

5580

VISSER, C.

1946/47

DE LEER DER GETALLEN

door

Dr. C. VISSER ¹⁾.

Het zij mij vergund U in dit uur een en ander mede te delen over de leer der getallen.

Bertrand Russell heeft eens de wiskunde gekarakteriseerd als de wetenschap, waarvan de beoefenaren niet weten, waarover zij spreken, terwijl het hen ook niet interesseert of wat zij uitspreken werkelijk waar is. Deze woorden, die een oningewijde waarschijnlijk vreemd in de oren zullen klinken, bevatten meer waarheid dan men wellicht geneigd is te denken en zij zullen dan ook door geen wiskundige lichtvaardig worden tegengesproken.

Dat neemt echter niet weg, dat vrijwel iedere wiskundige de behoefte heeft het werken met zijn symbolen en formules te rechtvaardigen en te verklaren door er de een of andere voorstelling aan te verbinden. In het bijzonder geldt dit voor de principiële elementen, die het uitgangspunt van zijn verdere beschouwingen moeten vormen. Tot die principiële elementen behoren in de eerste plaats de getallen en het is mijn bedoeling, bij wat ik ga zeggen, in het bijzonder de nadruk te leggen op de aanschouwelijke voorstellingen, waaruit de fundamentele begrippen van de leer der getallen ontstaan kunnen worden gedacht en over de manier, waarop dit kan geschieden.

Ik begin met de natuurlijke getallen. Men heeft het begrip natuurlijk getal op grondige wijze geanalyseerd en er vele verhandelingen over geschreven. De wiskundigen onder U zullen hierbij denken aan de namen *Frege* en *Dedekind*. Volgens *Dedekind* ligt de oorsprong van het getalbegrip in het vermogen van onze geest dingen te laten corresponderen met andere dingen, aan een ding een ander ding toe te voegen, of een ding door een ander ding af te beelden. Zonder dat, zegt hij, zou helemaal geen denken mogelijk zijn.

Wij zullen ons in beschouwingen van deze aard niet verder verdiepen, maar ons om te beginnen op het standpunt stellen, dat het woord aantal of cardinaalgetal een duidelijke betekenis heeft en dat we daarbij denken aan een zekere hoeveelheid van dingen, een eindige verzameling om een wiskundige term te gebruiken, en tegelijk

¹⁾ Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de theoretische mechanica aan de Technische Hogeschool te Delft op 3 Oct. 1946.

abstraheren van de bijzondere aard van die dingen. Ook weten we wat optellen en vermenigvuldigen is; we moeten daarbij niet aan rekensommetjes denken, maar aan het bijeenvoegen van hoeveelheden. De som van twee aantallen is het aantal, dat we krijgen door die twee aantallen tot een te verenigen. Het product van twee aantallen is het aantal, dat ontstaat door ieder element van één van die twee aantallen te vervangen door een aantal, dat even groot is als het andere.

Men behoeft zich, ook al heeft men nooit enig rekenonderwijs genoten, en misschien juist dan, niet lang met aantallen bezig te houden, om te constateren, dat zij allerlei en vaak moeilijk te doorgronden eigenschappen hebben. Als eenvoudig voorbeeld noem ik de volgende. Men zegt, dat een aantal een ander aantal als deler heeft, wanneer het verdeeld kan worden in een aantal aantallen, die alle even groot zijn als dat andere aantal. Neem nu twee aantallen, die we gemakshalve even a en b zullen noemen. We vragen naar de aantallen, die deler zijn zowel van a als b , dus naar de gemeenschappelijke delers van a en b . Is het nu niet een verrassend feit, dat deze gemeenschappelijke delers juist alle delers zijn van één derde aantal c ?

Dit is natuurlijk slechts een zeer eenvoudige kwestie. De meeste problemen op dit gebied liggen veel dieper. Opvallend is vaak het contrast tussen de eenvoud van de probleemstelling en de moeilijkheden, die de oplossing met zich meebrengt. Natuurlijk prikkelt dat juist de onderzoekers ten zeerste. Zij, die zich met het opsporen en doorgronden van de eigenschappen der getallen bezighouden, hebben dan ook bij alle verscheidenheid een trek gemeen. Zij worden door hun onderzoekingen zo bekoord, dat zij van geen ophouden meer weten, zoals de grootste onder hen, de beroemde *Gausz*, heeft gezegd.

In vroeger tijden ging de studie der aantallen dikwijls gepaard met het verkondigen van allerlei merkwaardigheden, die ons heden zonderling aandoen. Deze hebben veelal betrekking op bepaalde individuele eigenschappen der getallen. Zo heeft men een bijzondere belangstelling gehad voor de zogenaamde volmaakte getallen. Onder een volmaakt getal verstaat men een getal, dat gelijk is aan de som van zijn delers; daarbij zijn alleen delers kleiner dan het getal zelf, 1 inbegrepen, bedoeld. Het getal 28 is een voorbeeld van een volmaakt getal; zijn delers zijn 1, 2, 4, 7 en 14 en de som van deze is weer 28. Het kleinste volmaakte getal is 6 ($1 + 2 + 3 = 6$). Een onvolmaakt getal is een getal, dat groter is dan de som van zijn delers; 8 is een voorbeeld van een onvolmaakt getal. Met deze volmaaktheid en onvolmaaktheid van getallen bracht men allerlei dingen in verband. De kerkvader *Augustinus* verkondigde, dat God daarom de wereld in 6 dagen had geschapen en niet ineens, opdat de volmaaktheid van de schepping door het getal 6, het kleinste volmaakte getal, zou worden uitgedrukt. Dezelfde uitspraak deed *Alcuin* van York en Tours. Deze merkte ook op, dat de ark van Noach 8 levende menselijke zielen bevatte en dat daarom het menselijke geslacht, dat begint met Noach, noodzakelijk onvolmaakt is.

Na deze proeve van toegepaste wiskunde moge vermeld worden, dat het begrip volmaakt getal ook aanleiding geeft tot bespiegelingen van zuiver wiskundige aard. Men kent enige even volmaakte getallen; men heeft zelfs een soort formule ervoor, die reeds door *Euclides* werd opgesteld. Men weet echter niet of deze er eindig of oneindig veel voorstelt. Oneven volmaakte getallen kent men helemaal niet en het is niet bekend of er een bestaat.

Zulke onopgeloste kwesties zijn er vele in de getallentheorie en zij behoren tot de moeilijkste problemen, die de wiskunde kent. Ik noem als voorbeeld het beroemde probleem van *Goldbach*. Er is nog nooit een even getal ontdekt, dat niet de som is van twee ondeelbare getallen. Het lijkt wel, dat zo'n splitsing altijd mogelijk is: $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 3 + 11$ en ook $= 7 + 7$, $16 = 5 + 11$ en ook $= 3 + 13$, enz. Toch is dit vermoeden nooit bewezen. De Russische wiskundige *Winogradof* heeft echter in deze richting een indrukwekkend resultaat bereikt. In 1939 bewees hij, dat elk oneven getal de som is van niet meer dan drie ondeelbare getallen.

Van andere merkwaardige eigenschappen, die betrekking hebben op het splitsen van getallen, is de volgende een eenvoudig voorbeeld. Beschouw de ondeelbare getallen van de vorm $4v + 1$, dus de getallen 5, 13, 17, 29, enz. Deze getallen zijn altijd en wel slechts op één manier te splitsen in twee vierkanten: $5 = 1 + 4$, $13 = 4 + 9$, $17 = 1 + 16$, $29 = 4 + 25$, enz. Dit heeft enige eeuwen geleden *Euler* al bewezen.

Nu we toch over ondeelbare getallen spreken, nog een enkel woord daarover. Ondeelbaar noemen we een getal, als het behalve de eenheid en zich zelf geen delers heeft. Het getal 1 rekenen we niet tot de ondeelbare getallen, en de rij der ondeelbare getallen begint dus met 2, 3, 5, 7, 11, 13, enz. De eerste vraag, die hier rijst, is: komt er aan deze rij ooit een einde?; anders gezegd: zijn er eindig of oneindig veel ondeelbare getallen? Het antwoord is, dat er oneindig veel zijn; het hiervoor door *Euclides* gegeven bewijs vindt men heden nog in alle leerboeken. Het berust op het feit, dat ieder getal het product is van ondeelbare factoren. Dit plus de bewering, dat deze ontbinding slechts op één manier mogelijk is, noemt men wel de hoofdstelling van de theorie der natuurlijke getallen. Leken op wiskundig gebied zijn wel geneigd dit te houden voor iets, dat vanzelf spreekt. Dat is echter volstrekt niet het geval.

Een tweede vraag over de ondeelbare getallen is: hoeveel ondeelbare getallen zijn er beneden 100, hoeveel beneden 1000, enz.? Hierover hebben reeds *Legendre* en *Gausz* een vermoeden uitgesproken, maar het heeft tot 1900 geduurd, eer door *Hadamard* en *De la Vallée-Poussin* een bewijs voor dit vermoeden werd gevonden. De stelling van *Hadamard* en *De la Vallée-Poussin* zegt het volgende. Van de getallen beneden een getal x is ongeveer het $(\log x)^{de}$ deel ondeelbaar en hoe groter x is, hoe scherper dit antwoord. $\log x$ betekent hierbij de

natuurlijke logaritmie van x . In meer exacte vorm: is $\pi(x)$ het aantal ondeelbare getallen beneden x , dan heeft de verhouding tussen $\pi(x)$ en $x/\log x$, wanneer x onbepaald toeneemt, de limiet 1. Bij het bewijs van deze stelling treedt de beroemde Zêta-functie van *Riemann* op, een transcendente functie van een complexe veranderlijke, waarvan de eigenschappen nauw samenhangen met die der natuurlijke getallen.

Er zijn natuurlijk vele andere vragen over de ondeelbare getallen te stellen. Ik vermeld er nog een. Het is zeer opvallend, dat er zo vaak zogenaamde tweelingen in de rij der ondeelbare getallen voorkomen. Daarmee bedoelt men paren als 17 en 19, of 29 en 31, dus paren van twee opvolgende oneven getallen, die beide ondeelbaar zijn. Het is niet bekend of er oneindig veel van zulke tweelingen zijn. Wel weet men, dat de som van hun omgekeerden convergeert, terwijl de som van de omgekeerden van alle ondeelbare getallen divergeert. Dat wijst dus op een niet al te veelvuldig voorkomen van tweelingen.

Tot dusver heb ik niet gesproken over de notatie van de getallen met behulp van cijfers en ik zal ook verder hierover zwijgen. De grondbegrippen van de getallentheorie zijn daarvan onafhankelijk. We hebben de theorie der natuurlijke getallen opgevat als de theorie van de eindige verzamelingen; men kan zich voorstellen, dat men spreekt over hoopjes knikkers of pepernoten; men moet weten, wat voor samenvoegingen bedoeld worden met optellen en vermenigvuldigen; een of andere algorithmus heeft daarmee niets te maken; reken-techniek is voor het inzicht in het getalbegrip van geen belang. Heb ik in het vorige enkele getallen, zoals 28, genoemd, dan was dit slechts ter bekorting; ik had ook 28 stippen kunnen tekenen of 28 keer mijn vinger op kunnen steken.

Overigens vormt de ontwikkeling van de methoden om getallen door woorden of tekens op ondubbelzinnige manier aan te geven en in het bijzonder de ontwikkeling van het positiesysteem, dat wij dagelijks gebruiken, een stuk cultuurgeschiedenis van grote betekenis. Het ligt echter buiten mijn bestek daar nader op in te gaan.

Behalve als aantallen of cardinaalgetallen kan men de natuurlijke getallen ook opvatten als ordinaalgetallen. Men denkt dan meer aan het telproces. Met het oog op een later te vermelden generalisatie, wil ik een ordinaalgetal definiëren als een abstracte geordende verzameling. Het begrip geordende verzameling wordt bijvoorbeeld gegeven door een aantal op een rij geplaatste stippen of door een reeks opvolgende gebeurtenissen of tijdstippen. Op voor de hand liggende wijze definieert men voor ordinaalgetallen optelling en vermenigvuldiging. De theorie, die zo ontstaat, is formeel geheel dezelfde als die der cardinaalgetallen.

Als ideale vorm van een deductieve wetenschap wordt door velen beschouwd de axiomatische theorie, waarvan de meetkunde van *Euclides* ons het klassieke voorbeeld geeft. Het is vooral *Hilbert*, die de waarde van de axiomatische methode naar voren heeft gebracht.

Hij beschouwt de axiomatische opbouw van elke wetenschap als het uiteindelijke doel van die wetenschap en als de enige methode, die absolute zekerheid geeft. Zelf heeft hij een diepgaand onderzoek betreffende de axiomatische opbouw van de euclidische meetkunde verricht en daarmee het werk van *Euclides* voortgezet en voltooid.

In een axiomatische theorie wordt elk begrip nauwkeurig gedefinieerd met behulp van reeds vastgelegde begrippen en elke stelling streng bewezen op grond van daarvoor bewezen stellingen. Daar men echter niet met niets kan beginnen, worden enige grondbegrippen zonder definitie en enige grondstellingen of axioma's zonder bewijs als uitgangspunt genomen. Vroeger rechtvaardigde men de invoering van bepaalde grondbegrippen en grondstellingen met een beroep op hun volkomen duidelijkheid en evidentie op grond van aanschouwing of ervaring. Tegenwoordig vat men de zaak anders op. Grondbegrippen en grondstellingen van een axiomatische theorie zijn geheel willekeurig. De theorie wordt opgevat als een abstract systeem, onafhankelijk van aanschouwing of ervaring. Zij wordt daardoor, zoals men het wel uitdrukt, tot een spel met formules, dat volgens zekere regels wordt gespeeld. Men eist slechts, dat deze regels en de uitgangspunten zo zijn, dat het uitgesloten is, dat er ooit een contradictie ontstaat.

Door *Peano* is de leer der natuurlijke getallen in een dergelijke axiomatische vorm gebracht. Grondbegrippen zijn „1”, „natuurlijk getal” en „opvolger van”. De axioma's, vijf in getal, zijn:

- I. 1 is een natuurlijk getal.
- II. Is a een natuurlijk getal, dan is ook de opvolger van a een natuurlijk getal.
- III. Hebben twee natuurlijke getallen dezelfde opvolger, dan zijn zij identiek.
- IV. Is a een natuurlijk getal, dan is de opvolger van a niet 1.
- V. Het axioma der volledige inductie. Heeft 1 een zekere eigenschap E en heeft, als het natuurlijke getal a de eigenschap E heeft, ook zijn opvolger de eigenschap E , dan hebben alle natuurlijke getallen de eigenschap E .

Uitgaande van deze beginselen kan men definities opstellen voor de som en het product van twee natuurlijke getallen en de gehele theorie opbouwen. De kwestie van de contradictieloosheid schijnt nog een teer punt te zijn. Om deze te kunnen bewijzen is het nodig, dat men vooraf een overzicht heeft van de definitievormen, volgens welke men nieuwe begrippen kan invoeren, en van de redeneervormen, volgens welke men conclusies kan trekken. We komen hiermede op het gebied van de bewijstheorie, waarop in de laatste tijd zeer belangwekkende onderzoekingen zijn verricht.

Na deze beschouwingen over de natuurlijke getallen, vraag ik Uw aandacht voor de positieve en negatieve getallen en het getal nul. In de meeste moderne leerboeken worden deze op een formele manier inge-

voerd als paren natuurlijke getallen, waarvoor zekere rekenregels worden vastgesteld. Van logisch standpunt is daar niets tegen in te brengen; wanneer men echter prijs stelt op een natuurlijke en geleidelijke ontwikkeling van nieuwe begrippen uit reeds aanwezige voorstellingen en eenvoudige aanschouwingselementen, dan kan men te werk gaan op de manier, die ik nu uiteen zal zetten.

We stellen ons voor een naar twee kanten eindeloos doorlopende rij van dingen. U mag denken aan een rij stippen op een stuk papier. De twee kanten, waarheen de rij eindeloos doorloopt, noem ik linkerkant en rechterkant. We gaan nu spreken over verplaatsingen in deze rij. Een verplaatsing is de overgang van een of andere stip naar een, die een zeker aantal plaatsen rechts of links ligt. Men kan — dat vereenvoudigt de redenering — zo'n verplaatsing uitgevoerd denken uitgaande van alle stippen in onze rij. De rij wordt dan in zijn geheel verplaatst en daardoor op zich zelf afgebeeld. Er zijn verplaatsingen naar links en naar rechts en van beide soorten zijn er oneindig veel. Ook onderscheiden we de nul-verplaatsing, waardoor iedere stip in zich zelf overgaat. Nu is het zonder meer duidelijk, dat het opvolgend uitvoeren van twee gegeven verplaatsingen een resultaat geeft, dat ook door een enkele verplaatsing rechtstreeks kan worden verkregen. Deze noemen we de som-verplaatsing van de twee gegeven verplaatsingen. Het geheel van alle mogelijke verplaatsingen is een zeer eenvoudig voorbeeld van wat de wiskundigen een groep noemen. Een stelsel van bewerkingen (zoals onze verplaatsingen) vormt een groep, wanneer ten eerste het opvolgend uitvoeren van twee van die bewerkingen een resultaat geeft, dat ook door een enkele bewerking uit het stelsel rechtstreeks kan worden verkregen en ten tweede bij iedere bewerking van het stelsel een inverse bewerking in het stelsel aanwezig is, die het resultaat van de eerste vernietigt. Onze verplaatsingen vormen een groep van een bijzondere soort. Hebben we twee verplaatsingen a en b , dan geeft a gevolgd door b hetzelfde resultaat als b gevolgd door a . Een groep met deze eigenschap heet een commutatieve groep of abelse groep, naar de wiskundige Abel.

U zult nu misschien vermoeden, dat ik zal zeggen, dat de positieve en negatieve getallen deze verplaatsingen zijn. Dat doe ik niet, want we zouden dan de vermenigvuldiging, in het bijzonder de regel, die de kinderen uitdrukken door „min maal min is plus” niet kunnen begrijpen. We moeten eerst meer gecompliceerde begrippen vormen.

We kunnen een gegeven verplaatsing een zeker aantal malen herhalen. Ook kunnen we een verplaatsing omkeren en dan nog een aantal malen herhalen. Deze bewerkingen, herhalingen en herhalingen gepaard gaande met omkering, zullen we operaties met verplaatsingen noemen. Ze vormen geen groep. Wel is het resultaat van twee van dergelijke operaties opvolgend uitgevoerd te verkrijgen door een zo'n operatie uit te voeren, maar bijna geen enkele van onze operaties heeft een inverse. Men spreekt daarom wel van een halve groep. Zijn a en β

twee operaties met verplaatsingen, dan zullen we onder de product-operatie $a\beta$ de operatie verstaan, die hetzelfde resultaat geeft als de operatie a gevolgd door de operatie β . Men constateert gemakkelijk, dat β gevolgd door a op hetzelfde neerkomt als a gevolgd door β en dat dus $\beta a = a\beta$. Naast $a\beta$ bestaat er nog een andere compositie van a en β . We denken ons de operatie a toegepast op een willekeurige verplaatsing α . Verder denken we ons op dezelfde verplaatsing α de operatie β toegepast. Dat geeft twee verplaatsingen als resultaat. Van deze twee verplaatsingen bepalen we de som-verplaatsing. Het blijkt, dat deze som-verplaatsing ook door een enkele operatie uit de verplaatsing α kan worden verkregen. Deze operatie heet de som-operatie van de operaties a en β . Men stelt deze voor door $a + \beta$. Ook deze compositie is commutatief: $\beta + a$ is hetzelfde als $a + \beta$.

Deze operaties met verplaatsingen nu zijn de positieve en negatieve getallen en het getal nul. Nul is natuurlijk de operatie, die iedere verplaatsing verandert in de nul-verplaatsing. Het is zeer eenvoudig de rekenregels voor de positieve en negatieve getallen af te leiden. Laten we als voorbeeld nemen de regel — 1 maal — 1 = + 1. — 1 is de operatie, die elke verplaatsing omkeert: — 1 maal — 1 is dus het resultaat van twee opvolgende omkeringen en dat dit de door + 1 aangegeven eenheidsoperatie is, dus de operatie, die iedere verplaatsing in zich zelf verandert, behoeft geen nader betoog. Daarmee is de regel verklaard. Driehonderd jaar geleden verkondigde een gezaghebbend auteur, dat de zwakheid van het menselijke verstand een verklaring onmogelijk maakte.

Het geheel der besproken operaties met verplaatsingen, dus de verzameling der positieve en negatieve gehele getallen en het getal nul, die we gezamenlijk de gehele getallen noemen, vormt een zogenaamde ring. Daaronder verstaat men een verzameling van elementen, waarbij men elk tweetal op twee manieren kan samenstellen tot een derde element van de verzameling. De ene samenstelling heet optelling, de andere vermenigvuldiging. Er moet daarbij voldaan zijn aan de eis, dat men de gebruikelijke rekenregels van de algebra kan toepassen.

Het is wel aardig erop te wijzen, dat de beschouwingen, die ons hebben geleid tot het begrip der positieve en negatieve getallen, ook voor een eenvoudiger geval kunnen worden gehouden. In plaats van een naar twee kanten eindeloos doorlopende rij van dingen nemen we een cyclisch gerangschikte rij van een eindig aantal dingen. We kunnen denken aan een rij op onderling gelijke afstanden geplaatste stippen op een cirkelomtrek. We vestigen ook nu weer allereerst onze aandacht op verplaatsingen. Deze kunnen we hier beter draaiingen noemen. Zij vormen nu een commutatieve groep, die bestaat uit eindig veel elementen en wel uit zoveel elementen als het aantal stippen in onze rij bedraagt. We moeten hierbij bedenken, dat, als bijvoorbeeld dit aantal stippen 20 is, een draaiing van 6 de ene kant op hetzelfde

is als een draaiing van $20 - 6 = 14$ de andere kant op. Verder, dat een draaiing van 8 gevolgd wordt door een draaiing van 15 in dezelfde richting een resulterende som-draaiing van 3 geeft, enz. Vervolgens gaan we letten op operaties, die we op de draaiingen kunnen toepassen. We kunnen een draaiing enige malen herhalen, omkeren, en beide dingen tegelijk doen. Overigens kan hier elke operatie als een herhaling worden opgevat. Er zijn weer evenveel operaties als het aantal stippen, waarvan we zijn uitgegaan. Op dezelfde manier als bij de operaties met verplaatsingen definiëren we hier een som en een product voor twee operaties met draaiingen. We krijgen dan een ring bestaande uit eindig veel elementen.

Een bijzonderheid treedt op als we uitgaan van een ondeelbaar aantal stippen. Dan blijkt er bij iedere operatie met draaiingen, uitgezonderd de nul-operatie, die elke draaiing omzet in de nul-draaiing, een inverse operatie te behoren, die na de eerstgenoemde toegepast deze opheft. Zo wordt bijvoorbeeld, wanneer we met 5 stippen werken, de operatie, die bestaat in het verdrievoudigen van elke draaiing, opgeheven door de operatie, die bestaat in het verdubbelen van elke draaiing. Een ring met deze bijzonderheid noemt men een lichaam. In een lichaam hebben twee elementen een quotient, mits de „deler” niet nul is. Een lichaam met eindig veel elementen, zoals wij hier ontmoeten, noemt men een veld van *Galois*, naar de ruim een eeuw geleden op 21-jarigen leeftijd overleden geniale Franse wiskundige, wiens naam ook altijd verbonden zal blijven aan de algemene theorie der hogere machtsvergelijkingen.

Deze eindige ringen en lichamen zijn van groot belang voor de getallentheorie. Ik zal even aangeven, hoe men ze, uitgaande van de ring der gehele getallen, meestal invoert. We maken dan tevens kennis met een in de moderne wiskunde veelvuldig voorkomende wijze van begripsvorming. Om de gedachten te bepalen, nemen we als grondtal het aantal 5. Er zijn nu 5 soorten van gehele getallen te onderscheiden: de 5-vouden, de 5-vouden $+ 1$, de 5-vouden $+ 2$, de 5-vouden $+ 3$ en de 5-vouden $+ 4$. Elke soort wordt een restklasse ten opzichte van 5 genoemd. Laten we nu twee van die restklassen nemen. Uit iedere van die twee nemen we een getal. Deze tellen we op. De som ligt in een derde restklasse, en welke getallen we uit de twee gegeven restklassen ook nemen, deze derde restklasse, waarin hun som ligt, blijkt steeds dezelfde te zijn. Daarom kunnen we deze derde restklasse de som van de twee gegeven restklassen noemen. Voor de vermenigvuldiging geldt geheel hetzelfde, zodat we bij ieder tweetal restklassen ook een product-restklasse hebben. We vinden zodoende, dat de 5 restklassen een ring vormen; de ondeelbaarheid van het getal 5 brengt mede, dat deze ring een lichaam is. Het is formeel hetzelfde lichaam als wat we hiervoor geconstrueerd hebben met behulp van de draaiingen in een cyclische rij van 5.

Op onze restklassenring is de ring van de gehele getallen afgebeeld.

Het beeld van een bepaald geheel getal is de restklasse, waarin dat getal ligt. Deze afbeelding heeft de waardevolle eigenschap, dat het beeld van de som van twee getallen de som is van de beelden van die getallen en het beeld van hun product eveneens het product van hun beelden. Een afbeelding van een ring op een andere met deze eigenschap wordt homomorphe afbeelding genoemd. Zo'n homomorphe afbeelding kan bij vele problemen uitstekende diensten bewijzen.

Positieve en negatieve getallen zijn nog slechts een gering aantal eeuwen in gebruik. De gebroken getallen daarentegen vindt men reeds in de grijsheid bij alle volken met enige beschaving. Zij staan dan ook veel dicht bij de ervaringen van het dagelijkse leven. Zodra kwesties worden beschouwd, die verband houden met verdeling van hoeveelheden en meting van grootheden als lengten, oppervlakten en inhouden zullen zij optreden en een verdienstelijke rol spelen. Samen met de gehele getallen vormen de positieve en negatieve gebroken getallen een lichaam, het lichaam van de rationale of meetbare getallen. In de wiskunde worden tegenwoordig de rationale getallen op formele wijze ingevoerd als klassen van paren gehele getallen, waarvoor een aantal rekenregels worden vastgesteld. Het is ook mogelijk ze op meer aanschouwelijke wijze in te voeren als operaties: ik zal daar echter verder niet op ingaan.

De rationale getallen zijn de getallen, die in de praktijk worden gehanteerd en daar voortreffelijke diensten bewijzen. Toch leiden eenvoudige beschouwingen tot het inzicht, dat het stelsel der rationale getallen ernstige tekortkomingen bezit. U hebt op school geleerd, dat deze tekortkomingen reeds door de Grieken zijn geconstateerd, toen zij het onmeetbare ontdekten. Ook hebt U vernomen welk een ontsteltenis die ontdekking bij hen veroorzaakte. Zij vonden, dat er lijnstukken bestaan, die onderling onmeetbaar zijn. Een klassiek voorbeeld wordt gegeven door de zijde en de diagonaal van een vierkant; deze twee lijnstukken hebben geen gemeenschappelijke maat en dus kan men geen rationaal getal opnoemen, dat hun verhouding uitdrukt. Daaruit blijkt, dat het stelsel der rationale getallen voor de meetkunde niet zo erg bruikbaar is. Het geschikte getallensysteem voor de meetkunde is dat der reële getallen, dat de meetbare en de onmeetbare getallen omvat. De Grieken hebben zich zonder deze weten te redden, en dat op bewonderenswaardige wijze, maar de ontwikkeling van algebraïsche en analytische methoden na de Middeleeuwen bracht de behoefte aan het reële getal als zelfstandig begrip.

Aanvankelijk heeft men de leer der reële getallen gegrondvest op die der grootheden, bijvoorbeeld lijnstukken. De naam *Descartes* kan hier genoemd worden. De theorie van het reële getal steunt dan op de axioma's van de meetkunde. Deze toestand heeft echter de wiskundigen niet bevredigd. Men wenste een van de ruimteleer onafhankelijk getalbegrip. In de tweede helft van de vorige eeuw is deze wens vervuld. Door *Dedekind*, *Cantor*, *Weierstrasz* en anderen is toen aangetoond.

hoe men het begrip reëel getal kan ontwikkelen op arithmetische wijze, zonder een beroep te doen op enige meetkundige aanschouwing of meetkundige theorie. Daarmede werd de basis gelegd voor wat men genoemd heeft de arithmetisering van de wiskunde, waarbij de gehele wiskunde, de meetkunde inbegrepen, verschijnt als een gebouw, welks enig fundament het begrip natuurlijk getal is.

De imaginaire of complexe getallen, die bij hun eerste optreden in de wiskunde, evenals trouwens de negatieve getallen, door een geheimzinnig waas waren omgeven, kunnen op fraaie wijze meetkundig voor de dag worden gebracht.

We nemen een gewoon plat vlak. In dat vlak beschouwen we rechtlijnige verplaatsingen of vectoren. Deze denken we alle uit te gaan van een vast punt O. Op het geheel van al deze van O uitgaande vectoren denken we ons zekere operaties toegepast. Elk van die operaties zal bestaan uit een vermenigvuldiging van O uit met de een of andere positieve of negatieve factor gecombineerd met een draaiing over zekere hoek. Het blijkt, dat deze operaties, bij voor de hand liggende definities van optellen en vermenigvuldigen, een lichaam vormen. Dit lichaam is het lichaam der complexe getallen. Laten we in het bijzonder eens letten op de operatie, die bestaat uit het draaien van alle vectoren over een hoek van 90° in de positieve zin om O. Deze operatie noemen we i . Onder i maal i hebben we nu te verstaan de operatie, die hetzelfde resultaat geeft als twee opvolgende draaiingen van 90° om O. Dat is blijkbaar de operatie, die iedere vector omzet in de tegengestelde vector, en deze hebben we voor te stellen door -1 . Zo vinden we op zeer natuurlijke wijze de formule $i^2 = -1$.

De invoering van de complexe getallen was voor de wiskunde een grote verrijking. Zij verschafte tal van nieuwe gezichtspunten en leidde tot de theorie der analytische functies van een complexe veranderlijke, een der mooiste en belangrijkste delen van de wiskunde.

Wij hebben nu een en ander gezegd over de verschillende soorten van getallen, die op vrijwel alle gebieden van de wiskunde en daar, waar de wiskunde wordt toegepast, in gebruik zijn. Veel zou nog te zeggen zijn over allerlei andere getalsystemen. De moderne algebraïcus onderzoekt talloze ringen en lichamen, die in hun eigenschappen soms aanzienlijk afwijken van die, welke wij hebben besproken, en die ook voor de toepassingen — men denke aan de quantummechanica — van gewicht zijn. Ik zal daarover zwijgen.

Gaarne zou ik echter tot besluit iets willen vermelden over de oneindige getallen van Cantor.

In het begin van deze rede hebben we de leer der natuurlijke getallen opgevat als de leer der eindige verzamelingen. Men kan evenwel ook over oneindige verzamelingen spreken en daardoor ontstaat een vervolg op de theorie van het natuurlijk getal. Een dubbel vervolg, zou men kunnen zeggen, want de begrippen cardinaalgetal en ordinaalgetal gaan hierbij uiteenlopen.

De leer der verzamelingen is de schepping van de wiskundige G. Cantor. Zij munt uit door grote schoonheid en heeft op merkwaardige wijze de ontwikkeling van de wiskunde beïnvloed. Ook heeft zij de stoot gegeven tot het ontstaan van uitvoerige discussies over het wezen en de grondslagen van de wiskunde, discussies, waaraan de namen van grote mathematici als Poincaré, Brouwer en Hilbert zijn verbonden.

Van het begrip verzameling geeft Cantor deze definitie: Een verzameling is de samenvatting van zekere dingen van ons denken tot een geheel. Dat is niet bepaald een definitie, die door helderheid uitmunt. Iemand, die niet weet, wat bedoeld wordt, zal het er moeilijk uit kunnen opmaken. Laten we echter doen alsof de zaak ons geheel duidelijk is. Over eindige verzamelingen hebben we gesproken; voorbeelden van oneindige verzamelingen zijn: de verzamelingen van alle natuurlijke getallen, de verzameling van alle ondeelbare getallen, de verzameling van alle continue functies van een reële veranderlijke, enz.

Hoe beoordeelt men of twee oneindige verzamelingen A en B „even groot” zijn? Op dezelfde manier als bij eindige verzamelingen, dus door na te gaan of men de elementen van A een-aan-een kan laten corresponderen met de elementen van B. Er treedt nu echter een merkwaardig verschijnsel op. Het oude axioma „het deel is kleiner dan het geheel” is niet meer geldig. Neem voor A de verzameling van alle natuurlijke getallen en voor B de verzameling van alle even natuurlijke getallen. Laat nu het getal 1 van A corresponderen met het getal 2 van B, het getal 2 van A met het getal 4 van B, het getal 3 van A met het getal 6 van B, enz. A is dan een-aan-een afgebeeld op B. A en B zijn dus „even groot”, ofschoon B een deel is van A.

In plaats van de uitdrukking „A en B zijn even groot” gebruikt men de uitdrukking „A en B hebben dezelfde machtigheid” of „A en B stellen hetzelfde cardinaalgetal voor”. De vraag dringt zich op of misschien niet alle oneindige verzamelingen dezelfde machtigheid hebben. Dan zou er maar één oneindig cardinaalgetal zijn. Het antwoord is ontkennend. Zeer eenvoudig kan men namelijk bewijzen, dat de verzameling van alle deelverzamelingen van een gegeven verzameling een grotere machtigheid heeft dan die gegeven verzameling. Daarmee bedoelt men met de uitspraak, dat A een grotere machtigheid heeft dan B, dat B wel een-aan-een kan worden afgebeeld op een deel van A, maar niet op A zelf.

Zo blijkt, dat er onbegrensd veel oneindige cardinaalgetallen zijn. De kleinste oneindige machtigheid is die van de verzameling der natuurlijke getallen. Men noemt dit de aftelbare machtigheid. Misschien verbaast het U te horen dat ook de verzameling van alle meetbare getallen de aftelbare machtigheid heeft. De verzameling van alle reële getallen, dus van alle punten op een lijn, daarentegen is niet aftelbaar.

Reeds vroeg kwam Cantor tot het inzicht, dat de verzameling van alle punten van een plat vlak en ook de verzameling van alle punten

van de ruimte dezelfde machtigheid heeft als de verzameling van alle punten op een rechte lijn. Aanvankelijk meende Cantor daaruit te moeten concluderen, dat er met ons dimensiebegrip iets niet in orde was. Men kan dat lezen in brieven, die hij over deze zaak aan Dedekind schreef. Dedekind wees er echter op, dat de een-aan-een-afbeeldingen van de punten van een plat vlak en van de punten van de ruimte op de punten van een rechte lijn, die Cantor aangegeven had, discontinu waren, en dat bij continue een-aan-een-afbeeldingen de dimensie wel bewaard zou blijven. Latere onderzoekingen, met name die van Brouwer, hebben dit geheel bevestigd.

Oneindige ordinaalgetallen zijn oneindige welgeordende verzamelingen. Een verzameling heet geordend, wanneer krachtens de een of andere afspraak van elk tweetal van haar elementen het ene voor het andere komt. Die afspraak moet zo zijn, dat, als a voor b komt en b voor c , a ook voor c komt. Een geordende verzameling heet welgeordend, als de verzameling zelf en ook iedere deelverzameling een eerste element heeft. Voorbeelden zijn: elke eindige geordende verzameling, de rij der natuurlijke getallen, de rij der natuurlijke getallen gevolgd door nog een element, de rij der natuurlijke getallen gevolgd door nog eens de rij der natuurlijke getallen, enz.

Wanneer men twee welgeordende verzamelingen heeft, dan zijn zij of gelijk, of de ene is gelijk aan een beginstuk van de andere. Daaruit vloeit voort, dat iedere verzameling van ordinaalgetallen weer welgeordend is. In het bijzonder heeft ieder ordinaalgetal en ook iedere verzameling van ordinaalgetallen een opvolger.

Het kleinste ordinaalgetal is 1. Daarop volgen de andere eindige ordinaalgetallen 2, 3, 4, enz. Na al deze komt het kleinste oneindige ordinaalgetal, dat men door ω aangeeft en dat gedefinieerd wordt door de rij der natuurlijke getallen. Dan komt $\omega + 1$, gedefinieerd door de rij der natuurlijke getallen gevolgd door nog een element, dan $\omega + 2$, enz. Twee opvolgende rijen van de natuurlijke getallen bepalen, wat men noemt 2ω . Daarop volgen $2\omega + 1$, $2\omega + 2$, $2\omega + 3$, enz. Dan komt 3ω , $3\omega + 1$, $3\omega + 2$, enz. Zo verder gaande komen we bij ω^2 , $\omega^2 + 1$, $\omega^2 + 2$, . . . , $\omega^2 + \omega$, enz. enz. Het verschiet is inderdaad duizelingwekkend.

Ieder ordinaalgetal heeft een zekere machtigheid. Ik moet bekennen, dat ik mij geen ordinaalgetallen van hogere dan de aftelbare machtigheid kan voorstellen, maar Zermelo bewees met behulp van zijn veelomstreden keuze-axioma, dat iedere verzameling kan worden welgeordend, en daaruit volgt, dat er ordinaalgetallen zijn van willekeurig hoge machtigheid.

Het geheel van alle ordinaalgetallen, waarvan de machtigheid een bepaalde grens niet overschrijdt, noemt Cantor een getalklasse. Zo bestaat de eerste getalklasse uit alle eindige ordinaalgetallen. Hun verzameling en dus het op hen volgende ordinaalgetal ω heeft de aftelbare machtigheid, die men wel Aleph-0 noemt. De tweede getalklasse

bestaat uit alle aftelbare ordinaalgetallen. Hun machtigheid en dus die van het op hen volgende ordinaalgetal is de kleinste niet-aftelbare machtigheid. Deze noemt men Aleph-1.

Zoals ik reeds heb gezegd, heeft het continuüm, dat is de verzameling van alle punten op een rechte lijn, een hogere machtigheid dan de aftelbare. Nu heeft men nog nooit een verzameling van punten op een rechte lijn gevonden, die een machtigheid heeft groter dan de aftelbare en kleiner dan die van het continuüm. Dit leidde Cantor tot het opstellen van de hypothese, dat de machtigheid van het continuüm Aleph-1 is. Al zijn pogingen dit te bewijzen bleven echter zonder resultaat en ook heden ten dage is het zogenaamde continuümprobleem nog onopgelost.

Het werk van Cantor heeft tot veel kritiek aanleiding gegeven. Dat deze kritiek niet ongerechtvaardigd is, blijkt al uit het feit, dat de leer der verzamelingen tot paradoxen leidt. Zelf heeft Cantor al geworsteld met het paradoxale in de verzameling van alle ordinaalgetallen. Veel zou er over deze paradoxen te vertellen zijn, veel ook over de op dit gebied zo sterk naar voren komende geschilpunten tussen de logici en axiomatici en de intuitionisten. Ik zou daarmee echter allicht de grenzen van mijn onderwerp en de tijd, op welke ik beslag mag leggen, overschrijden, en wil daarom nu deze beschouwing van de verschillende soorten van getallen laten eindigen.

IN: EUCLIDES, 22