

SS 95
Wissens, 41
1974
C3
KISTO 41

Zur Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik

HANS WUSSING

1. Einführung

Für die griechisch-hellenistische Mathematik kann man nach Methode, Inhalt und Umfang der wissenschaftlichen Aktivitäten vier ziemlich deutlich getrennte Perioden unterscheiden. Einer Früh- oder Vorbereitungsperiode, die wegen ihres engen inneren Zusammenhanges zur ionischen Naturphilosophie als ionische Periode bezeichnet wird, folgte eine zweite, die etwa auf die Zeit von 450 bis 320 v. u. Z. zu datieren ist und nach dem Hauptzentrum der mathematischen Tätigkeiten als athenische Periode benannt wird. Die dritte, hellenistische Periode, ist bis ungefähr 150 u. Z. zu datieren und sah die antike Mathematik in ihrer Hochblüte. Schließlich mündete auch die Mathematik in den allgemeinen Ausklang und Verfall der antiken Gesellschaft ein.

Chronologisch fällt demnach die athenische Periode weitgehend mit der Krisenzeit der griechischen Polis zusammen, also mit jenem Zeitraum zwischen 421 und 338, der in der hier vorgelegten vergleichenden Untersuchung eines vielschichtigen historischen Prozesses im Vordergrund des Interesses steht.

Geographisch-politisch betrachtet verlagerte sich vom fünften zum dritten Jahrhundert das Schwergewicht der mathematischen Aktivitäten von Kleinasien und Süddien über Athen nach der ägyptischen Alexanderstadt, an das Museion in Alexandria.

Sachlich-methodisch haben die erste und die dritte Periode der antiken Mathematik das vorwiegende historische Interesse bei der Erschließung des überkommenen Quellmaterials auf sich gezogen; bei der athenischen Periode kommt noch ein weiteres und sogar wesentliches historiographisches Element hinzu, die Untersuchung des Umschlusses in den grundsätzlichen Methoden und Zielstellungen. Heute besteht weitgehendes, nahezu allgemeines Einverständnis darüber, daß jener Umschlag als die Überwindung einer echten Grundlagenkrisis der Mathematik zu werten ist.

Die chronologische, geographisch-politische und sachlich-methodische Parallelität der Krisis der griechischen Polis mit einer Grundlagenkrisis der Mathematik wirkt natürlich die tieflegende Frage nach der kausalen Verknüpfung beider Erscheinungen auf.

Die Antwort wird schwer zu finden sein; sie erfordert es jedoch, das Wesen der mathematischen Grundlagenkrisis am Detail zu verdeutlichen sowie deren Überwindung zu schildern und in ihrer inhaltlichen Tragweite für die nachfolgende

Zur Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik

volle Ausbildung des der hellenistischen Periode spezifischen Typs der Mathematik zu erläutern.

2. Die griechische Mathematik am Beginn

Ihrum (Ursprung) auch ist die griechische Mathematik auf das enge mit hochentwickelten Mathematik Mesopotamiens verbunden, eine natürliche Verbindung der engen wirtschaftlichen, politischen und kulturellen Beziehungen der Staaten an der ionischen Küste Kleasiens zum Osten.

Die inhaltliche Übereinstimmung der babylonischen Mathematik mit griechischen Mathematik ist sehr weitreichend; sie erstreckt sich z. B. nicht auf die Behandlung derselben Typen von Aufgaben, sondern sogar auf Beispiele in denen dieselben Zahlen als Koeffizienten auftreten. Diese historischen Zusammenhänge sind insbesondere von O. Neugebauer ausführlich und überzeugend analysiert worden; zusammenfassend kommt er zu dem Schluß: „Sowohl im reich der Elementargeometrie, wie im Bereich der elementaren Proportionalen wie schließlich im Bereich der Gleichungslehre liegt in der babylonischen Mathematik das gesamte inhaltliche Material geschlossen vor, auf dem die griechische Mathematik aufbaut. Der Anschluß ist in allen Punkten praktisch lücklos herzustellen“.

Der Methode nach ging allerdings die griechische Mathematik weit über babylonische Mathematik hinaus — und sogar in doppelter Weise.

Bereits in ihrer ersten Periode, der ionischen, fand ein erster durchgreifender Wandel statt. (Eine zweite Transformation, die zusammen den ganzen Typ Mathematik umgestaltete, wird weiter unten zu besprechen sein.)

Eingebettet in den umfassenden, philosophiegesehichtlich hochbedeutsamen Prozeß der Herausbildung der ionischen Naturphilosophie, in einer Atmosphäre der Besinnung auf das Wesen der Natur und ihres inneren Zusammenhanges, Überganges vom Summen und Beschreiben von Tatsachen zum Verstehen und vollzog sich auch der Umschlag von einer inhaltlich ausgedehnten, aber dorezeptartig betriebenen Mathematik zu einer Wissenschaft Mathematik, die als meine Sätze aufstellte, wesentlich Beweise heranzieht und klar zwischen Definitionen, Voraussetzungen und Lehrsätzen zu unterscheiden weiß.

So war beispielsweise weit vor dem 6. Jahrhundert v. u. Z. davon (Jahrgang) gemacht worden, daß der Durchmesser den Flächeninhalt eines Kreises halbi aber Thales von Milet (624?—548?) hat diese Tatsache als Satz formuliert bewiesen. Anaxagoras von Klazomenai (500?—428?) und Hippokrates von Chios (um 440) gehören in diese Entwicklungslinie wie noch Demokrit von Abdera (460?—370?) am Ausgang der ionischen Periode. Die bedeutenden Erfolge der Mathematiker lagen in ihrer engen Bindung an die materialistische und spontandialektische Grundhaltung der ionischen Naturphilosophie; soziologisch gelbdiese Gruppe vorwiegend der Sklavenhalterdemokratie an.

Wahrscheinlich zwischen 530 und 520 kam Pythagoras von Samos nach Kros in Süddien und gründete dort einen religiösen Bruderbund, der politisch

Sklavenhalteraristokratie nahestand. Vor anderen religiösen Vereinigungen zeichnete sich der Bund der Pythagoreer dadurch aus, daß Mathematik zu einem immanenten Bestandteil ihrer Weltanschauung wurde. Die Harmonie der Welt ist göttlichen Ursprunges, sie besteht in Zahlen und in Zahlenverhältnissen. Die Vereinigung mit dem Göttlichen erfolgt darum durch das Studium der Zahlen.

Mit der Übernahme von Zahlenmystik und Mysteriendiensten aus dem Osten — Pythagoras selbst wurden langdauernde Aufenthalte in Mesopotamien und Ägypten zugeschrieben — wurde auch die ausgeprägt arithmetisch-algebraische Tradition der babylonischen Mathematik weitergeführt, wenn auch anfangs ausschließlich unter religiösen Vorzeichen. Und doch wuchsen, sozusagen implizit und unbeabsichtigt, bereits in der ionischen Periode aus Spekulation und Mystizismus Ansätze einer wissenschaftlichen Zahlenlehre. Die Anfänge waren bescheiden: Schält man aus der mystischen Hülle den rationalen, wissenschaftlichen Kern heraus, dann handelt es sich für die Pythagoreische Zahlentheorie um das folgende: Die (ganzen positiven) Zahlen werden in gerade und ungerade Zahlen eingeteilt; Teilbarkeitslehre; man experimentiert mit figurierten Zahlen (Dreieckszahlen, quadratischen Zahlen, rechteckigen Zahlen, fünfeckigen Zahlen); und anderes mehr².

Für das Ende der ionischen Periode der Mathematik kann man zusammenfassend feststellen: Im Methodischen bestand der Fortschritt darin, daß ein insbesondere von den Babyloniern übernommener reicher mathematischer Erfahrungsschatz eine logische Struktur erhalten hatte. Von nun an existiert eine deduktiv dargelegte Wissenschaft Mathematik mit einem System von Postulaten, Definitionen und zwingend bewiesenen Sätzen. Doch wurde dieser ungeheure Fortschritt unter den Bedingungen der Sklavenhaltergesellschaft durch eine Entfremdung von der Praxis erkauft und er enthält starke gnoseologische Wurzeln für den Aufschwung des philosophischen Idealismus in der Mathematik während der folgenden Periode.

Dem Inhaltlichen nach ist die Entwicklung in vier Richtungen vorangeschritten: Die babylonische algebraisch-arithmetische Tradition wurde — insbesondere in der Pythagoreischen Schule — weitergeführt. Am Ende der Periode lagen Anfänge einer Lehre von Gerade und Ungerade, von der Teilbarkeit und von den Verhältnissen der (natürlichen) Zahlen systematisiert vor.

Die ebene Geometrie hatte insbesondere durch Hippokrates eine erste Systematisierung erhalten. Zu ihrem festen Bestand gehörten die Lehre von den Parallelen, der Satz von der Winkelsumme im Dreieck, der Flächeninhalt von Polygonen, der Pythagoreische Lehrsatz, die (rationalen) Verhältnisse von Strecken.

In der Stereometrie waren neue Erkenntnisse über Pyramide, Kegel und reguläre Körper sowie über die Lehre von der Perspektive hinzugekommen.

Und schließlich: Es waren innermathematische Fragen aufgeworfen worden, deren weiterer Verfolg in enge Beziehung zur Grundlagenkrisis während der nachfolgenden Zeit führen wird: Die scheinbar harmlosen und naheliegenden Probleme der Würfelverdoppelung, der Dreiteilung des Winkels und der Verwandlung der Kreisfläche in ein flächengleiches Quadrat hatten ihre Tücken offenbart.

3. Die *arithmetica universalis* der Pythagoreer

Man kann mit großer Sicherheit annehmen, daß schon zwischen 500 und 450 v. Chr. der Bund der Pythagoreer in zwei Gruppierungen zu zerfallen begann. Während die sogenannten *akousmatikoi* das Hauptgewicht auf die Bewahrung der noch auf Pythagoras zurückgehenden heiligen Riten und Gebote, der *akousmatikoi* legten, rückte in der zweiten Gruppierung neben aller Bindung an die Forderungen der Pythagoreischen Lebensweise ein echt wissenschaftliches Interesse an der Mathematik in den Vordergrund.

Diese zweite Gruppe, die der *mathematikoi*, wurde um die Mitte des 5. Jahrhunderts zum hauptsächlichen Träger des Fortschrittes der Mathematik; auf sie wird daher das weitere Interesse des hier gegebenen Berichtes zunächst zu richten sein.

Die Gründe des Zerfalls lagen teils im Gesellschaftlichen, teils im Innerwissenschaftlichen.

Der Bund der Pythagoreer war politisch mit den Interessen der Sklavenhalteraristokratie verbunden und besaß in seiner Anfangszeit in den süditalischen Städten zeitweise eine beträchtliche politische Macht. Als sich aber auch dort die allgemeine Umschichtung zugunsten der Sklavenhalterdemokratie innerhalb der Pythagoreer vollzog, und zwar unter dem Einfluß des Attischen Seebundes, dergeriet der Orden der Pythagoreer in die politische Isolierung, wurde bekämpft aus einigen Städten durch Rebellion vertrieben und schließlich verboten. Er erlosch³ um die Mitte des 4. Jahrhunderts.

Über die innerwissenschaftlichen Gründe des Zerfalls wird ausführlich zu berichten sein; sie gehören in das Zentrum des Berichtes.

Aus der zweiten Gruppe der Pythagoreer — und auf diese allein kann man sich für diesen Bericht beschränken — sind uns zwei Personen namentlich bekannt.

Der erste unter den *mathematikoi*, Hippias von Metapont (um 450), ist ein Zentralfigur der Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik und steht ursächlich und chronologisch am Beginn der zweiten, der athenischen Periode der griechisch-hellenistischen Mathematik.

Der zweite, Archytas von Tarent (428–365), war einer der bedeutendsten Mathematiker der Antike; er wurde zum Lehrer und Freund Platons und reichlich nach seiner Lebenszeit bereits weit in die athenische Periode hinein.

Nach allgemeiner, insbesondere auch von Platon im „Staat“ vermittelte Überlieferung unterschieden die Pythagoreer vier *mathēmata*, das sind Lehrgebiete oder Wissensgebiete: Arithmetik, Geometrie, mathematische Musiktheorie und Astronomie. Alle vier Bereiche beruhten auf der Vorstellung⁴ von einer nach Zahl und Maß harmonisch geordneten Welt, oder wie Aristoteles (*Metaph.* A 5) ausdrückte: „... und da sie weiter sahen, daß die Eigenschaften und Verhältnisse der Harmonie durch Zahlen bestimmt sind, und da es ihnen schien, daß auch alle anderen Dinge ihrer ganzen Natur nach den Zahlen nachgebildet und die Zahlen in der ganzen Natur das erste sind, so meinten sie, die Elemente der Zahlen seien die Elemente aller Dinge und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl.“

Dabei — und das ist der springende Punkt — ist der Zahlbegriff der Pythagoreer eng: Er umfaßt ausschließlich — wenn man sich modern ausdrückt — die ganzen positiven Zahlen größer als 1, also die Zahlen 2, 3, 4, ... Die 1 selbst galt den Pythagoreern nicht als Zahl, sondern als Quelle und Ursprung aller Zahlen.

Trotz des Umstandes, daß keine direkten Quellen zum ursprünglichen, Pythagoreischen Zahlbegriff existieren, ist der historische Sachverhalt jedoch eindeutig: Kritische Analyse und historischer Rückvergleich haben mit Sicherheit erwiesen, daß die Lehre von Gerade und Ungerade, welche den Schluß des Buches 9 der „Elemente“ des Eukleides bildet, Pythagoreischen Ursprungs ist. Als Grundlage werden dabei folgende Definitionen verwendet: „Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird. Zahl ist die aus Einheiten zusammengesetzte Menge“ ... „Gerade ist die Zahl, die sich halbiert läßt“, und „ungerade die, die sich nicht halbiert läßt, oder die sich um die Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet.“ Im übrigen wird auf die Pythagoreische Lehre von Gerade und Ungerade noch zurückzukommen sein.

Nach Pythagoreischer Auffassung ist also die 1 unteilbar; noch Platon mokiert sich (Plat. Pol. 525e): „Die Meister der Rechenkunst“ (die Pythagoreer) „würden jeden auslecken, der versuchen würde, die Eins zu teilen“.

Selbstverständlich aber besaß die griechische Mathematik die Fähigkeit, eine Bruchrechnung⁶ aufzubauen; allerdings rechnete man nicht mit Brüchen, sondern mit Verhältnissen von Zahlen. Der entscheidende Zentralbegriff ist hier der der Proportion; auch darauf wird noch ausführlich einzugehen sein. Halten wir also fest: „Zahlen“ sind im folgenden stets natürliche Zahlen größer als Eins.

Auf diesem Zahlbegriff beruhte die mathematische Grundlage aller vier Pythagoreischen Wissensgebiete⁷. Im Zusammenhang mit der — zu großen Teilen ebenfalls aus dem babylonischen Bereich übernommenen — Lehre vom arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel wurde im ruhigen Bewußtsein von der Ganzzahligkeit der Welt im Kreise der unteritalischen Pythagoreer eine metatheoretische Auffassung ausgebildet, die die Funktion einer Ideologie ausübte. Nach allgemeinem historiographischen Gebrauch soll sie auch hier als „arithmetica universalis“ bezeichnet werden.

Demnach war die Existenz der Pythagoreischen Gruppe der *mathematikoi* innerwissenschaftlich gesehen eng an die ausschließliche Existenz ausschließlich ganzzahlig oder in ganzzahligen Verhältnissen beschreibbarer Dinge gebunden. Sollten Dinge oder Größen gefunden werden, die sich nicht mit Hilfe dieses Zahlbegriffes erfassen lassen, die also — nach Pythagoreischem Sprachgebrauch — nicht (ganzzahlig) meßbar, inkommensurabel, sind, dann ist die arithmetica universalis zerstört und der Existenzgrundlage der Pythagoreischen Schule ein schwerer Schlag versetzt.

4. Der Zusammenbruch der arithmetica universalis

Man kann heute⁸ mit größter Sicherheit annehmen, daß die Entdeckung von der Existenz gegenseitig sich nicht messender Strecken noch innerhalb der pythagoreischen Schule gemacht worden ist, und zwar jedenfalls nicht später als 420.

Damit wurde die arithmetica universalis zerbrochen und jener „wirkliche logische Skandal“ (scandale logique) heraufbeschworen, wurde jene Grundlagenkrise der griechischen Mathematik ausgelöst, von der P. Tannery bemerkenswerterweise bereits 1887 spricht⁹.

Im allgemeinen wird heute die Entdeckung der Inkommensurabilität mit Hippasos von Metapont in Verbindung gebracht. Dies — und es kommen noch weitere mathematische Entdeckungen und echte naturwissenschaftliche Experimente hinzu — hat zur endgültigen Spaltung des Pythagoreischen Bundes geführt oder doch die bereits bestehenden Spannungen wesentlich verschärft. Die verschiedenen Richtungen der Pythagoreer haben sich dann erbittert bekämpft.

Hippasos hat sich den besonderen Zorn der Akusmatiker zugezogen, teils, weil er mit dem Volk während der Rebellion gegen die Tyrannis sympathisiert habe, teils, weil er überhaupt dem von Pythagoras stammenden Bestand an Lehren neue Elemente hinzugefügt hat, vor allem aber deswegen, weil er nicht nur die katastrophale Entdeckung von der Existenz inkommensurabler Strecken gemacht, sondern dies auch noch publik bekannt gemacht habe. Hippasos kam später bei einem Schiffbruch ums Leben; dies wurde von seinen Gegnern als gerechte Strafe dafür hingestellt, daß er „als erster das Wesen der Meßbarkeit und Unmeßbarkeit an Unwürdige verraten“¹⁰ habe — so berichtet der Neupythagoreer Iamblichos (ca. 283–330 u. Z.) in seinem umfassenden Werk „Über die pythagoreische Philosophie“.

Während also heute weitgehend Einigkeit darüber besteht, daß die Entdeckung der Existenz gegenseitig inkommensurabler Strecken im zweiten Drittel des fünften Jahrhunderts bereits erfolgte und mit der Person von Hippasos in Verbindung gebracht werden kann, lassen sich nur starke Vermutungen darüber angeben, wie die Inkommensurabilität entdeckt und bewiesen worden sein könnte. Hier gehen die Meinungen noch auseinander. Für den Zweck dieses Berichtes reicht es allerdings aus, sich in dieser Frage auf einige weitgehend gesicherte Analysen zu beschränken¹¹.

Die Pythagoreische Lehre von Gerade und Ungerade am Ende des Buches 9 der „Elemente“ steht dort ganz isoliert und besitzt bemerkenswerterweise nur eine einzige Anwendung, die nämlich zum Beweis des Satzes, daß die Seite und die Diagonale eines Quadrates kein gemeinsames Maß haben, zueinander inkommensurabel sind. Der Beweis¹² steht merkwürdigerweise — wiederum isoliert — am Ende von Buch 10; er wird (Abb. 1) indirekt geführt und verläuft, in heutige Formulierung, kurz folgendermaßen: Sei AB die Seite und AC die Diagonale des Quadrates $ACBD$. Haben AC und AB gemeinsames Maß, dann stehen sie im Verhältnis $m:n$, wo man m und n als teilerfremde (natürliche!) Zahlen annehmen kann. Aus $AC:AB = m:n$ folgt $AC^2:AB^2 = m^2:n^2$, aus dem Pythagoreischen

Lehrsatz folgt $AC^2 = 2AB^2$, also $m^2 = 2n^2$, also m^2 gerade. Dann ist auch m gerade; die Hälfte von m sei h . Da m und n teilerfremd vorausgesetzt waren und m gerade ist, muß n ungerade sein. Aber aus $m = 2h$ folgt $m^2 = 4h^2$, also $n^2 = 2h^2$. Also wäre hiernach n gerade. Es ist aber unmöglich, daß n zugleich gerade und ungerade ist.

Der Beweis erfordert offenbar eine gereifte mathematische Denkweise, einen hohen Abstraktionsgrad, insbesondere den Umgang mit dem indirekten mathematischen Beweis. Daraus und aus dem Umstand, daß die in Buch 9 enthaltene Lehre von Gerade und Ungerade erwiesenermaßen ein frühpythagoreisches Stück Mathematik darstellt, hat man geschlossen, daß die Inkommensurabilität von Strecken gar nicht am Quadrat entdeckt worden ist. „Denn man kann kaum glauben, daß die frühen griechischen Mathematiker die Inkommensurabilität der Diagonale und der Seite eines Quadrats durch einen Prozeß der Schlußfolgerung entdeckten, der für sie offenkundig so mühsam war, wenn sie nicht schon vorher vermuteten, daß es überhaupt so etwas wie Inkommensurabilität gab. Wenn sie dagegen den Sachverhalt bereits auf einem einfacheren Weg entdeckt hatten, steht es in vollem Einklang mit dem, was wir über ihre Methoden wissen, wenn wir annehmen, daß sie sich sofort alle Mühe gaben herauszufinden, ob es noch andere Beispiele von Inkommensurabilität gebe. In diesem Fall war das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck natürlicherweise das erste Objekt ihrer weiteren Untersuchungen.“¹³

Mit anderen Worten: Vernünftig erfolgte die Entdeckung gegenseitig inkommensurabler Strecken nicht am Quadrat; diese Figur diente vielmehr im nachhinein als Objekt zur Konstatierung eines bereits anderswo erkannten Sachverhaltes.

Bei der Suche nach demjenigen mathematischen Gegenstand, an dem die Existenz gegenseitig inkommensurabler Strecken zutage trat und auf der Grundlage damaliger mathematischer Kenntnisse zwingend nachgewiesen werden konnte, deuten die Quellen auf das regelmäßige Fünfeck hin.

Bekanntlich diente den Pythagoreern als Erkennungszeichen des Geheimbundes das Pentagramm, das heißt ein regelmäßiges Fünfeck, dessen Seiten bis zum Schnittpunkt verlängert sind. Lamblichos berichtet zudem, Hippasos habe „zuerst die aus zwölf Fünfecken zusammengesetzte Kugel öffentlich beschrieben und sei deshalb als ein Gottloser im Meere umgekommen“¹⁴. Demnach wird die – nach Ansicht der *akusmatikoi* verbreichende – Entdeckung inkommensurabler Strecken mit dem Studium des Dodekaeders¹⁵ in Verbindung gebracht, also mit demjenigen regulären Polyeder, dessen Flächen aus regelmäßigen Fünfecken bestehen. Innermathematisch ist das regelmäßige Fünfeck wohl diejenige geometrische Figur, an der sich die Inkommensurabilität am leichtesten beweisen läßt, und zwar mit der albekannten Methode der „Wechselwegnahme“.

Nur das Prinzip dieses Beweises (Abb. 2) sei hier skizziert: Die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks bilden wieder ein regelmäßiges Fünfeck und so fort. Dann ist sehr leicht einzusehen, daß in den durch Schachtelung entstandenen Fünfecken die Beziehungen $AE = AB'$ und $BD = B'E'$ und deshalb $AD - AE = BE$ und ferner analog $AE = ED' = EA'$ und $BE' = B'D = B'E$ und des-

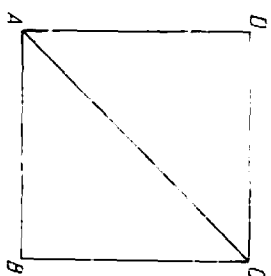


Abb. 1

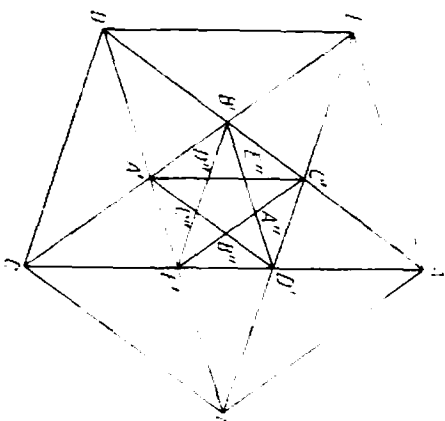


Abb. 2

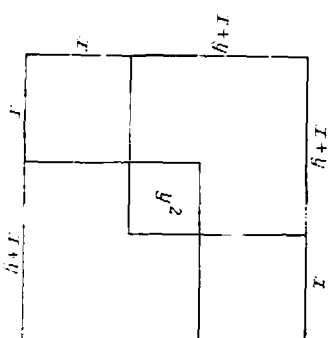


Abb. 3

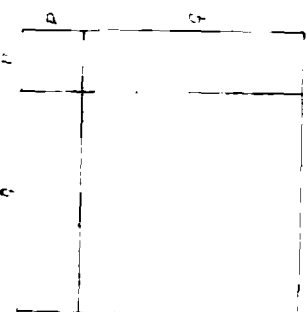


Abb. 4

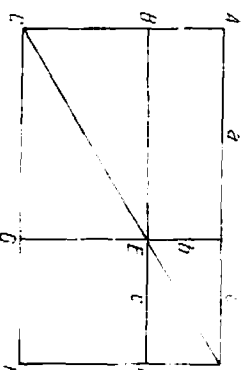


Abb. 5



Abb. 6

halb $AB = BE = BA$ gelten und so fort, ohne daß ein Ende eintritt. Mit anderen Worten: Die Differenz zwischen der Diagonale und der Seite des größeren Fünfecks ist gleich der Diagonale des kleineren Fünfecks; die Differenz zwischen der Seite des größeren Fünfecks und der Diagonale des kleineren Fünfecks ist gleich der Seite des kleineren Fünfecks; die Differenz zwischen der Diagonale des kleineren Fünfecks und dessen Seite ist wiederum gleich der Diagonale des nächst kleineren Fünfecks — und so fort bis ins Unendliche. Und da durch die Diagonalen immer neue regelmäßige Fünfecke entstehen, leuchtet es zwingend ein, daß der Prozeß der Wechselwegnahme sich immer weiter fortsetzen wird und daß deshalb kein größtes gemeinsames Maß der Diagonale und der Seite des regelmäßigen Fünfecks gefunden werden kann: Es existieren gegenseitig inkommensurable Strecken.

K. von Fritz hat die Entdeckungsgeschichte der Inkommensurabilität in der hier skizzierten Form im Jahre 1954¹⁶ durch sorgfältige Analyse sehr wahrscheinlich gemacht. Er kommt zusammenfassend zu dem Schluß: „Es besteht also nicht der geringste Anlaß, zu bezweifeln, daß Hippasos imstande war, die Inkommensurabilität der Seite und der Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks zu beweisen. Denn für den vorgeschlagenen Beweis sind nur zwei fundamentale geometrische Sätze notwendig, die das gleichschenkelige Dreieck und die Winkelsumme im Dreieck betreffen, und dann die altbewährte Methode, durch Wechselwegnahme das größte gemeinsame Maß zu finden. Alles übrige ist lediglich einfachste Addition, Subtraktion und Division“¹⁷.

Darüber hinaus hat S. Heller in einer an K. von Fritz anschließenden Arbeit im Jahre 1958¹⁸ wahrscheinlich gemacht, daß und wie Hippasos und die *mathematikoi* seiner Zeit im Anschluß an die Entdeckung der Inkommensurabilität zur Entdeckung der stetigen Teilung und zur Kennzeichnung des „Goldenen Schnittes“ gekommen sind, die ihrerseits eine zentrale Stellung im System der Pythagoreischen Mathematik innehatten. Für Einzelheiten sei auf S. Heller direkt verwiesen.

5. Ansätze zur Überwindung der Grundlagenkrisis

Auf die Konsequenzen der Entdeckung gegenseitig inkommensurabler Strecken muß ausführlich eingegangen werden; auch dies gehört in das Zentrum dieses Berichtes.

Unter dem Druck der den Zusammenbruch der arithmetica universalis bedeutenden und eine Grundlagenkrisis auslösenden Entdeckung des Inkommensurablen bildeten sich innerhalb der Mathematik während der athenischen Periode vier Tendenzen aus. Diese liefen weitgehend zeitlich parallel, durchdrangen sich und streckten sich hin bis zur Mathematikergeneration der Pythagoreer von Archytas von Tarent und liefen weiter bis zu der sich aus dem Pythagoreischen emanzipierenden Mathematikergruppe um Theaitetos (415?—368) und Eudoxos von Knidos (408?—355?)

Es gibt eine Menge von direkten und indirekten Zeugnissen dafür, daß als erste spontane Reaktion auf die Entdeckung des Hippasos umfangreiche Bemühungen

unternommen wurden, dieses sein katastrophales Ergebnis zu widerlegen oder doch als völlige und darum nicht ins Gewicht fallende Ausnahme zu erweisen.

Dieser ersten Tendenz gehört die Absicht an, für Seite und Diagonale eines Quadrates ein gemeinsames Maß zu finden. Es glückte — wenn wir uns modern ausdrücken —, rationale Näherungen für $\sqrt{2}$ anzugeben, und zwar die Folge $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \dots$, die von beiden Seiten gegen $\sqrt{2}$ konvergiert¹⁹. Die Folge der Brüche $\frac{Z_r}{N_r}$, $r = 1, 2, \dots$ erhält man aus den Rekursionsformeln $Z_r = 2N_{r-1} + Z_{r-1}$, $N_r = N_{r-1} + Z_{r-1}$, $r \geq 3$, bei den Anfangsgliedern $Z_1 = 1$, $Z_2 = 3$, $N_1 = 1$, $N_2 = 2$. Die Rekursionsformeln ergeben sich aus der Identität

$$2x^2 - y^2 = (2x + y)^2 - 2(x + y)^2,$$

die geometrisch, also innerhalb der Pythagoreischen Schule, leicht zu beweisen gewesen wäre (Abb. 3).

Die angegebenen Näherungen bedeuten geometrisch die Konstruktion von rechtwinkligen Dreiecken, in denen stets eine Kathete gleich 1 ist und entweder in der Länge der Hypotenuse oder der größeren Kathete als Faktor $\sqrt{2}$ enthalten ist und dann die größere Kathete beziehungsweise die Hypotenuse ganzzahlig ist. Mit wachsendem r wird der Unterschied zwischen ihnen immer kleiner, aber da er nie Null wird, existiert kein gemeinsames Maß zwischen Kathete und Hypotenuse: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Es glückte — natürlich — nicht, das wahre Verhältnis der Streckenlänge von Diagonale und Seite des Quadrates anzugeben und damit einen weiteren Fall des Auftretens gegenseitig inkommensurabler Strecken zu widerlegen. Hieraus ist schließlich — wir wissen nicht wann —, vermutlich durch gedankliche Umkehrung, der Beweis für die Inkommensurabilität hervorgegangen, der auf der frühpythagoreischen Lehre von Gerade und Ungerade beruht.

Eine zweite Tendenz war darauf gerichtet, bei der Konfrontation der erwiesenen Existenz des Irrationalen mit der arithmetica universalis zu versuchen, die alten Grundlagen mit den neuen Ergebnissen verträglich zu machen.

Ursprünglich bedeutete λόγος den Ausdruck des Wesens einer Sache durch ganze Zahlen, also die Einbettung in das Systemdenken der arithmetica universalis. Dann verdichtete sich dieses Wort als fachspezifischer Terminus technicus²⁰ auf die Bedeutung von Verhältnis (ganzer Zahlen). Wurde der Begriff λόγος gebraucht, so meinte man, daß kein λόγος oder Verhältnis vorhanden war; hierhin gehört also die Beziehung zweier gegenseitig inkommensurabler Strecken.

Nun ist aber — nach der Entdeckung der Inkommensurabilität — eine echte mathematische Frage die, ob zwei Paare gegenseitig inkommensurabler Strecken (die also jedes für sich keinen λόγος haben) doch einen λόγος haben. Dieser schwer begriffbare, aber eben nur scheinbare Widerspruch führte zu bedeutenden terminologischen Schwierigkeiten. Als man nach fortschreitender Einsicht in den Sachverhalt die Aussage, zwei Paare von λόγοι besäßen denselben λόγος, nicht

mehr als widersinnig empfand, kehrte man etwa zur Zeit des Theaitetos zu ursprünglichen Terminologie zurück. Alle irrationalen Größen wurden als ἄλογος bezeichnet.

Für die Übergangszeit der Konfrontation des Alten mit dem Neuen aber, al der Begriff λόγος nach Inhalt und Umfang schwankend geworden war, erfordert der vorhandene Aufbau der auf dem Kalkülenden beruhenden Proportionaltheorie eine neue Auffassung von Verhältnis und Proportion. Insbesondere ging es um ein neues Kriterium dafür, ob zwei Paare von inkommensurablen Größen denselben λόγος haben.

Für diese Übergangszeit suchte man aus dem Prozeß der Wechselwagnahme der zur Aufdeckung der Inkommensurabilität geführt hatte, direkt das gesuchte Kriterium herzuleiten und so, daß es sich sowohl auf kommensurable wie auch auf inkommensurable Größen bezieht: Größen haben denselben λόγος, wenn sie dieselbe Wechselwagnahme besitzen. Mit anderen Worten: Zwei Gruppen von Größen sind proportional und bilden eine Proportion $a:b = c:d$, wenn sich be weisen läßt, daß der Prozeß der Wechselwagnahme, obgleich er sich ins Unendliche fortsetzt, trotzdem immer in derselben Richtung fortschreitet.

O. Becker hat gezeigt²¹, daß man mit dieser Definition der Proportion sehr leicht eine Reihe von grundlegenden Eigenschaften über Proportionen beweisen kann, daß aber der für den Aufbau der Proportionaltheorie zentrale Satz über die Vertauschung der Mittelglieder erhebliche Schwierigkeiten bereitet. Man mußte daher — und so berichtet auch Aristoteles — diesen Satz getrennt beweisen für Zahlen, Strecken, Zeiten und andere Größen.

Wie man also sieht, ist die Lösung des Problems dem bestehenden Schwebezustand entsprechend ausgefallen: äußerst scharfsinnig, aber doch so, daß die Beendigung der Krise noch von einem anderen tieferliegenden Ansatzpunkt ausgehend werden mußte. Diese Lösung wurde wenig später durch den genialen Eudoxos von Knidos gegeben. Darüber wird noch ausführlich zu berichten sein.

Und noch eine weitere, die dritte Tendenz, entsprang ebenfalls der Übergangsphase der offenen Konfrontation des Alten mit dem Neuen, also dem Versuch einer bestehenden innerwissenschaftlichen Krisensituation Rechnung zu tragen Während die Aneignung der aus dem Babylonischen überlieferten Mathematik im ersten Drittel des 4. Jahrhunderts rasche Fortschritte machte, vollzog sie eine Umgestaltung der Mathematik zu einem neuen Typ, der nach dem Vorgange von H. G. Zeuthen²² als „geometrische Algebra“ bezeichnet²³ wird: In der Zielstellung abgebräuisch, wurde die Lösung der Probleme mit geometrischen Mitteln gegeben.

In der Tat: Wenn die Länge der Diagonale im Einheitsquadrat nicht meßbar ist mit der Einheit, also kein Verhältnis hat, also keine Zahl darstellt, dann ist doch diese Strecke ohne weiteres konstruierbar. Wo also — modern ausgedrückt — $\sqrt{2}$ als Zahl nicht existierte, war doch wenigstens eine existierende geometrisch Repräsentation äquivalent herzustellen. Mit geometrischen Mitteln war daher der Aufbau einer strengen mathematischen Wissenschaft auch dann möglich wenn die Existenz der Irrationalen aufgedeckt war²⁴. Die Verwendung einer neuen

mathematischen Methode machte die Existenz einer wissenschaftlichen Mathematik auch bei weiterbestehender Grundlagenkrise möglich.

Für den Zweck der hier angestellten Untersuchung ist es nicht notwendig, die weitgehenden Konsequenzen aus dieser Entwicklung der Mathematik so darzulegen, daß der gesamte Umfang der auf dieser Grundlage errichteten griechisch-hellenistischen Mathematik abgesteckt wird. Es reicht durchaus, das Wesen der geometrischen Algebra zu verdeutlichen und einige zentrale Probleme zu erörtern, die zum Verständnis der weiteren Entwicklung notwendig sind.

Schon ein Blick auf das Buch 2 der „Elemente“ des Eukleides weist entscheidende Grundelemente der geometrischen Algebra auf. Es rührt inhaltlich von den Pythagoreern her und entstammt der Periode der Aneignung der babylonischen Mathematik unter den neu gewonnenen methodischen Aspekten der Konfrontation mit den Irrationalen.

Beispielsweise bedeutet der Satz „Hat man zwei Strecken und teilt die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus den beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich“²⁶, die algebraische Formel $a \sum b_i = \sum a d_i$. Die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erscheint in der Form „Teil man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich.“²⁸

Der Beweis wird mit Hilfe der Figur der Abbildung 4 geführt. Das Ziel der so entwickelten „geometrischen Formeln“ besteht darin, die Hilfsmittel bereitzustellen, um quadratische Gleichungen auflösen zu können, das heißt solche Gleichungstypen auflösen zu können, die nicht stets ganzzahlig²⁷ oder in ganzzahligen Verhältnissen auflösbar sind. Beispielsweise ist die Aufgabe, „eine gegebene Strecke so zu teilen, daß das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist“²⁸ — das heißt die Aufgabe, eine Strecke a nach dem Goldenen Schnitt zu teilen —, der Auflösung der quadratischen Gleichung $x^2 = a(a - x)$, das heißt $x^2 + ax = a^2$ äquivalent.

Das Kernstück der Behandlung quadratischer Gleichungen nach der Methode der geometrischen Algebra ist das Verfahren der Flächenanlegung (griechisch *parabolé*). Mit ihm werden die aus dem Babylonischen übernommenen Typen von Gleichungen direkt sozusagen ins Geometrische „übersetzt“; die enge Anlehnung der griechischen Mathematik an die babylonische Vorlage ist genauestens erwiesen²⁹. „Es ist also ein vollständiger Beweis für die Beziehungen zwischen der babylonischen und der griechischen Mathematik, daß wir sämtliche Probleme ...“ (der Auflösung von Gleichungen mit einer oder mit zwei Variablen) „in geometrischer Formulierung bei den Griechen wiederfinden ... Und auch die Lösungen dieser Probleme sind nicht etwa geometrisch gedacht, sondern sie sind wörtliche Übersetzungen der algebraischen Lösungen, wie die Keilschrifttexte sie geben, ins Geometrische“³⁰.

Es wird genügen, wenn hier das Wesen der Flächenanlegung an einem Beispiel

demonstriert wird. Eine systematische Behandlung und Zusammenfassung der Flächenanlegung erfolgte schließlich in den Büchern 2 und 6 der „Elemente“ durch Eukleides, der sich dabei eng an die in der attischen Periode gewohnten Vorlage gehalten hat.

Im Babylonischen wurden Gleichungen in einer Variablen — wenn wir uns moderner Formulierung und Terminologie bedienen — nach den folgenden sechs Typen

- (1) $ax = b$
- (2) $x^2 = a$
- (3) $x^2 + ax = b$
- (4) $x^2 - ax = b$
- (5) $x^3 = a$
- (6) $x^3(x + 1) = a$

behandelt. Der Typ (1) bedeutet also die Auflösung einer linearen Gleichung und wird behandelt mit dem einfachsten Fall der Flächenanlegung, der (parabolische) Flächenanlegung. Man hat an eine gegebene Strecke c in Form eines Rechteck eine Fläche anzutragen, die flächengleich ist mit einem vorgegebenen Rechteck der Fläche $a \cdot b$. Die Konstruktion (vgl. Abb. 5) geschieht mit Hilfe des Satzes über die Ergänzung des Parallelogramms. Wenn man danach das Rechteck $b \cdot b$ konstruiert, über b das Rechteck $a \cdot b$ aufträgt, dann schneidet die Diagonale d des Rechtecks $b \cdot c$ die Verlängerung von AB in C . Die Ergänzung zum Rechteck liefert das Rechteck $FECH$, dessen Fläche $c \cdot x$ mit $a \cdot b$ flächengleich ist.

Der nächste Schritt besteht in der Konstruktion der Lösungen der nicht mehr linearen Gleichungen, das heißt der Behandlung der Typen (2), (3), (4). Dazu werden Flächenanlegungen benötigt, bei denen die zu konstruierende Fläche einen Flächeninhalt besitzt, die um eine gegebene Fläche kleiner (Defekt) oder größer (Exzeß) als eine vorgegebene Fläche ist³¹. Aus den Worten *ellipsis* und *hyperbola* für Defekt (Mangel) und Exzeß (Überschuß), welche das entsprechende Verfahren der Flächenanlegung (*parabolé*) bezeichnen, gingen übrigens bei Apollonius von Perge (262?–190?) die Bezeichnungen für die entsprechenden Kegelschnitt Parabel, Ellipse und Hyperbel hervor.

Dieser Einblick in das Wesen der Flächenanlegung wird genügen, um die Methode der geometrischen Algebra als einen erfolgreichen Kompromiß im Umgang mit dem aufgeworfenen Problem des Irrationalen zu charakterisieren.

Die Bewältigung der Grundlagenkrise der griechischen Mathematik war also mit der Methode der geometrischen Algebra nicht vollbracht.

Eine vierte Tendenz innerhalb der attischen Periode war darauf gerichtet, das Irrationale zu bewältigen, das heißt, logisch-sachlich das Irrationale durch geeignete begriffliche Bewältigung an den übernommenen Zahlbegriff und an das (ganzzahligen) Verhältnisse anzuschließen. Der Weg dahin verdient eine eigene, gesonderte Betrachtung.

6. Klassifizierung der quadratischen Irrationalitäten

Der Umschwung auf dem Wege zur Bewältigung des Irrationalen zeichnet sich bereits in der vielzitierten und unterschiedlich interpretierten³² berühmten mathematischen Stelle des Platonischen Dialoges *Theaitetos* ab (Plat. *Theait.* 147c–148d). Der Dialog ist dem Andenken des höchstwahrscheinlich im Jahre 368 auf dem Schlachtfeld umgekommen, glänzend begabten Mathematikers Theaitetos gewidmet. Platon läßt den Mathematiker Theodoros von Kyrene (470? bis 329), der aller Wahrscheinlichkeit nach der Pythagoreischen Schule angehört und Platon selbst in Mathematik unterweisen haben dürfte, als Greis auftreten und mathematische Demonstrationen geben, die das höchste Interesse zweier athenischer Jünglinge, Sokrates und Theaitetos, finden. Theaitetos berichtet rückblickend darüber, um dann vorzutragen, was er selbst durch Nachdenken aus diesem Problem gemacht hat.

Zunächst läßt also Platon Theaitetos über die Demonstrationen von Theodoros berichten: „Theodoros hier zeichnete uns etwas aus der Lehre von den Quadraten und bewies für die Quadrate von drei und fünf Fuß Inhalt, daß die der Seitenlänge nach dem Quadrate von einem Fuß Inhalt nicht kommensurabel seien, und so zog er jedes einzelne heran bis zum siebzehnfüßigen Quadrat. Bei diesem hielt er zufällig inne“³³.

Trotz aller Unterschiede³⁴ in den Lesarten dieser Stelle ist jedoch so viel klar: Theodoros demonstrierte, daß die Seitenlängen der Quadrate mit den Flächeninhalten 3, 5, ..., 17 nicht (linear) kommensurabel sind mit denen des Einheitsquadrates. In moderner Formulierung läuft dies darauf hinaus, daß $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ irrationale Zahlen sind.

In dem hier beabsichtigten Zusammenhang ist jedoch die nicht mehr eindeutig rekonstruierbare Antwort auf die Frage, wie Theodoros jene Strecken konstruiert hat, relativ unwesentlich. Man kann entweder annehmen, daß Theodoros Rechtecke mit den Flächeninhalten $1 \cdot 3$, $1 \cdot 5$, ..., $1 \cdot 17$ in flächengleiche Quadrate verwandelt oder aber nacheinander den Satz von Pythagoras angewendet hat, gemäß einer geistreichen Konstruktion (Abb. 6) von H. J. Anderhub³⁵, die auch anschaulich erklärt, warum Theodoros bei $\sqrt{17}$ endete. Bezüglich der Beweisführung durch Theodoros ist mit großer Wahrscheinlichkeit ein Verfahren anzunehmen, das auf dem Prinzip der Wechselwegnahme beruht; auch hier gibt es zwingende mathematische Gründe³⁶, warum das Verfahren bei $\sqrt{17}$ aufhörte.

Wesentlicher für den hier untersuchten Zusammenhang ist indes die Fortsetzung der obigen mathematischen Stelle aus Platons Dialog „*Theaitetos*“; hier läßt Platon Theaitetos berichten, wie durch Klassifizierung der gegenseitig inkommensurablen Größen eine Klassifizierung der quadratischen Irrationalitäten eingeleitet und damit die eine historische Wurzel der Überwindung der Grundlagenkrise der antiken Mathematik ausgebildet wird.

Nachdem also Theaitetos rückblickend über die Demonstrationen von Theo-

doros berichtet hatte, fährt Theaitetos fort: „Nun fiel es uns“ (ihm und einem anderen athenischen Jüngling) „bei, da ja die Quadrate in ihrer Menge unendlich seien, zu versuchen, sie in einem gemeinsamen Begriffe zusammenzufassen, um mit ihm alle diese Quadrate bezeichnen zu können ... Alle Zahlen schied wir in zwei Klassen: in solche, die dem Produkt aus gleichen Zahlen entsprechen, sie verglichen wir nach ihrer Gestalt mit dem Quadrat und nannten sie quadratisch und gleichseitig ... Die Zahlen dazwischen aber, zu denen die Drei und die Fünf und jede gehört, die dem Produkt aus gleichen Zahlen nicht entsprechen kann, sondern dem Vielfachen einer größeren Zahl und einer kleineren oder einer kleineren und einer größeren, so daß in ihrer Darstellung immer eine größere und eine kleinere Seite sie umschließt, verglichen wir der länglichen Gestalt des Rechtecks und nannten sie oblonge Zahlen ... Alle Linien, die ein nach Seiten ungleiches Flächen kommensurables Quadrat bilden, bestimmten wir als Längen; die aber ein ungleichseitiges Vieleck bilden, als solche Quadrate, die an Länge mit jenen nicht kommensurabel sind, jedoch der Fläche nach, deren Quadrat sie bilden. Und mit den Kubikzahlen ist es auch ähnlich“³⁷.

Damit ist eine prinzipielle, über die Angabe spezieller Fälle durch Theodoros hinausgehende Einteilung getroffen, die zwei ganze Klassen von Irrationalitäten erfaßt: Diejenigen Strecken, die ein Quadrat erzeugen, dessen Flächeninhalt zwar eine ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl ist, haben kein gemeinsames Maß mit der Längeneinheit; sie sind inkommensurabel mit 1. Und: Diejenigen Strecken, die einen Würfel erzeugen, dessen Rauminhalt zwar eine ganze Zahl, jedoch keine Kubikzahl ist, sind inkommensurabel mit der Längeneinheit.

Dieser Teil des Dialoges ist zugleich ein Programm zum umfassenden Studium der Irrationalitäten. Es findet sich durchgeführt im Buch 10 der „*Elemente*“ des Eukleides (365?–300?). Demnach erfolgte die Niederschrift der uns überlieferten Form der Theorie der Irrationalitäten bereits am Beginn der hellenistischen Periode; es steht jedoch kaum außer Zweifel, daß die Vorlage zum Buch 10 dem Inhalte nach, wesentlich auf Theaitetos zurückgeht³⁸.

Es ist für den hier verfolgten Zweck nicht notwendig, das Buch 10 in alle Einzelheiten zu analysieren. Doch sind einige Bemerkungen notwendig, um dessen Charakter zu verdeutlichen.

Das Buch 10 beginnt mit den Definitionen der Kommensurabilität, der linearen und quadratischen: „Kommensurabel heißen Größen, die von demselben Maße gemessen werden, und inkommensurabel solche, für die es kein gemeinsames Maß gibt.“ „Strecken sind quadriert kommensurabel, wenn die Quadrate über ihnen von derselben Fläche gemessen werden, und quadriert inkommensurabel, wenn es zu den Quadraten über ihnen keine Fläche gibt, die gemeinsames Maß würde.“

Unter Anknüpfung an entsprechende Definitionen in Buch 5 der „*Elemente*“ wird dann, im Lehrsatz 2, mit Hilfe des Begriffes der Wechselwegnahme ein hinreichendes Kriterium für Inkommensurabilität abgeleitet: „Mißt, wenn man unter zwei ungleichen Größen abwechselnd immer die kleinere von der größeren wegnimmt, der Rest niemals genau die vorhergehende Größe, so müssen die Größen inkommensurabel sein.“⁴⁰ Der Beweis dieses Satzes erfolgt indirekt.

Eudoxos hat als Dreißundzwanzigjähriger für zwei Monate der Platonischen Akademie angehört, aber dort trotz schon erworbener bedeutender mathematischer Kenntnisse nicht recht Fuß fassen können. Er hat dann später im Kyzikos am Marmara-Meer eine eigene blühende Mathematiker-Schule begründet.

In erkenntnistheoretischer Hinsicht vertrat Eudoxos gegenüber Platon abweichende Ansichten. Auf mathematischem Gebiet — sie existierten aber auch in der Astronomie — fanden sie ihren Ausdruck darin, daß er, der bei Archytas von Tarent Mathematik erlernt hatte, ein neues (allerdings verlorenes) mechanisches Verfahren zur Konstruktion zweier mittlerer Proportionalen (Würfelverdopplung!) angegeben hat⁷.

Die von Eudoxos geschaffene Größenlehre unter Einbeziehung und Berücksichtigung des Irrationalen ist als Buch 5 in die „Elemente“ eingegangen; Eudoxos stand dabei vor der doppelten Aufgabe, einerseits die bewährte Pythagoreische Proportionalenlehre (Buch 7) bestehen zu lassen, andererseits aber der zutage getretenen Existenz gegenseitig inkommensurabler Strecken gerecht zu werden. Ein Vergleich zwischen dem (älteren) Buch 7 und Buch 5 der „Elemente“ zeigt den erzielten Fortschritt; er wird schon deutlich bei der Definition der Proportion. Buch 7, Definition 20: „Zahlen stehen in Proportion, wenn die erste von der zweiten Gleichvielfaches oder derselbe Teil oder dieselbe Menge von Teilen ist wie die dritte von der vierten.“⁴⁸

Diese Definition ist an den Pythagoreischen Zahlbegriff und wesentlich an die Voraussetzung gebunden, daß die erste und zweite Zahl ein gemeinsames Maß besitzen; sie ist also aus doppeltem Grunde für gegenseitig inkommensurable Größen unbrauchbar. Demgegenüber definiert Eudoxos folgendermaßen und löst damit die oben bezeichnete doppelte Aufgabe der begrifflichen Fixierung der Neuen unter Anschluß an das Alte.

Buch 5, Definition 5: „Man sagt, daß Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind“; und: Definition 6: „... die dasselbe Verhältnis habenden Größen sollen in Proportion stehend heißen“⁴⁹.

Verwendet man die uns vertraute Formelschreibweise, so heißt das:

Wenn $a:b = c:d$, dann folgt bei beliebigen natürlichen Zahlen m und n

entweder aus $ma > mb$ stets $nc > nd$
oder aus $ma = mb$ stets $nc = nd$
oder aus $ma < mb$ stets $nc < nd$.

Diese Definition des Verhältnisses beruht auf einer Art „Axiom des Messens“ (Buch 5, Definition 3 u. 4). „Verhältnis ist das gewisse Verhalten zweier gleichartiger Größen der Abmessung nach.“ „Daß sie ein Verhältnis zueinander haben, sagt man von Größen, die vielfältigt einander übertreffen können.“⁵⁰

Diese von Eudoxos gegebene Definition benutzt absichtlich keinerlei Voraussetzung über Kommensurabilität der Größen. Sie ist andererseits geeignet, alle

bekannten Sätze über Proportionen — darunter den zentralen Satz über die Vertauschung der Mittelglieder — beweisen zu können.

Den Abschluß des Buches 5 bilden die Operationen mit zusammengesetzten Verhältnissen; abgeleitet aus diesen ist die äquivalente der Multiplikation von Brüchen. Der Beweis für die „Produktgleichung“ erfolgt jedoch erst in Buch 6: „Stehen vier Strecken in Proportion, so müssen auch ähnliche über ihnen ähnlich gezeichnete geradlinige Figuren in Proportion stehen (und umgekehrt)“⁵¹.

Mit diesem Satz wird die Verbindung zwischen der geometrischen Algebra von Buch 2 und der Lehre von den Proportionen aus Buch 5 einerseits und einer das Inkommensurable, Irrationale umfassenden Größenlehre andererseits in mathematisch korrekter Weise hergestellt: Der Kreis ist geschlossen, die Grundlagenkrisis der antiken Mathematik ist der Erscheinungsform nach behoben. Doch wird die Tragweite der solcherart aufgehobenen Krise zu analysieren sein, sowohl nach dem innermathematisch-historischen Aspekt wie nach ihrer historisch-kausalen Wirkung.

8. Konsequenzen für die Mathematik der hellenistischen Periode

Für den historisch unbefangenen heutigen Leser könnte die von Eudoxos gegebene Größenlehre beinahe trivial wirken und kaum den Gebrauch von Superlativen rechtfertigen. Doch wird eine Besinnung auf den historischen Standort und die durch sie erreichte neue Ausgangsposition weiterhelfen.

Vom heutigen Standpunkt ist es selbstverständlich, daß der Zahlbegriff weit mehr umfaßt als natürliche Zahlen und deren Verhältnisse.

Eudoxos aber fand diesen engen Zahlbegriff vor, und zwar als festgefügte lastende Tradition. Es ist daher eine höchst bemerkenswerte Leistung, daß er mit der Mathematisierung des Größenbegriffes über den zu eng gewordenen Pythagoreischen Zahlbegriff hinausgegangen ist. Dies ist bereits von Aristoteles in voller Tragweite erkannt und gewürdigt worden⁵².

Dennoch sind weder Eudoxos noch die spätere griechisch-hellenistische Mathematik zum expliziten Begriff der Irrationalzahl vorgestoßen. Dazu waren die Schwierigkeiten des Umganges mit dem mathematischen Unendlichen viel zu groß; in irgendeiner Weise erfordert aber jede strenge Definition der Irrationalzahlen⁵³ die Beherrschung von Grenzwertprozessen.

Bei den Ansätzen einer Beherrschung des Infinitesimalen, welche etwa als geometrische Analysis bezeichnet werden könnten und auf die Anwendung der sogenannten Exhaustionsmethode hinausliefen, hat sich wiederum Eudoxos hervorgetan. Seine Ergebnisse, die bei der Berechnung von Pyramide, Kegel und Kugel verwendet wurden, sind eingegangen in Buch 12 der „Elemente“. In der hellenistischen Periode wurden diese Ansätze — zusammen mit dem bewußten Rückgriff auf die materialistische Tradition von Demokritos — durch Archimedes von Syrakus (287–212) zur formalen Meisterschaft geführt, die erst am Ausgang der Renaissance in Europa übertroffen werden konnte.

Insgesamt bietet sich dem historischen Betrachter die unter einem doppelten Aspekt zu verstehende Überwindung der Grundlagenkrise der griechischen Mathematik als eine bedeutende geistige Leistung dar; sie legte Fundamente für einen neuen, großartigen Aufschwung der Mathematik während der hellenistischen Periode: Dem Anschluß an den in der davorliegenden Periode bereits entwickelten streng logischen Charakter der Mathematik mittels der Eudoxischen Größenlehre sowie der Entfaltung der in der Methode der geometrischen Algebra liegenden weitreichenden Möglichkeiten — freilich eingeschränkt in Spielraum und Anwendungsbereich auf Grund der den Platonischen Auffassungen anzulastenden Entfremdung zwischen Theorie und Praxis — verdankt die Mathematik in der hellenistischen Periode ihre noch heute beeindruckende Leistungsstärke.

Wir stehen am Ende des Berichtes. Er soll ausklingen in den Versuch einer Besinnung auf das Faktologische.

Die mit der Entdeckung des Irrationalen ausgelöste Krise der griechischen Mathematik wurde aufgehoben im mehrfachen, dialektischen Sinne dieses Wortes. Sie wurde insofern beseitigt, als der Anschluß an den in der Frühzeit gewonnenen systematischen Aufbau dieser Wissenschaft logisch einwandfrei mit Hilfe der Eudoxischen Größenlehre und der Methode der geometrischen Algebra gefunden werden konnte. Diese Überwindung der Krise war jedoch insofern logisch zu schwach, als das tiefer liegende Problem des mathematischen Unendlich zwar angerührt worden war, aber gerade wegen des Kompromißcharakters der geometrischen Algebra nicht ausdiskutiert zu werden brauchte; in diesem Sinne wurde die Krise aufgehoben und bewahrt.

Geschichtsschreibung, die nach dem Prinzip „was wäre geschehen, wenn“ angesetzt wird, ist und bleibt verdächtig. Und doch: Vom Standpunkt einer Untersuchung, was problemgeschichtlich aus der Grundlagenkrise hervorgegangen sein könnte, wenn sich nicht die geometrische Algebra als wirksamer Behelf vor eine Herausbildung des Begriffes der Irrationalzahl und die Bewältigung des mathematischen Unendlich geschoben hätte, wäre tatsächlich diese Form der Aufhebung der Grundlagenkrise der griechischen Mathematik ein Irrweg, ein folgenschwerer Rückschritt gewesen. Aber die Geschichte einer wissenschaftlichen Disziplin ist ihrerseits eben nicht linear-logisch zu messen; geometrische Algebra und Eudoxische Größenlehre repräsentieren den dialektischen Gang der Entwicklung.

Auf Grund einer Reihe direkter und indirekter Indizien, die die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik chronologisch, geographisch-politisch und sachlich-methodisch in die Krisenzeit der griechischen Polis einbetten, drängt sich dem Berichterstatter eine Parallele auf; allerdings wird sie nicht individuell-kausal, sondern nur gesellschaftlich-strukturell zu verstehen sein: Wie die Erschöpfung der historischen Möglichkeiten der griechischen Polis nicht zum Untergang der Antike schlechthin, sondern vielmehr zur Herausbildung eines spezifischen Typs des antiken Großreiches führte, der sich seinerseits nur als historisch ausschöpfbar, nicht aber als strukturell höher entwickelbar herausstellte und

dessen Überwindung nur durch Übergang zu einer prinzipiell höheren Gesellschaftsordnung möglich werden sollte, so führte die Aufdeckung tiefgreifender logischer Schwierigkeiten im System der Mathematik der ionischen Periode nicht zur Aufhebung der Mathematik als Wissenschaft, sondern im Gegenteil zur Herausbildung einer weitreichenden neuen Methode, die den Zugang in ein weites fruchtbares Feld mathematischer Forschung erschloß, zugleich aber die weitere Entwicklung im wesentlichen auf einen einzigen Typ der Mathematik einengte. Der Potenz nach war darum — trotz aller glanzvollen Entfaltung — der Höhepunkt der antiken Mathematik während der hellenistischen Periode bereits überschritten; ein Neubeginn mußte daher — und zwar anfangs sogar auf niederem Niveau — mit der Überwindung des durch die geometrische Algebra geprägten Typs der Mathematik gesetzt werden. Die Vollstreckung dieses historischen Auftrages sollte jedoch erst den Mathematikern der Periode des Feudalismus zufallen.

Anmerkungen

- 1 O. Neugebauer, Zur geometrischen Algebra (Studien zur Geschichte der antiken Algebra 3), in: Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Bd. 3, Berlin 1930, 258.
- 2 Aus der allgemeinen Gepflogenheit, die Zahlen mit Eigenschaften wie Haß, Liebe, männlich, weiblich und ähnlichem auszustatten, sind auch die Begriffsbildungen „vollkommene Zahlen“ und „befreundete Zahlen“ hervorgegangen. Eine Zahl, wie z. B. 6, heißt vollkommen, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist: $1 + 2 + 3 = 6$. Zwei Zahlen heißen befreundet, wenn jede gleich der Summe der echten Teiler der anderen ist; z. B. sind 220 und 284 befreundet.
- 3 Zu den sogenannten Neupythagoreern, etwa zwischen 100 v. u. Z. und 200 u. Z. besteht keine zusammenhängende Entwicklungslinie.
- 4 Der Pythagoreer Philolaos (gestorben um 300 v. u. Z.) drückt dies unter anderem in diesen Worten aus (Fr. 11 Diels-Kranz): „Denn die Natur der Zahl ist kenntnispendend, führend und lehrend für jeglichen in jeglichem Dinge, das ihm zweifelhaft oder unbekannt ist.“ Und an anderer Stelle: „Und in der Tat hat ja alles, was man erkennen kann, eine Zahl. Denn ohne sie läßt sich nichts erfahren oder erkennen.“ (Fr. 4 Diels-Kranz).
- 5 Eukl. Stoich. 7 or. 6—7. Eukleides von Alexandria, Die Elemente, Teil 3 (Buch 7—9), nach Heibergs Text übersetzt u. hrsg. von Cl. Thaeer, Leipzig 1935, 1.
- 6 Zumindest aus hellenistischer Zeit ist die Kenntnis der altägyptischen Bruchrechnung verbürgt. Archimedes z. B. rechnete mit gemischten Brüchen. Für aufwendiges numerisches Rechnen, z. B. in der Astronomie, wurde in hellenistischer Zeit das babylonische Sexagesimal-System verwendet. So verfuhr z. B. Ptolemaios. Vgl. dazu auch K. Vogel, Beiträge zur griechischen Logistik, München 1936.
- 7 Auf die Wechselbeziehungen zwischen der Herausbildung des Pythagoreischen Zahlbegriffes mit der Entwicklung der Musiklehre und Astronomie kann hier indes — so interessant es an sich auch wäre — nicht eingegangen werden, vgl. dazu u. a. B. L. van der Waerden, Harmonielehre der Pythagoreer, Amsterdam 1951.
- 8 Der exakte Nachweis der Nichtkommensurabilität zweier Strecken setzt eine bedeutende Höhe abstrakten mathematischen Denkens voraus. Daher wurde — während der zwanziger und dreißiger Jahre — der Einwand vorgebracht (z. B. E. Frank, Platon und die

sogenannten Pythagoreer. Halle 1923), daß auf dem Boden der relativ unentwickelten frühpythagoräischen Mathematik ein solcher Beweis nicht habe geführt werden können und daher später zu datieren sei. Heute, nach Erschließung der babylonischen Mathematik, entfällt dieses indirekte, von „abendländischem“ Denken noch immer konvertierte „Argument“. Man muß sich darüber im klaren sein, daß die griechische Mathematik nicht am Anfang, sondern etwa in der Mitte einer reichlich viereinhalbtausendjährigen Geschichte wirklicher Mathematik steht. — Dazu kommen neu erschlossene bzw. sicher interpretierte direkte Zeugnisse, die die frühe Datierung belegen.

9 T. Tannery, *La géométrie grecque*, Paris 1887, 98.

10 Zitiert nach S. Heller, Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer, in: *Abh. Deutsche Akademie Wiss. Berlin, Kl. für Mathematik, Physik und Technik* 6, Berlin 1958, 321.

11 Für Einzelheiten sei z. B. auf S. Heller, ebenda; K. v. Fritz, Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont, deutsche Übersetzung aus englischer Sprache 1954, verwiesen.

12 Der Beweis war Aristoteles bekannt, also bekannt vor der Niederschrift der „Elemente“. Indirekte Zeugnisse könnten sogar darauf hindeuten, daß Aristoteles diesen Beweis selbst gefunden hat.

13 K. v. Fritz, Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont, 293f.

14 Zitiert nach S. Heller, Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer, 320f. Die erstaunlich frühe Kenntnis des Dodekaeders ist verbürgt. Möglicherweise hängt dies damit zusammen, daß in Italien das Dodekaeder natürlich in Form von Pyritkristallen auftritt.

16 K. v. Fritz, Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont, 17 Ebenda 298. Weiter unten fährt K. v. Fritz (ebenda 299f.) fort: „Vielleicht ist also die Behauptung gerechtfertigt, daß die bisherige Untersuchung bewiesen hat, was in der Einleitung zu diesem Aufsatz versprochen wurde, nämlich daß die Inkommensurabilität um die Mitte des 5. Jh. v. Chr. entdeckt worden sein kann, daß die Entwicklung der pythagoräischen Lehre von den Zahlen als den Wesen aller Dinge ganz natürlich zu dieser Entdeckung führte, daß die antike Überlieferung deutliche Hinweise darüber enthält, auf welchem Weg die Entdeckung tatsächlich gemacht wurde, und nicht zuletzt, daß die griechische Mathematik in jener frühen Periode vielleicht sehr elementar, aber gewiß nicht trivial war.“

18 S. Heller, Die Entdeckung der stetigen Teilung durch die Pythagoreer.

19 J. E. Hofmann, *Geschichte der Mathematik*, Teil 1, Berlin 1963, 33; H. Wubling, *Mathematik in der Antike*, Leipzig 1965, 98.

20 Auf die sehr verwickelten Entwicklungszüge im Terminologischen kann und braucht hier nicht eingegangen zu werden. Vgl. dazu K. v. Fritz, Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont, 283—285 u. 301—303; A. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik*, München—Wien 1969.

21 O. Becker, *Endoxos-Studien I*, in: *Quellen und Studien der Geschichte der Mathematik*, Bd. 2, Berlin 1933, 311—333.

22 H. G. Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Nachdruck Hildesheim 1965.

23 Damit hat Zeuthen bereits im Jahre 1886 einen außerordentlichen bedeutsamen Schritt zum Verständnis des Wesens der griechisch-hellenistischen Mathematik getan. Er schrieb damals (ebenda 7) „Diese Entdeckung“ (die Entdeckung irrationaler Größen)

„welche die Benützung der arithmetischen Hilfsmittel bemahe, mußte eben dadurch besonders günstig für die Entwicklung jenes geometrischen Hilfsmittels werden. In dieser Weise entwickelte sich eine geometrische Algebra, wie man sie nennen kann, die dieselbe als Algebra teils allgemeinen Größen, irrationalen sowohl wie rationalen, behandelte, teils andere Mittel als die geometrische Sprache benutzte, um ihr Verfahren anschaulich zu machen und dem Gedächtnisse einzuprägen.“

24 B. L. van der Waerden stellte 1947 fest: „Der Grund, warum die Griechen die algebraischen Probleme und Lösungen der Babylonier ins Geometrische übersetzen mußten, liegt in der Erkenntnis des Irrationalen. Die Lösung der Gleichungen in Zahlen, d. h. nach griechischen Begriffen in rationalen Zahlen, ist nicht immer möglich, und mit einer nur genäherten Lösung haben die Griechen sich nicht begnügen wollen. Die geometrische Lösung aber ist exakt und allgemein, und die geometrische Algebra läßt sich auf beliebige, auch irrationale Strecken anwenden.“ (Die Arithmetik der Pythagoreer, in: *Mathematische Annalen* 120, 1947/1948, Wiederabdruck in: *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Sammelbd., hrsg. von O. Becker, Darmstadt 1965, 207).

25 Eukl. Stoich. 2, 1. Eukleides von Alexandria, *Die Elemente*, Teil 1 (Buch 1—3) nach Heibergs Text übersetzt u. hrsg. von Cl. Thuer (Ostwalds Klassiker 235) Leipzig 1933, 34.

26 Eukl. Stoich. 2, 2.

27 Negative Lösungen scheiden von vornherein aus, da der Begriff der negativen Zahl in der griechischen Mathematik völlig unbekannt war.

28 Eukl. Stoich. 2, 11. Eukleides von Alexandria, *Die Elemente*, Teil 1 (Buch 1—3), übersetzt u. hrsg. von Cl. Thuer, 41.

29 O. Neugebauer, *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934.

30 B. L. van der Waerden, *Die Arithmetik der Pythagoreer*, 207.

31 So heißt die Aufgabe 9 von Buch 6: „An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, daß ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm überschreibe.“ Eukl. Stoich. 6, 29. Eukleides von Alexandria, *Die Elemente*, Teil 2 (Buch 4—6), übersetzt u. hrsg. von Cl. Thuer (Ostwalds Klassiker 236) 62.

32 Hier sei insbesondere auch auf die interessanten, temperamentvoll vorgetragenen Ansichten von A. Szabó zu den Leistungen von Theodoros von Kyrene und Theaitetos verwiesen, die in einigen Punkten jedoch von weitgehend anerkannten Ansichten abweichen. Eine zusammenfassende Darstellung gab A. Szabó in seinem 1969 (München—Wien) erschienenen Buch „Anfänge der griechischen Mathematik“.

33 Plat. *Theait.* 177a, übersetzt von K. Preisendanz.

34 Das kritische Wort des Originaltextes, das zu verschiedenen Interpretationen führte, ist das Wort *δύναται*. Heute kann, nach der zwingenden Beweisführung von A. Szabó, als gesichert gelten, daß die Übersetzung durch „Quadrat, statt durch Quadratsätze, dem gegebenen Sachverhalt entspricht.“

35 H. J. Anderhub, *Joco-Seria*, Aus den Papieren eines reisenden Kaufmannes, Ausgabe der Kalle-Werke, Wiesbaden 1941.

36 B. L. v. d. Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, Basel—Stuttgart 1966, 238—240.

37 Plat. *Theait.* 147d—148b, übersetzt v. K. Preisendanz.

38 Van der Waerden schreibt sogar: „Das ganze zehnte Buch ist also das Werk des Theaitetos.“ B. L. v. d. Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, 282.

39 Eukl. Stoich. 10 or. 1—2. Eukleides von Alexandria, *Die Elemente* 10, übersetzt u. hrsg. von Cl. Thuer (Ostwalds Klassiker 241) Leipzig 1936, 1.

40 Eukl. Stoich. 10, 2.

- 41 Eukl. Stoich. 10, 5.
 42 Eukl. Stoich. 10, 6.
 43 Hier lautet der Hauptsatz und seine Umkehrung folgendermaßen: „Die Quadrate über linear kommensurablen Strecken haben zueinander ein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl; und von Quadraten, die zueinander ein Verhältnis haben wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl, müssen auch die Seiten linear kommensurabel sein; die Quadrate über linear inkommensurablen Strecken hingegen haben kein Verhältnis zueinander wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl; und von Quadraten, die kein Verhältnis wie eine Quadratzahl zu einer Quadratzahl zueinander haben, können auch die Seiten nicht linear kommensurabel sein.“ Eukl. Stoich. 10, 9.
 44 Eukl. Stoich. 10 or. 3.
 45 Cl. Theaet. Eukleides von Alexandria, 105.
 46 Beispielsweise: Eine mediale Fläche ist die Fläche eines Rechtecks ab , dessen Seiten a und b rational, aber untereinander inkommensurabel sind. Modern: eine Fläche $\sqrt{r}$, wo r eine rationale Zahl ist. Eine Strecke, deren Quadrat eine mediale Fläche ist, heißt mediale Strecke. Modern: eine Strecke $\sqrt{r}$.
 47 Plutarch berichtet im ersten Jahrhundert n. Z.: „Eudoxos und Archytas waren die ersten gewesen, welche diese eben so beliebt, als berühmt gewordene Mechanik aufbrachten, indem sie dadurch ihrer abstrakten Mathematik eine niedliche Ornamentierschaft oder Zeichnung geben ließ, wurde von ihnen durch mechanische Versinnlichung nachgeholfen... Aber Platon eiferte nun mit großem Unwillen gegen sie, weil sie den Vorzug der Mathematik vernichteten und verderbten, sofern diese jetzt aus dem Gebiete des Unkörperlichen, Geistigen in das der Sinnenwelt entlaufe, und sich leider aufs neue mit Körpern abgeben müsse, die an sich schon so viele lästige Handwerksarbeit erforderten. So fiel denn die Mechanik aufs entschiedenste wieder von der Mathematik aus.“ Plout. Mark. 14, 9–11.
 48 Eukl. Stoich. 7 or. 21.
 49 Eukl. Stoich. 5 or. 5.
 50 Eukl. Stoich. 5 or. 3–4. Genaugenommen liegt diesem Axiom und den von Eudoxos aufgestellten Definitionen ein anderes Axiom zugrunde, das in späterer Zeit von Archimedes (der von einem Postulat spricht) in seiner Abhandlung *Περί τῆς σφαίρας καὶ κυλίνδρου* 1, 5 unter Berufung auf Eudoxos explizite so formuliert wurde: „Die größere von zwei gegebenen Größen, sei es Linie, Fläche oder Körper, übertragt die kleinere um eine Differenz, die genügend oft vervielfacht, jede der beiden gegebenen Größen übertrifft.“ (Übersetzung von A. Czwalina) — Dies ist, allerdings in geometrischer Gestalt, genau das heute der Begründung der Theorie der irrationalen Zahlen zugrunde gelegte Axiom von Archimedes-Eudoxos.
 51 Eukl. Stoich. 6, 22.
 52 Bei Aristoteles erhält allerdings der Größenbegriff noch eine ganz andere, nicht ausschließlich mathematische Interpretation. Aus mehreren Aristoteles-Stellen geht dies deutlich hervor. So schreibt er (Anal. hyst. 75b 4): „Ein arithmetischer Beweis ist nicht anwendbar auf Größen, sofern diese Größen nicht Zahlen sind.“ Der Satz (Eukl. Stoich. 7, 13) über die Vertauschung der Mittelglieder einer Proportion wurde nach Aristoteles (Anal. hyst. 74a 17) früher, d. h. vor Eudoxos, getrennt bewiesen für Zahlen, Strecken, Körper und Zeiten; nach der Aufstellung des allgemeinen Größenbegriffes aber hätte der Satz allgemein bewiesen werden können. Offenbar ist damit Eukl. Stoich. 5, 16 gemeint. Dieser Behauptung widerspricht die auf den ersten Blick gegenteilig wirkende

These nicht, daß die Sätze Eukl. Stoich. 7, 11–14 für Zahlen neu bewiesen werden, obwohl die entsprechenden Sätze in Eukl. Stoich. 5 für Größen allgemein bewiesen werden. Die Erklärung ist einfach: Eukleides hat in Buch 7 die ältere Definition der Proportion beibehalten, um den ihm überlieferten geschlossenen Aufbau der Zahlentheorie nicht zu zerstören. Vgl. dazu auch B. L. v. d. Waerden, Die Arithmetik der Pythagoreer, 218.

53 Auf die philosophische Diskussion über das Unendliche — von Zenon bis Aristoteles — braucht im hier unteruchten Zusammenhang nicht eingegangen zu werden, da sie nur indirekt zur Bewältigung der mathematischen Grundgenekrisis beigetragen hat.

54 Eine strenge Theorie der Irrationalzahlen ist eng mit der Bewältigung des mathematischen Unendlichen durch die entstehende Mengentheorie verbunden und konnte daher erst am Ausgang des 19. Jh. aufgestellt werden; sie knüpft sich an die Namen G. Cantor (1845–1918), R. Dedekind (1831–1916), Ch. Méray (1835–1911).

INHELLENISCHE POLEIS IV ✓