

Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen
Geometrie

In: Zeitschrift für Mathematik und Physik
XXVIII - 1883 - p. 209 - 226

5574 pdf
TREUTLEIN, P.
1883

A Trautlein Peter

Math.

Treutlein, Peter: Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Geometrie. 1883
siehe A.: Scriptores mathematici.

Treutlein, Peter: Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Geometrie. In:
Zeitschrift für Mathematik und Physik 28 (1883) histor.-liter. Abth. p. 209-226.
I. Der besondere Pythagoreische Lehrsatz. II. Des Pythagoras u. Platon
Vorschrift zur zahlenmässigen Bestimmung von rationalen Seiten des
rechtwinkligen Dreiecks. III. Das zweite Buch der Elemente Euklids.

V 362

Historisch-literarische Abtheilung.

Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Geometrie.

Von

P. TREUTLEIN,

Professor am Gymnasium zu Karlsruhe.

Im vorliegenden Aufsatz werde ich versuchen, das folgende scheinbar dreigliedrige, aber, wie sich herausstellen wird, in sich doch einheitliche Thema:

„Der besondere Pythagoreische Lehrsatz — die zahlenmässige Bestimmung von rationalen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks — das zweite Buch der Elemente Euklid's“

rücksichtlich seiner geschichtlichen Entstehung und Entwicklung einer erneuten Behandlung zu unterziehen. Zwar haben in den letzten zwei Jahrzehnten Forscher wie Cantor, Röth, Bretschneider, Hankel, Günther, zum Theil wiederholt, sich mit diesem Gegenstande beschäftigt, und es ist das Ergebniss ihrer Untersuchungen in dem so verdienstlichen Werke von Cantor, „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I. Theil“, niedergelegt, und ich will auch sofort beifügen, dass ich mit der hierin gegebenen Darstellung im Grossen und Ganzen einverstanden bin. Aber mir scheint es, als ob die jetzt geltende Auffassung über die geschichtliche Entwicklung des beregten Gegenstandes eine Stufe, nämlich die anfängliche Induction bei der Genesis, ausser Acht lasse oder wenigstens nicht genügend hervorhebe; aus diesem Grunde, und weil überhaupt die Art, wie ich mir die Entstehung der Sache denke, der unmittelbar sinnlichen Anschauung mehr Spielraum gewährt, also auch, wie ich wenigstens meine, der geschichtlichen Wahrheit näher kommt, ferner weil ich zugleich, wenn auch nur in untergeordneten Punkten, thatsächliche Richtigstellungen zu bringen vermag, so wage ich, den Gegenstand hier zur Besprechung zu bringen. Und wenn ich zuweilen speciell gegen Cantor's Darstellung mich wenden werde, so möge der geehrte Mitherausgeber und jeder andere Leser

dieser Zeitschrift dies dadurch für begründet erachten, dass die betreffenden Capitel bei Cantor die ausführlichste zusammenhängende Darlegung enthalten und jedenfalls die, welche am meisten aufgesucht und gelesen wird und werden wird.

I. Der besondere Pythagoreische Lehrsatz. — 1. Mancher mag beim Lesen dieser Ueberschrift der Zeiten gedenken, wo er in gespannter, vielleicht auch nicht gespannter Erwartung der Dinge, die da kommen sollten, vor der Schultafel sitzend auf dieser die typische Gestalt der Euklid'schen Beweisfigur vor seinen Augen auftauchen sah, und mag der Stunden und Tage nachher gedenken, wo der zugehörige Beweis gelernt und eingeübt wurde, nicht schwer gerade, interessant sogar, auch Ueberzeugung gewährend von der Wahrheit der bezüglichen Behauptung — und doch ein gewisses Gefühl des Unbehaglichen hinterlassend, gleich als ob eine Ueberrumpelung, eine Gefangennahme stattgefunden habe. Wohl mag auch der Eine und Andere sich der begleitenden Nebenumstände erinnern, wie der Lehrer die Wichtigkeit des „Magister matheseos“ angepriesen, vielleicht auch des bösen Beinamens der „Eselsbrücke“ Erwähnung gethan, weil nämlich Esel im Geiste nicht über die so schwer passirbare Brücke des Beweises hinüber zu gelangen vermöchten. Gar hat auch einer von Denen, welchen diese Zeilen vor Augen kommen, in seiner Schulzeit gehört, dass mit Hilfe eben jener Euklid'schen Beweisfigur eine telegraphische Verbindung mit etwaigen in geistiger Beziehung den Menschen ähnlichen Mondbewohnern möglich sei: denn hätten diese wirklich ein der Menschenseele verwandtes geistiges Princip in sich, so müssten gewiss auch sie den im irdischen Bereich so berühmten Satz des Pythagoras, nicht minder dessen vorhin erwähnten Beweis erfunden haben, so dass man nur eine in genügend grossem Maassstabe und in passenden Farbencontrasten gewählte Anpflanzung der Beweisfigur auf der Erde auszuführen habe, um bald in der auf dem Monde geschehenden Reproduction derselben Figur die Antwort unserer Trabantenbrüder und den Anfang einer Correspondenz mit denselben verwirklicht zu sehen.

Nun, der letztere Vorschlag, falls er jemals ernstlich gemeint war, geht doch von der Annahme aus, dass der Pythagoreische Satz und gar auch dessen Beweis durch den alten alexandrinischen Mathematiker ein nothwendiges Product, ja die Kenntniss davon ein Attribut des menschlichen Geistes sei. Wohl möchte man beim Durchlesen von Werken über Geometrie oder beim Anhören von mathematischen Unterrichtsstunden der Gegenwart auch zuweilen meinen, dass die betreffenden Verfasser oder Lehrer einer fast ähnlichen Ansicht huldigen, da sie den Inhalt und den Beweis unseres mehrfach erwähnten Satzes so unvermittelt den Lernenden überliefern. Es giebt ja mehrfache Versuche, den soeben

angedeuteten misslichen Zustand zum Guten zu ändern — doch von Didaktischem habe ich hier nicht unmittelbar zu reden.

2. Jahrhunderte lang hat man sich jedenfalls auch um die Entdeckungsgeschichte dieses Satzes gar nicht gekümmert, die Frage gar nicht aufgeworfen, wie denn Pythagoras überhaupt dazu kommen konnte, einen solchen Lehrsatz aufstellen zu wollen. Man bewies ihn und nahm ihn hin als eine interessante und zu praktischen Folgerungen führende geometrische Thatsache, und es sind nicht viele Jahrzehnte verflossen seit der Zeit, wo einzig seine Kenntniss noch als Beweis einer ziemlich soliden mathematischen Allgemeinbildung galt. Dass freilich jene Fragestellung nicht erst unserm Jahrhundert, wie gewöhnlich geglaubt wird¹⁾, im Besondern dem Jahre 1833 angehört, wird sich weiterhin zeigen.

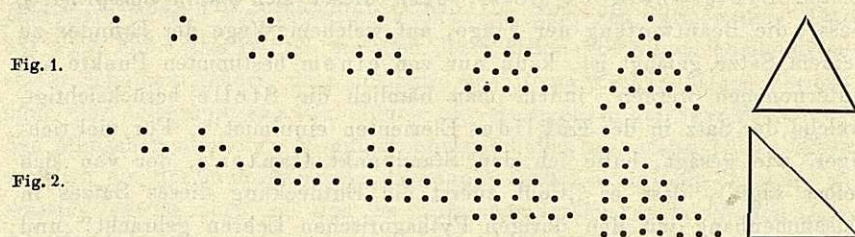
Die wissenschaftliche Pythagorasfrage überhaupt in Fluss gebracht zu haben, ist das Verdienst von Röth (1862), aber den richtigen Standpunkt gewählt zu haben zur geschichtlichen Beurtheilung von des Pythagoras und der Pythagoreer mathematischen Leistungen, ist das ebenso wenig bestreitbare Verdienst von Cantor (1858). Gegen des Letzteren sogleich zu präcisirenden Standpunkt war es ein Rückgang von Seiten Bretschneider's (1870), wenn dieser sich dahin ausspricht²⁾, dass „die Beantwortung der Frage, auf welchem Wege der Erfinder zu seinem Satze gelangt ist, kann nur von einem bestimmten Punkte aus unternommen werden, indem man nämlich die Stelle berücksichtigt, welche der Satz in des Euklides Elementen einnimmt“. Für viel richtiger, wie gesagt, halte ich den Standpunkt Cantor's, der von sich selbst sagt³⁾, dass er „wohl zuerst die Entdeckung dieses Satzes in Zusammenhang mit den übrigen Pythagorischen Lehren gebracht“ und der, wie Günther mit Recht bemerkt⁴⁾, zuerst nachdrücklich auf das Experimentiren, auf das stete, vermuthlich durch bestimmte hodegetische Grundsätze geregelte Probiren, als auf den Grundcharakter Pythagoreischer Mathematik hingewiesen hat⁵⁾.

In der That, hier liegt der Kernpunkt, von wo aus die Lösung unserer geschichtlichen Frage gelingt, und in seiner Fixirung stimme ich ganz mit Cantor überein, nur dass ich das dem Pythagoras und seinen Schülern zuzuschreibende Vorgehen als ein ganz unmittelbar durch Anschauung vermitteltes auffasse, als ein für das geometrische, wie für das arithmetische Gebiet sinnlich fassbares, ja das arithmetische Experimentiren sogar noch als das dem geometrischen vorausgehende und das letztere erst bedingende.

3. Die Zahl ist das Wesen aller Dinge, Alles ist seinem Wesen nach Zahl — diese Grundbehauptung und allgemeinste Unterscheidungslehre Pythagoreischer Philosophie in Verbindung mit der Neigung des griechischen Geistes zur Versinnlichung und anschaulichen Gestaltung, dazu die auf die alpythagoreische Schule schon zurückgehenden Namen der

Dreieckszahlen, der Flächen- und Körperzahlen⁶⁾ müssten allein schon zu der Annahme führen, dass die Pythagoreer die ohnedem wohl für das praktische Rechnen gebrauchten Rechensteine auch zu zahlentheoretischen Untersuchungen halb wissenschaftlicher, halb mystischer Natur verwendet haben. Allein es wird auch für die altpythagoreische Schule direct überliefert⁷⁾, dass „Eurytus die Bedeutung der einzelnen Zahlen dadurch beweisen wollte, dass er die Figuren der Dinge, die sie bezeichnen sollten, aus der ihnen entsprechenden Anzahl von Steinchen zusammensetzte“, und bei Aristoteles findet sich auch mit Bezug auf die Pythagoreer die andere Stelle⁸⁾, wo es heisst: die Einen führen die Zahlen auf Figuren wie das Dreieck und Viereck zurück.

Es wird also der Wahrheit entsprechen, wenn ich annehme, dass Pythagoras schon in solcher Weise vorging und sich würfelförmige oder, da „unter den ebenen Gebilden der Kreis am schönsten“, unseren Damenbrettsteinen ähnliche Stein- oder Holzplättchen bildete und diese aneinander reihte. Die Unterscheidung in „gerade“ und „ungerade“ und die vielleicht unmittelbar sich anschliessende Eintheilung in verschiedene Unterarten⁹⁾ ergab sich leicht. Die Aneinanderreihung ferner nach Art von Fig. 1 und 2 ergab höchst einfach nicht nur die bildliche

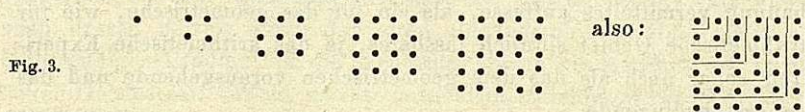


Darstellung der natürlichen Zahlen, sondern auch die einfachen Grundformen des gleichseitigen und des gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks, nicht minder aber auch die Begründung dafür, die so zur Darstellung gekommenen Zahlen

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$$

mit dem Namen der Dreieckszahlen zu belegen.*

Andersartige Anordnung:



* So findet auch der Bericht des Lucian (vergl. Cantor Gesch., S. 143) seine einfachste Erklärung. Derselbe berichtet nämlich, Pythagoras habe Einen zählen lassen. Dieser sagte also: „1, 2, 3, 4“, worauf Pythagoras dazwischen fuhr: Siehst du? Was du für 4 hältst, das ist 10 und ein vollständiges Dreieck und unser Eidschwur! (Vergl. die vierte Gestaltung in Fig. 1.)

nämlich allmähliche Ränderung der Viertelsumrahmung, d. h. Zufügung von ungeraden Anzahlen von Rechensteinen in Gestalten je eines Winkelhakens (Gnomons), führte, wenn man von der Einheit ausging, zu der Form des Quadrates und zu den in ihr sich darstellenden Quadratzahlen

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots, n^2$$

als Summe von ungeraden Zahlen, wenn man aber von der Zweierheit

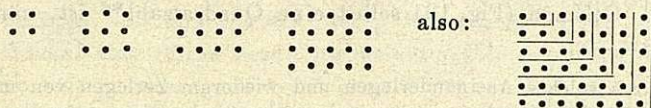


Fig. 4.

ausging (Fig. 4), zu der Form des Rechtecks und zu den in ihr sich darstellenden sogenannten heteromeken Zahlen

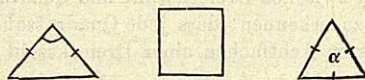
$$2, 6, 12, 20, 30, \dots, n(n-1)$$

als Summen der je von 2 ab genommenen geraden Zahlen.

Dass sich hier auch die Ableitung gewisser mystischer Eigenschaften der Zahlen anschloss, bedarf nur der Erwähnung.

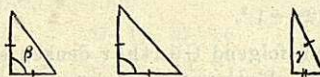
4. Diese einfachsten Aneinanderfügungen von Rechensteinen führten nun zugleich auch zum gleichseitigen Dreieck, gleichschenkelig rechtwinkligen Dreieck und Quadrat, als den Grundfiguren von gewisser Regelmässigkeit, d. i. innerer Harmonie, und es ist naheliegend, anzunehmen, dass diese Grundfiguren

Fig. 5.



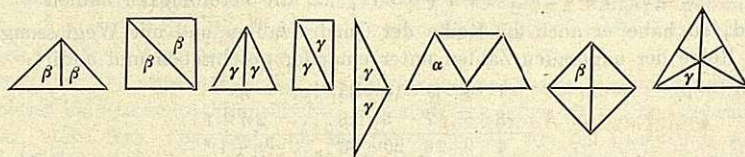
sowie ihre Hälften

Fig. 6.



von Pythagoras ebenfalls in Holz oder sonstigem Stoffe geformt wurden, um auch durch deren Aneinanderlegen die früheren und neuere,

Fig. 7.

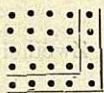


zusammengesetztere Figuren abzuleiten, wie etwa Fig. 7, deren Entstehung unmittelbar ersichtlich ist.

5. Waren je nach den verschiedenen Mengen von zusammengefügtten Einheiten, entsprechend den obigen Figuren 3 und 4, auch verschieden grosse Platten gebildet, so gaben sich bei deren Aufeinanderlegen, sowie dann beim Nachzeichnen im Sande deutlich auch die Gnomonen kund. Dass gerade solches „Anlegen von Flächen, ihr Ueberschiessen, ihr

Zurückbleiben (ἡ τε παραβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις) alterthümlich und Erfindungen Pythagorischer Muse sind“, ist uns wörtlich überliefert und, wie ich glauben möchte, für die früheste Stufe gerade auch von der Modellbenützung zu verstehen.*

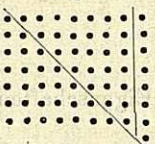
Fig. 10.



Einer der einfachsten Fälle zeigte die Eigenthümlichkeit, dass auch das Ueberschiessende ebensoviele Einheiten enthält, als eine der ersten gebildeten Quadrattafeln, d. h. dass der Gnomon (Fig. 10) selbst eine Quadratzahl** ist, nämlich

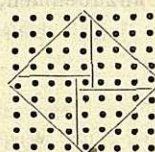
* Durch solches Aneinanderlegen und wiederum Zerlegen von mit Zahlen identischen Flächen wurden gewiss auch arithmetische Sätze gefunden; wie dies geschah, möge an den folgenden zwei Beispielen erläutert werden.

Fig. 8.



Angenommen, es wurden zwei aufeinander folgende Gestalten der oben erwähnten Fig. 2 aneinander gelegt (Fig. 8), Gestalten also, welche Dreieckszahlen bedeuten, etwa die siebente und achte (d. i. $\frac{7 \cdot 8}{2} + \frac{8 \cdot 9}{2} = 28 + 36 = 64 = 8^2$), so war sofort zu sehen, dass die eine rechts überschüssende Reihe unten angefügt ein Quadrat vervollständige, d. h. man erkannte, in unseren Zeichen ausgedrückt, dass $\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n-1+2)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} + n = n(n-1) + n = n(n-1+1) = n^2$ sei, d. h. dass jede Dreieckszahl mit der nächstfolgenden vereinigt eine Quadratzahl giebt¹⁰⁾.

Fig. 9.



Ebenso war (Fig. 9), diesem Gedankengange des Zusammenhanges zwischen Dreieckszahl und Quadratzahl folgend, ziemlich leicht zu erkennen, dass jede Quadratzahl gleich dem um 1 vergrößerten Achtfachen einer Dreieckszahl ist¹¹⁾; wie wir nämlich schreiben, ist in der That $8 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + 1 = 4n(n-1) = 4n^2 - 4n + 1 = (2n-1)^2$.

** Cantor und ihm folgend Günther denken sich¹²⁾ die Auffindung dieser Thatsache etwas anders. Pythagoras habe nämlich eifrigst Summationen von aufgeschriebenen Zahlenreihen vorgenommen; nämlich so, wie er aus

$1 = 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9, \dots$ die Quadratzahlen und aus

$2 = 2, 2 + 4 = 6, 2 + 4 + 6 = 12, \dots$ die heteromeken Zahlen

fand, so habe er auch die Reihe der Quadratzahlen und mit Weglassung von 1 die Reihe der ungeraden Zahlen unter einander geschrieben und addirt:

$$\begin{array}{r} 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad \dots \quad n^2 \\ 3 \quad 5 \quad 7 \quad 9 \quad 16 \quad \dots \quad 2n+1 \\ \hline 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad \dots \quad (n+1)^2 \end{array}$$

und habe so wieder die Quadratzahlen gefunden; er habe dann auch die Reihe der Dreieckszahlen angeschrieben und darunter dieselbe nochmals mit Weglassung von 1, um so durch Summation derselben

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad \dots \quad \frac{(n-1)n}{2} \\ 3 \quad 6 \quad 10 \quad 15 \quad 21 \quad \dots \quad \frac{n(n+1)}{2} \\ \hline 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad \dots \quad n^2 \end{array}$$

$$16 + 9 = 25.$$

Ein Vergleichen der entsprechenden drei Quadrattafeln führte zum Aneinanderfügen derselben; an dieser Figur, welche also schon die Grundfigur zu der des Euklid'schen Beweises war, ergab sich die Rechtwinkligkeit durch den Augenschein.

Nun will ich freilich nicht leugnen, dass Pythagoras aus Aegypten her oder aus Babylon die Thatsache wissen konnte, dass sich durch Zusammenfügen von drei Stäben, deren Maasszahlen 3, 4, 5 sind, ein rechter Winkel construiren lasse; aus meiner vorhin gegebenen Darlegung geht aber hervor, dass ganz wohl auch Pythagoras selbst zu dieser Entdeckung gelangen konnte. Dass sich jedenfalls in seinem Bewusstsein, wie Cantor sagt, die geometrische und die arithmetische Wahrheit zu einem gemeinschaftlichen Satze vereinigten, ist wohl gewiss.

6. Der Gedanke lag nun nahe, einerseits zu versuchen, ob sich bei weitergehender Ränderung eines Quadrates wieder der Fall ereignen könne, dass der zu verwendende Gnomon selbst ein Quadrat ist — und dass dies durch Pythagoras durchgeführt wurde, wird der Abschnitt II meines Aufsatzes zeigen —, andererseits zu probiren, ob solche neuen drei Quadrate zusammengefügt auch wieder einen rechten Winkel ergaben. Die Probe zeigte die Richtigkeit der Vermuthung, und nun erst dürfte wohl der Gedanke in das Bewusstsein des Pythagoras eingetreten sein, dass auch umgekehrt die Summe der Quadrate der Katheten jedes recht-

abermals die Quadratzahlen zu erhalten; ferner habe er auch die Reihe der Quadratzahlen zweimal unter einander geschrieben (das zweite Mal wieder mit Weglassung von 1 und nach deren Addition

1	4	9	16	25	36	...
4	9	16	25	36	49	...
5	13	25	41	61	85	...

das „höchst auffallende Ergebniss“ gefunden, dass die Summe der Quadratzahlen 9 und 16 die nächstfolgende Quadratzahl 25 ergab, und dass nur bei ihnen sich diese Erscheinung zeigte, für uns heute leicht begreiflich, weil die Gleichung $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ nur die Wurzeln 4 und 0 besitzt, von welchen die letztere natürlich für die Alten unzulässig war.

Dass die hier reproducirte Art der Gewinnung von arithmetisch interessanten Ergebnissen bei den neupythagoreischen Arithmetikern (etwa 120 n. Chr.) gebräuchlich war, steht fest, aber mehr als das beweisen alle die bei Cantor a. a. O. citirten Stellen nicht, er selbst „wagt ja auch nur eine unmittelbar nicht auf Ueberlieferung sich stützende Vermuthung“; ich will auch noch zugeben, dass die späteren Altpythagoreer, ja selbst die Schüler des Pythagoras derartige auf hingeschriebene Zahlenreihen sich gründende Zahlenbetrachtungen angestellt haben; was ich aber als unwahrscheinlich bestreite, ist, dass die Genesis des Pythagoreischen Satzes — und darauf allein kommt es hier an — derartig gewesen sei. Man könnte dies auch kurz so aussprechen: Andere glauben, dass die Erkenntniss von $9 + 16 = 25$, ich meine, dass die Erkenntniss von $16 + 9 = 25$ zur Auffindung des Pythagoreischen Satzes geführt habe.

winkligen Dreiecks dem Quadrat über der Hypotenuse desselben gleichflächig sei.

Dass für diese Wahrheit auch der Beweis erbracht wurde, ist höchst wahrscheinlich; wie dieser Beweis aber gestaltet war, ist durchaus unbekannt, obwohl gern zugegeben werden mag, dass der bei Bretschneider¹³⁾ und Hankel¹⁴⁾ sich findende der Wahrheit nahe kommt.

7. Zum Schlusse dieses Abschnittes seien noch zwei Bemerkungen kritischer Art beigelegt. Erstens findet sich bei Cantor die folgende Stelle¹⁵⁾: „Schwerlich leitete den Pythagoras das nach ihm benannte geometrische Theorem auf seine arithmetischen Sätze, sondern umgekehrt mögen ihn die Beispiele zweier Quadratzahlen, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, auf die Relation zwischen den Quadraten der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufmerksam gemacht haben.“ So drückte sich ein deutscher Gelehrter (J. F. Wurm) bereits 1833 aus, welcher vermuthlich zuerst diese, wie wir glauben, richtige Anschauung von dem Entwicklungsgange sich aneignete.“ Für richtig halte auch ich, wie die obige Darlegung zeigt, Wurm's Auffassung; aber sie ist nicht von diesem zuerst, sondern ist ein Vierteljahrhundert früher schon von Klügel (1808) ausgesprochen worden¹⁶⁾: „Pythagoras oder einer seiner Nachfolger mag darauf durch eine arithmetische Frage gekommen sein, über die Zusammensetzung einer rationalen Quadratzahl aus zwei rationalen Quadraten. Denn...“.

Ja schon im 16. Jahrhundert haben Einige denselben Gedanken gehabt. In der von Clavius besorgten Ausgabe¹⁷⁾ des Euklid nämlich (1589) schreibt Clavius: „*Inventio porro admirabilis atque pulcherrimi huius theorematism ad Pythagoram refertur ... Fortasse autem Pythagoras, ut nonnulli volunt, ex numeris occasionem sumpsit, ut theorema hoc investigaret. Cum enim hos tres numeros 3, 4, 5 diligenter esset contempletus ...*“.

Meine zweite Bemerkung soll sich auf die Frage beziehen, wer wohl zuerst den der Wahrheit am nächsten kommenden Versuch gemacht hat, den Gedankengang des Pythagoras wieder herzustellen, soweit dieser den geometrischen Beweis unseres Satzes betrifft. Als solcher Wiederhersteller gilt¹⁸⁾ Bretschneider; aber auch hierin war Klügel Vorgänger, da er sich¹⁹⁾ folgendermassen ausspricht (1808): „Die Bemerkung, dass das Quadrat der Hypotenuse eines gleichschenkeligen rechtwinkligen Dreiecks doppelt so gross ist als das Quadrat einer der gleichen Katheten, war leicht gemacht, ohne Zweifel früher als der allgemeine Satz gefunden ward. Man konnte also auch die Seite des vierfachen Quadrates u. s. f. in verdoppelter Fortschreitung finden ... Oder man ist durch eine zufällige leichte Construction darauf gerathen, etwa indem man in ein Quadrat ein anderes einzeichnete und die Theile verglich, vielleicht gar folgendergestalt“ — und nun giebt er genau Figur und Beweis wie Bretschneider a. a. O., fügt aber alsbald auch hinzu,

dass er diesen Beweis aus einem englischen Lehrbuch der Geometrie von Henry Boad (London 1733) entnehme²⁰⁾.

II. Des Pythagoras und Platon Vorschrift zur zahlenmässigen Bestimmung von rationalen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks.

8. Euklid's Commentator Proklus (gest. 485 n. Chr.) schreibt dem Pythagoras die folgende Regel zu behufs bequemer Angabe von ganzen Zahlen, welche Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sein können: „Man nimmt die gegebene ungerade Zahl als die kleinere Kathete an; von dem Quadrate derselben die Einheit subtrahirt und der Rest halbt, giebt die grössere Kathete; zu dieser die Einheit addirt giebt die Hypotenuse.“

Woher stammt solche Methode? — ist die naheliegende, auch wohl schon oft aufgeworfene Frage.

Nesselmann nennt²¹⁾ sie zwar „eine Theorie, welche in der späteren Arithmetik von unberechenbarem Einfluss geworden ist und einen hohen Grad von Berühmtheit erlangt hat“, kleidet auch die Regel in moderne Zeichen und zeigt, inwiefern sie nur besondere Fälle von Dreiecken giebt, er sagt aber kein Wort darüber, wie Pythagoras dazu gelangt sein möge.

Arneth scheint²²⁾ diese Vorschrift „ganz das Aussehen zu haben, als ob auch sie aus dem Orient gekommen wäre“.

Röth mag wohl zuerst²³⁾ den folgenden Weg als den des Entdeckers skizzirt haben. Soll nämlich $b^2 + c^2 = a^2$ werden, dann — so habe sich Pythagoras gesagt — muss $c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ sein, d. h. es müssen $(a+b)$ und $(a-b)$ beide gerade oder beide ungerade sein und zugleich derart, dass ihr Product eine Quadratzahl ist, d. h. $(a+b)$ und $(a-b)$ müssen bez. die Form $\frac{\alpha^2}{\gamma}$ und $\frac{\beta^2}{\gamma}$ haben; dadurch muss $a = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2\gamma}$ und $b = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\gamma}$ sein, und es wird $c = \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma}$. Die besondere Regel des Pythagoras ergebe sich durch die besondere Annahme von $\beta = \gamma = 1$, so dass

$$c = \alpha, \quad a = \frac{\alpha^2 + 1}{2}, \quad b = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$$

ist, worin denn auch liege, dass Pythagoras von α als einer ungeraden Zahl ausgehen müsse.

Cantor hat diese Darstellung erst²⁴⁾ selbst übernommen, später²⁵⁾ sie etwas abgeändert und dadurch etwas annehmbarer gemacht. Nämlich der erst ausgesprochenen Bedingung werden $(a+b)$ und $(a-b)$ einfachsten Falles dadurch genügen, dass sie Pythagoras bzw. gleich einer Quadratzahl c^2 und gleich der Einheit setze, so dass also, weil 1 ungerade, auch c^2 , somit auch c ungerade sein muss, etwa $= 2\delta + 1$. „So

kam die Formel des Pythagoras darauf hinaus, $(2\delta + 1)^2 = (2\delta + 1)^2 \cdot 1$ zu setzen und darnach aus $(2\delta + 1)^2 = (a + b)$ und $1 = (a - b)$ die Werthe $b = \frac{(2\delta + 1)^2 - 1}{2}$ und $a = \frac{(2\delta + 1)^2 + 1}{2}$ zu ermitteln, welche zusammen mit $c = 2\delta + 1$ die gestellte Aufgabe lösen. Die Formen, in welchen b und a auftreten, entsprechen, wie man sofort erkennt, genau dem Wortlaute der Angabe des Proklus, was immer ein günstiges Vorurtheil für die Richtigkeit eines Wiederherstellungsversuches gewährt ...“ — Cantor selbst erhebt (B. S. 109) betreffs der ersteren Formulirung als möglichen Einwand, „ob wohl die Griechen (— will sagen Pythagoras —) im Stande waren, aus Summe und Differenz zweier Zahlen die Zahlen selbst zu finden“. Aber wenn man auch mit ihm diesen Einwand als hinfällig betrachtet (selbst ohne dass es nöthig wäre, auf Aegypten zu verweisen), so dürfte wohl, scheint mir, jeder Leser das vorgebrachte Raisonement als zu modern, als zu kunstreich für Pythagoras' Zeit ansehen.

Bretschneider zieht²⁶⁾ auch hier die Erklärung durch ein mehr experimentirendes Verfahren vor. Ihm scheint „die Auffindung dieser Regel ausnehmend einfach, wenn Pythagoras den arithmetischen Satz kannte, dass die Summe der aufeinander folgenden ungeraden Zahlen die Reihe der Quadratzahlen liefert ... Denn schrieb er sich die Reihe der natürlichen Zahlen und die ihrer Quadrate untereinander und bemerkte unter jeder Quadratzahl ihre Differenz mit der nachfolgenden, wie z. B.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	...
3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	...

so ergab sich seine Regel von selbst, wenn er in der untersten Reihe diejenigen Zahlen aussuchte, welche selbst Quadratzahlen sind. Die Grundzahlen der letzteren gaben ihm stets die kleinere Kathete, während die beiden über ihr stehenden und sie einschliessenden Zahlen die Quadrate der beiden anderen Seiten und somit letztere selbst lieferten. Auch ist es bei dieser Annahme von selbst klar, weshalb Pythagoras seine Regel gerade so fasste, wie sie Proklos uns angiebt. Denn er hätte auch sagen können: „man addire und subtrahire die Einheit zu und von dem Quadrate der gegebenen ungeraden Zahl und halbire die erhaltenen Resultate, so erhält man die beiden anderen Zahlen“. Offenbar aber wäre diese Fassung nicht so unmittelbar an das vorstehende Schema anschliessend, als die von Pythagoras gegebene“.

Auch Hankel scheint die erwähnte Methode „ihren Ursprung noch deutlich an der Stirne zu tragen“, und er erklärt sich im Wesentlichen für Bretschneider's Auffassung²⁷⁾.

Günther²⁸⁾ lässt sich auf eine Erklärung nicht ein; aber auch er scheint das an hingeschriebenen Zahlenreihen experimentirende Verfahren für eine solche beiziehen zu wollen, nur dass er, den oben (Anmerkung zu S. 214) angedeuteten Gedankengang weiterführend, die nachstehende Anordnung:

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 225 256 ...
 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 196 ...
 1 4 9 16 25 36 49 ...

gebildet und so die beiden neuen Gleichungen

$$25 + 144 = 169, \quad 36 + 64 = 100$$

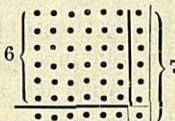
gefunden denkt; entsprechend könne dann rein empirisch die Anzahl solcher Relationen vermehrt worden sein.

9. Mir scheinen alle solche Wiederherstellungsversuche von Pythagoras' Gedankengang verfehlt, sofern sie den Boden des Experiments verlassen, zu abstract aber und erst einer zweiten, späteren Stufe der Entwicklung angehörig, sofern sie die unmittelbare Anschaulichkeit der Ableitung ausser Acht lassen. Ich möchte mich deshalb in Weiterführung der oben (in I) entwickelten grundlegenden Auffassung für folgende Entstehungsart entscheiden.

Pythagoras — oder wer sonst diesen Weg des experimentalen Forschens zum ersten Male ging — sah und zeigte, dass die Viertelumrahmung oder Ränderung eines mit Rechensteinen besetzten quadratischen Feldes wiederum zur Gestaltung eines Quadrates führe, und als er bei $16 + 9 = 25$ den besondern Fall erkannte, dass die Summe zweier Quadrate wieder ein Quadrat sei, da lag die Frage nahe, ob sich dies auch weiterhin ereignen könne, und sie spitzte sich nun darauf zu, ob die Ränderungszahl, d. i. der Gnomon, eine quadratische

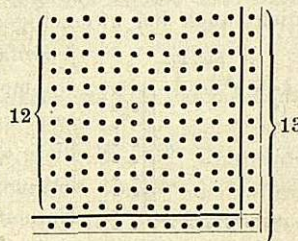
Fig. 11.

Zahl sein könne. Dass dies nicht jedesmal der Fall (z. B. Fig. 11), war leicht zu sehen; ebenso leicht aber auch, dass dies mit Absicht hergestellt werden konnte (z. B. Fig. 10 oder 12), indem man nur eine ungerade Quadratzahl als Ränderungszahl auswählte; die im



Eck stehende Einheit weglassend, hatte man zwei gleichviele Einheiten zählende Ansatzreihen, und in der Anzahl der Einheiten einer derselben hatte man dann auch naturgemäss die Zahl, welche der Länge der einen Quadratseite (der einen Kathete) entsprach; diese Zahl um 1 vergrössert, gab die Länge der grössten Quadratseite (der Hypotenuse), und die Grundzahl, deren Quadrat anfänglich als Ränderungszahl ausgewählt war, war naturgemäss auch die Länge der kleinsten Quadratseite (der kleinsten Kathete).

Fig. 12.



So dürfte wohl am einfachsten das Ausdenken der berühmten Pythagoreischen Regel sich entwickelt haben, und mir scheint, dass auf meinen Wiederherstellungsversuch die oben (S. 217 u. 218) betreffs eines günstigen Vorurtheils für einen solchen citirten Worte von Bretschneider und Cantor mit Fug und Recht ihre Anwendung finden können.

10. Gleichwie dem Pythagoras, so schreibt Proklus auch dem Platon eine Regel zu, um ganzzahlige Werthe für die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden. Er sagt nämlich: „Man nimmt eine gerade Zahl an und setzt sie gleich einer der beiden Katheten; wird dieselbe halbirt, die Hälfte quadriert und zu diesem Quadrate die Einheit addirt, so ergibt sich die Hypotenuse; wird aber die Einheit vom Quadrat subtrahirt, so erhält man die andere Kathete.“

Wie ist diese Fassung der Regel entstanden?

Arneth verzichtet auf einen Erklärungsversuch²⁹⁾; Cantor aber findet in seiner ersten Darstellung³⁰⁾, wenn wieder die S. 217 verwendeten Zeichen gebraucht werden, dass man dort nur $\beta = \gamma = 2$ zu setzen habe, so dass

$$c = \alpha, \quad a = \frac{\alpha^2}{4} + 1, \quad b = \frac{\alpha^2}{4} - 1$$

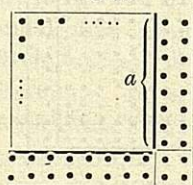
wird; in seiner zweiten Darstellung³¹⁾ aber sagt er, dass die Annahme von $(a-b)=2$ zur Folge hatte, $(a+b)$ gleich dem Doppelten einer Quadratzahl $(=2\varepsilon^2)$ oder gleich der Hälfte einer geraden Quadratzahl $(=\frac{(2\varepsilon)^2}{2})$ setzen zu müssen, so dass also von selbst

$$c = 2\varepsilon, \quad b = \varepsilon^2 - 1, \quad a = \varepsilon^2 + 1$$

wurde. — Bretschneider endlich spricht sich dahin aus³²⁾, es sei „leicht zu sehen, dass Platon nur die Zahlen, welche bei der Regel des Pythagoras angewendet werden, zu verdoppeln brauchte, um sofort die von ihm selbst aufgestellte Regel zu erhalten“.

Auch ich meine, dass in gewissem Sinne nur an ein Verdoppeln zu denken war; aber dem vorhin Dargelegten entsprechend scheint mir die einfachste Erklärung die, dass der Erfinder des Verfahrens versuchte, ob nicht auch bei zweizeiligem Umrändern des Quadrates (Fig. 13), was ja

Fig. 13.



jedenfalls zu einem neuen Quadrat führen musste, der Gnomon selbst auch einer neuen Quadratzahl identisch sein könne. Er nahm ihn demnach als solche an; diese Quadratzahl enthielt dann das aus vier Einheiten bestehende Eckquadrat sammt den vier je gleichviele Einheiten zählenden Ansatzreihen [d. i. $= 4 + 2a + 2a = 4(a+1)$], so dass die Seite des dem Gnomon identischen Quadrats als eine gerade Zahl sich darstellte und dass der vierte Theil dieses Quadrats oder, was dasselbe, das Quadrat der Hälfte seiner Seite [d. i. $(a+1)$] die um 1 vergrößerte Anzahl von Einheiten des

ursprünglichen noch nicht umränderten Quadrats zur Seite hat; eine Verminderung oder Vermehrung dieser Seite je um 1 giebt also die Seite des ursprünglichen kleineren, bezw. die des neu gebildeten grösseren Quadrates [d. i. a und $(a+2)$].

Man wird wohl auch dieser Wiederherstellung das Zeugniß der Natürlichkeit und Ungezwungenheit nicht versagen können.

Es erledigt sich mit ihrer Annahme auch die von Bretschneider (a. a. O. S. 140) aufgeworfene, aber unentschieden gelassene Frage, „ob Platon seine Regel streng bewiesen oder sich mit einer Induction begnügt hat“: die Regel wurde eben durch Induction gefunden, aber diese Induction war hier ihrer Natur nach gleichwerthig mit dem Beweise.

Und auch die andere von Röth (II, 527) zur Discussion gebrachte Frage, ob nicht die beiden Verfahrungsweisen zur Auffindung rationaler Seiten des rechtwinkligen Dreiecks zu gleicher Zeit entstanden sein möchten, ist trotzdem, dass nach altüberlieferten Zeugnissen die eine dem Pythagoras, die andere dem Platon zugeschrieben wird, gar nicht so unbedingt zu verneinen, wie dies Cantor gegenüber Röth thut³³⁾; denn nach meiner Auffassung wenigstens über die Entstehung wäre man berechtigt, sich zu wundern, wenn nicht beide gleichzeitig aufgefunden worden wären.*

III. Das zweite Buch der Elemente Euklid's. — 11. Bretschneider's Untersuchungen über die Geometrie und die Geometer vor Euklid

* Es wäre sogar auch denkbar, dass man noch andere analoge Regeln zu finden vermuthet habe, freilich aus dem sofort zu erwähnenden Grunde nicht gefunden hat. Versuchte man nämlich das im Text zweimal angewendete Verfahren auch so weit auszudehnen, dass man durch dreimaliges Umrändern wieder zu einem Quadrat gelangen wollte (Fig. 14), so müsste, in unseren Zeichen ausgedrückt, $9 + 3a + 3a = 3 \times (2a + 3)$ eine Quadratzahl sein, also eine durch 3 theilbare ungerade Zahl, d. h. die zu quadrirende Zahl müsste ein ungerades Vielfaches von 3 sein, etwa z . Dieses z quadriert, z^2 , dann durch 3 dividirt, $\frac{z^2}{3}$, dann 3 subtrahirt, $\frac{z^2}{3} - 3$, giebt eine gerade Zahl ($= 2a$), deren Hälfte das gewünschte a ist; $(a+3)$ ist dann die dritte gesuchte Zahl. Z. B. $z=9$, $z^2=81$, $\frac{z^2}{3}-3=24$, Hälfte $=12$, somit: 9, 12, 15. Allgemein: $z=3(2n+1)$, $z^2=9(4n^2+4n+1)$, $\frac{z^2}{3}-3=12n^2+12n$, Hälfte $=6n(n+1)$, so dass als die drei die Aufgabe erfüllenden Zahlen sich herausstellen:

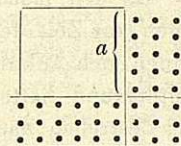
$$3(2n+1), \quad 6n(n+1), \quad 3(2n^2+2n+1),$$

welche auf

$$2n+1, \quad 2n(n+1), \quad 2n^2+2n+1,$$

d. h. auf die durch Pythagoras' Regel zu bestimmende Zahlengruppe hinauskommen.

Fig. 14.



haben die „Elemente“ des Letzteren, so sehr sie auch vom Gesichtspunkte der Logik aus wunderbar einheitlich aufgebaut sind, gleichwohl, was geschichtliche Entwicklung betrifft, als eine An- und Ineinanderfügung von Satz- und Constructionsgruppen recht verschiedenen Alters erkennen lassen. So hat Bretschneider selbst die Ausdehnung des Pythagoreischen Satzes auf spitz- und stumpfwinklige Dreiecke (Eukl. II, 12 u. 13) als voreuklidisch, ja vorhippokratisch (also vor der Zeit um 410 v. Chr.) nachgewiesen; er hat auch die richtige Empfindung gehabt, dass der wesentliche Gehalt des zweiten Buches überhaupt voreuklidisch, ja fast pythagoreisch zu nennen ist, indem er sich dahin aussprach³⁴), dass die genannte „Erweiterung der Planimetrie, mit welcher der Natur der Sache nach die Entwicklung der meisten Sätze des zweiten Buches der Euklidischen Elemente zusammenhängt, ist demnach ein Verdienst, welches, wenn nicht den unmittelbaren Schülern des Pythagoras, so doch wenigstens der zweiten Generation derselben zufällt.“

In der That, es wird dies nicht leicht bestritten werden können, und wenn auch Bretschneider nur von den „meisten Sätzen“ des zweiten Buches im angeführten Sinne redet, so glaube ich zeigen zu können, dass man ruhig die „meisten“ durch „alle“ ersetzen kann.

Dies nachzuweisen, ist die Absicht dieses dritten Theiles meines Aufsatzes, und zwar möchte ich im Einzelnen, Satz um Satz, zeigen, dass jeder derselben ein natürliches Ergebniss derjenigen Art von Betrachtungen war, wie ich sie oben als für Pythagoras und seine Schule giltig dargelegt habe.

12. Ich machte die einfache Annahme, dass die ersten Untersuchungen zur Zeit des Pythagoras an die Aneinanderreihung von Rechensteinen sich anknüpften und, wenn sie sonach auch einen geometrischen Hintergrund hatten, doch im Wesentlichen arithmetischer Natur waren. Das Bestreben nach rascherer Darstellung der Rechensteinstreifen in Verbindung mit der Freude am Studium der Formen an sich führte gewiss bald dazu, blos Rechtecks- und Quadrat-Figuren als Substrate der bezüglichen Zahlen zu zeichnen und so die Betrachtung zu einer rein geometrischen umzugestalten.

Nun war die quadratische Zahl ein Quadrat, die rechteckige Zahl ein Rechteck, die Ränderungszahl ein eigentlicher Gnomon, eine dem Winkelhaken vergleichbare Fläche geworden, und was man seither vielfach geübt, ohne besondere Redewendungen dafür zu gebrauchen, ward nun in bestimmten schulmässigen Ausdrücken, in Lehrsätzen fixirt: 1. dass ein Rechteck in mehrere gleichbreite zerlegbar sei; 2. dass ein Quadrat in Rechtecke, und 3. dass auch ein Rechteck in zwei Theile, in ein Quadrat und ein überschliessendes Rechteck zerlegt werden könne; 4. dass der Gnomon, welcher einem Quadrat zugefügt werden müsse, um dasselbe in ein grösseres Quadrat zu verändern, aus zwei gleichgrossen

Rechtecken und einem Quadrat bestehe (Fig. 15); 5. dass, wenn einem Quadrat das ganze durchgehende Rechteck eines Gnomons beiderseits angefügt werde (Fig. 16), das Ergebniss der Summe zweier Quadrate gleichwerthig sei, und endlich 6. war es auch nur ein Feststellen dessen, was man bei wiederholtem Umrändern eines Quadrats so oft hatte auftreten sehen, dass nämlich (Fig. 17) ein zweimaliges Anfügen des Rechtecks β an das Quadrat α ein überschüssiges Quadrat giebt, dass aber, wenn man dieses als γ anfügt und darauf noch die Lücken durch die zwei mit β gleichen Rechtecke δ ausfüllt, dass dann wieder ein Quadrat entstehe.

Fig. 15.

Fig. 16.

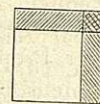
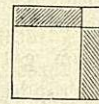
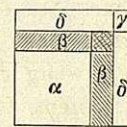


Fig. 17.



Dies ist der Gehalt der vier ersten Sätze und des sieben-ten und achten Satzes des zweiten Buches — dass diese aber in einem dem meinigen ähnlichen Wortlaut zuerst ausgesprochen wurden und nicht in der starren schulmässigen Form, wie sie sich bei Euklid finden, ist wohl zuzugeben.

Der Gnomon war in der interessanten Untersuchung, welche zu dem Pythagoreischen Satze führte, als genau einem Quadrate gleichwerthig erkannt worden. Es schloss sich naturgemäss der Wunsch, bezw. die Frage an, ob nicht jedes Rechteck in ein Quadrat umgewandelt werden könne — dass dies entsprechend der bei Ränderung eines Quadrates auftretenden Figur, freilich vorerst auch nur unter gleichzeitiger Zufügung eines Quadrats, möglich sei, behaupten die Sätze 5 und 6 unseres zweiten Buches.

Erstens nämlich (Fig. 18): wenn das Rechteck AH vorlag, so war der Gedanke naheliegend, einen Theil desselben als DF anzufügen, um zur quadratischen Gestalt CF zu gelangen; dann musste

Fig. 18.

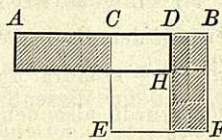
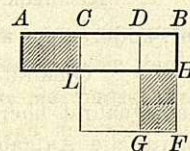


Fig. 19.



$DB = DH$ und $FB = BC$, also letztere Strecke $= CA = \frac{AB}{2}$ gemacht werden, und so entstand der Satz, dass

$$\text{Rechteck } AH + \text{Quadrat } EH = \text{Quadrat } CF$$

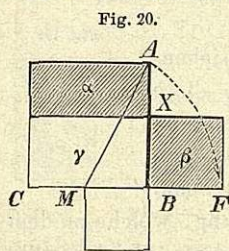
sei.

Zweitens (Fig. 19): wenn wieder das Rechteck AH vorlag, so konnte (immer in der Absicht, die Gestalt der Fig. 16 herzustellen) ein Theil des Rechtecks als HG angefügt werden, um zur quadratischen Gestalt CF zu gelangen; dann musste $DB = BH$ und $HF = DC$, also letztere Strecke $= CA = \frac{AD}{2}$ gemacht werden, und so entstand der Satz, dass

$$\text{Rechteck } AH + \text{Quadrat } LG = \text{Quadrat } CF$$

sei.

13. Den Gedankengang der zwei zuletzt erwähnten Sätze aufnehmend und weiterführend, erscheint im zweiten Buche die die Nummer 11 tragende berühmte Aufgabe: „Eine Strecke so zu theilen, dass das aus der ganzen Strecke und einem der beiden Abschnitte gebildete Rechteck dem Quadrat des übrigen Abschnittes gleich sei“ — oder in dem andern Wortlaut, wie sie in VI, 30 wieder erscheint: „Eine Strecke soll nach stetiger Proportion getheilt werden.“ So paradox diese Aufgabe auch im Gebiete der Proportionslehre klingen mag (wo sie ja verlangt, die mittlere Proportionale zu construiren zwischen einer gegebenen Strecke und einer andern, deren Grösse erst nach Lösung der Aufgabe bekannt sein wird), so einfach ergab sie sich für einen denkenden Kopf im Gebiete der Flächenvergleichung.



Waren seither Rechtecke in Gnomone, oder beide sammt Quadraten in Quadrate umgewandelt worden, so sollte nun auch (Fig. 20) das Rechteck α aus der Strecke AB und einem ihrer Theile AX in das über dem Reste XB beschriebene Quadrat β umgewandelt werden.

Wurde α durch γ zu einem Quadrat ergänzt, so musste das Rechteck $(\beta + \gamma) =$ dem Quadrate $(\alpha + \gamma)$ sein, während der Satz 6 (Fig. 19) gelehrt hatte, dass ein Quadrat erhalten werde als gleichwerthig mit einem Rechteck sammt einem Quadrat von bestimmter Art der Zeichnung. Wurde also letzteres als δ , nämlich als das Quadrat über MB , der Hälfte von BC zugefügt, so fand sich eben dem Satze 6 zufolge, dass

Rechteck $(\beta + \gamma) +$ Quadrat $\delta =$ dem Quadrate über MF sei; andererseits aber galt dem Pythagoreischen Satze zufolge die Gleichung

Quadrat $(\alpha + \gamma) +$ Quadrat $\delta =$ dem Quadrate über MA ;
das Quadrat über MF wurde also dem über MA gleich und damit überhaupt die Aufgabe gelöst, wenn

$$MF = MA$$

gemacht wurde.

Die Construction, um AB in X wie verlangt zu theilen, besteht also darin, dass über AB das Quadrat AC gezeichnet, dann nach dessen einer Seitenmitte M die AM gezogen und diese nach MF abgetragen wird; die Construction des Quadrats über BF giebt dann den gewünschten Theilpunkt X .

Im Euklid'schen Beweise zu II, 11 ist die Ursprünglichkeit der Analysis ganz wohl noch zu erkennen, nicht minder auch in Beweis und Figur zu VI, 30.

14. Anders freilich muss das Urtheil lauten über die für meine Betrachtung noch übrig gebliebenen Sätze 9 und 10 des zweiten Buches, bzw. über deren Beweise. Denn dass die Sätze selbst naturgemäss in

diese ganze Reihe von Betrachtungen gehören, habe ich schon zu Anfang der vorigen Nummer angedeutet; dass aber ihre bei Euklid sich findenden Beweise der Ursprünglichkeit entbehren, scheint mir gewiss.

Ich versuche diese herzustellen, indem ich die zu addirenden Quadrate über PQ und QR einfach neben einander zeichne (Fig. 21 u. 22) und die in beiden Fällen entstehende sechseckige Figur in Quadratgestalt

zu verwandeln suche zunächst dadurch, dass ich entweder über jeder Hälfte von PR das Quadrat zeichne (Fig. 21) oder über der ganzen Strecke PR das Quadrat zeichne (Fig. 22). Im ersteren Falle müssen von den entstehenden Theilflächen $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ und $\delta = \beta' + \gamma$ sein, so dass die Summe der zwei Quadrate

$= \alpha + \beta + \gamma + \gamma' + \delta + \varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \gamma' + \gamma' + \beta' + \varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma + \beta') + 2\gamma' + \varepsilon = 2.(\varepsilon + \gamma')$, d. i. nach heutiger Bezeichnung $= 2. [\overline{PM}^2 + \overline{MQ}^2]$ ist. — Im zweiten Falle bleibt ein zweites mit α gleiches Quadrat α' ganz innerhalb, ein zweites mit ε gleiches Quadrat $(\beta + \gamma + \delta)$ fällt theilweise ausserhalb des Quadrates über PR und es ist $\beta = \beta'$, wenn die Grenzlinie zwischen β und γ durch S gezogen wird, wo $SQ = QP$ gemacht ist; dann ist $\alpha + \varepsilon = \frac{1}{2}[\alpha + \alpha' + \varepsilon + \delta + \beta + \gamma] = \frac{1}{2}[(\alpha + \alpha' + \varepsilon + \delta + \beta') + \gamma]$, d. i. nach heutiger Bezeichnung $= \frac{1}{2}(\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2)$, woraus sofort die Euklidische Behauptung folgt:

$$\overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 = 2(\overline{PQ}^2 + \overline{QR}^2).$$

Hiermit glaube ich gezeigt zu haben, dass auch der Gegenstand dieses dritten Theils meines Aufsatzes mit dem in den beiden ersten Theilen Behandelten im inneren Zusammenhang steht, dass also mein Thema in der That ein einheitliches ist.

Anmerkungen.

1) So auch Cantor auf S. 153 seiner „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1. Band. Leipzig 1880“ (weiterhin kurz durch „Cantor, G.“ bezeichnet).

2) C. A. Bretschneider, Die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Leipzig 1870, S. 81.

3) M. Cantor, Mathematische Beiträge zum Culturleben der Völker. Halle 1863, S. 103 (weiterhin kurz durch „Cantor, B.“ bezeichnet).

4) S. Günther, Ziele und Resultate der neueren mathematisch-historischen Forschung. Erlangen 1876, S. 39.

5) Cantor, B., S. 92 und Cantor, G., S. 130.

6) Cantor, G., S. 135, 138, 142 und E. Zeller, Die Philosophie der Griechen in ihrer geschichtlichen Entwicklung. 4. Aufl. I. Bd. Leipzig 1876, S. 373 ff.

7) Zeller a. a. O. I, S. 365 nach Aristot., Metaph. XIV, 5. 1092, b, 10 und Theophrast, Metaph., S. 312 Br.

- 8) Cantor, G., S. 143 nach Aristot., Metaph. XIV, 4.
- 9) Zeller a. a. O. S. 366.
- 10) Cantor, G., S. 143 nach Nicomachus, Eisag. ar. II, 12 (ed. Hoche), S. 96.
- 11) Cantor, G., S. 143 nach Plut. Platon. Quaest. V, 2. 4.
- 12) Günther a. a. O. S. 41 und Cantor, B., S. 106 f und G., S. 143 f.
- 13) Bretschneider a. a. O. S. 82.
- 14) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. Leipzig 1874, S. 98.
- 15) Cantor, G., S. 153.
- 16) Klügel, Mathematisches Wörterbuch, I. Abth. III. Theil. Leipzig 1808, S. 932.
- 17) Die erste Ausgabe des Euklid durch Clavius ist — vgl. Kästner's Gesch. d. Math. I, 324 — vom Jahre 1574 ohne Erläuterungen, die zweite mit solchen aus dem Jahre 1589, die dritte aus dem Jahre 1591. Ich benütze den Frankfurter Abdruck vom J. 1607, und in diesem findet sich die im Text citirte Stelle im Scholium zu Buch I, 47, S. 151.
- 18) Bretschneider a. a. O. S. 82. — Vergl. Hankel a. a. O. S. 98; Günther a. a. O. S. 42; Cantor, G., S. 157.
- 19) Klügel, Math. Wörterb. Bd. III S. 932.
- 20) Aus diesem Buche von Henry Boad (London 1733) hat denselben Beweis auch Joh. Hoffmann in seiner Sammlung von Beweisen des Pyth. Satzes (1821) entnommen und hat darnach noch sechs andere Beweisaneinanderungen abgeleitet. Vergl. die neuere Schrift von Jury Wipper, 46 Beweise des Pythagoräischen Lehrsatzes, übers. v. F. Graap. Leipzig 1880, S. 17.
- 21) G. H. F. Nesselmann, Die Algebra der Griechen. Berlin 1842, S. 150.
- 22) Arneth, Geschichte der reinen Mathematik. Stuttgart 1852, S. 83.
- 23) Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie II, 527 (nach Cantor, G., S. 157). — A. a. O. sagt auch Cantor, dass der im Text skizzirte Weg von Röth „zuerst vermuthungsweise geschildert worden ist“.
- 24) Cantor, B., S. 108 f.
- 25) Cantor, G., S. 157 f.
- 26) Bretschneider a. a. O. S. 83.
- 27) Hankel a. a. O. S. 100 u. 132.
- 28) Günther a. a. O. S. 41.
- 29) Arneth a. a. O. S. 95.
- 30) Cantor, B., S. 109.
- 31) Cantor, G., S. 192.
- 32) Bretschneider a. a. O. S. 140.
- 33) Cantor, B., S. 109.
- 34) Bretschneider a. a. O. S. 134