$

Die allgemeine Formel für diese Näherung leuchtet ein, wenn man quadriert. Es wird:

$$\left(a \pm \frac{b}{2a}\right)^2 = a^2 \pm b + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

für $a^2 \pm b$ gesetzt, also ein um den kleinen Betrag $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ zu großer Wert.

Das hat man sich sicher auch, nach dem Satz vom Gnomon (II, 4), geometrisch klargemacht.

Eine andere Herleitung geht von einer *Mittelbildung* aus. Das ist deshalb interessant, weil sie von selbst auf alle drei einfachen Mittel führt, die nachweisbar bei den Pythagoreern (in der Musiktheorie bei PHILOLAOS (A 24 = Nicom. 26, 2), ARCHYTAS (B 2 = Porphyrt. in Ptolem. harm. p. 267), PLATON (Tim. 36a, Epin. 991a) auftreten: sie sind nach IAMBlichOS (in Nicom. p. 118, 1939) von Pythagoras aus Babylon in Gestalt der „vollkommensten Proportion“ eingeführt worden. Diese lautet:

$$a : \frac{a+b}{2} = \frac{2ab}{a+b} : b \quad \text{oder} \quad a : \frac{1}{2}(a+b) = \left[1 : \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\right] : b.$$

z.B. $12:9 = 8:6$ oder $2:\frac{3}{2} = \frac{4}{3}:1$, welches letzteres Beispiel die musikalischen Intervalle bezeichnet, die bei der Teilung der Oktave (2:1) auftreten, nämlich Quint (3:2) und Quart (4:3); denn es ist $2:1 = (3:2) (4:3)$.

Das erste Mittelglied der Proportion ist das *arithmetische*, das zweite das „*harmonische*“ Mittel, in alter Zeit das reziproke ($\sigma\pi\epsilon\nu\sigma\tau\iota\kappa\eta$, *subcontrarium*) genannt, offenbar, weil es den reziproken Wert des arithmetischen Mittels der reziproken Werte der Randterme a und b darstellt. Nun ist in der „vollkommensten Proportion“ das Produkt der Außenglieder gleich dem der Innenglieder:

$$a \cdot b = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{2ab}{a+b} = \frac{1}{2}(a+b) : \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Das geometrische Mittel m von a, b , nämlich $\sqrt{ab}$, ist also auch das geometrische Mittel ihres arithmetischen und harmonischen Mittels. Das bedeutet aber, daß man dem geometrischen Mittel von a, b fortgesetzt näher kommt, wenn man wiederholt ihr arithmetisches und harmonisches Mittel zwischen die jeweils erreichten Termini einschiebt. Das führt offenbar auf ein Approximationsverfahren für die Quadratwurzel aus ab , und es zeigt sich, daß dieses kein anderes ist, als das vorhin besprochene⁹.

Es sei $\sqrt{d}$ zu approximieren, und es werde $d = ab$ gesetzt und zunächst durch a, b angenähert.

1. Das arithmetische Mittel (größer als $\sqrt{ab}$) ist dann:

$$\frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{d}{a}\right) = \frac{a^2 + d}{2a} = a + \frac{d-a^2}{2a} = a + \frac{\beta}{2a},$$

wenn man $d = a^2 + \beta$ setzt, wie in der bekannten Formel HERONS.

2. Das harmonische Mittel (kleiner als $\sqrt{ab}$) ist:

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{ab+ab}{a+b} = \frac{ab+d}{a+b}.$$

⁹ Vgl. CONRAD MÜLLER, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik (B) II, 281ff. – O. TOEPLITZ, ibid. II, 286ff.