

De jeugd van 's werelds hoofdstad, Romes jeugd,
gunt in den rei der dichters mij een plaats,
en reeds verstomt het grommen van den nijld.

O Muze, die het snarenspeel beheerscht,
die zelfs de stomme visschen, als gij wilt,
kunt laten zingen met der zwanen stem,
dit alles is uw werk, uw werk alleen,
dat men op straat mij aanwijst als den man,
die Romes lier tot leven heeft gewekt,
dat, wat mijn hart beroert, tot schoonheid wordt.

Den Haag.

A. RUTGERS VAN DER LOEFF.

Interval en Verhouding

I.

De aan Pythagoras toegeschreven ontdekking van de mogelijkheid, de consonante muzikale intervallen te karakteriseeren door verhoudingen (redens) van kleine getallen (2 : 1 voor het octaaf; 3 : 2 voor de quint; 4 : 3 voor de quart) vormt voor meer dan één gebied van het Grieksche denken een feit van fundamenteele beteekenis. Zij was een krachtig argument voor de opvatting der Pythagoraeërs, dat het wezen der dingen door getallen is uit te drukken (dat „de dingen getallen zijn”) en zij droeg er daardoor toe bij, aan het getal den sterken en doordringenden invloed op de ontwikkeling der wijsbegeerte te verkenen, dien het tot in en na Plato's tijd zou blijven uitoefenen; ze legde tusschen de muziek en die andere wetenschap, waarin de meest elementaire feiten met behulp van eenvoudige getallen waren te beschrijven, de astronomie, het nauwe verband, dat nog lang na den ondergang van de Grieksche cultuur voor de sterrenkunde zijn heuristische beteekenis zou behouden; en ze beduidde als de oudste mathematische beschrijving van een natuurkundig verschijnsel een belangrijke bijdrage tot den opbouw der physica.

Men is in het algemeen geneigd aan te nemen, dat de wijze, waarop een vondst van zoo groote waarde werd gedaan, zeker reeds lang nauwkeurig zal zijn onderzocht, en dat men dus slechts hetzij een

Griekschen schrijver over muziektheorie, hetzij een modern werk over de Grieksche cultuur zal behoeven op te slaan, om zich onmiddellijk van de juiste toedracht van het geval op de hoogte te kunnen stellen. Niets blijkt bij nadere beschouwing minder waar te zijn. Wat Grieksche schrijvers erover vertellen, lijkt veelal historisch onbetrouwbaar en is niet zelden uit natuurwetenschappelijk oogpunt zonder twijfel ongerijmd; moderne historici echter loopen vaak over de problemen, die aan dit ontdekkings verhaal, evenals aan zoovele andere, vastzitten, heen òf ze geven van den gedachten-gang, die Pythagoras tot zijn vondst zou hebben geleid, een reconstructie, die gewoonlijk historisch des te onwaarschijnlijker wordt, naarmate ze natuurwetenschappelijk meer correct mag heeten.

Wanneer men zich uit de beschikbare Grieksche bronnen zelfstandig een voorstelling tracht te vormen, die tegelijkertijd natuurwetenschappelijk en historisch verantwoord is, stuit men al spoedig op moeilijkheden. Niet alleen wordt dan de wijze, waarop de ontdekking kan zijn gedaan, problematisch, maar zelfs blijkt het niet duidelijk te zijn, hoe men het meegedeelde resultaat eigenlijk moet verstaan.

In onzen tijd is het duidelijk genoeg, wat men zich bij de be-wering, dat bijvoorbeeld het interval van de quint door de reden $3 : 2$ wordt bepaald, moet denken. Iedere toon wordt, wat zijn hoogte betreft, gekenmerkt door een getal, het trillingsgetal of de frequentie, dat aangeeft, hoeveel trillingen het geluidgevende lichaam per tijdseenheid uitvoert; het interval van twee tonen echter blijkt natuurkundig te worden bepaald door de verhouding van hun frequenties; de reden $3 : 2$, als breuk $3/2$ ook het relatieve trillingsgetal van de quint genaamd, geeft dus aan, dat van twee tonen, die een quint in hoogte verschillen, de hoogste afkomstig is van een geluidsbron, die per tijdseenheid $3/2$ maal zooveel trillingen uitvoert als de bron, die den laagsten voortbrengt. Hieruit volgt onmiddellijk, dat het relatieve trillingsgetal van de som van twee intervallen gevonden wordt door de relatieve trillingsgetallen van die twee intervallen met elkaar te vermenigvuldigen of, anders uitgedrukt, dat de namen van de muzikale intervallen eigenlijk aanduidingen zijn voor de logaritmen van frequentie verhoudingen.

Het is nu onmiddellijk duidelijk, dat men in de Grieksche muziektheorie deze beteekenis van de kenmerkende reden van een interval niet zal kunnen verwachten. Het begrip frequentie is den Griekschen schrijvers over muziek vreemd, al treft men hier en daar wel het

inzicht aan, dat een toon des te hooger wordt, naarmate de beweging, die hem voortbrengt, in sneller tempo plaats heeft. Men komt dus vanzelf tot de vraag, welke aan de afzonderlijke tonen van een interval toe te kennen natuurkundige grootheid het dan wel is, waarvan de waardenverhouding het interval bepaalt.

Het antwoord, dat men gewoonlijk op deze vraag hoort geven, is, dat voor die grootheid de lengte van een snaar moet worden genomen. Men moet zich dan voorstellen, dat de afzonderlijke tonen, waarvan sprake is, worden voortgebracht met behulp van snaren van hetzelfde materiaal, van gelijke doorsnede en gelijke spanning; daar de frequenties van twee tonen nu omgekeerd evenredig zijn met de lengten der gebruikte snaren, zal blijkbaar het relatieve trillingsgetal van het interval van deze twee tonen ook kunnen worden beschouwd als de verhouding van de bijbehorende snaarlengten; alleen hoort nu bij den grootsten term van de reden de laagste der twee tonen, terwijl bij de opvatting van het relatieve trillingsgetal als frequentie verhouding de grootste term juist met den hoogsten toon correspondeert.

Het ziet er dus naar uit, dat het mogelijk moet zijn om uit te maken of het gegeven antwoord als juist kan worden aanvaard, door na te gaan of inderdaad de Grieksche schrijvers over muziektheorie den grootsten term van een ter bepaling van een interval gebruikte reden steeds aan den laagsten, den kleinsten term daarentegen aan den hoogsten toon van het interval toewijzen.

Nu komt het zeer zeker voor, dat zij dit doen: in de *Sectio Canonis*, die op naam van Euclides staat, vindt men consequent tonen aanschouwelijk voorgesteld door lijnstukken, die men als snaarlengten kan opvatten en die dan ook des te korter zijn, naarmate ze hoogere tonen moeten afbeelden.¹ Hetzelfde is het geval in de *Harmonica* van Ptolemaeus, waarvan de talrijke tabellen op metingen aan een monochord gebaseerd zijn en waarin men dan ook bij de afzonderlijke tonen getallen opgegeven vindt, die blijkbaar eveneens snaarlengten kunnen beduiden.²

Regel is dit echter geenszins. In het *Harmonices Manuale* van Nicomachus vindt men aan de afzonderlijke tonen van een tetrachord getallen toegekend, die toenemen naar den kant van de

¹ Euclides, *Scripta Musica. Opera Omnia*; edd. Heiberg et Menge. Vol. VIII, Leipzig 1916, p. 158—183.

² Ptolemaeus, *Harmonica*; ed. I. Düring, Göteborg 1930.

hoogere tonen¹. In de *Harmonica Introductio* van Gaudentius wordt de reeks der getallen, die de schrijver met de tonen van een diatonischen toonladder laat corresponderen, achtereenvolgens op twee manieren berekend, eenmaal stijgend met toenemende hoogte, eenmaal dalend.² En in de inleiding van dezelfde *Sectio Canonis*, waarin hoogere tonen door kortere lijnstukken werden afgebeeld, wordt betoogd³, dat tonen daarom tot elkaar in verhouding van getal tot getal staan, omdat ze als quantiteiten zijn op te vatten, die bij verhouding van toon toe-, bij verlaging afnemen; waarmee dan de verderop toegepaste correspondentie van grooter getal en kleinere toonhoogte in het geheel niet klopt.

We zien dus, dat men onmogelijk kan volhouden, dat in de Grieksche muziektheorie intervallen steeds wiskundig werden weergegeven door een verhouding van snaarlengten. Dat het niet geschiedde door een verhouding van frequenties, stond reeds bij voorbaat vast, maar kan ten overvloede nog worden ingezien op grond van dezelfde argumenten, die boven tegen de andere mogelijkheid werden aangevoerd.

Nu het niet mogelijk blijkt, op de gestelde vraag een algemeen geldig antwoord te geven, ligt het voor de hand, om na te gaan, of de vraag zelf wel juist geformuleerd was. We vroegen naar de natuurkundige, aan elk der tonen van een interval toe te kennen grootheid, welker waardenverhouding voor die twee tonen het interval zou kunnen bepalen en we namen daarbij stilzwijgend aan, dat men zich, als men een interval door een verhouding kenmerkt, er noodzakelijk steeds van bewust moet zijn, welke grootheid het is, waarvan twee waarden de opgestelde verhouding bezitten. Dit laatste is nu echter geenszins het geval: in de mathematische theorie van het muzikale interval heeft men uitsluitend te maken met intervallen aan den eenen en met verhoudingen van getallen aan den anderen kant. Het primaire feit is, dat een interval mathematisch wordt voorgesteld door een reden en dat met het optellen van twee intervallen de vermenigvuldiging der bijbehorende redens correspondeert; dat de verhouding, die een interval voorstelt, tevens de verhouding is van de frequenties van de tonen, die

¹ Nicomachus, *Harmonices Manuale* ; ed. M. Meibomius, Amsterdam 1652, p. 13.

² Gaudentius, *Harmonica Introductio* ; ed. M. Meibomius, Amsterdam 1652, p. 17.

³ Euclides, *Sectio Canonis* ; l. c. p. 158.

het interval vormen, of de omgekeerde verhouding van de lengten van even sterk gespannen snaren van hetzelfde materiaal en gelijke dikte, die die tonen voortbrengen, is daarbij in den regel volkomen irrelevant.

We kunnen dus de mogelijkheid overwegen, dat deze beschouwingswijze, die misschien gekunsteld kan lijken, wanneer ze ontstaat door van de kennis van de physische beteekenis van het relatieve trillingsgetal van een interval te abstraheeren, maar die ongetwijfeld de meest natuurlijke is, zoolang men aan die kennis nog niet is toegekomen, door de Grieksche muziektheoretici is toegepast. Om na te gaan, in hoeverre die mogelijkheid verwerkelijk is geweest, zal het noodig zijn, eerst kennis te maken met de overlevering, die er inzake de ontdekking van den samenhang van interval en verhouding, bestaat.

Oisterwijk.

E. J. DIJKSTERHUIS.
(*Wordt vervolgd.*)

van zijn boek gemaakt heeft. Kort voor de inval der Perzen bereikt de Romeinen een bericht van Procopius, die zich als gezant in Perzië bevond, en dat door een bode in de schede van zijn zwaard was medegebracht. Om het bericht voor den vijand onbegrijpelijk te maken had Procopius de namen van personen en plaatsen door andere vervangen. Na veel moeite slaagde de Romeinsche aanvoerder er in het bericht te ontcijferen. Hier volgt de text van Ammianus: een echt voorbeeld uit de praktijk van het soldatenleven, zooals we die zoo veel bij hem vinden. De brief luidde: „Amendatis procul Graiorum legatis, forsitan et necandis, rex ille longaevus non contentus Hellesponto, iunctis Granici et Rhyndaci pontibus, Asiam cum numerosis populis pervasurus adveniet suopte ingenio inritabilis et asperimus, auctore et incensore Hadriani quondam Romani Principis successore; actum et conclamatum est, ni caverit Graecia”. (XVIII, 6. 18).

Met de „Graiorum legati” zijn bedoeld de Romeinsche gezanten, die met Procopius in Perzië vertoeven. „Rex ille longaevus” is de Perzische Koning Sapor, ook elders zoo genoemd. De „Granicus” en de „Rhyndacus” vervangen blijkens Ammianus de Anzaba (Zab) en de Tigris. Voor de laatste zinsnede diene men te weten, dat een zekere Antoninus naar de Perzen was overgelopen en Sapor aanzette tot den oorlog met de Romeinen. Hij is bedoeld niet: „Hadriani quondam Romani Principis Successore”. We zien, dat de fictie alsof het bericht betrekking heeft op de oorlogen, die de Grieken met de Perzen voerden, goed volgehouden is. Alleen „Asiam” schijnt uit den toon te vallen.¹

Ginneken.

M. F. A. BROK.

Interval en Verhouding

II.

Het verhaal over de wijze, waarop Pythagoras zou hebben ontdekt, dat de consonante muzikale intervallen corresponderen met verhoudingen van kleine getallen staat, in hoofdzaak overeenstemmend, te lezen in het *Harmonices Manuale* van Nicomachus²,

¹ Voor hen, die op dit onderwerp dieper willen ingaan verwijs ik naar Diels, *Antike Technik en Rüpl, Das Nachrichtenwesen im Altertum*.

² Nicomachus, *Harmonices Manuale* ; l. c. p. 10.

in de *Harmonica Introductio* van Gaudentius¹ en in de *Institutio Musica* van Boethius². Het heet dan, dat Pythagoras, voorbij een smidse komende, in het geluid van het slaan met ijzeren hamers op een aambeeld de intervallen octaaf, quint en quart opmerkte; bij onderzoek bleek hem, dat de oorzaak van de waargenomen verschillen in toonhoogte alleen in het gewichtsverschil van de hamers kon liggen. Na de hamers nauwkeurig te hebben gewogen en te hebben vastgesteld, dat de gewichten zich verhielden als de getallen 12, 9, 8 en 6, ging hij naar huis en hing daar onder aan vier onderling volkomen gelijke verticaal afhangende snaren gewichten op, die evenredig waren met die der hamers. Het bleek nu, dat de snaar, die met een gewicht van 12 eenheden bezwaard was, bij tokkelen de bovenoctaaf gaf van den toon der snaar, die een gewicht van 6 eenheden droeg; hij toonde hierdoor aan (aldus Nicomachus), dat de consonantie van het octaaf in de tweevoudige reden (ἐν διπλασίῳ λόγῳ) stond, welke ook de gewichten vertoonden. Verder merkte hij op, dat de snaren met 8 en 9 eenheden belasting opvolgend de bovenquart en de bovenquint gaven van den toon der zwakst gespannen snaar. Hij bevestigde de gedane waarneming door proeven met het chordotonon, een instrument, waarin snaren horizontaal konden worden gespannen tot bedragen, die met de opgehangen gewichten evenredig waren; en hij breidde tenslotte het experiment uit op allerlei andere instrumenten, onder welke de aulos, de syrinx en het monochord genoemd worden. Steeds vond hij daarbij voor de drie beschouwde intervallen (de eenige, die volgens Pythagoraeische opvatting niet grooter dan het octaaf en tevens consonant zijn) dezelfde verhoudingen.

Wat hij aan het monochord heeft waargenomen, omschrijft Gaudentius nauwkeuriger: van een gespannen snaar werd achtereenvolgens de helft, tweederde en drievierde deel in trilling gebracht, waarbij men opvolgend het bovenoctaaf, de bovenquint en de bovenquart hoorde van den toon, dien de onverkorte snaar voortbracht.

Tot zoover de overlevering, die, naar den lezer reeds duidelijk zal zijn geworden, tal van critische vragen doet rijzen. De eerste is wel deze, hoe Pythagoras uit zijn waarnemingen in de smidse en uit zijn experimenten met gespannen snaren ooit tot het

¹ Gaudentius, *Harmonica Introductie*; l. c. p. 13.

² Boethius, *Institutie Musica* I, 10-11; ed. Friedlein. Leipzig 1867.

resultaat heeft kunnen komen, dat men hem er uit wil laten afleiden. Vooreerst geven hamers, welker gewichten zich als de getallen 12, 9, 8 en 6 verhouden, ongetwijfeld geen tonen, die onderling de intervallen octaaf, quint en quart vertoonen. Welke intervallen ze wel zouden vormen, is in het algemeen moeilijk te zeggen; wanneer we echter het probleem vereenvoudigd denken door aan te nemen, dat de hamers te beschouwen waren als gelijkvormige trillende staven, zou het resultaat zijn geweest, dat de frequenties der voortgebrachte tonen zich omgekeerd hadden moeten verhouden als de lineaire afmetingen, terwijl de gewichten recht evenredig zouden zijn geweest met de derde machten daarvan. De gewichten zouden zich, om de verlangde intervallen voort te brengen, dus hebben moeten verhouden als de getallen 8, $27/8$, $64/27$, 1 inplaats van als 2, $3/2$, $4/3$, 1.

De proef met de verticaal hangende snaren kan vervolgens al evenmin tot het resultaat hebben geleid, dat ervan vermeld wordt. De frequenties der voortgebrachte tonen zouden evenredig zijn met de vierkantswortels uit de spanningen en deze zouden zich dus, om de verlangde intervallen te geven, hebben moeten verhouden als 4, $9/4$, $16/9$, 1 inplaats van als 2, $3/2$, $4/3$, 1.

Bovendien is het niet duidelijk, hoe de waarneming over de hamers met de naar aanleiding daarvan gedane proef met de snaren samenhangt; immers bij het grootste gewicht hoort in het eerste geval de laagste, in het tweede de hoogste der waargenomen tonen. Het is verder niet begrijpelijk, hoe Pythagoras op het chordotonon spanningen heeft kunnen voortbrengen, die zich juist zoo verhielden als de hamergewichten en evenmin, hoe men het moet verstaan, dat hij eenzelfde experiment uitvoerde aan de blaasinstrumenten aulos en syrix.

Van de blijkbaar correcte waarneming aan de verkorte snaar op het monochord is ten slofte ook weer niet in te zien, hoe zij met het experiment over spanningsverandering in verband heeft gestaan; was zij echter alleen uitgevoerd, dan zou zij noodzakelijk aanleiding hebben moeten geven, om voor ieder interval het kleinste der twee verhoudingsgetallen aan den hoogsten toon toe te wijzen.

Dit nu geschiedt in de mededeelingen over de ontdekking van Pythagoras juist nooit. Nicomachus zegt uitdrukkelijk, dat Pythagoras de tonen, die opv. met de getallen 6, 8, 9, 12 correspondeerden, hypate, mese, paramese en nete noemde, welke vier namen

tonen van stijgende hoogte aanduiden. En in zijn beschrijving van de proef met het monochord, zegt hij telkens, dat de voortgebrachte verhoudingen (hij noemt hier het octaaf eenvoudig het dubbele, de quint anderhalf (ἡμιόλιος), de quart een-en-een-derde (ἐπίτριτος) juist de omgekeerden zijn van die der snaarlengten.

Zooals men ziet, is de empirische basis voor de mathematische intervallentheorie wel uiterst zwak; ze is het zelfs zoozeer, dat men zich gaat afvragen, of ze in werkelijkheid wel een basis geweest is. De mededeeling, dat iemand uit een zekere waarneming iets heeft afgeleid, wat er niet uit volgen kan (zooals dat bij het verhaal over de metingen aan de hamers en aan de gespannen snaren het geval is), is onaanvaardbaar, wanneer de waarnemer geheel onbevangen en zonder vooropgezette gedachte aan wat hij zal vinden, het verschijnsel heeft geobserveerd; ze wordt aannemelijk, wanneer hij niet zoo onbevooroordeeld is geweest, wanneer hij dus een bepaald resultaat heeft verwacht, zoodat hij zich gemakkelijk heeft kunnen verbeelden, dat hij hoorde of zag wat hij graag wilde hooren of zien; en ze wordt eveneens begrijpelijk, wanneer het bedoelde experiment in werkelijkheid nooit is uitgevoerd, maar wanneer het bericht ervan later als grondslag aan een langs anderen weg verkregen overtuiging is ondergeschoven.

Er zijn dus drie manieren om de geschiedenis eenigszins begrijpelijk te maken: 1°. het verhaal van Nicomachus en de andere geciteerde schrijvers is historisch juist; dan heeft Pythagoras (of iemand van zijn school) geëxperimenteerd, niet met de bedoeling om uit te vinden, *of* consonante intervallen met redens en zoo ja met welke, correspondeeren, maar om te bewijzen, *dat* zij dit doen en dat de bedoelde redens de verhoudingen 2:1, 3:2 en 4:3 zijn; we staan dan voor de vraag, langs welken weg hij tot dit vermoeden heeft kunnen komen; 2°. het verhaal is door latere schrijvers geheel verzonnen; we beschikken dan over geen enkel direct gegeven voor de reconstructie van de ontdekking en zijn geheel op vermoedens aangewezen; 3°. het verhaal is een latere uitwerking en verbastering van een oorspronkelijk juist bericht over een door Pythagoras gedane waarneming; dan is het de vraag, welke die waarneming kan zijn geweest en wat men er uit heeft kunnen afleiden.

Oisterwijk.

E. J. DIJKSTERHUIS.

(Wordt vervolgd.)

botsing! Het schouwtooneel was de wereld, de Toeschouwer was God. Eindelijk gaf hij zich gewonnen en nam het hem gebodene aan: maar terstond stelde hij het in zijn geheel aan de armen ter beschikking: geen enkele sou liet hij in zijn eigen huis.”

Dit had plaats te Milaan ongeveer in het jaar 385.

Amsterdam.

A. SIZOO.

Interval en Verhouding

(*Slot*).

In alle drie gevallen is het gewenscht, onafhankelijk van het overgeleverde verhaal na te gaan, wat Pythagoras zonder opzettelijke proeven te doen, van het verband tusschen interval en verhouding te weten heeft kunnen komen. Voor de beantwoording van die vraag ontbreken de gegevens niet geheel. Men vindt namelijk in het aan Euclides toegeschreven werkje *Sectio Canonis*, dat waarschijnlijk afkomstig is van een schrijver, die in nauw contact stond met de Pythagoraeische school, een theoretische afleiding van de verhoudingen, die met de consonante intervallen correspondeeren en het is althans mogelijk, dat de hier toegepaste redeneeringen ook bij de opstelling der theorie dienst hebben gedaan.

Het werkje begint met een betoog¹, dat tonen worden voortgebracht door bewegingen en dat zij des te hooger worden, naarmate die bewegingen sneller op elkaar volgen (een eerste schemering van het inzicht, dat de toonhoogte wordt bepaald door de frequentie van een periodieke beweging). Men kan dus een toon verhoogen, resp. verlagen door de bewegingen, waardoor hij ontstaat, elkaar sneller of langzamer te laten opvolgen. „Daarom”, gaat de schrijver voort, „moet men zeggen, dat tonen uit deelen bestaan; immers ze kunnen door bijvoegen of wegnemen het juiste treffen (nl. wanneer ze eerst te laag, resp. te hoog waren). Nu wordt van alle dingen, die uit deelen bestaan, een getallen verhouding opgegeven, waarin ze tot elkaar staan, zoodat dus ook van tonen een getallenverhouding moet worden genoemd, waarin ze tot elkaar staan. Nu is de verhouding, waarin getallen tot elkaar staan, of veelvoudig, of epi-

¹ Euclides, *Sectio Canonis* ; l. c. p. 158.

morisch of epimerisch¹, zoodat ook tonen zulke verhoudingen tot elkaar moeten hebben. Van die verhoudingen worden de veelvoudige en epimorische elk met één woord benoemd². Verder merken we op, dat van de tonen sommige consonant zijn en andere dissonant en dat consonante tonen zich tot één geluid vermengen, maar dissonante niet. Daar dit zoo is, ligt het voor de hand, dat de consonante tonen, daar ze zich tot één geluid vermengen, uit die getallen bestaan, waarvan de verhoudingen met één woord zijn te benoemen, doordat ze of veelvoudig zijn of epimorisch”.

Op de hiermee verkregen basis wordt nu een theoretisch systeem van interval-wiskunde gebouwd, dat zeker niet ouder is dan de tijd van Archytas. Wanneer er echter eenige waarheid schuilt in de overlevering, die de mathematische beschouwingswijze der muzikale intervallen bij Pythagoras laat beginnen, is het niet onwaarschijnlijk, dat op hem althans de theoretische motiveering van de grondgedachte, van het inzicht, dat intervallen wiskundig door verhoudingen worden bepaald, is terug te brengen.

In ieder geval past de bij Euclides weergegeven gedachtengang (dingen, die uit deelen bestaan (sc. van dezelfde soort) verhouden zich als getal tot getal, dus moeten tonen, die een zeker interval vormen, ook een bepaalde verhouding tot elkaar hebben) uitstekend in de algemeene sfeer van het oudere Pythagoraeïsme, zooals we die op grond van een onzekere, maar daarom nog niet geheel te verwerpen overlevering meenen te mogen benaderen. Logisch dwingend is de conclusie natuurlijk allermintst: men kan zonder meer niet inzien, waarom een interval van twee tonen door een verhouding en niet door een verschil van twee waarden van eenzelfde grootheid moet worden uitgedrukt, waarom dus het muzikale διάστημα (interval) wiskundig geen διάστημα (afstand), maar een λόγος (verhouding) is.

En terwijl het hier althans nog om de keuze uit de twee het meest voor de hand liggende mogelijkheden gaat, ontbreekt aan de rede-neering, dat consonante intervallen daarom met veelvoudige of epimorische redens moeten correspondeeren, omdat deze met één woord worden benoemd διπλάσιος, τριπλάσιος, ἡμιόλιος, ἐπίτριτος

¹ Een veelvoudige verhouding (λόγος πολλαπλάσιος) is van den vorm $n : 1$; een epimorische (λόγος ἐπιμόριος) van den vorm $(n + 1) : n$; andere redens, grooter dan de eenheid, heeten ἐπιμερής.

² Bijvoorbeeld διπλάσιος, dubbel; ἡμιόλιος, anderhalf.

enz. in tegenstelling tot een verhouding als b.v. 10 : 7, die met behulp van de telwoorden tien en zeven moet worden omschreven¹, natuurlijk iedere logische waarde. Dat is echter geen argument, dat ten nadeele van de historische waarschijnlijkheid kan worden aangevoerd; verbale analogieën en etymologische overwegingen hebben in de oudere fasen van de natuurwetenschap altijd een sterk overtuigende werking bezeten; en de onvervaardheid, waarmee de Pythagoraeërs steeds arithmetische begrippen en relaties als het essentieele der dingen hebben beschouwd, is er historisch niet minder reëel om, dat wij er tegenwoordig zonder eenig begrip tegenover staan.

In het geval, dat ons bezig houdt, leidde echter het speculatieve denken over den invloed van het getal op de natuur nu eens tot een resultaat met een hoog gehalte aan waarheid, wat behalve aan den gelukkigen greep, zonder welken nu eenmaal geen inzicht van beteekenis tot stand komt (in ieder verhaal van een wetenschappelijke vondst komt altijd het oogenblik, waarop de continue gang der logische redeneering door een sprong der phantasie wordt onderbroken), ongetwijfeld te danken zal zijn geweest aan den steun, dien langdurige ervaring, aan muziekinstrumenten opgedaan, in deze kon verleen.

Het is alleen niet met zoo heel groote zekerheid uit te maken, waar die ervaring kan hebben bestaan. Men denkt in onzen tijd onwillekeurig aan instrumenten van het type van een gitaar, waarbij men eenzelfde snaar een aantal verschillende tonen kan laten voortbrengen, door haar op bepaalde plaatsen op een toets² neer te drukken; bij chordophonen van dit type moet de speler noodzakelijk het verband tusschen snaarlengteverhouding en interval opmerken. Men bedenke echter wel, dat de oude Grieksche lier (λύρα) en de kithara (κithάρα) geen toets hadden; iedere snaar gaf slechts een toon; daar ze ongeveer even lang waren, moesten verschillen in toonhoogte dus verkregen worden door snaren van verschillende dikte te gebruiken (en misschien door ze in verschillende mate te spannen). Bij dergelijke instrumenten dringt zich het verband tusschen snaarlengte en toonhoogte echter allerminst op en

¹ Voor de latere ontwikkeling der Grieksche wiskunde gaat het gemaakte onderscheid niet op; men kent daar b.v. termen als ἑπταμέρης (5: 3), de verhouding 10:7 zou kunnen worden uitgedrukt door den term τρισεφάβδομος.

² Toets heet bij een getokkeld of gestreken cordophoon het houten blad, waarop de snaar met den vinger wordt neergedrukt.

blijft a fortiori dat tusschen lengteverhouding en interval verborgen.¹

Wanneer men dus Pythagoras als grondslag voor zijn theorie ervaringen met chordophonen wil laten gebruiken, zal men moeten aannemen, dat hij ook reeds het monochord heeft gekend, dat in latere tijden zoowel voor acoustische metingen, als, naar uit een passage bij Ptolemaeus² is op te maken, bij wijze van muziekinstrument is gebruikt. Daarnaast kan men echter aan de blaasinstrumenten aulos en syrinx denken, die immers in het verhaal van Nicomachus ook vermeld werden en waarbij de relatie tusschen het werkzame deel van de buislengte en de toonhoogte al evenzeer in het oog springt als bij chordophonen met toets dat van snaarlengte en toonhoogte.

Indien men zich nu voorstelt, dat het Pythagoraeisch streven naar mathematiseering van het weten zich van het langs dergelijke wegen empirisch verworven inzicht meester heeft gemaakt en dat men dus ook logisch heeft willen beredeneeren, wat men ervaren had, dan is het duidelijk, dat men noodzakelijk op de tegenstrijdigheid moest stuiten, die, zooals we reeds herhaaldelijk zagen, ook in de latere stadia der Grieksche muziektheorie verwarring heeft gesticht: de logische afleiding dreef er toe, aan den hoogsten toon van het interval den grootsten term der verhouding te verbinden; de ervaring, aan instrumenten opgedaan, gaf echter aanleiding, dien grootsten term juist aan den laagsten toon toe te wijzen.

Heeft men op deze contradictie gereageerd door ook voor de eerste wijze van overeenstemming naar empirische voorbeelden te zoeken en is men, onbekend met het begrip der frequentie, er zoo toe gekomen, om in de spanning van een snaar de physische grootheid te zien, waarmee de toonhoogte evenredig kon worden gesteld? Dit zou eenigermate het verhaal van Nicomachus verklaren, onverschillig of men het als een historisch juist bericht over een zelfbegoocheling van Pythagoras wil beschouwen, als een verzinzel uit lateren tijd of als een aanvulling van een historische overlevering over waarnemingen aan monochord en fluit.

¹ De Aegyptische nabla zou in dit opzicht betere diensten hebben kunnen bewijzen; vandaar misschien de phantastische interpretatie van het verhaal over Pythagoras, die Fl. Cajori, *A History of Physics*, New York 1929, p. 14 citeert, volgens welke de smidse, waarin de ontdekking werd gedaan, het land Aegypte zou beduiden, waar Pythagoras zijn kennis zou hebben verworven.

² Ptolemaeus, *Harmonica* II, 12, l. c. p. 66.

Hebben anderen er wellicht de voorkeur aan gegeven, om, nu toch niet ondubbelzinnig bleek of men den hoogsten dan wel den laagsten toon als den grootsten term van de intervalverhouding moest beschouwen (men mag het, naar Grieksche opvatting, gerust zóó zeggen, al prefereeren wij het tegenwoordig, van een correspondentie tusschen toonhoogte en getal te spreken), het maar liever in het midden te laten, hoe de relatie was, een interval zonder meer door een reden te karakteriseeren en alleen waar men er behoefte aan had, aan de afzonderlijke tonen getallen toe te kennen, die bij stijgende toonhoogte nu eens toe-, dan weer (vooral als er van snaren sprake was) afnamen? Dat zou al evenzeer de in het begin van dit artikel opgemerkte onbepaaldheid van de bedoelde correspondentie verklaren en ook duidelijk maken, waarom voor de Grieksche muziektheoretici de getallenverhouding steeds het primaire kenmerk van een interval gebleven is en waarom zij zich ook later nooit zorgen zijn gaan maken over de vraag, van welke grootheid door die getallenverhouding nu eigenlijk de waardenverhouding werd uitgedrukt.

Hiermee is tusschen de boven onderscheiden mogelijkheden van de ware toedracht van de ontdekkingsgeschiedenis, voorzoover mogelijk, een keuze gedaan. Dat het gegeven antwoord niet meer dan waarschijnlijk mag heeten, moge in den vragenden vorm der conclusies tot uiting komen.

Oisterwijk.

E. J. DIJKSTERHUIS.
