

Theaitetos und das Problem der Irrationalität
in der griechischen Mathematikgeschichte

In: Acta Antiqua , XIV - 1966 - p. 303 - 358

5568 paj
SZABO, A.
1966 J

D Szabó A. Math.

66 SZABÓ A., *Theaitetos und das Problem der Irrationalität* [chez les Pythagoriciens] ; cf. Plato Philosophus.

SZABÓ A., *Theaitetos und das Problem der Irrationalität in der griechischen Mathematikgeschichte* : AAntHung XIV 1966 303-358. | Examen du passage de Platon, Theaet. 147C-148B et de la légende de Théétète, et reconstitution du développement de la théorie pythagoricienne de l'irrationalité.

Acta Antiqua Academiae Scientiarum
Hungaricae
XIV 1966 303-358

VV 704
F 4574
V 7273

THEAITETOS UND DAS PROBLEM DER IRRATIONALITÄT IN DER GRIECHISCHEN MATHEMATIKGESCHICHTE

I

Die Erkenntnis der Irrationalität gilt als eine hervorragende Leistung der frühgriechischen Mathematik. Aber die historische Forschung vermochte bisher noch keineswegs beruhigend zu klären, wie man überhaupt zu dieser Erkenntnis gekommen war. Nur so viel scheint — auf Grund der bisherigen Forschungen — mehr oder weniger festzustehen, «dass irrationale Grössen (bzw. inkommensurable Verhältnisse) den griechischen Mathematikern seit der Mitte des 5. Jahrhunderts bekannt waren».¹ Überblickt man jedoch die einschlägige Fachliteratur der letzten fünfzig Jahre, so fällt einem sofort auf, dass sich bisher nicht einmal jene Frage mit Bestimmtheit entscheiden liess: welcher Fall überhaupt der erste Anlass zu der Entdeckung der Irrationalität gewesen sein mag?

Das Paradebeispiel für die Irrationalität ist in den antiken Quellen immer der Fall der Quadrat-Diagonale zur Seite.² Darum vermutete man früher, dass der Ausgangspunkt der Entdeckung «zweifello» die Quadratdiagonale war.³ Dagegen scheint man in der letzten Zeit eher zu der Ansicht zu neigen, dass die Irrationalität zuerst durch Hippasos von Metapont (im 5. Jahrhundert v. u. Z.) *am Dodekaeder erkannt worden sei*.⁴ Diese letztere Ansicht verdankt ihr Entstehen einer sozusagen konziliatorischen Vereinigung von verschiedenen Versionen aus der antiken Überlieferung.⁵

Denn man weiss einerseits, dass das Pentagramm ein Bundeszeichen der Pythagoreer war. Andererseits wird in einer spätantiken Quelle die Beschäfti-

¹ K. GAISER, *Testimonia Platonica* (Sonderdruck aus K. G., «Platons ungeschriebene Lehre», Stuttgart 1963) S. 471 Anm.

² ARISTOTELES, *Metaph.* 983 a 19 ff.; 1053 a 14 ff. Vgl. auch TH. HEATH, *Mathematics in Aristotle*, Oxford 1949, 2: «The incommensurable is mentioned over and over again, but the only case is that of the diagonal of a square in relation to its side etc.»

³ K. v. FRITZ in REVA 1813; vgl. auch W. BURKERT, *Weisheit und Wissenschaft*, Nürnberg 1962 435 A 85.

⁴ K. v. FRITZ, «Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont» (zuerst in «*Annals of Mathematics* 46, 1945»; wiederabgedruckt im Sammelband «*Zur Geschichte der griechischen Mathematik*», red. von O. BECKER, Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1965). Ebenso auch S. HELLER, «Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer» (zuerst in «*Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wiss. zu Berlin, Klasse für Math., Physik und Technik*, 1958, Nr. 6»; wiederabgedruckt in dem eben erwähnten Sammelband «*Zur Gesch. d. gr. Math.*»).

⁵ W. BURKERT, o. c. 435.

gung des Hippasos von Metapont mit dem Pentagondodekaeder bezeugt: er habe als erster die aus 12 Fünfecken zusammengesetzte Kugel öffentlich beschrieben und sei deshalb als ein Gottloser im Meere umgekommen.⁶ Nun kann man aber, wie bekannt, die Irrationalität der sog. «stetigen Teilung» an den Diagonalen des regelmässigen Fünfecks in der Tat leicht erkennen. Und rechnet man dazu noch, dass in einigen antiken Berichten das öffentliche Behandeln der mathematischen Irrationalität als ein «frevelhafter Verrat an der Lehre des Pythagoras» — beinahe wie ein «Skandal» — aufgefasst wird, so hat man zunächst den Eindruck, als käme in der eben angedeuteten historischen Rekonstruktion (die erschütternde Entdeckung des Hippasos, sein «Verrat», und die Strafe dafür) die Überlieferung selber zu ihrem Recht.

Doch sind in der letzten Zeit gegen die Glaubwürdigkeit dieser antiken Überlieferung gewichtige Argumente ins Feld geführt worden. Es sei von diesen Argumenten hier zunächst an die beiden folgenden erinnert.

K. Reidemeister hat darauf aufmerksam gemacht, dass «nirgends in den mannigfachen Dokumenten über das Irrationale bei Platon und Aristoteles von einem Skandal — der damals noch fühlbar gewesen sein müsste — etwas spürbar ist.»⁷ — Ist die Geschichte von Entdeckung und Verrat der Irrationalität nicht bloss *eine späterfundene Legende*? Ist nicht vielleicht der Doppelsinn des Wortes *ἄρρητος* der Keim jener Legende, wonach die Lösung der mathematischen Irrationalität sozusagen ein «frevelhafter Bruch mit einer geheiligten Tradition» war?⁸ Denn *ἄρρητα* hiessen ja in der Sprache der mystisch-religiösen Literatur — zumal unter den Neupythagoreern — die «sorgfältig gehüteten und dem Unberufenen gefährlichen Geheimlehren». Der Nicht-Mathematiker mag also leicht daran gedacht haben, dass es sich auch im Falle des *ἄρρητον* der Mathematik um ein ebensolches Geheimnis handelt.

Eben angesichts dieser verdächtigen Züge der Überlieferung kam zuletzt W. Burkert zu der Konklusion:⁹

«Für die Entdeckung der Irrationalität bleibt als Fixpunkt, dass Theodoros von Kyrene die Irrationalität von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ bewies, dass die Irrationalität von $\sqrt{2}$ also schon früher bekannt war.»

Mit dieser «Konklusion» scheint die Forschung allerdings daselbst angelangt zu sein, wo sie auch schon vor einem halben Jahrhundert stand. Denn schon H. Vogt versuchte ja,¹⁰ die Frühgeschichte der Irrationalität in den folgenden *drei* Etappen zu rekonstruieren:

⁶ JAMBlichOS, «Über die pythagoreische Philosophie» (ed. DEUBNER) 52, 3–5; vgl. S. HELLER, o. c. 6.

⁷ K. REIDEMEISTER, Das exakte Denken der Griechen, Hamburg 1949, 30.

⁸ W. BURKERT, o. c. 437.

⁹ Ebd. 439

¹⁰ H. VOGT, Bibl. math. 10, 1909/10, 97–155 und 14, 1914/15, 9–29 (Bibliotheca mathematica, Zeitschrift f. Gesch. d. math. Wiss., herausg. v. G. ENESTRÖM, 3. Folge Bd. 7–14, 1906/7–1913/14). Vgl. auch C. THÄER, Antike Mathematik 1906–1930 in C. BURSIANS Jahresberichte über die Fortschritte der klass. Altertumswissenschaft, Jahrg. 1943 Bd. 283.

1. Die jüngeren Pythagoreer hätten (vor 410 v. u. Z.) die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale und -Seite als vereinzelte Tatsache erkannt und bewiesen; dabei hätten sie für das nicht genau angebbare Zahlenverhältnis Näherungswerte aufgestellt (*διάμετρος ῥητῇ* und *διάμετρος ἄρρητῇ*).

2. Theodoros von Kyrene hätte (etwa 410–390) das Umkehrproblem der Quadrierung allgemein gestellt, d. h. die allgemeine Irrationalität der Quadratwurzeln erkannt, und er hätte diese durch die Verallgemeinerung des pythagoreischen Gedankenganges bewiesen (*σύμμετρον* und *οὐ σύμμετρον*, *ῥητόν* und *ἄρρητον*).

3. Theaitetos von Athen (etwa 390–370) hätte die Grundlagen einer allgemeinen Theorie der quadratischen Irrationalitäten geschaffen und ihre Hauptgattungen aufgestellt (*ῥητόν μήκει* und *ῥητόν δυνάμει*, bzw. *ἄλογον: μέση ἐκ δυοῖν ὀνομάτων, ἀποτομή*).

Wie man sieht, fällt also in dieser skizzenhaften Schilderung von H. Vogt über die Entfaltungsgeschichte der Irrationalität eine ganz besondere Bedeutung den beiden Namen: Theodoros und Theaitetos zu; der eine von ihnen, Theodoros, soll «die allgemeine Irrationalität der Quadratwurzeln» entdeckt, und der andere, Theaitetos, «die Grundlagen einer allgemeinen Theorie der quadratischen Irrationalitäten» geschaffen haben. — Ich möchte diese Gedanken von H. Vogt deswegen so nachdrücklich hervorheben, weil man heutzutage einer ähnlichen Auffassung eigentlich in jedem Handbuch der griechischen Mathematikgeschichte begegnet. Die Leistungen der beiden Mathematiker, Theodoros und Theaitetos, werden ja so gut wie von allen Vertretern des Faches im grossen und ganzen ähnlich wie von H. Vogt beurteilt.

Es fragt sich nun: wie entstand diese merkwürdige Auffassung? Welche antike Zeugnisse gibt es denn dafür, dass einerseits wirklich Theodoros es gewesen wäre, der zuerst «das Umkehrproblem der Quadrierung allgemein gestellt hätte», und dass andererseits «die Grundlagen einer allgemeinen Theorie der quadratischen Irrationalitäten» in der Tat von Theaitetos stammen sollten? Was ist der Ursprung dieser modernen historischen Ansichten über die mathematischen Leistungen des Theodoros und Theaitetos?

Nun hat den Anlass zu dieser historischen Rekonstruktion zweifellos Platons nach Theaitetos benannter Dialog bzw. die mathematische Stelle in diesem Dialog gegeben. Wie H. Vogt in seiner eben erwähnten Arbeit darüber schrieb:¹¹ «Die mathematische Stelle im *Theaitet* ist die Geburtsurkunde des Irrationalen, ausgestellt von einem Zeitgenossen.» — Man hat also eine Stelle in Platons Dialog in historischem Sinne — als «Geburtsurkunde des Irrationalen» — ausgelegt, und diese Auslegung hat in der späteren Forschung zu noch weitergehenden Konklusionen geführt. Inwiefern diese Auslegung überhaupt haltbar ist, wollen wir noch nicht fragen. Ich möchte einstweilen eher darauf hin-

¹¹ Bibl. math. 10, 1909/10, 131.

weisen, dass der grundlegende Gedanke der erwähnten Auslegung gar nicht von H. Vogt stammt. Er scheint die Inspiration dazu von P. Tannery empfangen zu haben. Denn Tannery schrieb ja noch i. J. 1884 über dieselbe Platon-Stelle («Theait.» 147 D—148 B) wörtlich das folgende:¹²

«On ne peut guère douter que dans tout ce passage Platon ne fasse allusion à deux traités, l'un déjà ancien de Théodore de Cyrène, l'autre probablement assez récent de son ami Théétète. Il raconte la naissance d'une des idées fondamentales de ce dernier traité, et s'il fait concourir à la naissance de cette idée un jeune camarade de Théétète, du nom de Socrate, il est assez probable que c'est lui même (also wohlgemerkt: Platon selber !) qu'il désigne ainsi.»

Nun glaube ich, diese Ansichten von P. Tannery unten, an Hand einer neuen Analyse des Platon-Textes, in allen ihren Einzelheiten widerlegen zu können. Aber es sei mir erlaubt, schon an dieser Stelle mindestens auf *drei* schwache Punkte in dem eben angeführten Tannery-Zitat hinzuweisen.

1. Die sogleich auffallende Schwäche des vorhin angeführten Zitates besteht darin, dass Tannery nicht nur dem Theodoros und dem Theaitetos ihren Anteil an der Lehre über die Irrationalitäten sichern möchte, sondern ausserdem auch noch Platon aus seiner Konzeption nicht fortlassen will. Er glaubt, jener «junge Sokrates», den Theaitetos im Dialog erwähnt, wäre Platon selber. Und so wird der Platon-Text nebenbei ein Zeugnis auch noch dafür, dass auch das Haupt der Akademie in seinen jungen Jahren an der mathematischen Entdeckung des Theaitetos mitbeteiligt gewesen wäre. — Nun hat man zu jener Zeit, in der Tannery die oben zitierten Worte schrieb, hie und da in der Tat noch versucht, Platon auch konkrete mathematische Entdeckungen zuzuschreiben. Aber ich glaube nicht, dass es auch heute noch irgendjemanden gäbe, der in der mathematischen Stelle des Dialogs «Theaitetos» eine «Anspielung von Platon auf sich selbst» entdecken wollte. Platon wird heutzutage nicht mehr zu den aktiven Förderern der Lehre des Theaitetos gezählt. Diesen Irrtum von Tannery scheint man inzwischen stillschweigend schon aufgegeben zu haben.

2. Es bleibe hier auch jene andere Schwäche der Auffassung von Tannery nicht unerwähnt, deren *auch er selber vollkommen bewusst war*. Denn wohl hat zwar Tannery im Sinne seiner oben angeführten Worte eine «bedeutende Entdeckung» dem Theaitetos zuschreiben wollen. Aber er musste sich dennoch fragen: war denn dasjenige, was — nach seiner Auslegung des Textes — «von Theaitetos entdeckt wurde», in der Tat etwas neues, auch dem gegenüber, was auch schon der Lehrer des jungen Mannes, Theodoros selber gewusst hatte? Ergab sich die angebliche «Entdeckung des Theaitetos» nicht sozusagen *von selber* aus der Lehre des Theodoros? — Wohl eben diese Zweifel veranlassten Tannery, in derselben Arbeit, der ich das obige Zitat entnahm, auch noch das folgende zu

¹² «Sur la langue mathématique de Platon», Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux 1884, I 95—105 = Mémoires Scientifiques (J. L. HEIBERG — H. G. ZEUTHEN) II 91—104.

schreiben (einige Worte unterstreiche ich in dem folgenden Text von Tannery — Á. Sz.):¹³

«...le singulier à nos yeux, est que cette généralisation (d. h. die Verallgemeinerung der Lehre des Theodoros durch Theaitetos), qui n'offrait aucune difficulté sérieuse, n'ait pas été faite par Théodore de Cyrène, que celui-ci se soit borné à montrer, sur un grand nombre de cas particuliers, comment se traitait la question de la commensurabilité ou de l'incommensurabilité d'une racine. L'histoire des mathématiques offre d'autres exemples analogues, mais celui-là est incontestablement le plus saillant etc.»

3. Die dritte auffallende Schwäche derselben Auffassung erblicke ich in der *Inkonsequenz* der beiden eben hervorgehobenen Ansichten. Denn Tannery scheint ja noch gewusst zu haben, dass man — selbst im Sinne seiner eigenen Texterklärung — die «Entdeckung des Theaitetos» nicht klar und eindeutig von der Lehre des Theodoros abgrenzen kann, ja er vermochte die mathematische Selbständigkeit des Theaitetos dem Theodoros gegenüber kaum noch mit einer Ausrede zu retten. (Ähnliches käme in der Geschichte der Mathematik auch sonst vor, auch wenn man zugeben müsste, dass der vorliegende Fall sehr auffallend ist!) Wohl hätte also Theodoros selber ohne jede ernsthafte Schwierigkeit dieselbe Verallgemeinerung vollziehen können, die dann — nach Tannery — dennoch dem Theaitetos vorbehalten blieb. Aber damit noch nicht genug! Auch das Mindestmass von Selbständigkeit wird in der Konzeption desselben Tannery dem Theaitetos *nicht allein belassen*. Auch Platon wäre noch an der kleinen Entdeckung mitbeteiligt gewesen! Ja, Platon hätte den eigenen Anteil daran für so wichtig gehalten, dass er darauf in dem Dialog mit einer «Anspielung auf sich selbst» deutlich hingewiesen haben soll.

Hätte man nun bloss die eben erwähnten drei schwachen Punkte in der Konzeption von Tannery wahrgenommen, so wäre man wohl auch schon dadurch zu einer gründlichen Revision seiner ganzen historischen Konstruktion gezwungen. Aber statt dessen blieb diese Konzeption im grossen und ganzen bis zum heutigen Tag beibehalten. Ja sie hat eine ganz unglaubliche Wirkung auf alle diejenigen ausgeübt, die sich seitdem mit derselben Platon-Stelle beschäftigt hatten. Nur durch die Auffassung von Tannery beeinflusst hat auch E. Sachs, die Schülerin des bekannten Philologen, U. v. Wilamowitz-Moellendorff, versuchen können, «den grossen Mathematiker Theaitetos der Vergessenheit zu entreissen».¹⁴

Nun muss ich in dem folgenden die entscheidende Stelle aus Platons Dialog selbstverständlich von neuem eingehend interpretieren, und es wird sich im Laufe der Interpretation zeigen, warum jene Ansichten über Theodoros und

¹³ Mém. Scient. II 96.

¹⁴ Vgl. B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel—Stuttgart 1956, 16. Wie bekannt, hiess die Berliner Dissertation von E. SACHS: *De Theaeteto Atheniensi mathematico*. 1914.

Theaitetos, die in der Mathematikgeschichte auch heute noch üblich sind, und die einst durch P. Tannery inauguriert wurden, ohne Zweifel unhaltbar sind. Bevor ich jedoch die wichtigste griechische Textpartie (zusammen mit meiner parallelen Übersetzung) hier abdrucken lasse, muss ich noch einiges über die allgemeine Platonische Einkleidung der mathematischen Stelle in das Ganze des Dialogs vorausschicken. Denn auch diese Einkleidung scheint dazu beigetragen zu haben, dass die mathematische Stelle selber in historischem Sinne — als «Geburtsurkunde des Irrationalen, ausgestellt von einem Zeitgenossen» — aufgefasst werde.

Was die Einkleidung in den Dialog bei Platon betrifft, sie ist die folgende: der Philosoph, Eukleides von Megara,¹⁵ erzählt seinem Freund, Terpsion, dass er gesehen habe, wie Theaitetos sterbend von dem Schlachtfeld von Korinth nach Athen gebracht wurde. Er hatte Dysenterie zu seinen Wunden hinzugekriegt. — Damit beginnt die Lobrede der beiden Freunde auf den sterbenden Theaitetos. Er ist *καλός τε καὶ ἀγαθός* in jeder Hinsicht; besonders wird seine *Tapferkeit* im Kampf hervorgehoben. Auch Sokrates hätte ihn einst als jungen Mann bewundert, und geweisst: er werde berühmt, wenn er einst das Mannesalter erreiche. — Mit dieser kurzen Einleitung sind wir auch schon bei dem Gegenstand des Dialoges angelangt: Eukleides hat jenes Gespräch, das einst Sokrates — kurz vor seinem Tode (i. J. 399 v. u. Z.) — mit Theaitetos und mit dessen Lehrer, dem Mathematiker Theodoros geführt hatte, aufgezeichnet, und er wird jetzt dieses Gespräch vorlesen lassen.

Man darf aus dieser Einleitung schliessen, dass der Prolog des Dialoges wohl i. J. 369 (nach der Schlacht bei Korinth), dem Todesjahr des Theaitetos spielt. Dagegen fand jenes andere Gespräch, das Eukleides aufzeichnete, dreissig Jahre früher, vor dem Tode des Sokrates statt. Inzwischen hat sich die einstige Weissagung des Sokrates offenbar verwirklicht.

Zur Zeit des eigentlichen Dialoges ist also Theaitetos noch sehr jung, ein *μειράκιον* — wie jener Mathematiker von Kyrene, Theodoros über ihn sagt, den Sokrates gerade gefragt hatte: ob er während seines Aufenthaltes in Athen begabte junge Leute kennengelernt hätte. Auf diese Frage hin erklärt Theodoros, dass er einem Jüngling (Theaitetos) begegnet sei, so wunderbar begabt, wie er Zeit seines Lebens noch keinen anderen gesehen habe. Schön ist er nicht — «Nimm's mir nicht übel, Sokrates, aber er gleicht dir» —, doch unglaublich schnell von Begriff, sanftmütig und doch tapfer wie kein zweiter. Eine solche Kombination von guten Eigenschaften hätte Theodoros nie für möglich gehalten. «Er geht mit solcher Leichtigkeit, so ohne Anstoss und mit derartigem

¹⁵ Wie bekannt, wurde der Mathematiker EUKLID lange Zeit hindurch — auch noch in der neuzeitlichen Wissenschaft — mit dem Philosophen von Megara verwechselt, obwohl der Mathematiker mindestens etwa 50–60 Jahre jünger gewesen sein mag, als der bekannte Vertreter der megarischen Schule. — Die richtige Transkription des Namens wäre in beiden Fällen: EUKLEIDES; nur um zu unterscheiden schreibe ich den Namen des Mathematikers konsequent in der verdeutschten Form: EUKLID.

Erfolg an die Wissenschaften und an die Forschung — dabei ganz ruhig, wie geräuschlos ausfließendes Öl —, dass man sich wundert, wie es möglich ist, dass einer so jung so viel leistet.» Durch solche Worte angeregt beginnt dann Sokrates sein Zwiegespräch mit dem jungen Theaitetos. — Aber wir wollen jetzt vor allem feststellen: welche historischen Schlüsse sich aus der Einkleidung des Dialoges ergeben?

Man hat aus diesem Prolog wohl mit Recht geschlossen, dass Theaitetos offenbar ein jüngerer Zeitgenosse von Platon war. Es ist auch wahrscheinlich, dass Platon mit dem gleichnamigen Dialog u. a. auch das Andenken dieses seines Zeitgenossen verewigen wollte. Ja, es wäre sogar möglich, die in dem Prolog erwähnte «Weissagung des Sokrates» in dem Sinne auszulegen, dass der junge Schüler des Theodoros, mit dem Sokrates das Gespräch führte, später wirklich zu einem bedeutenden *Mathematiker* wurde. Von dem «Mathematiker Theaitetos» wissen wir ja auch aus anderen Quellen des Altertums, auch wenn es einstweilen dahingestellt bleiben muss: inwiefern diese anderen Quellen von Platons Dialog unabhängig sind. — Man wird also den «Mathematiker Theaitetos» nicht ohne weiteres für eine blosse Legende erklären können. — Dies muss aus dem folgenden Grunde im voraus festgelegt werden.

K. Reidemeister schrieb in seinem Buch:¹⁶ «ich kann mich des Verdachts nicht erwehren, dass Theätet der Mathematiker nur eine Legende ist, die sich um den Theätet des Platonischen Dialogs kristallisiert hat.» — Man wird bald sehen, dass Reidemeister mit dieser Vermutung in einem gewissen Sinne allerdings *recht hatte*. Man hat in der Tat eine Legende über die wissenschaftlichen Leistungen des Theaitetos gedichtet, mit der die historische Forschung aufräumen muss. — Aber ich glaube, es wäre dennoch verkehrt, wenn man den «Mathematiker Theaitetos» samt und sonders für eine Legende erklärte. Man muss mindestens die *Möglichkeit* dessen, dass es einen Mathematiker dieses Namens zu Platons Zeit wirklich gegeben hat, offen lassen. Wie S. Heller darüber schrieb:¹⁷ «Der Mathematiker Theätet, den uns Platon in dem gleichnamigen Dialog schildert, ist keine fingierte Persönlichkeit . . ., sondern hat wirklich existiert . . .» — Es fragt sich nur: was bedeutet der Name Theaitetos für die Mathematikgeschichte? Denn aus Platons Dialog erfährt man ja in der Wirklichkeit — wie man bald sehen wird — *gar nichts* von irgendwelchen neuen mathematischen Entdeckungen des Theaitetos. Und damit sind wir bei der Revision der bisherigen Interpretation der mathematischen Stelle des Dialogs «Theaitetos» angelangt.

¹⁶ K. REIDEMEISTER, o. c. 24.

¹⁷ S. HELLER, Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog «Theätet», *Centaurus* 1956 vol. 5 pp. 1—58. — Allerdings kann ich der Fortsetzung des obigen Zitates von S. HELLER — «Die Früchte seiner (d. h. des THEAITETOS) wissenschaftlichen Tätigkeit sind uns in EUKLIDS Elementen, Buch X und XIII erhalten geblieben» — nicht beipflichten.

II

Wir wollen hier den fraglichen griechischen Text des Dialogs «Theaitetos» (147 C—148 B) und seine deutsche Übersetzung näher ins Auge fassen. Da jedoch sowohl meine folgende Übersetzung wie auch später die ausführlichere Interpretation des Textes, vor allem auf eine *Wörterklärung* gebaut wird, muss ich schon hier einiges über diese Wörterklärung vorausschicken. (Ich hoffe, dass die Kenntnis dessen, was hier vorausgeschickt wird, das Verständnis meiner Übersetzung von vorneherein erleichtert.)

In dem anzuführenden Platon-Text kommt mehrmals der mathematische Fachausdruck $\deltaύναμις$ — ja einmal auch das entsprechende Verbum der Mathematik: $\deltaύνασθαι$ — vor.¹⁸ Über diesen Ausdruck konnte ich zuletzt die folgenden wichtigen Tatsachen feststellen.¹⁹

Man übersetzt den mathematischen Fachausdruck $\deltaύναμις$ häufig als «Potenz».²⁰ Doch ist diese Übersetzung irreführend, ja eigentlich auch falsch. Denn die griechische Mathematik kennt noch *nicht* unseren Begriff «Potenz» (a^k). Etwas ähnliches wie unsere «Potenz» ist die Platonische Bezeichnung: $\alphaῖξ\eta$.²¹ Aber auch die $\alphaῖξ\eta$ ist keine «Potenz»; denn es gibt ja im griechischen nur eine «zweite» und eine «dritte $\alphaῖξ\eta$ » (vgl. bei Platon: $\kappa\alpha\tau\grave{\alpha}\ \tau\rho\acute{\iota}\tau\eta\eta\ \alphaῖξ\eta\eta$).

Auch solche zweifellos *spätantike* Ausdrücke bei Diophantos,²² wie $\deltaυναμοδύναμις$ (a^4), $\deltaυναμόκυβος$ (a^5) und $\kappaυβόκυβος$ (a^6) zeigen, dass der Ausdruck $\deltaύναμις$ keineswegs «Potenz» sein kann. — Nachdem nun der $\kappaύβος$ ohne Zweifel die «Kubik» bezeichnet, kann das Wort $\deltaύναμις$ als mathematischer Terminus nur «Quadrat» heissen.

Noch wichtiger als das blosses Feststellen der Wortbedeutung — $\deltaύναμις$ (als mathematischer Fachausdruck) = «Quadrat» — ist das *historische Ableiten* dieser Bezeichnungsart. — Wie kam nämlich jenes Wort, das in der alltäglichen Sprache in einem ganz anderen Sinne benutzt war ($\deltaύναμις$ = «Kraft Fähigkeit, Macht»), zu dieser merkwürdigen Bedeutung in der mathematischen Fachsprache ($\deltaύναμις$ = «Quadrat»)?

¹⁸ Es kommt dabei in dem anzuführenden Text das Verbum $\deltaύνασθαι$ ein anderes Mal auch in seiner *nicht-terminusartigen, alltäglichen Bedeutung* vor: $\alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\ \deltaυνάμενος\ \acute{\iota}\sigma\omicron\varsigma\ \acute{\iota}\sigma\acute{\alpha}\kappa\iota\varsigma\ \gamma\acute{\iota}\gamma\eta\sigma\theta\alpha\iota$ = «die Zahl, die *vermag* gleichmal gleich zu sein».

¹⁹ Siehe Á. SZABÓ, Der mathematische Begriff $\deltaύναμις$ und das sog. geometrische Mittel, *MAIA*, N. S. XV 1963 219—256. — Ich kann hier diesen meinen Aufsatz selbstverständlich nicht im ganzen wiederholen; ich fasse an dieser Stelle nur die Feststellungen über den Sinn des mathematischen Ausdruckes $\deltaύναμις$ kurz zusammen.

²⁰ Z. B. J. L. HEIBERG in seiner lateinischen Übersetzung der 2. Definition des Buches *Eucl. Elem. X*: «Rectae *potentia* commensurabiles etc.» (= $\epsilonὐθεΐαι\ δυνάμει\ σύμμετροι$). Oder auch M. TIMPANARO-CARDINI, *Pitagorici* II., Firenze 1962 p. 77 (in der Übersetzung der fraglichen PLATON-Stelle): «TEODORO qui, ci aveva costruito delle figure relative alle *potenze* ecc.»

²¹ Resp. IX 587 D.

²² Vgl. dazu TH. L. HEATH, *A History of Greek Mathematics*, II. Oxford, 1921 457—458.

In der Mathematik hat nicht nur das Hauptwort *δύναμις*, sondern auch das dazugehörige Verbum, *δύνασθαι*, eine spezielle Bedeutung; und zwar heisst das letztere: «*gelten, wert sein, ausmachen, betragen*», wobei der «*Wert*» immer in *Quadrat* gemeint ist.²³ Ja, es liess sich auch beobachten, dass der Fachausdruck *δύνασθαι* in der Mathematik ursprünglich bei der *Flächenumgestaltung* benutzt wurde; wurde nämlich ein *Rechteck* in ein flächengleiches *Quadrat* verwandelt, dann sagte man über die Seite des gefundenen Quadrats, dass diese *Strecke* (*εὐθεΐα*) *dem vorigen Rechteck* (*τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ*) *in Quadrat* (d. h. also: wenn man ein Quadrat auf die betreffende Strecke erhebt!) *gleichwertig ist* (*ἴσον δύναται*).²⁴

Der mathematische Fachausdruck *δύνασθαι* muss demnach aus der Finanzsprache entlehnt sein. Wie man nämlich bei der Umrechnung irgendeiner Geldart in eine andere den *Wert* mit diesem Zeitwort zum Ausdruck brachte,²⁵ so bezeichnete man mit demselben Verbum (*δύνασθαι*) bei der geometrischen Flächenumgestaltung den *Wert eines Rechtecks in Quadrat*. Und wie in der Finanzsprache das Wort *δύναμις* im allgemeinen die Bedeutung «*Wert*» hatte,²⁶ so bekam dasselbe Wort in der Geometrie den speziellen Sinn: «*Quadratwert eines Rechtecks*», dann im allgemeinen: «*Quadratwert*», und schliesslich: «*Quadrat*».

Nachdrücklich hervorheben muss ich ausserdem noch das folgende:

Man übersetzt den mathematischen Fachausdruck *δύναμις* eben an der zu behandelnden Stelle des Platonischen Dialoges «*Theaitetos*» manchmal als «*Quadratseite*», oder «*Quadratwurzel*». Ich habe in meiner oben erwähnten Arbeit²⁷ in aller Schärfe schon darauf hingewiesen, dass diese Übersetzung völlig unbegründet ist. Der mathematische Ausdruck *δύναμις* hat *nie* einen anderen Sinn als «*Quadratwert*» oder «*Quadrat*». Übersetzt man dieses Wort mit «*Quadratwurzel*» oder «*Quadratseite*», so ist dies nur ein Beweis dafür, wie oberflächlich und nachlässig die mathematische Stelle des Dialogs «*Theaitetos*» in der Fachliteratur bisher behandelt wurde.²⁸ — Soviel zunächst über das Wort

²³ Vgl. F. RUDIO, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und Hippokrates, Leipzig 1907, 139 (Index s. v. *δύνασθαι*); ebenso auch TH. L. HEATH, Archimedes, p. CLXI.

²⁴ Vgl. bei TH. L. HEATH, Archimedes, p. CLXI: «The verb *δύνασθαι* (with or without *ἴσον*) has the sense of being *δυνάμει ἴσα*, and, when *δύνασθαι* is used alone, it is followed by the accusative; thus *the square (on a straight line) is equal to the rectangle contained by . . .* is: (*εὐθεΐα*) *ἴσον δύναται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ . . .*»

²⁵ Man vergleiche bei XENOPHON (Anab. I 5. 6): «der *σίγλος* (eine asiatische Münze, das hebräische *Seckel*) *macht aus, gilt, oder: hat den Wert* (*δύναται*) von siebenundeinhalb attischen Obolen»; oder DEMOSTHENES (34, 23): «der Stater von Kyzikos *hatte dort den Wert* (*ἔδυνάτο*) von 28 Drachmen».

²⁶ Z. B. bei PLUTARCH («*Lykurgos*» 9, und «*Solon*» 15): «er liess das Geld nur *einen kleinen Wert haben*: *δύναμιν ὀλίγην τῷ νομίσματι ἔδωκεν*.»

²⁷ Siehe oben Anm. 19.

²⁸ Es freut mich, hier erwähnen zu dürfen, dass dieser mein Hinweis durch zuständige Stelle schon gebilligt wurde. Vgl. im Sammelband «Zur Geschichte der griechischen Mathematik» (red. von O. BECKER, 1965) S. 254 den Nachtrag von B. L. v. d. WAERDEN, sowie die Stellungnahme von A. FRAJESE in seinem anregenden Büchlein «*Platone e la matematica nel mondo antico*», Roma, Editrice Studium 1963, p. 164 not. 18.

δέναμις selber. Zu der hier zusammengefassten Worterklärung müssen wir ja in der ausführlicheren Interpretation noch wiederholt zurückkommen.

Und nun fasse man den Text selber («Theait.» 147 C—148 D) ins Auge.

Theaitetos

Ῥάδιον, ὦ Σώκρατες, νῦν γε οὕτω φαίνεται ἀτὰρ κινδυνεύεις ἐρωτᾶν οἷον καὶ αὐτοῖς, ἡμῶν ἑναγχος εἰσῆλθε διαλεγόμενοις, ἐμοὶ τε καὶ τῷ σὺ ὁμωνύμῳ Σωκράτει.

So scheint es leicht zu sein, Sokrates. Denn du fragst ja wohl etwas ähnliches, wie es auch uns zuletzt im Gespräch begegnete, mir und deinem Namensverwandten hier, dem anderen Sokrates.

Sokrates

Τὸ ποῖον δὴ, ὦ Θεαίτητε;

Was war es denn, Theaitetos?

Theaitetos

Περὶ δυνάμεων τι ἡμῶν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος καὶ πεντέποδος (ἀποφαίνων) ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο· ἡμῶν οὖν εἰσῆλθε τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο. πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἓν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.

Über Quadrate zeichnete uns etwas dieser Theodoros, über dasjenige mit drei und mit fünf Quadratfuss-Fläche, indem er zeigte, dass diese *der Länge nach nicht messbar* (μήκει οὐ σύμμετροι) mit dem Einheitsquadrat sind; und so nahm er jedes Quadrat (ἐκάστην scil. δύναμιν) einzeln bis zu demjenigen mit siebzehn Quadratfuss-Fläche vor; bei diesem hörte er irgendwie auf. — Uns fiel nun ein solcher Gedanke ein: nachdem es unendlich viele Quadrate gibt, sollte man es versuchen, diese in eins zusammenzufassen, wonach wir alle Quadrate benennen könnten.

Sokrates

Ἢ καὶ ἤρρετέ τι τοιοῦτον?

Und habt ihr auch etwas solches gefunden?

Theaitetos

*Εμοιγε δοκοῦμεν· σκόπει δὲ καὶ σύ.

Ja, ich glaube. Aber prüfe auch du selber.

Sokrates

λέγε.

Sag nun!

Theaitetos

Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διέλαβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκις γίνεσθαι, τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετραγώνον τε καὶ ἰσοπλευρον προσείπομεν.

Wir teilten alle Zahlen in zwei Gruppen; diejenigen, die vermögen gleichmal gleich zu sein, verglichen wir — der Gestalt nach — mit dem Viereck und wir nannten sie *gleichseitige Quadratzahlen*.²⁹

Sokrates

καὶ εὖ γε.

Sehr richtig!

Theaitetos

Καὶ τοίῳν μεταξὺ τούτου, ὧν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκις ἢ ἐλάττων πλεονάκις γίνεται, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων αἰὲν πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὖ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν.

Diejenigen Zahlen dagegen, die unter den vorigen sind, wie z. B. die *drei*, die *fünf* und überhaupt jede Zahl, die nicht gleichmal gleich sein kann, sondern entweder wenigermal mehr, oder mehrmal weniger ist, d. h. also, die von einer grösseren und von einer kleineren *Seite*³⁰ umfasst wird, diese Zahlen verglichen wir mit der Rechteckfigur und wir nannten sie *Rechteckzahlen*.

²⁹ Die Bezeichnung bei PLATON «gleichseitige Quadratzahl» ist natürlich tautologisch. Bei EUKLID heisst die Zahl, «die sich in *gleichmal gleiche* Faktoren auflösen lässt» (ἰσάκις ἴσος) einfach nur «Quadratzahl» (τετράγωνος ἀριθμός), Elem. VII def. 19.

³⁰ «Seite» (πλευρά) heisst in diesem Zusammenhang natürlich auch «Faktor», ebenso wie bei EUKLID, Elem. VII def. 16. Daraus ersieht man, dass ein Produkt von zwei Faktoren im allgemeinen als Rechteck aufgefasst wurde. Übrigens kommt die Bezeichnung «Rechteckzahl» (προμήκης oder ἐτερόμηκης in unserem PLATON-Text) bei EUKLID nicht vor. EUKLID kennt nur den Begriff «Flächenzahl» (ἐπίπεδος ἀριθμός), der selbstverständlich sowohl eine «Quadratzahl» wie auch eine «Rechteckzahl» sein kann. Ja, denkt man an die alte pythagoreische Arithmetik, so war ursprünglich eine «Flächenzahl» wohl auch die «Dreieckzahl», «Fünfeckzahl» usw.

Sokrates

Κάλλιστα. ἀλλὰ τί τὸ μετὰ τοῦτο;

Sehr schön ! Aber was kommt noch ?

Theaitetos

ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπί-
πεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μῆκος
ὀρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνά-
μεις, ὥς μήκει μὲν οὐ συμμέτρους ἐκεί-
ναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἂ δύνανται.
Καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.

Diejenigen Strecken nun, die eine
*gleichseitige Quadratzahl viereckig ma-
chen*,³¹ bezeichneten wir mit dem Wort
μῆκος; diejenigen Strecken dagegen,
die eine *Rechteckzahl in Quadrat ver-
wandeln*,³² bezeichneten wir als
δυνάμεις, nachdem diese letzteren der
Länge nach zwar inkommensurabel zu
den anderen sind, doch sind dieselben
kommensurabel *nach jenen Flächen*
(ἐπιπέδοις), die sie *in Quadrat aus-
machen* (ἂ δύνανται).³³ Und etwas
ähnliches versuchten wir auch mit den
Körperzahlen.

Sokrates

ῥαιστά γ' ἀνθρώπων, ὦ παῖδες· ὥστερ
μοι δοκεῖ ὁ Θεόδωρος οὐκ ἔνοχος τοῖς
ψευδομαρτυρίοις ἔσθαι.

Grossartig, Kinder ! Ich glaube, Theo-
doros hatte doch recht (nämlich: als
er dich lobte) etc.

Wir wollen die Interpretation des eben gelesenen Textes damit beginnen,
dass wir den inneren Zusammenhang der mathematischen Stelle mit dem
Gesamten des Platonischen Dialoges festlegen.

Die obige Textstelle beginnt mit jener Behauptung des jungen Theaitetos,
dass die Frage des Sokrates nach einem eben verklungenen Beispiel *leicht sei*,
denn Sokrates fragt ja «etwas ähnliches, wie es auch uns zuletzt im Gespräch

³¹ Die hervorgehobenen Worte der Übersetzung bilden eine zwar eindeutige aber
doch etwas knappe und nachlässige Umschreibung für folgendes: «Diejenigen Strecken,
die ein solches Quadrat (*δύναμις*) viereckig machen (*τετραγωνίζουσι*), das einer Quadratzahl
entspricht, bezeichneten wir mit dem Wort *μῆκος* . . .» — Übrigens ist der Fachausdruck
für «Quadratzahl» hier wieder tautologisch. Denn *ἰσόπλευρος καὶ ἐπίπεδος ἀριθμός* heisst
ja wörtlich: «gleichseitige und ebene Zahl».

³² Man soll den griechischen Text dem Sinne nach hier selbstverständlich wieder
mit dem Verbum *τετραγωνίζουσι* ergänzen. Der übersetzte Satz heisst also sinngemäss-
«diejenigen Strecken dagegen, die eine einer Rechteckzahl entsprechende *δύναμις* in Quadrat
verwandeln (*τετραγωνίζουσι*), bezeichneten wir als *δυνάμεις* . . .»

³³ Man vergesse nicht den genauen Sinn des mathematischen Ausdruckes: *δύνασθαι*:
«den Wert haben in Quadrat», oder: «in Quadrat ausmachen».

begegnete». — Durch diese Worte wird die engste Verbindung der mathematischen Stelle mit dem vorangehenden Gespräch hergestellt. Man kann die mathematische Stelle auch gar nicht richtig verstehen, ohne ihre Verbindung mit dem Vorangehenden zu berücksichtigen.

Denn Sokrates fragte eingangs den Jungen: «Was ist Wissen?» (146 C), und auf diese Frage hin antwortete Theaitetos zunächst mit einer *Aufzählung* von verschiedenen Arten des Wissens. Aber Sokrates war mit der Antwort nicht zufrieden; anstatt der *Aufzählung* verlangte er eine zusammenfassende, allgemeine Definition des Wissens. Er illustrierte auch sogleich seinen Wunsch an einem Beispiel. Wenn man gefragt würde: «Was ist Lehm?», auch dann dürfte man nicht mit einer *Aufzählung* der Lehmarten der einzelnen Handwerker antworten (147 A ff.), sondern man sollte eine allgemeine, zusammenfassende Definition des Lehms versuchen. — Auf dieses Beispiel hin erwidert dann der junge Mann, ja jetzt verstünde er schon, die Frage des Sokrates wäre ganz leicht, denn etwas ähnliches wäre ihm und seinem Freund auch zuletzt begegnet.

Wie man sieht, steht also im Mittelpunkt des vorangehenden Gespräches eine Art *Gegenüberstellung*: «*Aufzählung von Einzelercheinungen*» und «*zusammenfassende Definition derselben Erscheinung*» werden einander gegenübergestellt. — Von vorneherein erwartet man etwas ähnliches — nach der einleitenden Bemerkung des Theaitetos — auch in der darauffolgenden mathematischen Stelle. In der Tat kommt auch hier zunächst eine «*Aufzählung von Einzelercheinungen*», und danach folgt die «*zusammenfassende Benennung derselben Erscheinung*».

Nun woraus besteht aber die «*Aufzählung von Einzelercheinungen*» in dem mathematischen Teil? — Der Text besagt: «Über Quadrate (*δυνάμεις*) zeichnete uns etwas Theodoros, über dasjenige mit drei und mit fünf Quadratfuss-Fläche . . ., und so nahm er ein jedes Quadrat einzeln bis zu demjenigen mit siebzehn Quadratfuss-Fläche vor . . .» — Man ersieht aus dieser wiederholten Textpartie, dass die *Aufzählung* in der Tat da ist. Es werden hier ebenso *Quadrate* (*δυνάμεις*) aufgezählt, wie vorhin Theaitetos einzelne Arten von dem Wissen, und Sokrates Lehmarten von verschiedenen Handwerkern aufgezählt hatten. — Bevor wir jedoch genauer untersuchen, was wohl Theodoros mit den aufgezählten *Quadraten* gewollt haben mag, muss ich hier noch eine weitere Betrachtung über den Terminus *δύναμις* einfügen. Denn vorhin wurde ja nur die genaue Wortbedeutung dieses mathematischen Ausdruckes (*δύναμις* = «*Quadratwert eines Rechtecks*», bzw. «*Quadrat*») festgestellt. Aber auf die Tragweite dieser rein sprachlichen Erkenntnis, von dem Gesichtspunkt der Mathematikgeschichte aus, wurde ja bisher noch gar nicht hingewiesen. Und doch könnte dies — meiner Ansicht nach — auch das bessere Verstehen des eben untersuchten Platon-Textes erleichtern.

*

Seit wann gibt es überhaupt diesen Begriff der Mathematik: $\deltaύναμις$? — Natürlich kann man diese Frage mit einer sog. «absoluten Zeitbestimmung» nicht beantworten. Denn versuchte man die «absolute Chronologie», so liesse sich nur etwa folgendes sagen: auf alle Fälle muss dieser mathematische Begriff *vorplatonischen* Ursprungs sein. Es wäre auch nicht möglich, die Schöpfung des mathematischen Begriffes $\deltaύναμις$ irgendeinem mit Namen bekannten griechischen Mathematiker (z. B. dem Theodoros von Kyrene) zuzuschreiben. Denn nicht nur für Platon ist dieser Begriff ebenso geläufig, wie etwa *gerade* und *ungerade Zahl*, sondern bekannt ist die $\deltaύναμις$ auch schon aus der Mönchenquadratur des Hippokrates von Chios. Mit einem Versuch der «absoluten Chronologie» käme man also lediglich zu solchen Feststellungen.

Aber viel wichtiger scheint mir in diesem Fall und für unsere Zwecke die *relative* Chronologie. Denn es ist ja von vorneherein wahrscheinlich, dass der mathematische Terminus $\deltaύναμις$ = «Quadratwert eines Rechtecks» *jüngeren Ursprungs* ist, als der andere, gewöhnliche Terminus der griechischen Geometrie für *Quadrat*, nämlich: $τετράγωνον σχῆμα$. Um eine solche Bezeichnung wie $τετράγωνον σχῆμα$ zu prägen, genügt es, bloss die beiden wichtigsten Parallelogramme «Rechteck» und «Quadrat» zu unterscheiden. Dagegen kann man den anderen Begriff ($\deltaύναμις$ = «Quadratwert eines Rechtecks») erst dann schöpfen, wenn man in der Tat auch schon weiss: *wie ein Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandelt wird*. Mit anderen Worten: der mathematische Begriff $\deltaύναμις$ und die Kenntnis, wie man ein Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandelt, müssen *gleichaltrig* sein.

Der vorige Schluss, der sich aus meiner einfachen sprachlichen Feststellung ($\deltaύναμις$ = «Quadratwert eines Rechtecks») beinahe von selbst ergibt, führt auch noch zu weiteren Beobachtungen, die — meiner Ansicht nach — sowohl für das Verständnis der untersuchten Platon-Stelle, wie auch für die ganze frühgriechische Mathematikgeschichte von ausschlaggebender Wichtigkeit sind.

Wir fragen nämlich zunächst: mit welchem Wort wurde im Griechischen das «Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat» sprachlich bezeichnet? — Der regelrechte Terminus technicus war dafür: $τετραγωνίζειν$ bzw. als Hauptwort: $τετραγωνισμός$. Es ist ja kein Zufall, dass — nachdem die $\deltaύναμις$, der «Quadratwert eines Rechtecks», mit «Tetragonismos» gewonnen wird — *auch in unserem eben untersuchten Platon-Text neben der Bezeichnung $\deltaύναμις$ auch dieser andere wichtige Terminus, $τετραγωνίζειν$, gebraucht wird*. Die beiden Begriffe, «dynamis» und «Tetragonismos», gehören auf das engste zusammen. Und eben eine wichtige Mitteilung des Aristoteles über den «Tetragonismos» wird uns sogleich auch ermöglichen, die obige «relative Chronologie» hinsichtlich des Begriffes «dynamis» noch weiter zu präzisieren. Ich muss vorher nur noch eine kleine Bemerkung über den deutschen Sprachgebrauch vorausschicken. Man übersetzt nämlich die griechischen Worte $τετραγωνίζειν$ und

τετραγωνισμός häufig als «quadrieren». Doch mag diese Übersetzung leicht irreführend sein. Denn das Wort «quadrieren» hat manchmal auch solche Bedeutungen, wie «erheben eine Zahl auf die zweite Potenz», oder: «ein Quadrat konstruieren mit einem gegebenen Segment». Dagegen verstanden die Griechen unter τετραγωνισμός — wenn nicht gerade von dem τετραγωνισμός τοῦ κύκλου die Rede war — immer das «Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat», und nie etwas anderes. (Selbstverständlich führt auch der «Tetragonismus» anderer geradliniger Figuren immer über das Rechteck hindurch zu dem flächengleichen Quadrat.) Darum vermeiden wir in dieser Arbeit möglichst konsequent das leicht irreführende deutsche Wort «quadrieren».

Nun sagt einmal Aristoteles in der Metaphysik über den «Tetragonismus» wörtlich das folgende:³⁴ «Was ist τετραγωνίζειν? — Das Auffinden der mittleren Proportionale» (τί ἐστι τετραγωνίζειν . . . μέσης εὐρεσις). Der Sinn und der Textzusammenhang dieser bündigen Aristotelischen Behauptung werden in dem trefflichen Kommentar von W. D. Ross folgendermassen erklärt:³⁵ «The definition, the squaring of a rectangle is the finding of a geometrical mean between the sides, is an abbreviated form of the syllogism: a rectangle can be squared because a mean can be found between its sides.»

Denselben Gedanken erklärt auch Aristoteles selber ein anderes Mal ausführlicher:³⁶ «Gewöhnlich sind die Definitionen Schlusssätzen ähnlich, wie z. B.: Was ist der Tetragonismus? — Die Konstruktion eines dem Rechteck (ἐτερόμηκες) flächengleichen Quadrates. Eine solche Definition ist ein Schlusssatz. Derjenige aber, der behauptet, dass der Tetragonismus das Auffinden der mittleren Proportionale ist, der macht auch den Grund der Sache namhaft» (ὁ δὲ λέγων, ὅτι ἐστὶν ὁ τετραγωνισμός μέσης εὐρεσις, τοῦ πράγματος λέγει τὸ αἷτιον).

Wichtig ist für uns diese zweimalige Behauptung des Aristoteles deswegen, weil man daraus ersieht, dass ein jeder, der in der damaligen Mathematik auch nur einigermassen bewandert war, selbstverständlich wissen musste: ohne die Konstruktion der mittleren Proportionale (vgl. Eucl. Elem. VI 13) kann man den «Tetragonismus» (= «das Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat») eigentlich nicht lösen. Natürlich wird auch bei Euklid in dem Satz II 14 eigentlich die mittlere Proportionale konstruiert, obwohl hier — aus einem besonderen Grunde, der in dieser Arbeit nicht erörtert werden soll — die Proportionenlehre auf dem Wege einer interessanten Flächengeometrie umgangen wird. Aber eben die kategorische Behauptung des Aristoteles — «Tetragonismus» und Auffinden der mittleren Proportionale sind äquivalent — bildet sozusagen den Beleg dafür, dass die Griechen das Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat ursprünglich wohl mit der Konstruktion der mittleren Proportionale gelöst hatten. Die Flächengeometrie im Satz II 14

³⁴ Met. 996 b 20—21.

³⁵ Aristotle's Metaphysics, Vol. I—II. Oxford, 1924 (I. p. 229).

³⁶ De anima II 2,413 a 19.

der Euklidischen «Elemente» mag demgegenüber eine nachträgliche Umkleidung, ja vielleicht auch Tarnung der ursprünglichen Lösung sein.

Wurde jedoch das «Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat» ursprünglich in der Tat auf dem Wege der Konstruktion der mittleren Proportionale gelöst, so muss die Schöpfung des Begriffes «dynamis» (= «Quadratwert eines Rechtecks») nicht nur dem «Tetragonismos» im allgemeinen, sondern auch der Kenntnis, *wie man die mittlere Proportionale zweier Strecken konstruiert*, gleichaltrig sein. — Dieser einfache Schluss lässt uns sogleich auch verstehen: warum eigentlich der vollkommen neue Begriff — *dynamis* = «Quadratwert eines Rechtecks» — geschöpft wurde? Denn die Erkenntnis, wie man die mittlere Proportionale zweier Strecken konstruiert, war ja in der Tat ein bedeutender Vorstoss der ganzen Geometrie. Man denke nämlich an die beiden folgenden Sätze bei Euklid:

Elem. VIII 18: «Zwischen zwei ähnlichen Flächenzahlen ($\delta\upsilon\omicron\ \delta\mu\omicron\iota\omega\nu\ \epsilon\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\omega\nu\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{\omega}\nu$) gibt es eine mittlere proportionale Zahl» und

Elem. VIII 20: «Wenn es zwischen zwei Zahlen eine mittlere proportionale Zahl gibt, dann sind die beiden Zahlen *ähnliche Flächenzahlen*.»

Um diese beiden Sätze zu verstehen, muss man wissen, dass nach der Euklidischen Definition *Elem. VII def. 22*: «Ähnliche Flächenzahlen ($\delta\mu\omicron\iota\omega\iota\ \epsilon\pi\iota\pi\acute{\epsilon}\delta\omega\iota\ \alpha\rho\iota\theta\mu\omicron\iota$) sind diejenigen, deren Seiten (= $\pi\lambda\epsilon\nu\sigma\alpha\iota$, Faktoren) je nach Logos gleich sind.»³⁷ Im Sinne dieser Definition sind also «ähnliche Flächenzahlen» vor allem die Quadratzahlen (4, 9, . . .), aber auch solche Zahlenpaare, wie 2 und 8, oder 3 und 12, denn auch diese letzteren lassen sich ja in untereinander proportionelle Faktoren, $1\cdot 2$ und $2\cdot 4$, bzw. $1\cdot 3$ und $2\cdot 6$ zerlegen (also $1 : 2 = 2 : 4$ und $1 : 3 = 2 : 6$). — Nun besagt der Satz VIII 18, dass es zwischen zwei solchen «ähnlichen Flächenzahlen» eine *mittlere proportionale Zahl* gibt. In der Tat findet man leicht die mittlere proportionale Zahl nicht nur zwischen zwei Quadratzahlen — z. B. zwischen den 4 und 9 die 6 ($4 : 6 = 6 : 9$) —, sondern auch unter solchen anderen «ähnlichen Flächenzahlen», wie unsere eben genannten Beispiele, die 2 und 8, und die 3 und 12 sind ($2 : 4 = 4 : 8$, und $3 : 6 = 6 : 12$). — Der andere Satz (VIII 20) ist nur die Umkehrung des vorangehenden (VIII 18): gibt es eine mittlere proportionale Zahl zwischen zwei vorgelegten Zahlen, dann können diese beiden vorgelegten Zahlen nur *ähnliche Flächenzahlen* sein.

Es ist nun leicht einzusehen, dass in jener älteren Zeit, in der die beiden Sätze VIII 18 und 20 schon bekannt waren — *aber noch nicht auch die Konstruktion der mittleren Proportionale zwischen zwei beliebigen Strecken* (Eucl. VI 13) —, auch nicht *alle* Rechtecke in flächengleiche Quadrate verwandelt werden konnten. *Nur* wenn die Seiten der betreffenden Rechtecke «ähnliche Flächenzahlen»

³⁷ Zu der Wendung «je nach Logos gleich» vgl. man meine Arbeit: «Die frühgriechische Proportionslehre im Spiegel ihrer Terminologie» in «Archive for History of Exact Sciences» vol. 2, 1965 197—270

waren (d. h. wenn sie sich in «ähnliche Flächenzahlen» zerlegen liessen) — wie wir sagen würden: wenn die Flächenmasse der fraglichen Rechtecke «Quadrat-zahlen» waren —, dann fand man zu ihnen sogleich auch die flächengleichen Quadrate. Wurde jedoch ein solches Rechteck vorgelegt, dessen Seiten z. B. 1 und 3 Längeneinheiten (also *keine* «ähnlichen Flächenzahlen») waren, so liess sich dieses Rechteck -- ohne die Kenntnis dessen, wie man die mittlere Proportionale auf geometrischem Wege konstruiert -- auch nicht in flächengleiches Quadrat verwandeln.

Als man jedoch später mit der geometrischen Konstruktion der mittleren Proportionale auch diese andersgearteten Rechtecke (mit Seiten von *nicht*-ähnlichen Flächenzahlen) in Quadrate verwandelte, erhob sich die interessante Frage: *was sind die Seiten dieser Quadrate?* Denn diese Seiten waren ja mittlere Proportionale zwischen je zweien solchen Zahlstrecken (den beiden Seiten der betreffenden Rechtecke), die *nicht* «ähnliche Flächenzahlen» waren. Und doch besagt der Satz Eucl. Elem. VIII 20: «Gibt es zwischen zwei Zahlen eine mittlere proportionale Zahl, dann sind die beiden Zahlen *ähnliche Flächenzahlen*.» Mit diesem Satz liess sich die neuerkannte Tatsache -- nämlich die Möglichkeit der mittleren Proportionale zwischen zwei *beliebigen* Strecken — offenbar nur auf dem Wege vereinigen, dass man den Begriff der *linearen Inkommensurabilität* einführte: die mittleren Proportionale zwischen zwei *nicht*-ähnlichen Flächenzahlen sind nach griechischer Auffassung eben «keine Zahlen».

Inwiefern man nun -- und auf welchem Wege — die lineare Inkommensurabilität der mittleren Proportionale zwischen zwei solchen Strecken, die «nicht-ähnliche Flächenzahlen» sind, auch einwandfrei beweisen konnte, bleibe dahingestellt. Für uns ist die eben angestellte Betrachtung nur deswegen, wichtig weil man daraus ersieht, dass das Problem, wie man ein Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandelt — welches Problem in seiner allgemeinen Form mit der Frage nach der mittleren Proportionale zwischen zwei *beliebigen* Strecken äquivalent ist — im Laufe der historischen Entwicklung der Geometrie zu dem Problem der *linearen Inkommensurabilität* führte.

Ja, ich vermute sogar, dass es auch gar keinen mathematischen Begriff «*dynamis*» geben kann, solange man die lineare Inkommensurabilität nicht erkannt hat. Denn überlegen wir es uns noch einmal. Der mathematische Ausdruck «*dynamis*» ist nach der sprachlichen Worterklärung eine *Flächenbezeichnung*: «Quadratwert eines Rechtecks». Aber warum mussten die den Rechtecken flächengleichen Quadrate mit diesem seltsamen, neugeprägten Ausdruck bezeichnet werden? Was war jene besondere Eigentümlichkeit dieser Quadrate, wodurch die auffallende Namengebung veranlasst wurde? — Ich kann nur an folgendes denken. Solange man *nur* solche Rechtecke in flächengleiche Quadrate verwandelte, deren Seiten «ähnliche Flächenzahlen» waren, lag noch kein Grund und Anlass vor, einen neuen Namen zu prägen. Denn die Quadrate, die man auf diese Weise erhielt, unterschied-

den sich ja in gar nichts von den gewöhnlichen *τετράγωνα σχήματα*. Aber es wurde auf einmal ganz anders, als man die neue, allgemeine Methode für das Verwandeln des Rechtecks in flächengleiches Quadrat — die Konstruktion der mittleren Proportionale auf geometrischem Wege — erfand. Nicht nur *alle* Rechtecke wurden dadurch «quadrierbar», sondern man musste auch wahrnehmen, dass auf diese Weise häufig solche Quadrate gewonnen werden, deren sich nur die Flächenmasse und nicht auch die Seitenlängen zahlenmässig bestimmen lassen. Von dieser Erkenntnis mag die sonderbare Namensgebung ihren Ausgang genommen haben. Darum verwendete man also für alle solche Quadrate, die irgendwelchen vorgelegten Rechtecken flächengleich waren, den besonderen Namen: «*dynameis*» = «Quadratwerte von Rechtecken». — Mit anderen Worten heisst dies soviel: auch der Name *δύναμις* scheint allein und in sich dafür zu sprechen, dass zu jener Zeit, in der dieser Begriff geprägt wurde, wohl auch schon die Existenz von linear inkommensurablen und nur quadratisch kommensurablen Strecken erkannt wurde.

Ich musste die obige Betrachtung über den mathematischen Begriff «*dynamis*» an dieser Stelle deswegen einfügen, weil man — meiner Ansicht nach — die untersuchte Platon-Stelle ohne die Kenntnis dessen, was eben vorausgeschickt wurde, auch gar nicht richtig verstehen kann. Denn es heisst ja in unserem griechischen Text: «Über *Quadrate* (*δυνάμεις*) zeichnete uns etwas dieser Theodoros, über dasjenige mit drei und fünf Quadratfuss-Fläche, . . . und so nahm er jedes *Quadrat* (*ἐκάστην* scil. *δύναμιν*) einzeln bis zu demjenigen mit siebzehn Quadratfuss-Fläche vor; bei diesem hörte er irgendwie auf.»

Wie hat nun Theodoros jene Quadratflächen, die in den eben zitierten Worten genannt werden, bzw. jene *Quadratseiten* konstruiert, auf deren lineare Inkommensurabilität er seine Schüler aufmerksam machen wollte? — fragte man auch schon in den bisherigen Interpretationen. Und man erteilte auf diese Frage entweder jene Antwort, dass es «gar nicht so wichtig» wäre, zu wissen, wie Theodoros die fraglichen Quadratseiten konstruierte,³⁸ oder man ging von einem interessanten Rekonstruktionsversuch von J. H. Anderhub aus.³⁹ Anderhub konstruierte nämlich zu allererst ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $1 - 1$, dessen Hypotenuse die Zahl $\sqrt{2}$ veranschaulicht; dann zeichnete er ein anderes rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $\sqrt{2}$ und 1 ; die Hypotenuse dieses zweiten Rechtecks ist unsere Zahl $\sqrt{3}$. Und so kann man — wie die



³⁸ B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, 235.

³⁹ H. J. ANDERHUB, *Joco-Seria*, Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes Ausgabe der Kalle-Werke, Wiesbaden 1941).

Figur auf Seite 320 zeigt — nacheinander eben 17 solche rechtwinklige Dreiecke konstruieren, deren aufeinanderfolgende Hypotenusen die Quadratwurzeln $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, . . . $\sqrt{17}$ geometrisch veranschaulichen. Diese geistreiche Rekonstruktion schien einigen auch deswegen einleuchtend zu sein, weil man glaubte, daraus verstünde man sogleich auch, warum Theodoros gerade bei $\sqrt{17}$ aufgehört hatte.

Nun soll es hier natürlich *nicht* bestritten werden, dass es sehr viele verschiedene Möglichkeiten dafür gibt, wie man solche Quadrate bekommt, deren Flächenmasse ganze Zahlen von 3 bis 17 sind. Aber ich glaube, dass man im Interesse der Texterklärung dennoch von einer bestimmten und, wie mir scheint, sehr einfachen Vermutung ausgehen soll. Ich vermute nämlich, dass *Theodoros seine Quadrate (δυνάμεις) auf dem Wege gewonnen hatte, dass er Rechtecke — unter Benutzung der Sätze Eucl. Elem. VI 13 und 17 — in flächengleiche Quadrate verwandelte.* (Diese Möglichkeit wurde selbstverständlich auch schon in der bisherigen Forschung häufig registriert.⁴⁰) Abgesehen davon, dass meine eben hervorgehobene Vermutung die weitere Interpretation — wie man bald sehen wird — wesentlich *erleichtert*, gibt es auch in dem Platon-Text selbst mindestens *drei* Anhaltspunkte dafür, dass Theodoros in der Tat *Rechtecke in flächengleiche Quadrate verwandelte*. Diese Anhaltspunkte sind die folgenden:

Erstens: Theaitetos redet ja von «*dynameis*». Wie man schon weiss, heisst das Wort *dynamis*: «Quadratwert eines Rechtecks», und ursprünglich wurde eine *dynamis* eben auf dem Wege gewonnen, dass man ein Rechteck in flächengleiches Quadrat verwandelte.

Zweitens: Der regelrechte Terminus technicus der Geometrie für das «Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat» heisst griechisch: τετραγωνίζειν. Es kann kein Zufall sein — wie darauf nebenbei auch schon oben hingewiesen wurde —, dass dieser wichtige Fachausdruck der Geometrie auch aus dem kurzen Bericht des Theaitetos *nicht* fehlt. Mir scheint auch die Benutzung dieses Wortes durch Theaitetos dafür zu sprechen, dass jenem Versuch der beiden jungen Leute (Theaitetos und der «junge Sokrates»), der unten bald näher besprochen wird, ein «Tetragonismos», den ihr Meister Theodoros vollzog, vorausging.

Drittens: Die untersuchten «*dynameis*» des Theodoros sind *ganze Zahlen von 3 bis 17*. Theodoros scheint also eigentlich von diesen ganzen Zahlen selbst ausgegangen zu sein. Zu den Zahlen konstruierte er jene «*dynameis*», deren Flächenmasse denselben Zahlen entsprachen. Wurden aber die ganzen Zahlen im Sinne der alten pythagoreischen Arithmetik nicht eben als *Rechtecke* geometrisch dargestellt? — Man denke an die folgende Definition bei Euklid:

Elem. VII def. 16: »Wenn zwei Zahlen bei gegenseitiger Vervielfältigung eine Zahl bilden, wird die entstehende eine *Flächenzahl* (ἐπιπλοδος ἀριθμός), und die einander vervielfältigenden Zahlen sind ihre Seiten (= πλευραί, Faktoren).«

⁴⁰ Vgl. z. B. B. L. v. d. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft 235, wo anstatt Eucl. Elem. VI 13 auf den äquivalenten Satz Elem. II 14 hingewiesen wird.

Denkt man an diese Definition, so sieht man sofort ein, dass im Sinne der frühgriechischen Mathematik jede beliebige Zahl als ein aus zwei Faktoren bestehendes Produkt aufgefasst und «geometrisch» als eine *Flächenfigur* — gewöhnlich eben als ein *Rechteck* — veranschaulicht werden konnte. Man fasste z. B. die Zahl 6 entweder als 1×6 oder als 2×3 auf, und man bekam demnach in der geometrischen Veranschaulichung eines der beiden *Rechtecke* mit den Seiten (= «pleurai») 1 und 6, bzw. 2 und 3. (Selbstverständlich kann man dabei auch die *Quadratzahlen* in Rechteckform veranschaulichen. Denn es gilt ja nicht nur $4 = 2 \times 2$, oder $9 = 3 \times 3$, sondern auch $4 = 1 \times 4$ und $9 = 1 \times 9$. Und darum durften wohl auch die Quadrate 2×2 und 3×3 als «*dynameis*», d. h. als «*Quadratwerte der Rechtecke mit den Seiten 1 und 4 bzw. mit den Seiten 1 und 9*» gelten.)

Ich glaube also, der weiteren Interpretation die Vermutung zugrundelegen zu dürfen: *Theodoros verwandelte Zahlenrechtecke in flächengleiche Quadrate* und an diesen Quadraten illustrierte er etwas vor seinen Schülern. — Natürlich mussten dabei *nicht alle* Zahlenrechtecke von 3 bis 17, das eine nach dem anderen, in Quadrate verwandelt werden. Es genügte dazu, die allgemeine Methode an einem einzigen Beispiel, etwa an dem Rechteck mit dem Flächenmass 3, zu zeigen, wie man dieses Rechteck mit der Konstruktion der mittleren Proportionale zu seinen beiden Seiten in ein flächengleiches Quadrat verwandelt. Dieselbe Methode galt für alle übrigen Fälle. Die Konstruktion *aller* «*dynameis*» zwischen 3 und 17 kann also nach der Analogie von einer einzigen aus ihnen auch *bloss gedacht werden. Einzeln vorgenommen* (κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος) werden diese grösstenteils nur *gedachten* Quadrate nicht in ihrer Konstruktion, sondern unter einem anderen Gesichtspunkt. Aber darüber erst später. Denn ich muss ja hier vor allem noch in zwei Punkten daran erinnern, wie die angebliche «mathematische Entdeckung» des Theodoros in der modernen Forschung bisher beurteilt wurde.

(1) Theodoros soll «die Irrationalität der Quadratwurzeln $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ neu aufgefunden und bewiesen haben».⁴¹

(2) Aber Theodoros soll dennoch nur «in den *Einzelfällen* 3, 5, 6, . . . bis 17 die Irrationalität erkannt haben»; erst nach ihm habe «der damals noch ganz junge Theaitetos den Begriff des Irrationalen in seiner ganzen Allgemeinheit erfasst und so den Grund zu einer allgemeinen Theorie der Irrationalitäten gelegt».⁴² Ja, man traute dem Theodoros bisher nicht einmal die Kenntnis einer umfassenden Definition der Irrationalität zu. Wie Th. L. Heath über ihn schrieb:⁴³ «It does not appear, however, that he reached any definition of a surd in general or proved any general proposition about all surds.»

⁴¹ Vgl. H. VOGT (s. oben Anm. 11) S. 97.

⁴² E. FRANK, Platon und die sog. Pythagoreer, Halle 1923 228—229.

⁴³ TH. L. HEATH, A History of Greek Mathematics, I 203.

Ich glaube, ein jeder unvoreingenommener Leser wird — in Kenntnis dessen, was über den Begriff «*dynamis*» oben vorausgeschickt wurde — von diesen beiden Punkten mindestens den (2) schon von vorneherein mit einer gewissen Skepsis aufnehmen. Wieso hätte Theodoros die Irrationalität *nur* «in den Einzelfällen 3, 5, 6 . . . bis 17» erkannt? Ist jene andere Vermutung nicht wahrscheinlicher, dass das bloße Vorhandensein des mathematischen Begriffes «*dynamis*» in sich auch schon die Erkenntnis mindestens von einer Art Irrationalität in ihrer *Allgemeinheit* voraussetzt? Und wenn man schon ein einziges Rechteck — mit Seiten die *nicht* «ähnliche Flächenzahlen» sind — unter Anwendung der Konstruktion der mittleren Proportionale zu den beiden Seiten in flächengleiches Quadrat verwandeln kann, warum kann man dann nicht auch *alle* derartigen Rechtecke in Quadrate verwandeln? Und weiss man von einem einzigen der auf diese Weise gewonnenen Quadrate, dass seine Seite mit der Längeneinheit inkommensurabel ist, warum verallgemeinert man dann nicht dieselbe Erkenntnis auch auf alle derartigen Quadrate?

Aber ebenso fragwürdig wird auch der Punkt (1), wenn man bedenkt, *in welchem Sinne* die Behauptung: «Theodoros hätte die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . bis $\sqrt{17}$ bewiesen», aufgestellt wurde? — Man ging nämlich von der Annahme aus: *vor* Theodoros hätte man nur die Irrationalität von $\sqrt{2}$ (die lineare Inkommensurabilität der Quadratdiagonale zur -Seite) beweisen können. Theodoros hätte sich eben dadurch verdient gemacht, dass er nicht nur die weiteren Irrationalitäten $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, . . . bis $\sqrt{17}$ erkannte, sondern er habe für diese Irrationalitäten auch *Beweise* liefern können. — Auf Grund dieser Annahme wurden die «Beweise des Theodoros» natürlich sehr wichtig, und darum bemühte man sich, für diese Beweise «ein im Bereich der griechischen Mathematik liegendes Verfahren durch Analogie zu erschliessen». ⁴⁴

Nun will ich gar nicht bestreiten, dass Theodoros seine mathematischen Behauptungen vor den Schülern irgendwie wohl auch *bewiesen hatte*. Ja ich versuche sogleich auch zu zeigen, welcher Art die «Beweise des Theodoros» gewesen sein mögen. Aber ich muss hier dennoch mit allem Nachdruck betonen: es kommt in Platons Schilderung *nicht* auf die Beweise an. Mit Recht bemerkte ja schon H. Vogt, dass «Platon den Beweisgang des Theodoros *nicht* überliefert, *ja nicht einmal angedeutet hat*». ⁴⁵ Es kommt in dem Bericht des Theaitetos auch der regelrechte Terminus technicus des mathematischen Beweises, das Zeitwort *δείχνειν*, *nicht* vor. (Dass dabei durch Theodoros *nebensächlich* dennoch wohl auch irgendwelche Beweise zum mindesten angedeutet werden mussten, das erschliesst man aus dem Verbum *ἀποφαίω*, das im alltäglichen Gespräch — besonders über ein mathematisches Thema — in der Tat leicht auch den Sinn «beweisen» haben mochte.) Stellt man trotz dieser Umstände in der Interpreta-

⁴⁴ Siehe bei H. VOGT (oben Anm. 11).

⁴⁵ Ebd.

tion dennoch die *Beweise* des Theodoros in den Vordergrund, so verdreht man auch dadurch schon unwillkürlich den Sinn eines solchen Platon-Textes, in dem es *nicht* auf die Beweise, sondern auf etwas anderes ankam. — Nun sei es aber hier dennoch kurz geschildert, welcher Art die nur *nebensächliche* Beweisführung des Theodoros gewesen sein mag.

Es heisst in dem obigen Bericht: «Über *δυνάμεις* zeichnete uns etwas Theodoros, über diejenige mit drei und fünf Quadratfuss-Fläche, indem er zeigte, dass diese der Länge nach nicht messbar mit dem Einheitsquadrat sind; und so nahm er jede *dynamis* einzeln bis zu derjenigen mit siebzehn Quadratfuss-Fläche vor . . .» — Wie mag man diesen Tatbestand in dem zeitgenössischen Schulunterricht am einfachsten gezeigt, oder «bewiesen» haben? — Ich glaube, es genügten dazu die folgenden zwei Schritte:

1. Es wurden die Zahlenrechtecke 3, 5, 6, . . . 17 — oder mindestens *ein* illustratives Beispiel von diesen — unter Benutzung des Satzes Eucl. Elem. VI 13 in *dynameis* verwandelt. Diese Konstruktion musste natürlich *regelrecht bewiesen werden* — und ebenso vielleicht auch noch *Elem. VI 17* (Wenn $a : b = b : c$, dann auch $ac = b^2$.) Denn man weiss ja *nur* auf Grund des Beweises, dass die vorgelegten *dynameis* in der Tat den betreffenden Rechtecken flächengleich sind (also je ein Flächenmass von 3, 5, 6, . . . 17 Quadratfuss haben): ihre Seiten sind *mittlere Proportionalen* zu den beiden Seiten der entsprechenden Rechtecke.

2. Der Nachweis der linearen Inkommensurabilität für die einzelnen *dynamis*-Seiten mag wohl als ein Hinweis auf die Sätze *Eucl. Elem. VIII 18* und *20* erfolgt sein: es gibt eine mittlere proportionale *Zahl n u r* zwischen zwei «ähnlichen Flächenzahlen». Und nachdem die Seiten der betreffenden Rechtecke *keine* «ähnlichen Flächenzahlen» sind, können auch die mittleren Proportionalen zu ihnen, die Seiten der entsprechenden *dynameis*, nicht mit der Längeneinheit kommensurable Grössen sein.

Ausführlich und detailliert musste diese «Beweisführung» nur in einer einzigen Hinsicht sein. Es mussten in der Tat alle *dynameis* zwischen 3 und 17 einzeln vorgenommen werden — *κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος*, lesen wir in dem griechischen Text —, um zu zeigen, dass die Seiten der entsprechenden Rechtecke nie «ähnliche Flächenzahlen» sind. — Mit anderen Worten heisst dies folgendes: Theodoros nahm wohl alle ganze Zahlen zwischen 3 und 17, und er zeigte, dass keine von diesen — ausgenommen natürlich die drei Quadratzahlen 4, 9 und 16 — sich in zwei solche Faktoren zerlegen lässt, die ihrerseits «ähnliche Flächenzahlen» wären. Und damit war die lineare Inkommensurabilität der behandelten *dynameis* vor den Schülern wohl auch schon hinreichend plausibel gemacht. Denn die Seiten dieser *dynameis* sind ja mittlere Proportionalen zwischen je zwei «*nicht*-ähnlichen Flächenzahlen», und mittlere proportionale *Zahlen* gibt es doch nur zwischen je zwei «ähnlichen Flächenzahlen».

Aber es kam ja in dem vorliegenden Fall gar nicht auf einen regelrechten Beweis an. Man beachte, dass in unserem Platon-Text nicht nur der Begriff

dynamis mit einer überraschenden Selbstverständlichkeit benutzt wird — Theaitetos erklärt weder was eine *dynamis* ist, noch wie die *dynameis* des Theodoros hergestellt wurden —, sondern die athenischen Jünger des Mathematikers aus Kyrene die Lehre ihres Meisters, wie es scheint, sogleich auch verstanden und mit einer erstaunlichen Leichtigkeit zur Kenntnis nahmen. Die Beweise des Theodoros — falls solche überhaupt regelrecht ausgeführt wurden — scheinen sie nicht besonders interessiert zu haben. Sie wollten, anstatt sich um die Beweise zu kümmern, mit dem, was ihnen vorgelegt wurde, sogleich etwas ganz anderes anfangen.

Was wollte nun eigentlich Theodoros mit der Aufzählung aller *dynameis* zwischen 3 und 17 und mit dem Nachweis der linearen Inkommensurabilität für 12 Fälle von denselben, wenn es ihm in Platons Schilderung — wie ich es nochmals betonen muss — *nicht auf die Beweise ankam?* — Ich glaube, man wird diese Frage nur dann beantworten können, wenn man den inneren Zusammenhang der untersuchten mathematischen Stelle mit dem Ganzen des Platonischen Dialoges nicht aus dem Auge verliert.

Man vergesse nämlich nicht, wodurch überhaupt der junge Theaitetos an seine mathematische Erfahrung erinnert wurde. Sokrates erklärte ihm vorhin: Es wäre keine richtige Antwort auf die Frage »*Was ist Lehm?*«, wenn man einzelne Lehmarten von verschiedenen Handwerkern aufzählen wollte. Man müsste eher — unter Berücksichtigung dessen, was in allen aufgezählten Lehmarten *gemeinsam* ist — eine Definition geben: »Lehm ist Erde mit Wasser vermischt.« Der Aufzählung von *Einzelfällen* folgt also — in dem Beispiel des Sokrates — die *Zusammenfassung* derselben Fälle. Genau so wird es auch in dem mathematischen Teil des Dialoges.

Denn Theaitetos berichtet ja, nachdem er die Aufzählung des Theodoros geschildert hatte: »Uns fiel nun ein solcher Gedanke ein: nachdem es unendlich viele *dynameis* gibt, *sollte man es versuchen, diese in eins zusammenzufassen, wonach wir alle diese dynameis benennen könnten.*« — Die Aufzählung von einzelnen *dynameis* und der einigermaßen doch detaillierte Nachweis für diese durch Theodoros (*κατὰ μὲν ἐκάστην προαυρούμενος*) scheinen also eine *Vorbereitung* für die zusammenfassende Benennung gewesen zu sein. — Es fragt sich nur, ob die zusammenfassende Benennung, die in dem folgenden durch Theaitetos und seinen Freund gegeben wird, *von Anfang an auch von Theodoros bewusst vorbereitet, ja vielleicht auch verlangt wurde*, oder ob es sich hier vielleicht um eine *eigene und spontane Initiative dieser jungen Leute handelt*, wie es die Worte: »Uns fiel nun ein solcher Gedanke ein . . .« naheulegen scheinen? — Aber auf diese Frage wollen wir erst später eingehen. Hier registrieren wir zunächst den kleinen Unterschied zwischen dem Beispiel des Sokrates einerseits, und dem mathematischen Bestreben der Theodoros-Schüler andererseits. Denn in dem Beispiel des Sokrates wurde nach dem Aufzählen der verschiedenen Lehmarten eine *Definition* des Lehmes versucht, während Theaitetos und

sein Freund mehr nur nach einem *Gesichtspunkt* trachten, wonach sie alle *dynameis* benennen könnten (*προσαγορεύομεν*).

Bevor wir nun genauer untersuchen wollten, ob und inwiefern man überhaupt von einer Selbständigkeit der Theodoros-Schüler ihrem Lehrer gegenüber sprechen kann, wollen wir das Vorgehen dieser jungen Leute näher ins Auge fassen.

Theaitetos und sein Freund gehen von den *Zahlen* aus; wie es in dem Bericht heisst: »Wir teilten alle *Zahlen* in zwei Gruppen . . .» Dies ist leicht verständlich, nachdem auch Theodoros von den *Zahlen* ausgegangen war; er verwandelte zuerst die *Zahlenrechtecke* zwischen 3 und 17 in Quadrate (= *dynameis*) und erst danach lenkte er die Aufmerksamkeit seiner Schüler auf die Seiten dieser Quadrate.

Auch in der Unterscheidung der «*Quadratzahlen*» und «*Rechteckzahlen*» folgten die Schüler einer solchen Unterscheidung, die in der Demonstration ihres Lehrers mindestens angedeutet werden musste. Denn Theodoros vermochte ja nur im Falle der *dynameis* 3, 5, 6 . . . die lineare Inkommensurabilität der Seiten nachzuweisen; die *dynameis* 4, 9 und 16 musste er entweder stillschweigend übergehen, oder evtl. hat er sogar ausdrücklich hervorgehoben, dass diese Fälle sich von den übrigen *unterscheiden*, nachdem die Seiten der betreffenden «*Rechteckzahlen*» ($1 \cdot 4$, $1 \cdot 9$ und $2 \cdot 8$) in diesen Fällen doch als «ähnliche Flächenzahlen» gelten können.

Nachdem die Einteilung aller *Zahlen* in zwei Gruppen — «*Quadratzahlen*» und «*Rechteckzahlen*» — vorgenommen wurde, wandten sich die jungen Leute den *dynameis* des Theodoros zu, die eben *Zahlen* veranschaulichen, und sie benannten zunächst die Seiten derjenigen *dynameis*, die den Quadratzahlen entsprechen, mit dem Wort «*Länge*» (*μήκος*). Der Sinn dieser Benennung liegt auf der Hand. Theodoros hatte ja vorhin gezeigt, dass die Seiten der *dynameis* mit 3, 5 etc. Quadratfuss-Flächen «der *Länge* nach nicht kommensurabel» (*μήκει οὐ σύμμετροι* = linear inkommensurabel) sind. Die Seiten der anderen Quadrate mit 4, 9 und 16 Quadratfuss-Fläche bekommen jetzt eben deswegen den Namen «*Länge*» (*μήκος*), weil diese im Gegensatz zu den *dynameis* mit Fläche 3, 5 etc. «der *Länge* nach kommensurabel (d. h. also: linear kommensurabel)» sind.

Höchstens könnte man nur an der etwas *ungenauen*, *nicht-präzisen* Namengebung Anstoss nehmen. Denn die Seiten jener *dynameis*, die den Quadratzahlen entsprechen, sollten eigentlich doch nicht bloss mit dem Wort «*μήκος*», sondern eher mit dem Ausdruck *μήκει σύμμετρος* bezeichnet werden. Der präzise Terminus heisst ja eben *μήκει σύμμετρος* (bzw. *ἀσύμμετρος*) auch bei Euklid, z. B. in der 3. Definition des Buches X der «*Elemente*». Ausserdem wurde die regelrechte Form des Terminus, bzw. der Gegensatz des hier festzulegenden Terminus, in dem Bericht des Theaitetos eben auch gebraucht: *μήκει οὐ σύμμετροι*, 147 D 4—5. Der ungenaue Gebrauch des mathematischen Terminus seitens des Theaitetos ist also auf alle Fälle anstössig. — Aber diese bloss

stilistische Ungenauigkeit in der Bezeichnungsart darf uns dennoch nicht allzusehr wundernehmen. Ähnliche terminologische Ungenauigkeiten — die dabei den Sinn des Gedankens gar nicht stören — kommen ja in unserem Platon-Text auch sonst vor. Ich habe z. B. oben in den Anmerkungen schon darauf hingewiesen, dass die «Quadratzahl» in unserem Platon-Text einmal *τετράγωνός τε καὶ ἰσόπλευρος* heisst. In dieser Bezeichnung ist das Wort *ἰσόπλευρος* eigentlich überflüssig, nachdem im Sinne der allgemeinen und ganz gewöhnlichen mathematischen Terminologie ein *τετράγωνον* «eo ipso» nur *ἰσόπλευρον* sein kann. Ein anderes Mal heisst daselbst wieder die «Quadratzahl» *ἰσόπλευρος καὶ ἐπίπεδος*. In dieser anderen Bezeichnungsart ist das Wort *ἐπίπεδος* noch ärgerlicher, nachdem es in dem Vorangehenden doch nur von «*Flächenzahlen*» (also von bloss in zwei Faktoren zerlegten Zahlen) die Rede war. — Es scheint also, dass man die bloss stilistischen Ungenauigkeiten der mathematischen Terminologie seitens des Platonischen Theaitetos in Kauf nehmen muss.

Nebenbei muss ich hier auch noch eine andere interessante und wichtige Tatsache zu dem ungewöhnlichen Wortgebrauch des Theaitetos festlegen. Es wurde auch schon in der bisherigen Forschung mit Recht hervorgehoben, dass die Bezeichnungsart des Theaitetos «*μῆκος*» und der regelrechte Terminus für denselben Begriff *μήκει σύμμετρος* im X. Buch der Euklidischen «*Elemente*» auf das engste miteinander zusammenhängen.⁴⁶ Ich muss diese treffende Beobachtung nur noch mit der *relativen* Chronologie der beiden Bezeichnungsarten ergänzen. Denn überlege man sich nur! Wäre es etwa möglich, dass erst *nach* der «älteren» Bezeichnungsart des Theaitetos bloss mit dem Wort «*μῆκος*» *zeitlich später* der präzisere Terminus *μήκει σύμμετρος* für denselben Begriff geprägt worden sei? — Ich glaube, ein jeder wird sofort einsehen, dass diese zeitliche Reihenfolge der beiden Bezeichnungen sehr unwahrscheinlich wäre. Hätte man für den Begriff «linear inkommensurabel» *früher* bloss das Wort «*μῆκος*» in sich benutzt, so wäre es *nie* möglich gewesen, aus dieser vagen und gar nicht selbstverständlichen Bezeichnung später den völlig klaren und präzisen Terminus *μήκει σύμμετρος* abzuleiten. Zeitlich nacheinander entstanden ja diese Bezeichnungen offenbar in den folgenden *drei* Schritten:

1. Als die lineare *Inkommensurabilität* erkannt wurde, prägte man dafür zuerst die Bezeichnung: *μήκει ἀσύμμετρος*.
2. Der gewöhnliche Fall der linearen *Kommensurabilität* wurde erst dann mit Namen benannt, nachdem die Inkommensurabilität selber schon ein geläufiger Begriff war. Und selbstverständlich wurde ein Fall der Kommensurabilität — als Gegensatz zu der Inkommensurabilität — ursprünglich mit dem genauen und präzisen Terminus als *μήκει σύμμετρος* bezeichnet. Diese Bezeichnung ist ja gar nichts anderes, als *der*

⁴⁶ B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft* 234.

genaue Gegensatz zu dem in Punkt 1. genannten griechischen Namen, wobei in beiden Fällen das Wort «mekos» neben «symmetros» und «asymmetros» das *weniger wichtige Element des Namens* darstellt.

3. Die seltsame Bezeichnung des Theaitetos für die lineare Kommensurabilität mit dem blossen Wort «μῆκος» kann nur eine *nachträgliche Abkürzung des vorher schon existierenden präzisen Terminus* (μήκει σύμμετρος) sein.

Zu bemerken ist dabei auch noch, dass diese Bezeichnung des Theaitetos für die lineare Kommensurabilität einfach als «mekos» aus der mathematischen Literatur der Antike — soviel ich weiss — sonst gar nicht bekannt ist. Gewöhnlich hat man dafür immer den normalen Namen: «mekei symmetros». — Der junge Mann hat also in diesem Fall offenbar eine klare, eindeutige und präzise Bezeichnung ziemlich überflüssig und willkürlich verkürzt.

Am ärgerlichsten ist jedoch der nachlässige und ungenaue Wortgebrauch des jungen Theaitetos im letzten Teil seines Berichtes. (Obwohl ich wiederholt im voraus betonen muss, dass der Sinn der Textstelle dennoch vollkommen eindeutig bleibt.)

Nachdem nämlich die jungen Leute die Seiten jener *dynameis*, die den Quadratzahlen entsprechen, als «*der Länge nach kommensurabel*» bezeichnet hatten, wenden sie sich jetzt jenen anderen *dynameis* zu, die den Rechteckzahlen entsprechen. Die Seiten dieser letzteren bekommen von ihnen einfach den Namen «δύναμις»; wie es zur Erklärung hinzugefügt wird: «*nachdem diese letzteren Strecken der Länge nach zwar inkommensurabel zu den anderen sind — eben das hat über diese Theodoros vorhin gezeigt —, doch sind dieselben kommensurabel nach jenen Flächen, die sie in Quadrat ausmachen.*» — Kein Zweifel, es geht aus dieser Erklärung eindeutig hervor, wie der sonderbare Name, den Theaitetos diesen letzteren Strecken gibt — «δύναμις» —, zu verstehen sei. Natürlich heisst der richtige Terminus nicht einfach «δύναμις», sondern *δυνάμει σύμμετρος* (d. h. «kommensurabel nach jenem Quadrat, das man auf sie errichtet»), wie auch vorhin anstatt «mekos» hätte genauer und präziser «mekei symmetros» gesagt werden müssen. Und selbstverständlich begegnet man auch diesmal der korrekten und präzisen Form des Terminus (*δυνάμει σύμμετρος*) im X. Buch der Euklidischen «Elemente».

Aber ich muss auch in diesem Fall wieder die Frage der *relativen* Chronologie der beiden Bezeichnungsarten «*dynamis*» und «*dynamei symmetros*» stellen, wie dieselbe Frage auch schon im Falle der ähnlichen Bezeichnungen «mekos» und «mekei symmetros» gestellt wurde. — Wäre es etwa möglich, dass man ursprünglich einen Fall der nur quadratischen Kommensurabilität bloss mit dem Wort «δύναμις» bezeichnet hätte — wie dies der junge Theaitetos tut —, und erst *später* aus dieser vagen Bezeichnung der präzise und eindeutige Terminus *δυνάμει σύμμετρος* abgeleitet worden wäre? — Ich glaube, man wird diese

Möglichkeit *ganz entschieden leugnen müssen*. Denn man weiss ja schon den genauen und völlig klaren Sinn des Wortes «*dynamis*»; δύναμις heisst in der Mathematik «*Quadratwert eines Rechtecks*», oder allgemeiner «*Quadratwert*» bzw. «*Quadrat*», aber nie etwas anderes. Benutzt man dasselbe Wort «*dynamis*» in sich auch noch im Sinne «*dynamei symmetros*» — wie Theaitetos es macht —, so ist dies schon ein Fall für die *beinahe* irreführende Ungenauigkeit in der mathematischen Terminologie. So ungenau ist diese nachlässige und oberflächliche Bezeichnungsart, dass man den Sinn des Gemeinten nur noch aus dem Textzusammenhang erraten kann. — Aber wir wollen den jungen Mann für seine, wie es scheint, schon *charakteristische* Ungenauigkeit in der mathematischen Terminologie nicht allzu streng rügen. Wichtiger ist für uns einstweilen die *relative* Chronologie der beiden Bezeichnungsarten. Selbstverständlich muss auch in diesem Fall der genaue und präzise Terminus *δυνάμει σύμμετρος* (im X. Buch der Euklidischen «*Elemente*») *der ältere sein*. Die ungenauere Bezeichnung für denselben Begriff bloss als «*dynamis*» kann nur etwas nachträgliches sein. Wieder hat Theaitetos einen völlig klaren und eindeutigen Terminus überflüssig und willkürlich verkürzt, ja er hat mit dieser Ungenauigkeit auch noch einige Philologen und Historiker zu der *irrtümlichen* Vermutung verleitet: vielleicht könnte *dynamis* auch soviel heissen, wie «*Quadratseite*» oder «*Quadratwurzel*».

Nun versuchen wir jetzt die Frage näher ins Auge zu fassen: inwiefern könnte man von einer *Selbständigkeit* des jungen Theaitetos und seines Freundes ihrem Lehrer, Theodoros gegenüber sprechen? Wir beschränken uns jedoch in dieser Untersuchung zunächst darauf, inwiefern jene mathematischen Bezeichnungen, die Theaitetos und sein Freund vorschlugen, neu sind. Denn wohl hat man zwar behauptet, dass Theaitetos im Sinne unserer Platon-Stelle auch irgendwelche mathematische *Sätze* aufgestellt und bewiesen hätte. Aber auf die Untersuchung dieses anderen Problems können wir erst später eingehen. Nach der Textstelle bei Platon wollten ja die Schüler des Theodoros alle *dynameis* nach irgendeinem gemeinsamen Gesichtspunkt benennen. Darum stellen auch wir zunächst die Frage ihrer «*Benennungen*» oder «*Definitionen*» in den Vordergrund.

Die «*selbständige Arbeit*» der jungen Leute fing damit an, dass sie alle Zahlen in zwei Gruppen teilten: «*Quadratzahlen*» und «*Rechteckzahlen*». War diese Einteilung der Zahlen etwa eine eigene Leistung des Theaitetos? — Ausser E. Frank hat wohl keiner auch diese Erfindung noch dem Theaitetos schenken wollen.⁴⁷ Gegenbeweise brauchen hier wohl nicht angeführt zu werden. Ein jeder, der auch nur einigermaßen in der griechischen Mathematik bewandert

⁴⁷ E. FRANK, o. c. 258—259: «Die Antithese *Quadrat-Rechteckzahl* stammt aus der pythagoreischen Gegensatztafel bei SPEUSIPP, und dass sie nicht wirklich alpythagoreisch ist, sondern erst zur Zeit PLATOS möglich war, ist schon dadurch bewiesen, dass dies mathematische Verfahren, wie PLATO selbst im *Theätet* sagt, die *Entdeckung erst dieses Mathematikers ist* . . .»

ist, wird sich eher der Meinung von H. Vogt anschliessen; er schrieb ja gerade über unsere Frage:⁴⁸ «Der erste Schritt, sowohl die Verknüpfung der Zahlen mit Figuren, wie die Teilung der Zahlen in Quadrat- und Rechteckzahlen, *ist keineswegs eine persönliche Leistung des Theaitetos; sie ist von den Pythagoreern erfunden worden und ist Gemeingut der damaligen Zahlenlehre gewesen.*»

Hat aber Theaitetos die Einteilung der Zahlen in Quadratzahlen und Rechteckzahlen *nicht* selber erfunden, so hat er nur noch die beiden Begriffe «*der Länge nach kommensurabel*» und «*dem Quadrat nach kommensurabel*» evtl. selber prägen können. Allerdings habe ich oben schon darauf hingewiesen, dass jene verkürzten Benennungen, die Theaitetos für diese Begriffe benutzt («*mekos*» und «*dynamis*») den korrekten und präzisen Termini gegenüber nachträgliche Erscheinungen sein müssen. Die Bezeichnungen des Theaitetos können also chronologisch *nur* später, nach dem schon *früheren* Vorhandensein der präzisen Termini entstanden sein. Aber jetzt fragen wir, um der Vollständigkeit halber, nicht nach den Bezeichnungen, sondern nach den *Begriffen* selbst. Könnten irgendwie die *Begriffe* «*der Länge nach kommensurabel*» und «*dem Quadrat nach kommensurabel*» etwa von Theaitetos selbst stammen?

Es geht aus dem Bericht des Theaitetos selber hervor, dass der Begriff «*der Länge nach kommensurabel*» (μήκει σύμμετρος) *nicht* seine eigene und selbständige Schöpfung sein kann. Denn er erzählt ja, dass Theodoros gezeigt hätte: die *dynameis* mit 3 und 5 Quadratfuss-Fläche sind *ihrer Länge nach nicht kommensurabel* (μήκει οὐ σύμμετροι). Daraus folgt natürlich, dass Theodoros selbstverständlich wissen musste: die Seiten der anderen Quadrate (mit 4, 9, 16 etc. Quadratfuss-Fläche) sind umgekehrt «*der Länge nach kommensurabel*». Begriff und Name: μήκει σύμμετρος kann also keineswegs eine Neuschöpfung des Theaitetos sein. Theaitetos hat diesen Namen nur selbständig ausgesprochen, aber bekannt war der Begriff mindestens auch schon seinem Lehrer. — Dabei hat der junge Mann den präzisen und korrekten Namen (μήκει σύμμετρος) — wie oben darauf schon hingewiesen wurde — auch noch willkürlich verkürzt.

So bleibt aber nur noch der Begriff δυνάμει σύμμετρος «*dem Quadrat nach kommensurabel*» übrig. Wäre etwa dieser Begriff eine Neuschöpfung des Theaitetos?

Man kann aus unserer Platon-Stelle nicht unmittelbar nachweisen, dass auch diesen Begriff schon Theodoros gekannt haben muss. Ich konnte oben nur die Vermutung wahrscheinlich machen, dass die ungenaue Bezeichnung einer nur quadratisch messbaren Länge als «*dynamis*» dem präzisen Namen («*dynamei symmetros*») gegenüber eine spätere, nachträgliche Bildung sein muss. Nun glaube ich aber auf Grund anderer Platon-Texte nachweisen zu können, dass auch der Begriff der «quadratischen Kommensurabilität» (δυνάμει σύμμετρος)

⁴⁸ S. oben Anm. 11 (Bibl. math. 10, 1909—10 S. 113).

vorplatonischen Ursprungs ist. Auch diese Definition hat *nicht* Theaitetos geprägt. — Um dieses historischen Nachweises willen sei hier als Sonderkapitel der folgende Exkurs eingefügt.

III

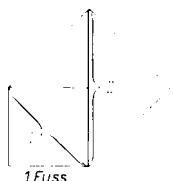
Mein erster Beleg für die *vorplatonische* Existenz des Begriffes der «*quadratischen Kommensurabilität*» ist ein seltsames und ziemlich kompliziertes *Wortspiel* aus dem Platonischen Dialog «Politikos» (266 A 5—B 7), das man ohne die Kenntnis der zeitgenössischen griechischen Mathematik kaum enträtseln könnte. Einige Philologen, die sich mit dieser Platon-Stelle beschäftigten,⁴⁹ haben schon richtig erkannt, dass das Wortspiel durch den *Doppelsinn* des Ausdruckes «*dynamis*» ermöglicht wird. Denn «*dynamis*» hiess in der alltäglichen Sprache «*Fähigkeit*», während dasselbe Wort in der Geometrie die Bedeutung «*Quadrat*» hatte. — Ich gehe noch um einen Schritt weiter, über diese zutreffende Beobachtung hinaus, und ich behaupte, dass auch die Kenntnis der «*quadratischen Kommensurabilität*» (δυναμίς σύμμετρος) eine unerlässliche Vorbedingung des fraglichen Wortspiels bildet. Ohne die geläufige und allgemein verbreitete Kenntnis dieses Begriffes hätte Platon gar nicht daran denken können, ein solches Wortspiel zu machen. — Nun wollen wir aber das Wortspiel selbst ins Auge fassen.

Das Problem, das Sokrates diesmal, in dem Dialog «Politikos», zusammen mit seinem Gesprächspartner lösen möchte, ist eine Frage der Klassifikation. Wonach könnte man nämlich den *Menschen* und das *Schwein* unterscheiden? — Am einfachsten wäre wohl zu sagen, dass der Mensch *zweifüssig*, während das Schwein *vierfüssig* ist. Aber so ist es doch allzu einfach! Sokrates schlägt scherzhaft einen etwas gelehrteren Gesichtspunkt der Klassifikation vor. Denn sein Gesprächspartner ist ja diesmal derselbe «junge Sokrates», von dem wir auch in dem Dialog «Theaitetos» als einem Schüler des Mathematikers Theodoros gehört hatten. Es wird übrigens auch diesmal nebenbei erwähnt, dass Theaitetos und der «junge Sokrates» eifrige Anhänger der Geometrie sind (266 A 6—7). Eben deswegen soll man auch in der vorliegenden Klassifikation ein Anhänger der Geometrie bleiben; und darum schlägt Sokrates vor, dass die vorhin angedeutete Unterscheidung des «Menschen» und des «Schweines» «*nach dem Gesichtspunkt der Diagonale und wieder nach demjenigen der Diagonale der vorigen Diagonale*» (τῇ διαμέτρῳ ὀρίπου καὶ πάλιν τῇ τῆς διαμέτρου διαμέτρῳ) vorgenommen werde.

Natürlich ist der junge Mann auf diesen seltsamen Vorschlag hin zunächst verblüfft, und er versteht es ebensowenig, worauf eigentlich Sokrates hinaus möchte, wie wir selber.

⁴⁹ Vgl. L. CAMPBELL, *The Sophistes and Politicus of Plato*, Oxford 1867 pp. 30—33; H. LEISEGANG, *Die Platondeutung der Gegenwart*, Karlsruhe 1929; sowie die Bemerkungen von O. APELT zu seiner Übersetzung der Stelle.

Wir können uns jedoch das Verstehen des sogleich darauffolgenden Wortspiels im voraus erleichtern, wenn wir an den folgenden, hochgelehrten Satz denken: «der Mensch ist nach seiner Fähigkeit zum Gehen (*κατὰ δύναμιν . . . εἰς τὴν πορείαν*) zweifüssig». — Wie würde man aus diesem gelehrten Satz die Wendung «*der Fähigkeit nach zweifüssig*» in das alltägliche Griechisch der Platonischen Zeit zurückübersetzen? — Etwa folgendermassen: *δυνάμει δίπους*. — Hört jedoch ein Geometer den Ausdruck *δυνάμει δίπους*, so muss er sogleich an die Diagonale des Einheitsquadrats denken. Denn auch diese linear inkommensurable Strecke ist ja in einem anderen Sinne des Wortes *δυνάμει δίπους*, das heisst: «*zweifüssig jener Quadratfläche nach gemessen, die man auf sie errichtet*». — Das Wortspiel ist in der Tat durch den Doppelsinn der Ausdrücke *δύναμις* und *δίπους* ermöglicht worden, und darum sagte Sokrates scherzhaft, dass der Mensch «nach dem Gesichtspunkt der Diagonale» (d. h. genauer: nach dem Gesichtspunkt der Diagonale des *Einheitsquadrats*) klassifiziert werden soll. — Damit haben wir den ersten Teil des Wortspiels schon enträtselt. Aber Sokrates setzt seinen Scherz noch fort. Auch den zweiten Teil seines Wortspiels müssen wir noch näher ins Auge fassen.



I. Diagonale, *δυνάμει δίπους* = «zweifüssig dem Quadrat nach»

II. Diagonale, *μήκει δίπους* (der Länge nach zweifüssig) = *κατὰ δύναμιν δυοῖν γέ ἐστι ποδοῖν δις πεφυκνῖα* «dem Quadrat nach gemessen zweimal zweifüssig»

Wieso möchte Sokrates auch noch die *Vierfüssigkeit* des Schweines «nach dem Gesichtspunkt einer Diagonale» klassifizieren? — Man soll nach seinem Vorschlag auf die Diagonale des Einheitsquadrats — welche scherzhaft als diejenige angesehen wird, die die Zahlenmässigkeit unserer menschlichen *δύναμις* (= «Fähigkeit»), die *zwei* ergibt — ein Quadrat errichten (s. die Abb.), und dann frage man: wieviel Füsse die Diagonale dieses zweiten Quadrats hat? — Diese letztere Frage darf natürlich *nicht* in der Form beantwortet werden, in der auf sie ein Geometer zu Platons Zeit antworten würde. Denn ein Geometer würde ja sagen, dass diese zweite Diagonale schon eine auch *linear kommensurable* Grösse ist, und darum als «*der Länge nach zweifüssig*» (*μήκει δίπους*) bezeichnet werden soll. Dagegen hält Sokrates — natürlich nur um des Scherzes willen — fest daran, dass auch diese zweite Diagonale «*dem Quadrat nach*» (= *δυνάμει* — «der Fähigkeit nach», wie man das Wort in seinem alltäglichen Sinne verstehen würde) gemessen werde; darum kann er behaupten, dass diese zweite Diagonale «*nach jenem Quadrat gemessen, das man auf diese errichten kann, zweimal zwei füssig ist*» (*κατὰ δύναμιν . . . δυοῖν γέ ἐστι ποδοῖν δις πεφυκνῖα*).

Dieses Festhalten des Sokrates an dem »Messen einer Strecke nach dem auf sie errichteten Quadrat« ist natürlich etwas ähnliches, als wollten wir das Quadratwurzelzeichen auch in solchen Fällen nicht weglassen, in denen dies vollkommen überflüssig ist; als wollten wir z. B. anstatt der Zahlen 5 und 6 konsequent immer $\sqrt{25}$ und $\sqrt{36}$ schreiben.

Man ersieht aus dem eben besprochenen Wortspiel, dass das Messen der der Länge nach inkommensurablen Strecken nach jenem Quadrat, das man auf diese Strecken errichten kann — also mit einem Wort: die »quadratische Kommensurabilität«, die angebliche Entdeckung des Theaitetos nach einer bisher üblichen Auslegung des anderen Platonischen Dialoges — zu jener Zeit, in der dieses Wortspiel gemacht wurde, schon ganz geläufig sein musste. Platon muss ja damit gerechnet haben, dass das komplizierte Wortspiel seines Sokrates — und dazu noch ein Wortspiel in sehr gedrängter Form, ohne nähere Erklärungen — von dem Leser verstanden wird. Aber wäre dies möglich gewesen, wenn jener Begriff, worauf das ganze Wortspiel aufgebaut ist — die quadratische Kommensurabilität linear inkommensurabler Strecken — erst eine neue Entdeckung eben jenes Theaitetos gewesen wäre, dessen Kameraden, den »jungen Sokrates«, der ältere Sokrates mit seinem Wortspiel verblüfft? — Ich halte dies für sehr unwahrscheinlich. Ich glaube eher, dass die quadratische Kommensurabilität zu Platons Zeit schon eine geläufige, allgemein bekannte mathematische Weisheit war, mit der man höchstens nur noch in der Schule, in dem Mathematikunterricht renommieren und in einer philosophischen Diskussion Wortspiele machen konnte.

Mein zweiter Beleg für die *vorplatonische* Existenz des Begriffes der »quadratischen Kommensurabilität« gewisser linear inkommensurabler Strecken ist die Platon-Stelle: *Resp. VIII 546 C 4—5*. Da diese Textstelle in der vorliegenden Arbeit später auch ausführlicher behandelt wird, darf ich daraus vielleicht ohne eingehendere Erörterung folgendes vorwegnehmen: Es wird an dieser Platon-Stelle die Zahl 50 als »Quadrat der (unsagbaren) Diagonale der Fünf« bezeichnet. Diese Aussage ist folgendermassen zu verstehen: wird die Seite eines Quadrats in 5 Längeneinheiten angegeben, so wird die Diagonale desselben Quadrats durch jene »Zahl« ausgedrückt, die wir als $\sqrt{50}$ bezeichnen. Die Griechen wollten jedoch in diesem Fall *nicht die Länge* der Diagonale angeben — denn diese ist ja eine *linear inkommensurable Strecke* —, sondern sie sagten: »das Quadrat auf dieser Diagonale macht 50 Quadrateinheiten aus«. — Man sieht also: die eben angeführte Bezeichnungsart war nur deswegen möglich, weil man wusste: es gibt linear inkommensurable Strecken, die dabei quadratisch kommensurabel sind.

Darum glaube ich, die *vorplatonische* Existenz des Begriffes der »quadratischen Kommensurabilität linear inkommensurabler Strecken« einwandfrei nachgewiesen zu haben, obwohl der regelrechte Terminus technicus dafür — *δυνάμει σύμμετρος* — in meinen eben genannten beiden Belegen (»Politikos«

266 A 5 — B 7 und Resp. VIII 546 C 4—5) *nicht vorkommt*. Aber jene Selbstverständlichkeit, wie mit diesem Begriff das Wortspiel im «Politikos» und mit welcher ein Ausdruck wie «*Quadrat der Diagonale zu der Seite 5*» für die Zahl 50 benutzt wird, zeigen, dass der Begriff der «quadratischen Kommensurabilität» (*δυνάμει σύμμετρος*) zu Platons Zeit schon ganz und gar geläufig sein musste. Auch dieser Begriff ist also *nicht* eine Neuschöpfung des jungen Theaitetos.

IV

Ich hoffe in dem vorigen gezeigt zu haben, dass man auf Grund der analysierten Platon-Stelle («Theait». 147 C — 148 B) *keine* neuen mathematischen Begriffe bzw. Bezeichnungen für solche, dem jungen Theaitetos zuschreiben kann. (Wohl heisst es am Ende des oben auch griechisch abgedruckten Textes, dass Theaitetos und sein Freund «*ähnliche Benennungen auch für die Körperzahlen*» versucht hätten. Da jedoch in dem Bericht selbst nichts ausführlicheres über diese andere «Entdeckung» des Theaitetos steht, und auch die moderne Forschung nichts näher bestimmbares aus dieser Aussage folgern wollte, können wir diese Schlussbemerkung des jungen Mannes — mindestens in dem vorliegenden Zusammenhang — auf sich beruhen lassen.)

Es wäre also verkehrt, wenn man auf Grund der mathematischen Stelle im Dialog «Theaitetos» behaupten wollte: «dem Theaitetos wären die exakten Definitionen der Begriffe *messbar, quadriert messbar, rational und irrational* zu verdanken». Denn von diesen *vier* Begriffen werden ja bei Platon durch Theaitetos überhaupt nur die beiden ersten genannt: «messbar» (bzw. genauer: «*linear kommensurabel*») und «*quadriert messbar*» (bzw.: «*dem auf sie errichteten Quadrat nach kommensurabel*»). Aber auch diese beiden Begriffe sind ohne jeden Zweifel *vorplatonisch*, und Theaitetos hat für sie in dem Dialog nur *ungenau*, *nicht präzise, ja beinahe irreführende Bezeichnungen* («mekos» und «dynamis», anstatt «mekai symmetros» und «dynamai symmetros») benutzt.

Aber könnte man unsere Platon-Stelle nicht etwa in dem folgenden Sinne interpretieren?

«Theodoros hätte die spezielle Aussage aufgestellt:

A) *Die Quadrate von 3, 5, . . . 17 Quadratfuss-Fläche sind der Länge nach nicht kommensurabel mit dem Quadrat von einem Fuss.*

Dagegen hiesse die allgemeinere Aussage des Theaitetos:

B) *Die Seite eines Quadrats, dessen Fläche n-mal so gross ist, als diejenige des Einheitsquadrats, ist nur dann linear messbar, wenn n eine Quadratzahl ist. (Ist n keine Quadratzahl, dann ist die Seite des betreffenden Quadrates nur quadratisch (= 'quadriert') kommensurabel.)*

Beide Aussagen stünden vollkommen deutlich in Platons Text, auch wenn

sie in Nebensätzchen komprimiert erscheinen. Aber die Hauptsache ist, dass beide Sätze mathematisch hochinteressant sind.»

Nun bezweifle ich überhaupt nicht, dass man Sätze wie A) und B) — auf Grund dessen, was bei Platon erzählt wird — rekonstruieren *kann und darf*. Ich frage mich nur, ob z. B. der Satz B) wirklich eine mathematisch bedeutende Verallgemeinerung auch dem gegenüber war, was auch Theodoros wissen musste? — Denkt man nämlich daran, wie Theodoros seine *dynameis* herstellt haben mag («Konstruktion der mittleren Proportionale zu zwei beliebigen Strecken»), und wie er wohl die Inkommensurabilität seiner *dynamis*-Seiten für die Schüler plausibel machte («die mittleren Proportionalen zwischen zwei *nicht*-ähnlichen Flächenzahlen sind *keine* Zahlen»), so erscheint es so gut wie unmöglich, dass er *nur* den Satz A), und nicht zugleich auch den Satz B) gekannt hätte. Schreibt man also den Satz B), der bei Platon in der Tat nur «in ein Nebensätzchen komprimiert erscheint», dennoch dem Theaitetos zu, so darf man darin keine hervorragende mathematische Leistung des jungen Mannes, sondern nur eine *schöne Schüler-Leistung* erblicken. — Aber darf man die Sätze A) und B) selbst dem Theodoros als «eigene Leistungen» zuschreiben? Setzt nicht auch schon die blosse Existenz des mathematischen Begriffes *dynamis* (= «Quadratwert eines Rechtecks») sogleich auch die Kenntnis solcher Sätze wie A) und B) voraus? — Ich vermute auf alle Fälle, dass Theodoros, der nach dem Bericht des Theaitetos den mathematischen Begriff *dynamis* mit einer erstaunlichen Selbstverständlichkeit gebrauchte, die Sätze A) und B) *nicht neu aufzustellen brauchte*, denn der Inhalt dieser Sätze war ihm ja mit dem Begriff *dynamis* selbst schon von vorneherein als überlieferte mathematische Weisheit gegeben. Er zeigte die *dynameis* 3, 5, . . . 17 seinen Schülern, und er erklärte vor ihnen die Eigentümlichkeiten derselben, weil diese jungen Leute Mathematik von ihm lernten, und weil er selber die Schüler vielleicht zum «*selbständigen Nachdenken*» anregen wollte.

Nachdrücklich betonen muss ich ausserdem, dass man auf Grund unserer Platon-Stelle auch davon nicht reden kann, dass Theaitetos irgendwelche mathematische Sätze — etwa den oben formulierten Satz B) — *bewiesen hätte*. Von einem «*Beweis* des Theaitetos» steht in dem Platon-Text kein Wort.

Es scheint also, dass im Sinne der mathematischen Stelle im Dialog «Theaitetos» *keine* Sätze und Beweise oder irgendwelche mathematische Definitionen dem jungen Theaitetos sich *als neue und eigene mathematische Schöpfungen* zuschreiben lassen. Alles, was man bisher mit Berufung auf Platons Dialog dem Theaitetos zuschreiben wollte, muss ja *vorplatonische Kenntnis* gewesen sein.

*

Aber wir besitzen dennoch in der Tat auch *zwei* solche antike Quellen, die von einer Überlieferung zu zeugen scheinen, wonach dem Theaitetos schon im Altertum *konkrete Entdeckungen* im Zusammenhang mit der Lehre über die Irrationalitäten zugeschrieben wurden. Da nun diese beiden Quellen — ein Scholion zu dem Satz Eucl. Elem. X 9,⁵⁰ und ein Bericht, der vermutlich aus dem Kommentar des Pappos zum X. Buch der Euklidischen «Elemente» stammt und nur in arabischer Übersetzung erhalten blieb⁵¹ — auf das engste mit Platons Dialog «Theaitetos» zusammenhängen, müssen wir in dem folgenden auch diese beiden im Einzelnen überprüfen. Diese Prüfung wird uns zugleich auch ermöglichen, die mathematische Stelle des Platonischen Dialogs noch von einer neuen Seite her zu beleuchten.

Ein Scholion zu dem Satz Eucl. Elem. X 9 besagt in genauer Übersetzung folgendes:⁵² *«Dieses Theorem ist eine Erfindung des Theaitetos. Es wird auch bei Platon erwähnt im Dialog 'Theaitetos', nur liegt es dort in spezieller, hier dagegen in allgemeiner Fassung vor.»*

Um die Behandlung dieses Scholions zu erleichtern, sei hier sogleich auch der Satz Elem. X 9 abgedruckt, er heisst nämlich:

«Die Quadrate über linear kommensurablen Strecken haben zueinander ein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl;

und von Quadraten, die zueinander ein Verhältnis haben wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, müssen auch die Seiten linear kommensurabel sein;

die Quadrate über linear inkommensurablen Strecken hingegen haben kein Verhältnis zueinander wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl;

und von Quadraten, die kein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl zueinander haben, können auch die Seiten nicht linear kommensurabel sein.»

Vergleicht man nun das vorhin zitierte Scholion und den Satz Elem. X 9 miteinander, so muss man sich zunächst erstaunt fragen: »Wieso behauptet der Scholiast, dass der Satz X 9 im Platonischen Dialog *erwähnt werde*? Wird ein solcher Satz bei Platon in der Tat genannt?« — Man hat nämlich zunächst den Eindruck, als handelte es sich hier bloss um einen Irrtum, denn der Satz X 9 wird in unserem Platon-Text *unmittelbar* nicht genannt. Es muss also auf alle Fälle noch erklärt werden, wieso der Scholiast (oder seine Quelle) zu der auffallenden Behauptung kam, der Satz X 9 werde bei Platon erwähnt.

⁵⁰ Euclides, Elementa, ed. J. L. HEIBERG, vol. V p. 450, 16 ff. (Den griechischen Text siehe weiter unten in Anm. 52.)

⁵¹ Siehe darüber TH. L. HEATH, Euclid, vol. 3 pp. 3—4. Der Text dieses arabischen Kommentars wurde i. J. 1930 auch von G. JUNGE und W. THOMSON mit englischer Übersetzung als Bd. VIII der Harvard Semitic Series (Cambr.) herausgegeben. TH. L. HEATH benutzte eine noch frühere Ausgabe des arabischen Kommentars durch WOEPCKE (Paris 1855). Man findet den bei mir weiter unten englisch zitierten Text auch bei K. v. FRITZ in RE s. v. «Theaetetus».

⁵² Vgl. oben Anm. 50: τὸ θεώρημα τοῦτο Θεαιτήτειόν ἐστιν εἶρημα καὶ μέμνηται αὐτοῦ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ' ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἐργεῖται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου etc.

Bevor ich jedoch die zuletzt gestellte Frage beantworten wollte, muss ich hier noch die *Datierung* des Satzes X 9 versuchen. Denn ich glaube, dass man diesen Satz — unabhängig von der Behauptung des Scholions — ziemlich leicht auch datieren kann. Darum sei hier an folgendes erinnert:

Es wurde oben erwähnt, dass man zu jener Zeit, in der — *nach* dem Entdecken der Möglichkeit der mittleren Proportionale zwischen zwei *beliebigen* Strecken — der mathematische Begriff *dynamis* (= «Quadratwert eines Rechtecks») geschöpft wurde, sogleich wohl auch erkennen musste: es gibt nicht nur solche Quadrate, die sowohl ihren Seiten wie auch ihren Flächen nach kommensurabel sind, sondern auch solche anderen, die ihren Seiten nach inkommensurabel und nur ihren Flächen nach kommensurabel sind. Eben diese Erkenntnis soll — meiner Vermutung nach — zu der Schöpfung des Begriffes *dynamis* geführt haben. Mit anderen Worten: durch die Schöpfung des neuen Begriffes *dynamis* wurde auch die *Klassifikation der Quadrate* unumgänglich. Nun wird in dem Satz Elem. X 9 eben diese *Klassifikation der Quadrate* vollzogen. Darum würde ich den Satz Elem. X 9 — unabhängig von der Behauptung des Scholiasten — *nicht* dem Theaitetos, und auch *nicht* seinem Lehrer Theodoros zuschreiben, sondern ich würde ihn auf dieselbe alte Zeit datieren, in der der Begriff *dynamis* geschöpft wurde.

Daraus versteht man aber sogleich auch, warum der Scholiast behauptet: der Satz X 9 werde bei Platon im Dialog «Theaitetos» erwähnt. Wohl steht dieser Satz *nicht explicite* in Platons Text, aber er ist im Grunde doch nur eine *Klassifikation der Quadrate*. Und hat der Platonische Theaitetos nicht eben die Quadrate (*dynameis*) des Theodoros klassifiziert? (Der einzige interessante Unterschied zwischen den beiden Texten besteht nur darin, dass bei Platon von *δυνάμεις*, während bei Euklid in X 9 von *τετράγωνα* die Rede ist. Aber das hängt nur mit dem *Purismus* des Euklid zusammen. In den «Elementen» wird nämlich der Ausdruck *δύναμις* nur in der Zusammensetzung *δυνάμει σύμμετρος* bzw. *ἀσύμμετρος* gebraucht. Sonst benutzt Euklid auch für den Begriff *dynamis* den alten gewöhnlichen Namen: *τετράγωνον*.) — Insofern hat also der Scholiast (oder seine unbekannte Quelle) vollkommen Recht: Es handelt sich in Platons Dialog um dasselbe Problem (Klassifizierung der Quadrate), wie in dem Satz Elem. X 9. Bezweifeln muss ich nur die Richtigkeit seiner anderen Behauptung, dass nämlich Theaitetos der Erfinder des betreffenden Satzes (X 9) gewesen wäre. Bevor ich jedoch zeigte, wie man überhaupt in der Antike zu einer solchen irrtümlichen Behauptung gekommen war, sei hier noch daran erinnert, wie das fragliche Scholion einmal auch schon vor mir beurteilt wurde. Man liest nämlich bei C. Thaer:⁵³

«Die Überlieferung, die diesen Satz (X 9) als Eigentum des Theaitetos bezeichnet, ist darum verdächtig, weil sie wahrscheinlich aus einer Stelle des

⁵³ C. THAER, Die Elemente von Euklid, IV. Teil, 1936 (Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften, Nr. 241) S. 108.

gleichnamigen Platonischen Dialogs entstanden ist; mit wohl grösserem Recht hat Vogt (wie vor ihm auch Hankel) aus dieser Stelle geschlossen, dass mindestens Theodoros schon denselben Satz (X 9) gekannt habe . . .»

Nun bin ich mit dieser Behauptung vollkommen einverstanden. Ich finde nur, dass sie in *einer* Hinsicht dennoch *mangelhaft* ist. Denn die zitierten Worte erklären ja doch nicht, wieso aus der betreffenden Stelle des gleichnamigen Platonischen Dialogs die *irrtümliche Überlieferung* entstehen konnte. Gibt es nicht in dem Platon-Text selbst solche Anhaltspunkte, auf die sich die spätere Überlieferung berufen konnte, als man behauptete: es handelte sich in der mathematischen Stelle dieses Dialogs doch um eine *eigene wissenschaftliche Entdeckung* des jungen Theaitetos?

Ich glaube nämlich, dass in der Tat in dem Platon-Text selbst schwerwiegende Anhaltspunkte auch für die *falsche* Überlieferung über Theaitetos vorhanden sind. Ja, ich möchte beinahe sagen: *Platon selber hat die Leser — sowohl die antiken wie die modernen — mit seiner Darstellungskunst irregeführt*. Bevor wir jedoch nach Platons Absichten fragen, wollen wir zunächst ganz nüchtern jene Platonischen Anhaltspunkte ins Auge fassen, die die falsche Überlieferung über Theaitetos auf den ersten Anblick *vollkommen zu begründen scheinen*.

Ich habe oben einmal schon nebenbei die Frage gestellt: Ob Theodoros, als er die *dynameis* vor den Schülern aufzählte und erklärte, *von Anfang an auch jene zusammenfassende Benennung*, die seine Schüler vollzogen, *bewusst vorbereitet, ja vielleicht von ihnen auch verlangt hatte*, oder ob es sich hier um eine vollkommen eigene Initiative der jungen Leute handelt? — Nun glaube ich, diese Frage mit Bestimmtheit in dem Sinne beantworten zu dürfen: ja, zweifellos *muss* Theodoros jene «selbständige Arbeit», die nachher von seinen Schülern geleistet wurde, von vorneherein erwartet haben. Einen anderen Sinn *kann* seine Demonstration auch gar nicht gehabt haben. — Ich werde später versuchen, diese meine Ansicht auch näher zu begründen. Aber hier muss ich zunächst darauf hinweisen, dass der Platon-Text selber — mindestens auf den ersten Anblick — *gar nicht diesen Eindruck erweckt!* Im Gegenteil!

Beachtet man *nur* die Erzählung des Theaitetos, so bekommt man zweifellos den Eindruck: der junge Mann berichtet hier über eine *eigene wissenschaftliche Entdeckung von ihm selbst*, woran höchstens noch sein Freund, der «junge Sokrates» teilnahm. Davon, dass diese Entdeckung durch Theodoros sorgfältig vorbereitet, ja auch verlangt worden wäre, steht kein Wort im Text. Es wird *nicht* gesagt, dass Theodoros seine Schüler etwa aufgefordert hätte: «Wohlan, Jungens! Versucht mal jene *dynameis*, die ich euch gezeigt habe, nach einem gemeinsamen Gesichtspunkt zu benennen!» — Nichts von einer solchen Aufforderung. Statt dessen heisst es im Text nur, dass Theodoros bei seiner 17. *dynamis* «irgendwie aufgehört hätte» (*ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο*). Umso betonter wird durch Theaitetos die *eigene Initiative* hervorgehoben. Nicht nur am Anfang des Berichtes sagt der junge Mann zu Sokrates: «du fragst ja etwas ähnliches,

wie es auch *uns zuletzt im Gespräch begegnete, mir und deinem Namensverwandten, dem anderen Sokrates*». Auch später wird noch einmal auf die eigene wissenschaftliche Leistung von Theaitetos selber mit Nachdruck hingewiesen: «*Uns* fiel nun ein solcher Gedanke ein . . .» — und mit diesem «*uns*» wird keineswegs auch Theodoros mitgemeint, sondern *nur* Theaitetos und der «junge Sokrates».

Kein Zweifel, der Platonische Theaitetos redet wirklich in der Überzeugung, dass er über seine *eigene mathematische Entdeckung* berichtet. Und das kann auch kein Zufall sein. Selbstverständlich liess Platon seinen Theaitetos *absichtlich in diesem Sinne reden*. — Kein Wunder also, dass man diese Schilderung in dem Sinne verstehen zu müssen meinte: es wäre in der mathematischen Stelle in der Tat von einer eigenen und selbständigen Entdeckung des jungen Theaitetos die Rede.

Aber was wollte eigentlich Platon mit dieser seltsamen Schilderung? Hätte er etwa nicht gewusst, dass das alles, was der junge Mann über seine eigene wissenschaftliche «Entdeckung» erzählt, auch dem Lehrer Theodoros bekannt sein musste, denn es ist ja eine längst vorhandene mathematische Weisheit aus *vorplatonischen* Zeiten? — Natürlich musste dies auch Platon selber ganz genau wissen. — Oder hätte er etwa seinen «Helden», den jungen Theaitetos mit fremden Federn schmücken wollen? Denn es genügt ja nicht, dass Theaitetos so unbefangen die alte Weisheit als eine «eigene Entdeckung» schildert, er wird dafür auch gar nicht zurechtgewiesen. Keiner sagt zu ihm: «Schön, mein Junger! Aber meinst du nicht, dass auch dein Lehrer, der gute alte Theodoros dasselbe, was du uns eben als eure *eigene Entdeckung* aufgetischt hast, schon im voraus wusste?» Anstatt einer solchen Zurechtweisung erntet der junge Mann das Lob des Sokrates: «Grossartig, Kinder! Ich glaube, Theodoros hatte doch recht, als er dich lobte!» Und diese Worte klingen zweifellos ernst. Oder wäre das alles nur Spott und Ironie? — Keineswegs!

Nun, ich glaube gar nicht, dass man Platons wahre Absichten in diesem Fall so ganz leicht erraten könnte. Aber warum sollte es auch *leicht* sein? Ist es etwa auch *leicht*, das Lächeln der Gioconda zu verstehen? — Der brave Spiessbürger versteht es meistens überhaupt nicht. Er schüttelt nur darüber den Kopf. Denn ihm sind ja Mehrdeutigkeit und feine Nuancen von vorneherein kaum zugänglich. — Und warum sollte auch Platon, der grosse Künstler, weniger rätselhaft als der Schöpfer der Gioconda sein?

Aber vielleicht kann man mit einiger Aufmerksamkeit dem wahren Sinn der rätselhaften Platonischen Schilderung doch etwas näher kommen. Man beachte nämlich, wie der junge Theaitetos bei Platon geschildert wird. Am Anfang dieser Arbeit wurde einiges aus dieser Schilderung schon wiedergegeben. Es wurde gesagt, dass Theaitetos hochbegabt, mathematisch sehr talentiert ist. Nie war noch Theodoros einem solchen Jüngling begegnet. «Er geht, wie geräuschlos ausfliessendes Öl, an die Wissenschaften und an die Forschung, und doch ist er dabei ganz ruhig und bescheiden.» — Und so könnte man das Lob,

das bei Platon auf diesen Jungen so reichlich ausgeschüttet wird, noch lange fortsetzen.

Nur *eines* vergisst man gewöhnlich in der modernen Wiedergabe der Platonischen Schilderung des Theaitetos. Dass nämlich diese Schilderung gar nicht überall so völlig eindeutig ist. Es gibt auch *Widersprüche* in dem Platonischen Bild des Theaitetos. Und vergisst man diese Widersprüche, so läuft man Gefahr, Platon doch nicht recht zu verstehen.

Beginnen wir damit, dass Theaitetos nicht nur hochbegabt und mathematisch sehr talentiert, sondern gleichzeitig auch ein *naiver Junge* ist, der — wie es scheint — auf die vorgelegten Fragen manchmal nicht nur *falsche*, sondern auch *einfältige*, um nicht zu sagen: *törichte* Antworten zu erteilen weiss. Z. B. auf die Frage des Sokrates: »Was ist Wissen?«, antwortet er — «der wie geräuschlos ausfliessendes Öl an die Wissenschaften herangeht» — ohne zu ahnen, wie schwer und kompliziert eigentlich die vorgelegte Frage ist, zunächst mit einer überraschend leichten Aufzählung. Sokrates kann darauf nur mit zurückgehaltener Ironie erwidern: «*Grosszügig und freigiebig bist du, mein Lieber, denn man hat dich ja nur um ein einziges Ding gebeten, und siehe, du gibst uns sogleich vieles und vielerlei!*» (146 D). Aber der junge Mann versteht noch nicht einmal diese Ironie seines Partners. In rührender Einfalt fragt er: »*Wie meinst du das, Sokrates?*« — Und was könnte Sokrates auf eine solche naive Frage antworten? Natürlich nichts, lieber lässt er seine Ironie einstweilen völlig fallen: «*Oh nein! Ich meine ja damit gar nichts, oder vielleicht doch etwas . . .*»

Dächte man nun, dass «Einfalt und Naivität» auf der einen Seite, und «geniale Begabung» auf der anderen, Gegensätze wären, die sich ausschliessen, so müsste ich entschieden widersprechen. Nein, im Gegenteil! Denn gerade die unbefangene Naivität ist ja der besondere Reiz an dem begabten Jüngling Theaitetos, der ihn für Platon und auch für die Leser so sympathisch macht. Es kann ja keine Rede davon sein, dass er etwa «dumm» oder «töricht» wäre. Er legt sogleich auch ein glänzendes Zeugnis von seiner Intelligenz, der schnellen und treffsicheren Assoziation ab. Kaum entfaltet vor ihm Sokrates sein übertrieben einfaches, banales Beispiel von den «Lehmarten», und sofort wird dadurch der Junge an das verwandte Problem auf einer viel höheren Ebene, in der Mathematik erinnert. Die «Lehmarten» des Sokrates sind zwar ziemlich entfernt von den «*dynameis*» des Theodoros, und ein gewöhnlicher Junge würde die beiden auch kaum so leicht miteinander verbinden, aber die Abstraktionsfähigkeit des Theaitetos scheint schnell zu funktionieren: im Nu kriegt er aus den beiden weit auseinanderliegenden Dingen das Gemeinsame mit sicherem Griff heraus. Und in diesem Augenblick ist auch schon der wahre Kontakt mit Sokrates hergestellt.

Der ruhige und bescheidene Theaitetos erzählt auf die Frage des Sokrates hin von seiner mathematischen «Entdeckung». Doch ist er dabei ein wenig auch *aufgeregt und nervös*. Man spürt an ihm, wie er auch jetzt noch durch die blosse

Erinnerung beinahe wieder in die aufgeregte Stimmung der damaligen schönen «Entdeckung» versetzt wird. Ich finde es einfach erstaunlich, mit welchen einfachen Mitteln Platon den *Seelenzustand* des jungen Mannes — während seines eigenen Berichtes — zu schildern vermochte. *Weitschweifigkeit* auf der einen Seite, und kaum zurückgehaltene *ungeduldige Hast* auf der anderen, sind die charakteristischen Merkmale dieses Seelenzustandes. Denn Theaitetos gebraucht ja in seinem Bericht — wie ich oben darauf schon aufmerksam zu machen versuchte — teils überflüssig tautologische, und teils übertrieben, beinahe bis zur Unverständlichkeit verkürzte Fachausdrücke der Mathematik. Und es ist dabei keineswegs uninteressant: bei welchem Punkt Theaitetos weitschweifig, tautologisch ist, und bei welchem er wieder plötzlich knapp und kurzsilbig wird.

Den völlig trivialen Begriff des «Quadrates» bzw. denjenigen der «Quadratzahl» bezeichnet er keineswegs mit dem einfachen Namen *τετράγωνον*, sondern er fügt noch hinzu — was völlig überflüssig ist —, dass es *ισόπλευρον*, ja ein anderes Mal, dass es *ἐπίπεδος* ist. — Müsste man diesen Übereifer bei einem fertigen Mathematiker nicht belächeln? Aber Theaitetos ist eben kein «fertiger Mathematiker», sondern ein junger, begabter, doch unerfahrener Forscher, der nicht missverstanden werden möchte. Er strebt nach Genauigkeit in seinen Worten, und gerade dieses, an und für sich richtige Streben verführt ihn bei dem allereinfachsten Fall zu einer naiven Tautologie.

Aber die minutiöse Sorgfalt und das Streben nach Genauigkeit lassen ihn in dem Augenblick im Stich, als er bei demjenigen Punkt angelangt ist, der von seinem Gesichtspunkt aus der allerwichtigste sein sollte. Denn es gilt ja für ihn als eine «eigene Entdeckung»: die richtige Benennung der zweierlei Quadrat-Seiten: *mekei symmetros* und *dynamei symmetros*. Eben diese Begriffe müssten mit den genauen Bezeichnungen angegeben werden, denn diese sind ja für den Nicht-Mathematiker doch nicht so völlig geläufig, wie der triviale Begriff: «*tetragonon*». Und doch fällt der junge Mann eben bei diesen Begriffen seiner hastigen Entdecker-Ungeduld und -Freude zum Opfer: diese bezeichnet er nur noch mit den verkürzten Namen als «*μῆκος*» und «*δύναμις*», auf die Gefahr hin, dass die betreffenden Begriffe auch nicht mehr genau verstanden werden könnten. (In der Tat hat man die Bezeichnung des Theaitetos «*δύναμις*» — anstatt von *δυνάμει σύμμετρος* — lange Zeit hindurch gar nicht richtig übersetzen können.)

Denkt man nun an diese feine und nuancierte Platonische Schilderung des Theaitetos, so wird man vielleicht auch meine folgende Auslegung der mathematischen Stelle des Dialogs nicht mehr ablehnen.

Ich brauche wohl nicht noch einmal zu betonen, dass der Platonische Theaitetos in der Wirklichkeit gar nichts neues gefunden hatte. Aber Platon liess ihn dennoch so reden, als handelte es sich hier um eine «eigene Entdeckung» des jungen Mannes. Sein Theaitetos scheint in der Tat der Ansicht gewesen zu

sein: er hätte eine neue wissenschaftliche Entdeckung völlig auf eigene Faust — höchstens nur zusammen mit dem «jungen Sokrates» — gemacht. Und Theaitetos gab sich auch darüber gar keine Rechenschaft, dass selbst die Begriffe, die er für die Benennung seiner vermeintlichen «neuen Entdeckung» gebrauchte — *μήκει σύμμετρος* und *δυνάμει σύμμετρος* — in der Wirklichkeit altes, überliefertes Gedankengut darstellen.

Aber lag nicht eben in diesem leichten Selbstbetrug des begabten jungen Mannes ein schöner Pädagogen-Erfolg des alten Theodoros? Denn Theodoros wollte ja seine Schüler, wie jeder echte Mathematik-Lehrer, wohl zum *selbständigen* mathematischen Denken erziehen. Als geschickter Lehrer scheint er sie darauf auch gut vorbereitet zu haben. Denn die beiden Schüler haben ja das, was er von ihnen erwartet haben muss, glänzend gelöst. Auf der anderen Seite scheint Theodoros in seiner Erziehung zur Selbständigkeit auch sehr taktvoll gewesen zu sein; er stellte wohl keine unmittelbaren Fragen, er forderte die jungen Leute wohl nicht geradewegs auf: «Nun, Kinder, benennt mal jene *dynamis*, die ich euch eben vorgelegt hatte, nach einem gemeinsamen Gesichtspunkt!» Eine solche Aufforderung war nicht nötig, denn er konnte sich — wohl nach ähnlichen Übungen schon vorher — darauf verlassen, dass die Schüler seine unausgesprochenen Absichten auch von selbst erraten würden. Wichtiger war ihm eher, dass die eigenen pädagogischen Griffe nicht auffällig werden. Und dies gelang ihm so sehr, dass man auch gar nicht wusste: warum er eigentlich bei der «*dynamis* 17» mit der Demonstration aufgehört hatte. «Er hörte nur irgendwie auf bei dieser *dynamis*» — sagt Theaitetos selber in seinem Bericht. Der Lehrer wurde bei einem geeigneten Punkt unauffällig still, als könnte er den eigenen Gedankengang gar nicht mehr weiterführen, und von da ab liess er die Schüler im Sinne dessen, was er bewusst und sorgfältig aber *unbemerkt* für sie vorbereitet hatte, «selbständig» weiterdenken. Und diese fanden auch «selbständig» jene Lösung, die ihr Lehrer von ihnen im voraus erwartet hatte.

Aber hätte dann Theodoros nicht mindestens nachträglich die jungen Leute über ihren Selbstbetrug aufklären müssen? — fragt man vielleicht nach der obigen Interpretation. — Nun bin ich fest davon überzeugt, dass man heutzutage so etwas auf keinen Fall versäumen würde. Aber mir scheint, dass Theodoros doch ein besserer Pädagoge war, wenn er es *nicht* tat. — Auch darüber wundere ich mich nicht im mindesten, dass auch Sokrates über die «Entdeckung» des jungen Mannes so hochofren war, und es gar nicht nötig fand, ihn auch noch über den kleinen, und vom Gesichtspunkt des Sokrates aus zweifellos *nebensächlichen*, Selbstbetrug aufzuklären. Es wäre in der gegebenen Situation wirklich nur lächerlich und pedantisch gewesen — nachdem der junge Mann schöne und interessante mathematische Tatsachen sozusagen selbständig wiederentdeckt hatte —, ihn jetzt noch darauf hinzuweisen, dass dieselben Wahrheiten auch anderen schon früher bekannt waren.

V

Und nun fassen wir jetzt noch einmal das Scholion zu Eucl. Elem. X 9 ins Auge. Ist es ein Wunder, wenn man behauptet, der Erfinder des Satzes Elem. X 9 wäre Theaitetos gewesen? Redet nicht in dem Platonischen Dialog der junge Theaitetos selber über seine «eigene Entdeckung», und ist dort nicht über dieselben mathematischen Tatsachen die Rede, die auch in dem Euklidischen Satz (X 9) behandelt werden? — Ja, das stimmt doch alles wörtlich und haargenau! Und doch bleibt der Wahrheitsgehalt der vorigen Behauptung mehr als fraglich! Denn was versteht ein Scholiast von Platons Freude an einem naiven und hochbegabten Jüngling, und von seinem vieldeutigen, verständnisvollen Lächeln über einen kleinen, unbedeutenden Selbstbetrug desselben? Hat nicht Platon selber mit seiner grossartigen und verführerischen Kunst die Theaitetos-Legende angeregt und vorbereitet?

*

Die andere Quelle, die von jener antiken Überlieferung zeugt, nach welcher — eben auf Grund der analysierten Platon-Stelle — konkrete mathematische Entdeckungen dem Theaitetos zugeschrieben wurden, ist ein oben schon erwähnter Bericht, der in arabischer Übersetzung erhalten blieb. Vollständigkeitshalber sei hier die wichtigste Partie dieses Berichtes in leicht zugänglicher englischer Übersetzung abgedruckt:⁵⁴

«... the theory of irrational magnitudes had its origin in the school of Pythagoras. It was considerably developed by Theaetetus the Athenian, who gave proof, in this part of mathematics, as in others, of ability which has been justly admired. He was one of the most happily endowed of men, and gave himself up, with a fine enthusiasm, to the investigation of the truths contained in these sciences, *as Plato bears witness for him in the work which he called after his name*. As for the exact distinction of the above-named magnitudes and the rigorous demonstrations of the propositions to which this theory gives rise, I believe that they were chiefly established by this mathematician; and, later, the great Apollonius, whose genius touched the highest point of excellence in mathematics, added to these discoveries a number of remarkable theories after many efforts and much labour. — *For Theaetetus had distinguished square roots (puissance must be the δυνάμεις of the Platonic passage) commensurable in length from those which are incommensurable*,⁵⁵ and had divided the well-known species of irrational lines after the different means, assigning the *medial* to ge-

⁵⁴ Siehe oben Anm. 51.

⁵⁵ Besser ist die deutsche Übersetzung dieser Stelle bei K. v. FRITZ (s. oben Anm. 51): «... THEAITETOS, welcher unterschieden hat *Quadrate* (Potenzen), welche kommensurabel sind in der Länge von den nicht-kommensurablen, etc.»

ometry, the *binomial* to arithmetic, and the *apotome* to harmony, as is stated by Eudemus the Peripatetic, etc.»

Wie man sieht, beruft sich der Text ausdrücklich auf den Dialog «Theaitetos». Die allgemeine Charakterisierung des Mathematikers Theaitetos scheint unmittelbar von Platon übernommen zu sein — einerlei ob der Verfasser dieser Quelle selber, oder nur seine Vorlage den Platon-Text in der Hand hatte. Auch hier wird die mathematische Stelle des Dialogs in dem Sinne ausgelegt, als handelte es sich bei Platon wirklich um eine eigene und neue wissenschaftliche Entdeckung des jungen Theaitetos: «er habe *die Quadrate je nach der Kommensurabilität bzw. Inkommensurabilität ihrer Seitenlängen unterschieden*. — Einen Kommentar zu dieser Behauptung brauche ich — nach dem, was oben zu dem Scholion des Satzes Eucl. Elem. X 9 gesagt wurde — wohl nicht mehr hinzuzufügen.

Interessant ist das obige Zitat aus dem arabisch erhaltenen Bericht eigentlich nur wegen seines letzten Satzes, der einen Hinweis auf Eudemos enthält: Auch Eudemos habe schon die Unterscheidung und Benennung der irrationalen Strecken: *mese*, *ek dyoin onomaton* und *apotome* dem Theaitetos zugeschrieben. — Das Überprüfen dessen, ob in diesem einzigen Punkt — der von Platons Dialog unabhängig zu sein scheint — eine echte, vielleicht auch historisch zuverlässige Überlieferung vorliegt, bleibe der künftigen Forschung überlassen.

*

Es wird vielleicht nicht uninteressant sein, noch zu betonen, dass ausser den beiden eben behandelten Quellen gar keine antiken Zeugnisse über irgendwelche konkrete und selbständige wissenschaftliche Leistungen des Mathematikers Theaitetos auf dem Gebiete der Irrationalitäten-Theorie überliefert sind. Denn wohl erwähnt zwar der Euklid-Kommentar des Proklos die mathematischen Leistungen des Theaitetos auch bei drei verschiedenen Gelegenheiten, aber man erfährt aus diesen Erwähnungen sehr wenig konkretes und handfestes.

Einmal heisst es (66, 14) über die drei Zeitgenossen — Leodamas den Thasier, Archytas den Tarentiner, und Theaitetos den Athener —, dass «von ihnen die Lehrsätze vermehrt und in ein den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechenderes System gebracht wurden».

Ein anderes Mal hören wir von einem gewissen Hermotimos von Kolophon (67, 20 ff.), dass «er die Ergebnisse des Eudoxos und Theaitetos weiterentwickelte». — Schade nur, dass wir von diesem Hermotimos, der u. a. auch das Werk des Theaitetos weitergebaut haben soll, ausser dem blossen Namen gar nichts wissen.

Und noch einmal wird schliesslich bei Proklos Theaitetos erwähnt, diesmal anlässlich einer Bemerkung über Euklid selbst (68, 7 ff.): «Nicht viel jünger als diese ist Euklid, der die *Elemente* zusammenstellte, viele Ergebnisse des

Eudoxos zusammenfasste, *vieler des Theaitetos zum Abschluss* und die weniger zwingenden Beweise seiner Vorgänger in eine unwiderlegbare Form brachte.»

Eine besondere Gruppe bilden jene beiden antiken Berichte — eine Notiz im Suda-Lexikon und ein Scholion zu dem XIII. Buch der Euklidischen «Elemente»⁵⁶ —, die dem Theaitetos *stereometrische Entdeckungen* zuschreiben. Die Kontrolle dieser anderen Berichte gehört nicht in den Rahmen der vorliegenden Untersuchung, die nur das Thema «Theaitetos und die Theorie der Irrationalitäten» behandeln wollte.

Aber auf diese Weise bleibt eigentlich nur ein einziger, bisher noch nicht beglaubigter Bericht, nämlich jene Behauptung der arabisch überlieferten Quelle übrig, wonach schon Eudemos die Unterscheidung und Benennung der irrationalen Strecken «mese», «*ek dyoin onomaton*» und «*apotome*» dem Theaitetos zugeschrieben hätte. Alles übrige sonst, was man ausser diesem einzigen Bericht bisher noch darüber zu wissen meinte, was die griechische Theorie der Irrationalitäten dem Theaitetos zu verdanken hätte, ist im Sinne der oben gelegten Untersuchung nur eine *Legende*, die von Platon selbst angeregt und vorbereitet wurde.

VI

Es wurde im ersten Abschnitt dieser Arbeit ein Zitat angeführt, wonach den «Fixpunkt» in der Entwicklungsgeschichte der Irrationalitätentheorie die Entdeckung des Theodoros von Kyrene bilden sollte; Theodoros hätte die Irrationalität von $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$. . . bis $\sqrt{17}$ bewiesen, und darum sollte die Irrationalität von $\sqrt{2}$ schon früher, in der Zeit *vor* Theodoros bekannt gewesen sein.

Nun hoffe ich, gezeigt zu haben, dass diese historische Rekonstruktion auf eine Reihe von Missverständnissen gebaut wurde, und dass sie sich mit gar nichts begründen lässt. In der Wirklichkeit besitzen wir überhaupt keine zuverlässige Überlieferung, weder über die Entdeckung noch über die weitere Entfaltungsgeschichte der mathematischen Irrationalität.

Die Frühgeschichte dieser liesse sich — meiner Ansicht nach — nur auf dem Wege einigermaßen klären, dass man jene griechischen Fachausdrücke historisch beleuchtet, durch welche die mathematische Irrationalität zum Ausdruck gebracht wird. In dem folgenden versuche ich die wichtigsten und bekanntesten Fachausdrücke der griechischen Mathematik von diesem Gesichtspunkt aus zu behandeln.

*

⁵⁶ Suda-Lexikon 1120, und Euclides, Elementa, ed. J. L. HEIBERG, vol. V p. 654.

Das gewöhnlichste Begriffspaar, das man der Entdeckung der mathematischen Irrationalität verdankt, heisst griechisch: *σύμμετρον* und *ἀσύμμετρον*, *messbar* und *unmessbar*. Wie es die 1. Definition im Buch X der Euklidischen «Elemente» besagt:

«*Kommensurabel* heissen jene Grössen (*σύμμετρα μέγεθη*), die von demselben Mass gemessen werden, und *inkommensurabel* solche (*ἀσύμμετρα δέ*), für die es kein gemeinsames Mass gibt.»

Zweifellos wurden diese Begriffe — *kommensurabel* und *inkommensurabel* — von der griechischen Mathematik selbst geprägt. Ohne die wissenschaftliche und deduktive Mathematik der Griechen wüsste man ja gar nichts von der Inkommensurabilität. Wie Aristoteles einmal treffend bemerkt:⁵⁷

«... den Ausgangspunkt bildet bei allen die Verwunderung, dass die Sache sich wirklich so verhalten sollte ... So verwundert man sich ... über die Inkommensurabilität der Diagonale und Seite des Quadrats. Denn zunächst erscheint es jedermann verwunderlich, dass es etwas geben sollte, was auch mit dem kleinsten gemeinsamen Mass nicht gemessen werden kann. Zuletzt aber kommt es ganz anders ... , wenn man nur erst über den Gegenstand unterrichtet ist. Denn ein geometrisch gebildeter Kopf würde sich über nichts mehr verwundern, als wenn die Diagonale auf einmal kommensurabel sein sollte.»

Ich glaube, man wird aus diesem Zitat zwei Tatsachen hervorheben dürfen:

1. Aristoteles ist sich dessen voll bewusst, dass die Inkommensurabilität — wobei er nur an die *lineare Inkommensurabilität* zu denken scheint (daher sein Beispiel: die Quadratdiagonale und -Seite) — keineswegs ein Begriff der naiven, unmittelbar von der Anschauung ausgehenden Denkweise sein kann. «Zunächst erscheint es jedermann verwunderlich, dass es etwas geben sollte, was auch mit dem kleinsten gemeinsamen Mass nicht gemessen werden kann ...». Ich glaube, mit dieser Verwunderung setzt sich eigentlich schon die *wissenschaftliche Denkweise* ein. Denn auf einer naiven, vorwissenschaftlichen Stufe hat man wohl noch überhaupt gar keine Ahnung, selbst von der *Möglichkeit* der linearen Inkommensurabilität zweier Strecken nicht. Für die naive, bloss mit der Praxis operierende Denkweise gibt es auch gar keine linear inkommensurablen Strecken. Bloss *praktisch* könnte man ja schliesslich auch für die Quadratdiagonale und -Seite ein «gemeinsames Mass» finden. Man sollte sich nur ein so kleines Mass wählen, bei dem die Inkommensurabilität der beiden Grössen mit praktischen Mitteln nicht mehr nachweisbar wird. Die Inkommensurabilität ist also ein Begriff mehr von *theoretischem* und nicht von praktischem Ursprung.

2. Die andere Tatsache, die in dem Aristoteles-Text betont wird: «ein geometrisch gebildeter Kopf würde sich über nichts mehr verwundern, als wenn

⁵⁷ Met. A. 2. 983 a 13 ff.

die Diagonale des Quadrats zu der Seite auf einmal kommensurabel sein sollte.» Zur Zeit des Aristoteles war also die Inkommensurabilität — mindestens für die Geometer — schon ein ganz geläufiger Begriff.

Hat jedoch Aristoteles mit der «*Verwunderung über die Inkommensurabilität der Diagonale und Seite des Quadrats*» recht, so wird man wohl auch vermuten dürfen: es ist gar nicht wahrscheinlich, dass man anfangs die neuentdeckte, verblüffende Tatsache — die Inkommensurabilität dieser beiden Strecken — hätte ohne weiteres, ruhig und gelassen zur Kenntnis nehmen können. Im Gegenteil! Man hat zunächst wohl Versuche angestellt, ob es nicht möglich wäre, die Längenverhältnisse dieser beiden Strecken dennoch genau anzugeben.

Es gibt in der Tat eine Stelle bei Platon, die unter anderen auch von diesen anfänglichen Versuchen zu zeugen scheint. Ich meine die berühmte Stelle über die «Hochzeitszahl» im Staat (VIII 546 C ff.). Es würde wohl allzu weit führen, wenn ich hier die vollständige Interpretation dieser mathematisch hochinteressanten Stelle versuchen wollte.⁵⁸ Es genüge hier, anstatt dessen, die Aufmerksamkeit nur auf jenen wichtigen Fachausdruck der Mathematik zu lenken, der an dieser Platon-Stelle zum ersten Male erscheint.

«Platon nennt die Zahl 7 die *rationale Diagonale*, zur Seite 5 gehörend» — liest man über diese Stelle in der Fachliteratur.⁵⁹ Diese Behauptung ist folgendermassen zu verstehen: wird die Seite eines beliebigen Quadrats in 5 Einheiten angegeben, so hat die Diagonale desselben den Approximationswert 7, wie man sich davon mit Anwendung des pythagoreischen Lehrsatzes leicht überzeugen kann. Denn es gilt ja für die Seite (a) und Diagonale (d) des Quadrates $d^2 = 2a^2$, und wenn $a = 5$, dann $d^2 = 50$, und darum $d = \sqrt{50} \approx 7$. Darum wird also bei Platon die Zahl 7 als die «*rationale Diagonale*, zur Seite 5 gehörend» bezeichnet. Nun interessiert uns jedoch diesmal, mehr als die eben geschilderte Tatsache, der Ausdruck selber: «*rationale Diagonale*».

In der Tat übersetzt man gewöhnlich jene beiden mathematischen Termini, die von Platon in diesem Zusammenhang gebraucht werden — $\xi\eta\tau\acute{o}\nu$ und $\alpha\acute{\rho}\rho\eta\tau\acute{o}\nu$ — mit «*rational*» und «*irrational*». Aber es wird sich lohnen, sogleich auch an den ursprünglichen, etymologischen Sinn dieser Worte zu erinnern; $\xi\eta\tau\acute{o}\nu$ heisst: «*was gesagt werden kann*», und $\alpha\acute{\rho}\rho\eta\tau\acute{o}\nu$: «*was nicht gesagt werden kann*». — Nun versuche man sich zunächst den Ursprung des letzteren Ausdruckes ($\alpha\acute{\rho}\rho\eta\tau\acute{o}\nu$) zu erklären. Warum bezeichnete man wohl die Diagonale des Quadrats als $\alpha\acute{\rho}\rho\eta\tau\acute{o}\nu$? — Der Ursprung dieser Bezeichnungsart kann doch nur der folgende gewesen sein: Offenbar wollte man die Diagonale eines beliebigen Quadrats — dessen Seite als eine Zahl angegeben wurde — ebenfalls als eine Zahl bestimmen, und als man dahinter kam, dass dies nicht möglich ist, dann

⁵⁸ Zu der Interpretation der Stelle vgl. man A. AHLVERS, Zahl und Klang bei Platon (Noctes Romanae, Forschungen über die Kultur der Antike, herausg. von Prof. Dr. W. WILH, Bern, Heft 6) Bern–Stuttgart 1952.

⁵⁹ B. L. v. d. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft, 206 f.

bekam die betreffende Diagonale den Namen: ἄροητον = «was nicht gesagt werden kann».

Die Tatsache jedoch, dass Platon an unserer Stelle nicht nur den Ausdruck διάμετρος ἄροητη = «die unsagbare Diagonale», sondern sogleich auch das Gegenteil dieses Begriffes, διάμετρος ῥητή = «die sagbare Diagonale», namhaft macht, zeigt, dass man hier den Ausdruck ἄροητον wohl nicht im Sinne eines Verbotes auffassen darf. Zweifellos handelt es sich im Falle der mystisch-religiösen ἄροητα⁶⁰ um Dinge, die auch nicht gesagt werden sollen, aber die Quadratdiagonale heisst nicht aus einem solchen Grunde ἄροητον, sondern einfach nur deswegen, weil sie sich nicht als eine Zahl bestimmen lässt. Dagegen kann die Zahl 7 — als Approximationswert der zur Seite 5 gehörigen Quadratdiagonale — eben aus dem Grunde als διάμετρος ῥητή = «sagbare (= rationale) Diagonale» bezeichnet werden, weil sie in der Tat doch als eine Zahl angegeben wird. — Diese kurze Betrachtung scheint also dafür zu sprechen, dass jene Überlieferung, wonach das Entdecken und mehr noch das öffentliche Behandeln der mathematischen Irrationalität als ein «Frevel» angesehen wurde, wohl nur eine späterfundene naive Legende ist. Es ist nicht wahrscheinlich, dass diese Entdeckung für die Mathematiker jemals als ein «Skandal» galt.

Übrigens heisst jener halbe Satz bei Platon, der in einem Atem die beiden Begriffe — «sagbare und unsagbare Diagonale» — ausspricht, folgendermassen:

Resp. VIII 546 C 4—5: ἐκατὸν μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος, δεομένων ἑνὸς ἐκάστου, ἄροητων δὲ δυοῖν . . .

Anstatt der Übersetzung begnüge man sich in diesem Fall lieber mit der genauen Paraphrase des angeführten Textes. Wie bekannt, wird durch die zitierten griechischen Worte auf zwei verschiedene Weisen dieselbe Zahl — 4·800 — ausgedrückt, nämlich: «100 Quadrate der sagbaren Diagonalen der 5, jedes Quadrat um 1 vermindert», also: $100 \cdot (7^2 - 1) = 100 \cdot 48 = 4.800$; und andererseits: «100 Quadrate der unsagbaren Diagonalen der 5, jedes Quadrat um 2 vermindert», also: $100 \cdot (50 - 2) = 100 \cdot 48 = 4.800$.⁶¹ — Demnach kann also die Diagonale jenes Quadrats, dessen Seite 5 Einheiten ausmacht, sowohl als «unsagbare» wie auch als «sagbare» Diagonale bezeichnet werden. Die sagbare Diagonale macht in diesem Fall 7 Einheiten aus. Mit anderen Worten: der Ausdruck «sagbare Diagonale» ist eine griechische Umschreibung für unseren «Approximationswert». — Die «unsagbare Diagonale» macht in demselben Fall nach unserer Bezeichnungsart die Länge $\sqrt{50}$ aus. Aber die Griechen wollten — wie darauf oben in einem anderen Zusammenhang schon hingewiesen wurde —, anstatt sich unserer Bezeichnungsart mit Quadratwurzelzeichen zu bedienen, nicht die Länge der fraglichen inkommensurablen Strecke, sondern das auf sie errichtete Quadrat messen, und sie sagten, dass die betreffende Diagonale

⁶⁰ HER. 5, 83; XEN. Hell. 6, 3, 4; EURIP. Hel. 13, 23 etc.

⁶¹ Siehe oben Anm. 58. — A. AHLVERS, o. c. 12 Anm. 4: «In der mathematischen Fachsprache bedeutet ἀριθμὸς ἀπὸ . . . = Quadrat von . . .»

«ihrem Quadrat nach gemessen» (= «quadriert») 50 Einheiten — d. h. also 50 Quadrateinheiten — ausmacht.

Man weiss sowohl aus Proklos⁶² wie auch aus anderen antiken Quellen,⁶³ dass es die Pythagoreer waren, die die Methode dessen ausgearbeitet hatten, wie man die einzelnen Seiten- und Diagonalzahlen nacheinander gewinnen kann. Die bei Platon genannten 5 und 7 bilden ja das dritte Glied in der unendlichen Reihe von solchen Zahlen. Natürlich kann man dieses System der «Seiten- und Diagonalzahlen» auch als eine antike Methode zur Approximierung des Wertes von $\sqrt{2}$ auffassen. Rechnet man nämlich das Verhältnis der aufeinanderfolgenden Diagonal- und Seitenzahlen — $d : a$ — als Dezimalbrüche nacheinander um, so bekommt man eine interessante Reihe, in der die einzelnen Werte den Wert von $\sqrt{2}$ mit wachsender Genauigkeit von unten und oben her abwechselnd annähern.⁶⁴

Nun wird aber nicht nur die Erfindung der Seiten- und Diagonalzahlen den Pythagoreern zugeschrieben, sondern es wird heutzutage im allgemeinen — und wohl mit Recht — vermutet, dass auch der erste wissenschaftliche Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale und -Seite von den Pythagoreern stammt.⁶⁵ Wie bekannt, gründet sich dieser Beweis — in dem Satz *Eukl. Elem. X Appendix 27* — auf eine *reductio ad absurdum*: wären nämlich Seite und Diagonale des Quadrats kommensurabel, so müsste dieselbe Zahl gerade und auch ungerade sein.

Es ist jedoch bemerkenswert, dass man auch einen kleinen Unterschied in der Terminologie des vorhin angeführten Platon-Textes einerseits, und des eben erwähnten pythagoreischen Satzes bei Euklid andererseits, beobachten kann. Denn Platon redet von der «unsagbaren Diagonale» (διάμετρος ἀρρήτη), während es in dem Satz bei Euklid (X Appendix 27) heisst, dass die Diagonale der Seite «linear inkommensurabel» ist (ἀσύμμετρος ἔστιν . . . μήκει). Natürlich kommt in beiden Bezeichnungsformen — διάμετρος ἀρρήτη bzw. ἀσύμμετρος μήκει — dieselbe Tatsache zum Ausdruck, nämlich, wie wir sagen würden: die Irrationalität der $\sqrt{2}$ (wenn die Quadratseite als Längeneinheit gewählt wird). Aber die beiden griechischen Formen der Bezeichnungsart legen doch eine historische Vermutung nahe, auch wenn es im voraus zugegeben werden muss, dass sich diese Vermutung näher, mit anderweitigen Zeugnissen nicht belegen lässt.

Denn es liegt nahe, zu vermuten, dass von den beiden Bezeichnungsarten — «unsagbare Diagonale» und «inkommensurable Grösse» — die erstgenannte

⁶² Proclus Diadochus, In Platonis rem publ. comm (ed. W. KROLL, 1901) II. 23 (S. 24–25).

⁶³ Vgl. die Quellen bei B. L. v. d. WAERDEN, Erwachende Wissenschaft S. 206 ff.

⁶⁴ Vgl. E. STAMATES, Euklidou Geometria, Tom. II. Athen 1953 S. 9 ff.

⁶⁵ Vgl. O. BECKER, Quellen und Studien zur Gesch. d. Math. etc. B Bd. 3 1936 533–553 (wiederabgedruckt im Sammelband «Zur Geschichte der griechischen Mathematik», s. oben Anm. 4).

die *relativ ältere* sein mag. Zunächst hat man wohl versucht, die Diagonale eines Quadrats — dessen Seite als eine Zahl angegeben wurde — als eine andere Zahl zu bestimmen. Als man dahinterkam, dass dies nicht möglich ist, drückte man diese verblüffende Tatsache in der Form aus, dass man die betreffende Diagonale als eine «unsagbare Grösse» (*ἀσώρητον*) bezeichnete. Natürlich war man auf diese Weise schon nahe daran, einen völlig neuen mathematischen Begriff zu schöpfen; aber dieser neue Begriff trat doch erst dann endgültig in Erscheinung, als man für ihn den Ausdruck «inkommensurabel» (*ἀσύμμετρον*) geprägt hatte.

Es fragt sich nur: wieso man überhaupt auf das Problem der Quadratdiagonale aufmerksam geworden sein mag? Ob man nicht auch jenen Weg der mathematischen Überlegungen einigermaßen rekonstruieren könnte, der dann zu der Entdeckung der Inkommensurabilität geführt hatte? — Wohl wird diese Frage die Historiker der Wissenschaft zunächst befremden. Denn einerseits bietet ja die Überlieferung gar keine solche Anhaltspunkte, die uns ermöglichen, die gestellte Frage mit Bestimmtheit zu beantworten. Und andererseits scheint das Problem der Quadratdiagonale selber doch so einfach zu sein, dass man auf den ersten Anblick geneigt wäre zu glauben: selbstverständlich musste man einmal beinahe von selbst auf diese Frage kommen. Hat es denn einen Sinn — ohne nähere Anhaltspunkte — nach weiteren historischen Zusammenhängen zu forschen, wo das, was erforscht werden soll, doch so unvermittelt und naheliegend ist? — Aber ich glaube dennoch, dass die folgenden Vermutungen — auch wenn sie gar nichts anderes als bloss Vermutungen sind — von historischem Gesichtspunkt aus einiges Interesse beanspruchen dürfen.

Ich vermute nämlich, dass man auf das Problem der Quadratdiagonale ursprünglich wohl anlässlich des Problems der *Quadratverdoppelung* aufmerksam wurde. Für diese Vermutung habe ich zunächst *zwei* Anhaltspunkte. Denn erstens ist es ja bekannt, dass *Verdoppelungsprobleme* die griechischen Mathematiker in der Tat ziemlich lange Zeit hindurch beschäftigt hatten. Es genüge hier darauf hinzuweisen, dass schon Hippokrates von Chios einen geistreichen Vorschlag dafür hatte, wie man das berühmte «delische Problem» — die Verdoppelung des Würfels — anpacken sollte.⁶⁶ Er selber hat zwar den eigenen Vorschlag nicht verwirklichen können, aber bald nach ihm fand Archytas von Tarent die erste Lösung des Problems in der Tat im Sinne des Vorschlages von Hippokrates. Aber auch nach Archytas beschäftigten sich noch mehrere Mathematiker mit dem Problem der Würfelverdoppelung und sie fanden auch, unabhängig von Archytas, andere Lösungen dafür. — Man dürfte also mit einiger Wahrscheinlichkeit doch vermuten, dass in einer früheren Zeit — also selbstverständlich in einer Zeit noch *vor* Hippokrates von Chios — die *Quadratverdoppelung* für die Mathematiker ein ebenso interessantes Problem gewesen

⁶⁶ Vgl. O. BECKER, Das mathematische Denken der Antike, Göttingen 1957 S. 75 ff.

sein mag, wie später, auf einer entwickelteren Stufe die Würfelverdoppelung zum Problem wurde. — Denkt man an diese Möglichkeit, so fällt einem sofort ein, dass wir in der Tat eine berühmte literarische Stelle besitzen, aus der man u. a. auch ersieht, wie gerade das Problem der Quadratverdoppelung in dem frühen Mathematikunterricht der Griechen behandelt wurde.⁶⁷ Und das ist der zweite Anhaltspunkt für meine vorige Vermutung.

Wie bekannt, fragt Sokrates an einer Stelle des Platonischen Dialoges «Menon» (82 B — 85 E) einen einfachen, unwissenden Sklaven: wie liesse sich der Flächeninhalt jenes Quadrats, dessen Seite zwei Fuss lang ist, in der Weise verdoppeln, dass dabei die Gestalt des Quadrats auch nach der Verdoppelung unverändert bleibt? Damit die Frage nicht missverstanden werde, zeichnet Sokrates sofort vor dem Gefragten jenes Quadrat hin, dessen Seite die Länge von zwei Fuss darstellen soll. (Das gezeichnete Quadrat besteht also aus vier kleineren Quadraten.) Wie liesse sich nun diese Fläche in Quadratform verdoppeln? Nachdem der Gefragte durch Sokrates ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht wurde, dass die Seite des ursprünglichen Quadrats *zwei Fuss* lang ist, verfällt er zunächst auf den Gedanken, dass jenes andere Quadrat, dessen Flächeninhalt das Doppelte des Gegebenen darstellt, wohl auch doppelt so lange Seiten — also eine Seitenlänge von *vier Fuss* — besitzen müsste. Sokrates zeichnet gleich auf diese Antwort hin das neue Quadrat mit der Seitenlänge von vier Fuss, indem er die eine Seite des ursprünglichen Quadrats auf ihr Doppeltes verlängert, und mit der neuen Seitenlänge ein Quadrat konstruiert. Man ersieht aber sofort aus seiner Zeichnung, dass der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats auf diese Weise nicht verdoppelt, sondern vervierfacht wurde. Der Sklave muss einsehen, dass sein erster Versuch, die Frage des Sokrates zu beantworten, verfehlt war. Jene Quadratfläche, die man mit der verdoppelten Seitenlänge herstellt, ist nicht das Doppelte sondern das Vierfache der ursprünglichen.

Nun denkt jetzt der Gefragte folgendermassen weiter. Jenes Quadrat, dessen Flächeninhalt das Doppelte des ursprünglichen darstellt, wird offenbar eine längere Seite haben, als dasjenige, dessen Fläche verdoppelt werden muss. Die gesuchte Seitenlänge wird also auf alle Fälle *mehr als zwei Fuss* betragen — so viel beträgt nämlich die Seite des gegebenen Quadrats. Vier Fuss lang kann jedoch die gesuchte Seite nicht sein, denn mit einer vier Fuss langen Seite wird das ursprüngliche Quadrat schon vervierfacht. Die gesuchte Seite wird also *weniger als vier Fuss* lang. — Mehr als zwei und weniger als vier ist *drei*. Vielleicht stellt also das Quadrat mit *drei Fuss langer Seite* den doppelten Flächeninhalt des ursprünglichen dar. — Sokrates antwortet auf diesen neuen Versuch wieder mit einer Zeichnung; er verlängert die Seite des ursprünglichen

⁶⁷ O. BECKER (Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung, Freiburg — München, 1954, S. 109) bezeichnete die folgende «Menon»-Stelle mit Recht als «ein lebendiges Bild des geometrischen Elementarunterrichts der Zeit».

Quadrats auf drei Einheiten, und konstruiert mit dieser neuen Seitenlänge ein grösseres Quadrat. Man ersieht aber aus der Zeichnung wieder, dass die Verdoppelung des Flächeninhalts auch diesmal nicht geglückt ist. Denn das grössere Quadrat besteht diesmal aus *neun* kleineren Quadraten, während es nur aus *acht* bestehen sollte, da ja das ursprüngliche Quadrat aus *vier* kleineren Quadraten zusammengesetzt war. Auf Grund der Zeichnung muss also der Sklave wieder einsehen, dass seine Antwort auch diesmal falsch war.

Die Frage wird dann schliesslich dadurch gelöst, dass Sokrates eine neue Figur zeichnet und daran zeigt, dass das ursprüngliche Quadrat dadurch vervierfacht werden kann, dass man seine Seitenlängen verdoppelt — wie es auch der Gefragte in seinem ersten Versuch wollte. Dabei kann man jedoch die so erhaltenen Quadrate durch ihre *Diagonalen* in je zwei gleiche Dreiecke teilen. Nun bilden aber auch die Diagonalen ein Quadrat (s. die Abb.), dessen Fläche



jedoch aus *vier* gleichen Dreiecken besteht, während das ursprüngliche Quadrat nur aus *zwei* solchen Dreiecken bestand. Auf diese Weise kann also der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats — vermittels der *Diagonale* — verdoppelt werden, und doch bleibt die Quadratform auch nach der Verdoppelung der Fläche unverändert.

Besonders lehrreich ist für uns die eben zusammengefasste Platon-Stelle nicht nur deswegen, weil man daraus ersieht, dass der naive, ungelernte Mensch das Problem der Quadratverdoppelung zunächst in der Tat auf dem Wege zu lösen versucht, dass er die Seite des gesuchten Quadrats als eine *Zahl* angeben will, sondern auch noch wegen einiger sehr aufschlussreicher Worte des Sokrates. Denn Sokrates sagt ja nach dem zweiten misslungenen Versuch des Sklaven: «Wohlan, versuche uns genau zu sagen — nämlich: wie gross die gesuchte Seite wird —, und wenn du es nicht willst in einer Zahl ausdrücken, so zeige es uns doch!» (83 E: *πειρῶ ἡμῖν εἰπεῖν ἀκριβῶς, καὶ εἰ μὴ βούλει ἀριθμεῖν, ἀλλὰ δεῖξον*). Natürlich wird durch diese Worte der kundige Leser im stillen darauf hingewiesen, dass die gesuchte Seite des Quadrats mit verdoppeltem Flächeninhalt — also die *Diagonale* des ursprünglichen Quadrats — sich *nicht* als eine Zahl angeben lässt, weil sie ein *ἄρρητον* ist. — Zweifellos führt also das Problem der Quadratverdoppelung — die Suche nach jener Zahl, die die Seite des Quadrats mit verdoppeltem Flächeninhalt angeben würde — zu dem Problem der Quadratdiagonale, und auf diese Weise zu dem Problem der linearen Inkommensurabilität. Ja, man möchte beinahe versuchen, eine unmittelbare Verbindung

zu vermuten, die von dem mathematischen Problem der Platon-Stelle im «Menon» zu dem pythagoreischen Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale und -Seite führt. Denn einerseits wird ja in dem Dialog «Menon» angedeutet, dass die Quadratdiagonale sich *nicht als eine Zahl* bestimmen lässt — wenn die Seite des Quadrats als eine Zahl angegeben war —, und andererseits ist der pythagoreische Beweis für die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale und -Seite ein *zahlentheoretischer Beweis*: wären Seite und Diagonale des Quadrats kommensurabel, dann müsste dieselbe Zahl gerade und auch ungerade sein, was unmöglich ist.

Ich glaube also, dass die eben genannten beiden Anhaltspunkte — einerseits der Hinweis auf das Problem der Würfelverdoppelung, und andererseits derjenige auf die «Menon»-Stelle — meine Vermutung, dass nämlich den Ausgangspunkt zu der Entdeckung der linearen Inkommensurabilität das *Problem der Quadratverdoppelung* gebildet haben soll, einigermaßen doch erhärten. — Nun lässt aber dieselbe Vermutung auch noch andere, wie mir scheint, interessante historische Zusammenhänge erkennen. Man muss dazu nur einsehen, dass das Problem der Quadratverdoppelung seinerseits für die antike mathematische Denkweise mit einem anderen, ursprünglich gar nicht geometrischen Problem identisch war. Darum überlege man sich zunächst folgendes:

O. Becker bemerkte in seiner historischen Behandlung des Problems der Würfelverdoppelung:⁶⁸ «Diese Aufgabe war für die antike Mathematik in dieser Form zunächst unangreifbar.» Darum verwandelte Hippokrates von Chios die Aufgabe der Würfelverdoppelung in eine andere, nämlich in die Aufgabe: *zwei mittlere Proportionale x , y zwischen a (die Kante des Würfels) und $2a$ zu finden*. Dieser Vorschlag des Hippokrates führt in der Tat zu der Lösung des Problems. Denn, wenn $a : x = x : y = y : 2a$, dann auch $ay = x^2$ und $xy = 2a^2$. Und daraus folgt ja, dass $a : x = x^2 : 2a^2$, bzw. $x^3 = 2a^3$.

Aber wie kam Hippokrates auf den glücklichen Gedanken, dass sich das Problem der Würfelverdoppelung auf das Problem der «zwei mittleren Proportionalen» reduzieren lässt, wobei er doch nicht instande war, den eigenen Vorschlag zu verwirklichen? — Ich glaube, der Vorschlag des Hippokrates war eigentlich gar nichts anderes, als sozusagen nur ein *Analogieschluss*. Er wollte das ungelöste stereometrische Problem seiner Zeit nach dem Vorbild eines damals schon längst gelösten verwandten planimetrischen Problems behandeln. Denn er ging ja wohl von dem Gedanken aus: «Quadrat» und «Würfel» sind irgendwie verwandte Gebilde, und wird einmal das Quadrat dadurch verdoppelt, dass man zwischen seine Seite (a) und das Doppelte dieser Seite ($2a$) eine mittlere Proportionale einfügt ($a : x = x : 2a$), dann wird man den Würfel auf dem Wege verdoppeln können, dass man zwischen seiner Kante und dem doppelten der Kante *zwei* mittlere Proportionalen findet. — Es ergibt sich auf

⁶⁸ Vgl. oben Anm. 66.

diese Weise aus dem Analogieschluss des Hippokrates für uns die Vermutung, dass für die antike mathematische Denkweise das Problem der Quadratverdoppelung ursprünglich wohl mit dem *Problem der mittleren Proportionale* zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten gleichbedeutend war.

Die Beobachtung, dass für die antike mathematische Denkweise die Frage der Quadratverdoppelung ursprünglich mit der anderen Frage gleichbedeutend gewesen sein mag: wie man zwischen zwei Zahlen die *mittlere Proportionale* finden kann, eröffnet sogleich auch eine Perspektive in die Vergangenheit, sozusagen in die *Vorgeschichte* des Problems der linearen Inkommensurabilität. Denn man weiss in der Tat, dass das Problem der «mittleren Proportionale» auch schon auf einer *vorgeometrischen* Stufe, in der Musiktheorie der Pythagoreer eine wichtige Rolle gespielt hatte. Der Satz 3 in der *Sectio canonis* besagt ja:

*«Zwischen zwei Zahlen in einem überteiligen Verhältnis können niemals mittlere proportionale Zahlen, weder eine noch mehrere, gefunden werden.»*⁶⁹

Wir müssen uns in dem folgenden mit diesem Satz etwas ausführlicher beschäftigen, da er — meiner Ansicht nach — die Vorgeschichte des Problems der linearen Inkommensurabilität in ein interessantes Licht zu stellen vermag.

Man muss vor allem wissen, um den vorigen Satz zu verstehen, dass die Griechen unter einem «überteiligen Verhältnis» (*ἐπιμόριον διάστημα*) dasselbe verstanden, was wir in der Form $(n + 1) : n$ zum Ausdruck bringen. Ein «überteiliges Verhältnis» ist also in der Musiktheorie z. B. die Quarte (4 : 3), oder die Quinte (3 : 2). Aber selbstverständlich gilt der vorige Satz nicht nur für die Quarte und Quinte, sondern auch für die Oktave (2 : 1). Denn wohl bezeichneten zwar die Alten die Oktave nicht als ein «überteiliges» sondern als ein «vielfaches Verhältnis» (*πολλαπλάσιον*). Aber die Verhältniszahlen der Oktave (2 : 1) bilden doch jenen Spezialfall, der nicht nur als «vielfaches» sondern mit demselben Recht auch als «überteiliges Verhältnis» gelten kann. — Interessant ist in der *Sectio canonis* auch der Beweis des vorhin zitierten Satzes, der nämlich daraus besteht, dass gezeigt wird: *jedes überteilige Verhältnis kann auf die Form $(n + 1) : n$ gebracht werden*. Die kleinsten Termen eines «überteiligen Verhältnisses» sind also *aufeinanderfolgende Zahlen*. Darum gibt es zwischen

⁶⁹ Es sei hier nebenbei bemerkt: der eben zitierte Satz der *Sectio canonis* wird in den Werken über die antike Mathematik und Musikwissenschaft häufig als ein *Satz des ARCHYTAS* bezeichnet. Der Grund für diese Bezeichnung liegt teils in der Tatsache, dass BOETHIUS den Satz einmal zitiert (*De musica* III 11) und mit jenem Beweis, den ARCHYTAS für ihn geliefert hatte, nicht zufrieden ist; teils lässt sich die Bezeichnung «Satz des ARCHYTAS» auch damit noch begründen, dass man nachzuweisen vermochte: er spielte eine wichtige Rolle in der Musiktheorie des ARCHYTAS. Aber damit ist über das *wirkliche* Alter des Satzes *Sectio canonis* 3 noch sehr wenig gesagt. Denn BOETHIUS bezeugt ja gar nichts über das wirkliche Alter dieses Satzes. Woher sollte man wissen, dass auch der Satz selber, nicht nur sein von BOETHIUS erwähnter und von ARCHYTAS stammender Beweis, in der Tat von ARCHYTAS stammen soll? Es geht aus den Worten des BOETHIUS nicht einmal soviel eindeutig, hervor, dass es in der Tat ARCHYTAS war, der diesen Satz *als erster* bewiesen hatte. Und wollte man eine relative Chronologie für den fraglichen Satz suchen, so fände man die einzigen Anhaltspunkte dafür doch nur in dem Satz selber.

diesen gar keine mittlere proportionale Zahl, da es zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zahlen keine mittlere Zahl gibt. (Im Sinne der griechischen Arithmetik gelten natürlich nur die *ganzen Zahlen* als «Zahlen».) Und nachdem es nun zwischen den kleinsten Termen eines überteiligen Verhältnisses keine mittlere proportionalen Zahlen gibt, kann es solche auch zwischen denjenigen Zahlen nicht geben, die dasselbe gegebene Verhältnis zueinander haben, wie die geprüften kleinsten Termen (vgl. Eucl. Elem. VIII 8).

Aber noch interessanter wird der vorhin zitierte Satz aus der Sectio canonis, wenn man bedenkt, dass die «überteiligen Verhältnisse» der Musikwissenschaft — die Quarte (4 : 3), Quinte (3 : 2) und Oktave (2 : 1) — in der Theorie der Pythagoreer eigentlich *Saitenabschnitte*, also *Strecken* waren, wie ich es in einer früheren Arbeit schon gezeigt hatte.⁷⁰ Die musikalischen Intervalle der Konsonanzen waren ja *lineare Grössen* des Monochords, die an dem «Kanon» auch als *Zahlen* angegeben wurden. Wird z. B. die Oktave als 2 : 1 bezeichnet, so heisst dies soviel, dass das ganze Monochord als eine *Strecke von 2 Längeneinheiten* angesehen wird; diese Strecke von 2 Längeneinheiten ergibt den ersten Ton der Oktave, während die Hälfte des Monochords — *die Strecke von 1 Längeneinheit* — den zweiten Ton erzeugt. «Zahlen» und «Strecken» (= Saitenabschnitte) waren in dieser Musiktheorie ursprünglich gleichbedeutend, und man scheint auch noch der Ansicht gewesen zu sein, dass man *jede* Strecke als eine Zahl (eine Mehrheit von irgendwelchen Längeneinheiten) auffassen dürfte.

Besagt also der Satz Sectio canonis 3, dass es «zwischen zwei Zahlen in einem überteiligen Verhältnis keine mittleren proportionalen Zahlen gibt», so ist diese Behauptung auf die Oktave bezogen in dem Sinne zu verstehen, dass zwischen den beiden Saitenabschnitten (Streckensegmenten) der Oktave (2 und 1) keine mittlere proportionale Zahlstrecke existiert, auch dann nicht, wenn man mit irgendwelchen Mehrfachen desselben Verhältnisses (2 : 1) die Probe anstellt.

Natürlich war das Problem der «mittleren Proportionale in einem überteiligen Verhältnis» innerhalb der Musiktheorie zunächst ein arithmetisches und nur *quasi-geometrisches* Problem, nachdem man doch die mittlere proportionale *Strecke* (= Saitenabschnitt) zwischen zwei anderen *Strecken* (= Saitenabschnitten) suchte. Aber ich glaube, man wird doch zugeben müssen, dass mit der *Quadratverdoppelung* (wohl später!) eigentlich dennoch dasselbe ursprünglich musikalische Problem der «mittleren Proportionale zwischen zwei Strecken» — allerdings schon in rein *geometrischer* Form — gelöst wurde. Selbstverständlich wird dabei das musiktheoretische Problem der «mittleren Proportionale in einem überteiligen Verhältnis» durch eine mächtige Kluft von der geometrischen Lösung der Quadratverdoppelung getrennt. Inzwischen musste nämlich — wie ich vermute — jene Proportionenlehre, deren rein musiktheoretische Herkunft

⁷⁰ Á. SZABÓ, Die frühgriechische Proportionenlehre im Spiegel ihrer Terminologie, Archive for History of Exact Sciences, vol. 2, 1965, 197–270.

zuletzt in meiner oben genannten Arbeit nachgewiesen wurde,⁷¹ auf die Geometrie angewendet werden.

Im Sinne meiner Vermutung liessen sich also in der Entdeckungsgeschichte der linearen Inkommensurabilität einstweilen die folgenden Etappen unterscheiden:

1. In der Musiktheorie versuchte man zunächst, die wichtigsten Konsonanzen — und darunter besonders die Oktave ($2 : 1$) — in zwei untereinander *gleiche* Teilintervalle zu zerlegen. Dadurch tauchte das Problem der «*mittleren proportionalen Zahlstrecke*» — und insbesondere dasjenige der mittleren Proportionale zwischen einer Strecke und ihrem Doppelten (die Oktave $2 : 1$) — auf. Dieses Problem führte zu der grundlegenden Feststellung: »Es gibt zwischen zwei Zahlen in überteiligem Verhältnis *keine mittlere proportionale Zahl*.»

2. Nachdem man gelernt hatte, die ursprünglich rein musiktheoretische Proportionenlehre auf die Geometrie anzuwenden, wurde das Problem der *Quadratverdoppelung* gelöst. Damit löste man jedoch (auf geometrischem Wege !) auch das Problem der *mittleren Proportionale* zwischen einer Strecke und ihrem Doppelten.

3. Als man auf diese Weise auf das Problem der *Diagonale* des Quadrats aufmerksam wurde, versuchte man wohl wieder, diese Strecke ebenso als eine *Zahl* zu bestimmen, wie auch die Seite des Quadrats als eine Zahl angegeben war. Nach vergeblichen Versuchen — im Laufe deren auch das pythagoreische System der Seiten- und Diagonalzahlen ausgearbeitet wurde — musste man einsehen, dass die betreffende Strecke, die Diagonale, im Vergleich zu der Seite des Quadrats *keine Zahl*, sondern eine «unsagbare Grösse», ein *ἄσκητον* ist. — Bald danach prägte man für den neuen mathematischen Begriff den Ausdruck *ἀσύμμετρον*, «inkommensurabel», und man *bewies* auch die Inkommensurabilität der Quadratdiagonale und -Seite mit einer *reductio ad absurdum*.

*

Meine vorige Vermutung, dass nämlich den Ausgangspunkt zu der Frage der Inkommensurabilität das Problem der «mittleren Proportionale» gebildet hatte, lässt sich auch noch von einer anderen Seite her erhärten, und auch dadurch fällt wieder mehr Licht auf die Frühgeschichte der Theorie.

Es wurde oben im Zusammenhang mit der Analyse der mathematischen Stelle im Dialog «Theaitetos» schon darauf hingewiesen, eine wie wichtige Rolle in der ganzen griechischen Theorie der Inkommensurabilitäten dem mathematischen Begriff *dynamis* zufällt. Theodoros illustrierte vor seinen Schülern die lineare Inkommensurabilität der Seiten jener *dynameis*, die den *Rechteckzahlen* entsprechen. Dieselben linear inkommensurablen Strecken werden in der mathe-

⁷¹ Siehe die vorige Anm.

matischen Terminologie als *dynamei symmetroi*, d. h. als «kommensurabel nach jenem Quadrat, das man auf sie errichtet», bezeichnet.

Nun liess sich über den mathematischen Begriff *dynamis* schon eingangs mit rein sprachgeschichtlichen und philologischen Mitteln feststellen, dass der ursprüngliche Wortsinn dieses Ausdruckes in der Mathematik *dynamis* = «Quadratwert eines Rechtecks» gewesen sein muss. Auch darauf wurde später hingewiesen, dass die *dynamis* (= «Quadratwert eines Rechtecks») ursprünglich mit «*tetragonismos*» (= «Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat») gewonnen wurde. Dieses Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat konnte man jedoch erst dann lösen, als man schon gelernt hatte, wie die *mittlere Proportionale* zu zwei beliebigen Strecken zu konstruieren ist. Es scheint also, dass sowohl das Problem der *Quadratverdoppelung* (und damit das Problem der *Quadratdiagonale*), wie auch dasjenige des *Verwandeln eines beliebigen Rechtecks in flächengleiches Quadrat* (und damit die Schöpfung des mathematischen Begriffes *dynamis* = «Quadratwert eines Rechtecks») von dem Problem der *mittleren Proportionale* untrennbar sind. Darum glaube ich, dass eben das Problem der mittleren Proportionale jener wichtige Ausgangspunkt war, der zu der Entdeckung der linearen Inkommensurabilität (und zu derjenigen der quadratischen Kommensurabilität) geführt hatte.

Nun scheint jedoch der Hinweis darauf, dass der Begriff *dynamis* sein Entstehen dem Problem der mittleren Proportionale verdankt (ebenso wie auch das Problem der Quadratdiagonale ein spezielles Problem der mittleren Proportionale ist!), auch noch dafür zu sprechen, dass die Entdeckung der linearen Inkommensurabilität an dem Beispiel der Quadratdiagonale und -Seite vielleicht von Anfang an *gar kein isolierter Einzelfall war*. Es wäre möglich, dass man mit dem geometrischen Lösen des Problems der mittleren Proportionale sogleich erkannt hätte: nicht nur die Seite des verdoppelten Quadrats (die Diagonale des Einheitsquadrats), sondern auch die Seiten aller Quadrate, die Rechteckzahlen entsprechen, sind linear inkommensurable Grössen.

Dabei ist es wohl auch nicht gleichgültig, dass die vorhin analysierte Platon-Stelle («Theait.» 147 C — 148 B) den Ausdruck *dynameis* in einem sozusagen «altertümlichen» Sinne gebraucht. Denn die *dynameis* des Theodoros sind ja nicht einfach «Quadrate», oder «Quadratwerte von beliebigen Rechtecken» (wie etwa das Wort *dynamis* bei Archimedes gebraucht wird), sondern die *dynameis* des Theodoros sind lauter *ganze Zahlen* von 3 bis 17. Es wurden also — wie ich es schon hervorzuheben versuchte — *Zahlenrechtecke* in flächengleiche Quadrate verwandelt. Demnach hat man also den Begriff *dynamis* noch zu einer solchen Zeit geprägt, in der man die mittlere Proportionale zwischen zwei *Zahlstrecken* suchte, um dadurch über die bloss arithmetische Behauptung des Satzes *Seccio canonis* 3 hinauszukommen. Und eben dadurch, dass man das geometrische Mittel zweier Strecken zu konstruieren gelernt hatte, kam man auch über jene

naive Vorstellung hinaus, dass *jede* Strecke auch als eine Zahl aufgefasst werden könnte.

Nun hoffe ich, mit der hier vorgelegten Untersuchung nicht nur die Theaitetos-Legende aufgelöst, sondern auch einige Gedanken zu einer neuen Rekonstruktion der Entwicklungsgeschichte der pythagoreischen Irrationalitätentheorie beigetragen zu haben.