



Springer

5630 pdf
NEUENSCHWANDER, E.
1974

Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids: Untersuchungen über den mathematischen Aufbau und die Entstehungsgeschichte

Author(s): E. Neuenschwander

Source: *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 14, No. 2 (31.XII.1974), pp. 91-125

Published by: Springer

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/41133425>

Accessed: 27/10/2013 16:24

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at
<http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



Springer is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Archive for History of Exact Sciences*.

<http://www.jstor.org>

Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids: Untersuchungen über den mathematischen Aufbau und die Entstehungsgeschichte

Author(s): E. Neuenschwander

Source: *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 14, No. 2 (31.XII.1974), pp. 91-125

Published by: [Springer](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/41133425>

Accessed: 27/10/2013 16:24

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at <http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



Springer is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Archive for History of Exact Sciences*.

<http://www.jstor.org>

Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids

*Untersuchungen über den mathematischen Aufbau
und die Entstehungsgeschichte*

E. NEUENSCHWANDER

Vorgelegt von B. L. VAN DER WAERDEN

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Einleitung	91
I. Der mathematische Aufbau der stereometrischen Bücher	92
Schema I	92
Bei der Aufstellung der schematischen Darstellung befolgte Richtlinien	92
Schematische Darstellung der stereometrischen Bücher	93
II. Zur Entstehungsgeschichte der stereometrischen Bücher	98
Kritische Betrachtung der Textüberlieferung	98
Untersuchung der Bücher XI—XIII	101
Buch XIII	103
Buch XII	109
Buch XI	118
Folgerungen für die Frühgeschichte der Stereometrie	120
Literatur	123

Einleitung

Die vorliegende Arbeit behandelt die stereometrischen Bücher der Elemente EUKLIDS. Dabei wurde dieselbe Methode verwendet, wie in der vorangegangenen Untersuchung der planimetrischen Bücher¹: Vorerst wird der mathematische Aufbau der Bücher analysiert und schematisch dargestellt, darauf die Zitierweise der einzelnen Propositionen untersucht und schließlich mit Hilfe der so gewonnenen Resultate und weiterer Angaben eine Rekonstruktion der Entstehungsgeschichte gegeben. Im Gegensatz zur vorangegangenen Arbeit wurde hier auf die explizite Wiedergabe von Schema II (Untersuchungen der Zitierweise) verzichtet. Die Zitierweise der planimetrischen Sätze in den stereometrischen Büchern ist bereits in der ersten Arbeit kurz gestreift worden; zudem werden die stereometrischen Sätze bedeutend weniger zitiert, so daß ein Vergleich ihrer Zitierweise im allgemeinen nicht sehr aussagekräftig ist.

¹ E. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, in *Archive for History of Exact Sciences*, 9 (1973).

I. Der mathematische Aufbau der stereometrischen Bücher

Schema I

Bei der Aufstellung der schematischen Darstellung befolgte Richtlinien

1. In der schematischen Darstellung werden für jede Proposition der stereometrischen Bücher der Elemente alle Sätze, Postulate, Axiome und Definitionen, die EUKLID zu ihrem Beweis benützt, angegeben. Übergeht EUKLID in einer Proposition einen Konstruktions- oder Beweisschritt stillschweigend und läßt sich mit Bestimmtheit oder großer Wahrscheinlichkeit feststellen, wie EUKLID diese Lücke geschlossen hätte, so werden die dazu benötigten Sätze im Schema notiert. Läßt sich diese Lücke mit Hilfe von EUKLIDS Postulaten, Axiomen und Sätzen nicht schließen oder läßt sich nicht feststellen auf welche Art EUKLID sie geschlossen hätte, so wird sie offen gelassen. Für die Diskussion der einzelnen Beweislücken sei auf die Kommentare zu den Propositionen in der Euklidausgabe von T. L. HEATH verwiesen.

2. Die zum Beweis einer Proposition benötigten Postulate, Axiome, Definitionen und Sätze werden in der schematischen Darstellung folgendermaßen angeordnet:

Zuerst die Postulate und Axiome, dann die Definitionen und Sätze des I. Buches, dann die Definitionen und Sätze des II. Buches usw.

Für die Notierung werden Abkürzungen verwendet, z.B. I Def 15 = 15. Definition im ersten Buch, Zus = Zusatz.

3. Zur Eintragung der zum Beweis einer Proposition benötigten Postulate, Axiome, Definitionen und Sätze in die schematische Darstellung werden verschiedene Auszeichnungen verwendet:

Fett: Falls der ganze Satz oder sein wesentlichster Teil wörtlich zitiert ist.
Falls der ganze Satz zwar nicht wörtlich, aber dem Sinne nach genau zitiert ist.

Normal: Falls der benötigte Satz im Text angedeutet wird.

Kursiv: Falls der zum Beweis benötigte Satz ohne Hinweis benützt wird.

Die in einer Proposition verwendeten Konstruktionsaufgaben werden somit im allgemeinen normal oder kursiv gedruckt, je nachdem ob die Ausführung der Konstruktion im Texte explizite verlangt wird oder nicht. Fett werden sie nur dann eingetragen, wenn eine komplizierte Aufgabenstellung auffallend genau wiederholt wird.

4. Wenn ein Satz (bzw. Postulat, Axiom, Definition) in einer Proposition mehrmals verwendet wird, so wird er jeweils in der Auszeichnung des besten Zitates in der schematischen Darstellung eingetragen.

Nach diesen allgemeinen Richtlinien noch einige spezielle, die bei der Eintragung der Definitionen, Postulate und Axiome befolgt wurden.

5. Um die schematische Darstellung übersichtlicher zu gestalten, werden nicht alle beim Beweis einer Proposition verwendeten Definitionen in ihr angegeben. Es werden nur solche Definitionen in der schematischen Darstellung vermerkt,

die vollständig oder wenigstens dem Sinne nach genau zitiert sind, die also fett gedruckt werden müssen.

6. Postulat 2 wird in den stereometrischen Büchern der Elemente nie zitiert. Für die Verlängerung einer Strecke werden neben dem in der Formulierung von Postulat 2 verwendeten *ἐκβάλλειν* auch die Verben *προσεκβάλλειν*, *διάγειν* und *προσστιθέναι* benützt. Um die Nuancen im Gebrauch von Postulat 2 besser hervorzuheben, wird Postulat 2 nur bei der Benützung von *ἐκβάλλειν* und *προσεκβάλλειν* als angedeutet betrachtet.

7. Die Axiom 1—3 werden in den Elementen selten zitiert. Um die Nuancen in ihrem Gebrauch in der schematischen Darstellung besser hervorzuheben, wird folgendermaßen vorgegangen: Die Axiome 1—3 werden bereits als angedeutet betrachtet, falls bei ihrer Verwendung folgendes im Text steht:

Ax. 1:	$a = b$ und $b = c$	also $a = c$
Ax. 2:	$a = b$ und $c = d$	also $a + c = b + d$
Ax. 3:	$a + c = b + d$ und $a = b$	also $c = d$

Axiom 5 und 6 werden von den meisten Autoren als unecht betrachtet¹. Axiom 5 ist dabei leicht aus Axiom 2 herleitbar, während Axiom 6 nicht aus den Axiomen 1—3 gefolgert werden kann. Aus diesem Grunde setze ich bei impliziter Verwendung von Axiom 5 meist Axiom 2, bei Verwendung von Axiom 6 dagegen dieses selbst.

8. In Beweisen verwendet EUKLID immer wieder die Tatsache, daß gilt:

$$AB = CD \Leftrightarrow (AB)^2 = (CD)^2.$$

Daß diese beiden Schlüsse richtig sind, wird in den Elementen aber nicht bewiesen². Falls EUKLID einen dieser beiden Schlüsse in einem Beweis benützt; wird dies in der schematischen Darstellung durch die Abkürzung Q angegeben. Dabei wird Q normal gedruckt, falls explizite steht

$$AB = CD, \text{ daher } (AB)^2 = (CD)^2 \text{ (oder umgekehrt)}$$

und kursiv, falls einer dieser Beweisschritte stillschweigend verwendet wird.

Schematische Darstellung der stereometrischen Bücher

Buch XI

Def. 1—28

XI 1:	Post 2				
XI 2:	Post 1	XI 1			
XI 3:	Ax 9	Post 1			
XI 4:	Ax 1	Post 1	Post 5	I 3	I 4
	I 8	I 15	I 26	XI Def 3	XI 2
XI 5:	Ax 8	Post 4	XI 2	XI 3	XI 4
XI 6:	Ax 1	Post 1	Post 4	I 3	I 4
	I 8	I 11	I 28	XI 2	XI 5

¹ Vgl. z. B. T. L. HEATH, Euclid's Elements, Bd. 1, S. 223; als echt dagegen von Á. SZABÓ, Anfänge des euklidischen Axiomensystems, S. 73—78.

² PROKLOS bringt in seinem Euklidkommentar (S. 461) einen Beweis dafür.

<i>XI 7:</i>	<i>Ax 9</i>	<i>XI 3</i>			
<i>XI 8:</i>	<i>Ax 3</i> I 8 <i>XI 7</i>	<i>Post 1</i> <i>I 11</i>	<i>Post 4</i> I 29	<i>I 3</i> <i>XI 2</i>	<i>I 4</i> XI 4
<i>XI 9:</i>	<i>I 11</i>	<i>XI 4</i>	XI 6	<i>XI 8</i>	
<i>XI 10:</i>	<i>Ax 1</i> <i>XI 7</i>	<i>Post 1</i> XI 9	<i>I 3</i>	I 8	<i>I 33</i>
<i>XI 11:</i>	<i>I 11</i> XI 8	<i>I 12</i>	<i>I 31</i>	<i>XI 2</i>	XI 4
<i>XI 12:</i>	<i>I 31</i>	<i>XI 8</i>	<i>XI 11</i>		
<i>XI 13:</i>	<i>Ax 8</i>	<i>Post 4</i>	<i>XI 2</i>	<i>XI 3</i>	
<i>XI 14:</i>	<i>Post 1</i>	<i>I 17</i>	<i>XI 1</i>	<i>XI 3</i>	
<i>XI 15:</i>	<i>Ax 3</i> XI 4	<i>Post 4</i> <i>XI 7</i>	<i>I 29</i> <i>XI 9</i>	<i>I 31</i> <i>XI 11</i>	<i>XI 2</i> XI 14
<i>XI 16:</i>	<i>XI 1</i>	<i>XI 3</i>			
<i>XI 17:</i>	<i>Post 1</i>	<i>V 11</i>	VI 2	<i>XI 2</i>	XI 16
<i>XI 18:</i>	<i>Ax 2</i> <i>XI 8</i>	<i>I 11</i>	<i>I 28</i>	XI Def 4	<i>XI 3</i>
<i>XI 19:</i>	<i>I 11</i>	<i>XI 3</i>	XI 13		
<i>XI 20:</i>	<i>Post 1</i> <i>I 25</i>	<i>I 3</i>	<i>I 4</i>	<i>I 20</i>	<i>I 23</i>
<i>XI 21:</i>	<i>Ax 2</i>	<i>Post 1</i>	<i>I 32</i>	XI 20	
<i>XI 22:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 20</i>	<i>Post 1</i> <i>I 22</i>	<i>I 1</i> <i>I 23</i>	<i>I 3</i> I 24	<i>I 4</i>
<i>XI 23:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 4</i> <i>I 29</i> <i>V 16</i> <i>XI 20</i>	<i>Ax 2</i> I 8 <i>I 47</i> <i>VI 2</i> <i>XI 21</i>	<i>Ax 3</i> <i>I 13</i> <i>Q</i> <i>VI 4</i> <i>XI 22</i>	<i>Post 1</i> <i>I 22</i> <i>III 1</i> <i>XI 12</i>	<i>I 3</i> <i>I 25</i> <i>IV 5</i> <i>XI 13</i>
<i>XI 24:</i>	<i>Ax 5</i> XI 16	<i>Post 1</i>	<i>I 4</i>	<i>I 34</i>	XI 10
<i>XI 25:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 36</i>	<i>Ax 2</i> V Def 5	<i>Ax 8</i> <i>XI 24</i>	<i>Post 2</i>	<i>I 3</i>
<i>XI 26:</i>	<i>Post 1</i> <i>I 23</i>	<i>Post 4</i> <i>XI 11</i>	<i>I 3</i> <i>XI 12</i>	<i>I 4</i>	I 8
<i>XI 27:</i>	<i>I 34</i> <i>XI 24</i>	<i>V 22</i> <i>XI 26</i>	<i>VI 6</i>	<i>VI 12</i>	<i>VI 21</i>
<i>XI 28:</i>	<i>I 34</i>	<i>XI 7</i>	<i>XI 9</i>	<i>XI 24</i>	
<i>XI 29:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 34</i>	<i>Ax 2</i> <i>XI 24</i>	<i>Ax 3</i>	<i>I 4</i>	<i>I 29</i>
<i>XI 30:</i>	<i>Ax 1</i>	<i>Post 1</i>	<i>Post 2</i>	<i>Post 5</i>	XI 29
<i>XI 31:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 5</i> <i>I 34</i> <i>XI 11</i> XI 31 ¹	<i>Ax 2</i> <i>I 3</i> I 35 <i>XI 24</i>	<i>Post 1</i> <i>I 4</i> <i>V 7</i> XI 25	<i>Post 2</i> <i>I 23</i> <i>V 9</i> XI 29	<i>Post 4</i> <i>I 31</i> <i>V 11</i> XI 30
<i>XI 32:</i>	<i>I 14</i> <i>XI 31</i>	<i>I 44</i>	<i>V 7</i>	<i>V 11</i>	XI 25

¹ Der erste Teil des Beweises wird im zweiten Teil wörtlich zitiert.

<i>XI 33:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 4</i> <i>V 7</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 15</i> <i>V 11</i>	<i>Post 2</i> <i>I 31</i> <i>VI 1</i>	<i>Post 5</i> <i>I 34</i> <i>XI 24</i>	<i>I 3</i> V Def 10 <i>XI 25</i>
<i>XI 34:</i>	<i>Ax 1</i> <i>V 11</i> <i>XI 30</i>	<i>Ax 8</i> <i>VI 1</i> XI 31	<i>I 3</i> <i>XI 11</i> XI 32	V 7 <i>XI 24</i> <i>XI 34</i>	<i>V 9</i> <i>XI 25</i>
<i>XI 35:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 3</i> <i>I 31</i> <i>XI 11</i>	<i>Ax 2</i> I 4 <i>I 47</i> <i>XI 26</i>	<i>Ax 3</i> I 8 <i>I 48</i>	<i>Post 1</i> <i>I 12</i> <i>Q</i>	<i>Post 4</i> I 26 <i>XI 8</i>
<i>XI 36:</i>	<i>I 3</i> XI 31	<i>V 7</i> <i>XI 35 Zus</i>	<i>V 11</i>	<i>VI 14</i>	<i>XI 26</i>
<i>XI 37:</i>	<i>V 11</i>	<i>V 22</i>	<i>XI 27</i>	<i>XI 33</i>	
<i>XI 38:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 10</i> I 29 <i>XI 9</i>	<i>Ax 6</i> <i>I 13</i> <i>I 33</i>	<i>Post 1</i> <i>I 14</i> <i>I 34</i>	<i>Post 5</i> <i>I 15</i> <i>XI 3</i>	<i>I 4</i> I 26 <i>XI 7</i>
<i>XI 39:</i>	<i>Ax 1</i> XI 31	<i>Ax 2</i>	<i>Ax 6</i>	<i>I 34</i>	<i>XI 28</i>

Buch XII

<i>XII 1:</i>	<i>Ax 1</i> <i>III 1</i> <i>VI 4</i>	<i>Ax 3</i> <i>III 27</i> VI 6	<i>Post 1</i> <i>III 31</i> <i>VI 20</i>	<i>Post 4</i> <i>V 11</i>	<i>I 32</i> <i>V 22</i>
<i>XII 2:</i>	<i>Ax 8</i> <i>III 16 Zus</i> <i>V 16</i>	<i>Post 1</i> <i>III 30</i> X 1	<i>Post 5</i> <i>IV 6</i> <i>XII 1</i>	<i>I 41</i> <i>V 11</i>	<i>III 1</i> <i>V 14</i>
<i>XII 3:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 29</i> <i>VI 2</i>	<i>Ax 8</i> <i>I 34</i> <i>VI 4</i>	<i>Post 1</i> <i>I 41</i> <i>VI 6</i>	<i>I 4</i> <i>V 11</i> XI 10	<i>I 10</i> <i>V 16</i> XI 39
<i>XII 4:</i>	<i>Ax 2</i> <i>V 16</i>	<i>I 29</i> <i>VI 2</i>	<i>V 7</i> <i>VI 4</i>	<i>V 11</i> <i>VI 22</i>	<i>V 12</i> <i>XII 3</i>
<i>XII 5:</i>	<i>Ax 8</i> XII 3	<i>V 11</i> <i>XII 4</i>	<i>V 14</i>	<i>V 16</i>	<i>X 1</i>
<i>XII 6:</i>	<i>Post 1</i>	<i>V 18</i>	<i>V 22</i>	XII 5	
<i>XII 7:</i>	<i>Ax 1</i>	<i>Post 1</i>	<i>I 34</i>	<i>XII 5</i>	
<i>XII 8:</i>	<i>I 34</i> <i>XI 24</i>	<i>V 11</i> <i>XI 28</i>	<i>V 15</i> XI 33	<i>VI 21</i> <i>XII 7</i>	XI Def 9
<i>XII 9:</i>	<i>Ax 1</i> <i>V 15</i>	<i>Ax 2</i> <i>XI 28</i>	<i>I 34</i> XI 34	<i>V 7</i> <i>XII 7</i>	<i>V 11</i>
<i>XII 10:</i>	<i>Ax 8</i> <i>I 41</i> <i>V 15</i> <i>XII 7</i>	<i>Post 1</i> <i>III 30</i> <i>X 1</i>	<i>Post 2</i> <i>IV 6</i> <i>XI 28</i>	<i>Post 5</i> <i>IV 7</i> XI 32	<i>I 31</i> <i>V 11</i> XII 2¹
<i>XII 11:</i>	<i>Ax 8</i> <i>V 11</i> <i>XII 1</i>	<i>Post 1</i> <i>V 14</i> <i>XII 2</i>	<i>III 30</i> <i>V 15</i> <i>XII 6</i>	<i>IV 6</i> <i>V 16</i> <i>XII 10</i>	<i>IV 7</i> <i>X 1</i>

¹ Die Stellen, die sich auf den Beweis von XII, 2 beziehen, sind vermutlich erst nachträglich interpoliert. Vgl. S. 101.

<i>XII 12:</i>	Ax 8 V 7 V 16 X 1	Post 1 V 11 V 22 XI Def 9	Post 4 V 12 VI 4 XII 8	III 30 V 14 VI 5 XII 10	IV 6 V 15 VI 6
<i>XII 13:</i>	Ax 1 V Def 5	Ax 2 XII 11	Ax 8	Post 2	I 3
<i>XII 14:</i>	Post 2 XII 10	I 3 XII 11	V 7 XII 13	V 11	V 15
<i>XII 15:</i>	I 3 XII 10	V 7 XII 11	V 9 XII 13	V 11	V 15
<i>XII 16:</i>	Post 1 I 28 X 1	Post 2 III 3	I 4 III 16 <i>Zus</i>	I 11 III 30	I 12 IV 1
<i>XII 17:</i>	Ax 1 Post 3 I 26 II 12 III 29 V 12 XI 2 XI 12	Ax 3 Post 4 I 33 III 1 III 31 VI 1 XI 6 XI 18	Ax 6 I 11 I 46 III 15 IV 1 VI 2 XI 7 XII 8	Post 1 I 12 I 47 III 27 V 7 VI 8 XI 9 XII 16	Post 2 I 25 Q III 28 V 11 VI 17 XI 11
<i>XII 18:</i>	Ax 8	V 11	V 14	V 16	XII 17

Buch XIII

<i>XIII 1:</i>	Ax 1 I 3 I 43 VI 1	Ax 2 I 10 I 46 VI 17	Post 1 I 30 Q	Post 2 I 31 II 4	Post 5 I 34 II 4 <i>Zus</i>
<i>XIII 2:</i>	Ax 1 Post 5 I 46 VI 1	Ax 2 I 30 Q VI 17	Ax 3 I 31 II 4	Post 1 I 34 II 4 <i>Zus</i>	Post 2 I 43 V 14
<i>XIII 3:</i>	Ax 1 I 30 I 46 VI 30	Ax 2 I 31 Q	Post 1 I 34 II 4	Post 5 I 36 II 4 <i>Zus</i>	I 10 I 43 VI 17
<i>XIII 4:</i>	Ax 1 I 31 II 4 <i>Zus</i>	Ax 2 I 34 VI 17	Post 1 I 43 VI 30	Post 5 I 46	I 30 Q
<i>XIII 5:</i>	Ax 1 I 31 II 4 <i>Zus</i>	Ax 2 I 34 V 14	Post 1 I 36 VI 17	Post 5 I 43 VI 30	I 30 I 46
<i>XIII 6:</i>	Post 2 VI 30 XIII 1	I 3 X 6	I 10 X 9	I 44 X 73	VI 17 X 97
<i>XIII 7:</i>	Ax 1 I 4	Ax 2 I 5	Ax 3 I 6	Post 1 I 8	Post 5
<i>XIII 8:</i>	Ax 1 I 5 V 7	Ax 2 I 6 V 11	Ax 3 I 32 V 14	Post 5 III 28 VI 4	I 4 IV 14 VI 33

<i>XIII 9:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 2</i> <i>III 28</i> <i>V 7</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 3</i> <i>III 30</i> <i>V 11</i>	<i>Ax 3</i> <i>I 5</i> <i>IV 11</i> <i>V 14</i>	<i>Ax 6</i> <i>I 32</i> <i>IV 15</i> <i>VI 4</i>	<i>Post 1</i> <i>III 1</i> <i>IV 15 Zus</i> <i>VI 33</i>
<i>XIII 10:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 2</i> <i>II 2</i> <i>III 29</i> <i>VI 33</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 4</i> <i>III 1</i> <i>IV 11</i>	<i>Ax 3</i> <i>I 5</i> <i>III 3</i> <i>IV 15 Zus</i>	<i>Ax 6</i> <i>I 12</i> <i>III 26</i> <i>VI 4</i>	<i>Post 1</i> <i>I 32</i> <i>III 28</i> <i>VI 17</i>
<i>XIII 11:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 4</i> <i>III 27</i> <i>V 7</i> <i>VI 4</i> <i>X 9</i> <i>X 94</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 3</i> <i>III 28</i> <i>V 11</i> <i>VI 9</i> <i>X 12</i> XIII 1	<i>Ax 3</i> <i>I 4</i> <i>III 29</i> <i>V 15</i> <i>VI 17</i> <i>X 15</i> <i>XIII 8</i>	<i>Post 1</i> <i>I 32</i> <i>III 31</i> <i>V 18</i> <i>VI 22</i> X 73	<i>Post 2</i> <i>III 1</i> <i>IV 11</i> <i>V 24</i> <i>X 6</i> X 84a Def
<i>XIII 12:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 47</i> <i>III 31</i>	<i>Ax 2</i> <i>Q</i> <i>IV 15 Zus</i>	<i>Ax 3</i> <i>II 4</i>	<i>Post 1</i> <i>III 1</i>	<i>Post 2</i> <i>III 28</i>
<i>XIII 13:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 4</i> <i>Q</i> <i>VI 8</i> <i>XI 12</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 3</i> <i>III 1</i> <i>VI 8 Zus</i> <i>XIII 12</i>	<i>Post 1</i> <i>I 4</i> <i>III 31</i> <i>VI 9</i>	<i>Post 2</i> <i>I 10</i> <i>V 7</i> <i>VI 17</i>	<i>Post 3</i> <i>I 11</i> <i>V 11</i> <i>VI 19 Zus</i>
<i>XIII 14:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 5</i> <i>I 46</i> <i>VI 19 Zus</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 3</i> <i>I 47</i> <i>XI 12</i>	<i>Post 1</i> <i>I 4</i> <i>Q</i>	<i>Post 2</i> <i>I 10</i> <i>III 31</i>	<i>Post 3</i> <i>I 11</i> <i>VI 8</i>
<i>XIII 15:</i>	<i>Ax 1</i> <i>I 10</i> <i>III 31</i> <i>XI 12</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 11</i> <i>VI 8</i>	<i>Post 1</i> <i>I 46</i> <i>VI 9</i>	<i>Post 3</i> <i>I 47</i> <i>VI 19 Zus</i>	<i>I 3</i> <i>Q</i> <i>XI 4</i>
<i>XIII 16:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 3</i> <i>I 29</i> <i>III 1</i> <i>IV 11</i> <i>VI 8 Zus</i> <i>XI 12</i>	<i>Ax 2</i> <i>I 3</i> I 33 <i>III 28</i> <i>IV 15 Zus</i> <i>VI 9</i> XIII 3	<i>Ax 6</i> <i>I 10</i> <i>I 47</i> <i>III 29</i> <i>V 7</i> <i>VI 19 Zus</i> <i>XIII 9</i>	<i>Post 1</i> <i>I 11</i> <i>Q</i> <i>III 30</i> <i>V 11</i> <i>XI 6</i> XIII 10	<i>Post 2</i> <i>I 13</i> <i>II 4</i> <i>III 31</i> <i>VI 8</i> <i>XI 7</i> XIII 11
<i>XIII 17:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 5</i> <i>I 30</i> <i>II 4</i> <i>VI 30</i> <i>XI 7</i> XIII 5	<i>Ax 2</i> <i>I 3</i> <i>I 31</i> <i>V 7</i> VI 32 <i>XI 9</i> XIII 6	<i>Ax 6</i> I 8 <i>I 33</i> <i>V 11</i> <i>XI 1</i> <i>XI 12</i> XIII 7	<i>Post 1</i> <i>I 10</i> <i>I 47</i> <i>V 14</i> <i>XI 2</i> XI 38 XIII 15	<i>Post 2</i> <i>I 29</i> <i>Q</i> V 15 <i>XI 6</i> <i>XIII 4</i>
<i>XIII 18:</i>	<i>Ax 1</i> <i>Post 3</i> <i>I 19</i> <i>III 14</i> <i>VI 9</i> <i>XIII 10</i> <i>XIII 17</i>	<i>Ax 2</i> <i>Post 4</i> <i>I 32</i> <i>III 31</i> <i>VI 19 Zus</i> XIII 13	<i>Ax 3</i> <i>I 3</i> <i>I 47</i> <i>IV 15 Zus</i> <i>VI 30</i> XIII 14	<i>Ax 8</i> <i>I 11</i> <i>Q</i> <i>VI 4</i> <i>X 111a</i> XIII 15	<i>Post 1</i> <i>I 12</i> <i>II 4</i> <i>VI 8</i> <i>XIII 9</i> XIII 16
<i>XIII 18a:</i>	<i>Ax 1</i> <i>IV 11</i>	<i>Ax 2</i> XI 21	<i>Post 4</i>	<i>I 5</i>	<i>I 32</i>

II. Zur Entstehungsgeschichte der stereometrischen Bücher

Kritische Betrachtung der Textüberlieferung

Betrachtet man in der Euklidausgabe von C. THAER die stereometrischen Bücher, so fällt auf, daß dort viele Textstellen¹ aus philologischen und mathematischen Gründen als verdächtig eingeklammert sind, die in anderen Editionen (HEIBERG, HEATH) als echt gelten. Diese Streichungen erreichen teilweise ein beträchtliches Ausmaß. So wird z.B. der Beweis von XII,7 durch die Einklammerungen THAERS auf einen Drittel seiner ursprünglichen Länge reduziert. Bevor wir also die stereometrischen Bücher analysieren, ist unbedingt abzuklären, aus welchen Gründen diese Streichungen erfolgten und ob sie gerechtfertigt sind. Aus den Anmerkungen erfährt man², daß THAER an den zur Diskussion stehenden Stellen jeweils arabische Überlieferung mitberücksichtigte, während sich HEIBERG für seine Textausgabe ausschließlich auf griechische Handschriften beschränkte. Die Beantwortung der obigen Frage läuft somit auf das Problem hinaus, ob in gewissen Fällen die arabische der griechischen Textüberlieferung vorzuziehen ist.

Dieses Problem wurde Ende des letzten Jahrhunderts von M. KLAMROTH in Angriff genommen. In seinem Artikel „Über den arabischen Euklid“ untersuchte er die Überlieferung der Elemente bei den Arabern. Nach Angaben im Fihrist³, einem bio- und bibliographischen Handbuch des X. Jahrhunderts, wurden die Elemente von folgenden Autoren ins Arabische übersetzt.

Es (das Buch der Elemente) wurde übersetzt von AL-ḤAĠĠĀĠ IBN YŪSUF IBN MAṬĀR zwei Mal: die eine Übersetzung ist bekannt unter dem Namen der Ḥārūnischen und diese ist die erste, die andere trägt den Namen der Māmūnischen, diese ist die zuverlässigere. Ferner übersetzte IṢḤĀQ IBN ḤUNAIN das Werk, verbessert wurde diese Übersetzung von ṬĤĀBIT IBN QURRA AL-HARRĀNĪ; auch übersetzte ABŪ 'UTMAN AL DIMASHQĪ einige Bücher desselben ... (nach SUTER)

Von diesen Übersetzungen ist nur diejenige des IṢḤĀQ († 910) in der Fassung von ṬĤĀBIT († 901) vollständig erhalten und zwar in mehreren Handschriften⁴. Von der Übersetzung des ḤAĠĠĀĠ (um 800) besitzen wir aus der zweiten Fassung die Bücher I—VI in einem Leiden-Manuskript⁵ und vielleicht XI—XIII in einer Kopenhagener Handschrift. Die übrigen Übersetzungen gelten als verloren. Aus späterer Zeit existieren noch die Euklidausgaben von AṬ-ṬŪSĪ († 1274) und CAMPANUS (13. Jahrh.).

Nach einer genauen Examination der obigen Handschriften kommt KLAMROTH zu folgendem Resultat: Die Ausgaben von AṬ-ṬŪSĪ und CAMPANUS sind für die Textkritik nahezu unbrauchbar. ṬŪSĪ wie CAMPANUS sind beide Mathematiker; ihnen lag mehr an der Vermehrung des mathematischen Wissens als an der Reinhaltung des Euklidtextes. Von den beiden älteren Übersetzungen ist diejenige des IṢḤĀQ bei weitem die wortgetreue. Sie weist eine einfache, konsequente Terminologie auf und wirkt eleganter als die mit ständigen Rückverweisungen auf frühere Sätze überlastete des AL-ḤAĠĠĀĠ. Weiter stellt KLAMROTH fest, daß

¹ besonders im XII. Buch.

² THAER, Elemente, S. 467.

³ Siehe H. SUTER, Das Mathematiker-Verzeichnis im Fihrist des Ibn Abī Ja'kūb an-Nadīm.

⁴ KLAMROTH benutzte die Codices Oxford 279 und Kjöbenhavn LXXXI.

⁵ Codex Leidensis 399,1 herausgegeben von HEIBERG und BESTHORN.

zwischen den verschiedenen arabischen Handschriften keine großen sachlichen Differenzen bestehen, selbst dort nicht, wo der griechische Euklid einen wesentlich andern Text hat. Da nun die arabische Tradition bis ins VIII. Jahrhundert zurückreicht, zieht KLAMROTH diese in solchen Fällen der griechischen vor. Seiner Ansicht nach ergibt sich somit aus dem arabischen Euklid für die Textkritik der Elemente folgendes:

1) Alle *λήμματα* und *σχόλια*, der Excurs hinter XIII 5, die meisten *πορίσματα* und *ἄλλως*, 22 *προτάσεις* und 17 *ῥοι* in unsern Ausgaben rühren nicht von Euklid her, sondern sind sehr späte Zusätze.

2) Bei den meisten Sätzen außer etwa in Buch 7—9 sind einzelne kleinere begründende, erklärende, zurückverweisende und weiter ausführende Glossen in den Text gedrungen.

3) Nicht wenige Sätze, besonders in Buch 10 und 11—13, hatten früher einen viel kürzeren und einfacheren, bez. unvollkommenen Beweis, der erst in späterer Zeit erweitert und vervollständigt wurde. (KLAMROTH, S. 326)

HEIBERG ist nicht dieser Meinung¹. Er glaubt, daß „die arabische Tradition bedeutend hinter der griechischen zurückbleibt und als mutiliert zu betrachten ist“. Dazu führt er folgende Gründe an: Erstens gibt es griechische Handschriften, die älter sind als die arabische Überlieferung (Palimpsest BM Add. 17211). Zweitens stehen die Auslassungen der Araber im Widerspruch zur Numerierung der Euklidzitate bei spätantiken Autoren (PAPPOS, PROKLOS, EUTOKIOS, SIMPLIKIOS). Drittens lassen die Araber auch solche Propositionen weg, die im weiteren häufig gebraucht werden. Selbst die Entdeckung einer griechischen Handschrift (Bologna Nr. 18—19, im folgenden mit b bezeichnet), die viele Gemeinsamkeiten mit den arabischen Übersetzungen hat (THAER folgte bei seinen Streichungen in den stereometrischen Büchern meist dieser Handschrift), änderte nichts an HEIBERGS grundsätzlicher Einstellung². Er gibt zwar zu, daß demzufolge viele Abweichungen des arabischen EUKLIDS nicht der Willkür der Araber, sondern den von ihnen benutzten griechischen Handschriften zuzuschreiben sind. Doch die von den Arabern und dem Codex b gegebene Fassung der Elemente entspricht nach HEIBERG keinesfalls der ursprünglichen; sie ist vielmehr aus der Rezension eines byzantinischen Mathematikers entstanden, dem die euklidischen Beweise der Bücher XI—XIII zu lang und zu ermüdend schienen.

Die vor allem in HEIBERGS erstem Artikel zu Tage tretende Skepsis gegenüber der arabischen Euklidüberlieferung hat sich vermutlich eher hemmend auf die Untersuchung der arabischen Codices ausgewirkt, obwohl HEIBERG den Wert einer solchen Untersuchung immer wieder hervorhob. Auf alle Fälle ist bis heute keine Ausgabe der ISḤĀQ-THĀBIT'schen Fassung der Elemente erfolgt, und weitere Arbeiten auf diesem Gebiete blieben aus. Spätere Autoren beziehen sich meist auf HEIBERG. So schreibt z.B. HEATH (Euclid's Elements, Bd. 1, S. 82) „HEIBERG comes to the general conclusion that, not only is the Arabic tradition not to be preferred offhand to that of the Greek MSS., but it must be regarded as inferior in authority.“ Rückblickend stellt sich die Frage, ob HEIBERG's Kritik gegenüber KLAMROTH gerechtfertigt war. Ich glaube ja, soweit sie eine absolute Priorität

¹ Vgl. I. L. HEIBERG, Die arabische Tradition der Elemente Euklid's, in Zeitschrift für Mathematik und Physik.

² Vgl. HEIBERG, Paralipomena zu Euklid, S. 46 ff.

des arabischen Euklids bekämpfte. Sofern sie aber, eigentlich ungewollt, den Wert des arabischen Euklids herabsetzte, ist ihr nicht beizupflichten. Der Wert des arabischen Euklids kann meines Erachtens nicht hoch genug eingeschätzt werden; liegen den arabischen Übersetzungen doch eindeutig vortheonische Handschriften zu Grunde¹. Im arabischen Euklid besitzen wir also eine Art zweite vortheonische Handschrift, die zur Textkritik verwendet werden kann. Es ist deshalb nicht erstaunlich, daß HEIBERG 20 Jahre nach der Veröffentlichung seiner ersten Arbeit, in der er den von KLAMROTH geforderten textkritischen Wert der arabischen Handschriften negierte, auf Grund von neuentdeckten Quellen diesen Handschriften in gewissen Punkten den Vorzug gegenüber der griechischen Überlieferung zugestehen mußte. So schrieb HEIBERG in seiner ersten Arbeit bei der Diskussion der Differenzen zwischen arabischem und griechischem Euklid noch folgendes:

Zu Gunsten der Araber könnte man geltend machen wollen, dass EUTOKIUS in Apollon. S. 44 III, 15 statt III, 16 citirt; denn bei den Arabern bilden III, 11 + 12 nur einen Satz; hier scheint aber bei EUTOKIUS nur ein zufälliger Fehler vorzuliegen, da der etwas ältere SIMPLICIUS in Aristot. phys. fol. 14a Elem. III, 33 mit dieser Nummer citirt.

Dagegen ist es von grosser Bedeutung, daß, wenn die Angabe KLAMROTH'S S. 315 vollständig ist, von den im Griechischen vorhandenen Corollarien nur VI, 8; VIII, 2 und X, 3 auch im Arabischen enthalten sind, da wir doch mehrere der übrigen schon im III. und V. Jahrhundert nachweisen können. So ist das Corollar XIII, 17 von Pappus V S. 436, 5 angeführt, II, 4 und III, 1 von Proklus S. 304, 2 flgg., das nach VII, 2 von demselben S. 303, 22; IV, 15 von Simplicius in Aristot. phys. fol. 15. I, 15 kennt schon Proklus S. 301.

(HEIBERG: Die arabische Tradition der Elemente, S. 5)

In seiner zweiten Abhandlung² dagegen mußte er in beiden Fällen der arabischen Überlieferung den Vorrang geben, da III, 12 nach AN-NAIRIZI von HERON stammt und ein neuentdeckter Papyrus (Oxyrhynchus Papyri I, Nr. 29) II, 4 Zusatz nicht aufweist, wie übrigens auch der ursprüngliche Codex P³. Aus diesen Fakten geht hervor, wie problematisch die von HEIBERG gezogenen textkritischen Rückschlüsse aus Euklidzitataten spätantiker Autoren sind. Offenbar existierten schon damals neben textgetreuen Euklidhandschriften verhältnismäßig stark überarbeitete. Denn nur so kann die unterschiedliche Numerierung und Zitierung spätantiker Autoren erklärt werden.

In weit mehr Fällen, als HEIBERG zuerst wahrhaben wollte, dürften die Araber auch in den stereometrischen Büchern die ursprünglichere Fassung des Textes überliefert haben⁴. So z.B. im XIII. Buch, wo sie den Würfel (XIII, 15) vor dem Oktaeder (XIII, 14) behandeln. Codex P geht nämlich auf eine Vorlage zurück, die dieselbe Anordnung besaß. Wie aus der Formulierung der Protasis in Codex P ersichtlich ist, müssen dem Oktaeder ursprünglich 2 reguläre Polyeder vorangegangen sein, dem Würfel dagegen nur eines, die Pyramide. Die alte Reihenfolge findet man übrigens im ersten Teil der Proposition XIII, 18 wieder bei der Dar-

¹ Vgl. dazu HEIBERG, Die arabische Tradition der Elemente Euklid's., S. 19.

² HEIBERG, Paralipomena zu Euklid, S. 47f., S. 54.

³ Im Codex P ist II, 4 Zus. nach HEIBERG von späterer Hand.

⁴ Vgl. dazu auch C. THAER, Euklidüberlieferung, Quellen und Studien, Bd. 3, S. 116 ff.

stellung der Kanten der regulären Polyeder. — Im weiteren ist die von Codex b gegebene kürzere Fassung, die mit der arabischen häufig übereinstimmt¹, derjenigen der Vulgata aus mathematischen Gründen meist vorzuziehen. In XII,7 z.B. ist die Weitschweifigkeit der griechischen Fassung direkt verwirrend. Nachdem der Satz mit S. 174,21 (ed. HEIBERG) bewiesen ist, setzt der griechische Text nochmals an und zeigt explizite, daß dieselbe Pyramide, bei der man bloß eine andere Seitenfläche und Ecke als Grundfläche und Spitze bezeichnete, ebenfalls ein Drittel des Prismas ist. Sämtliche im Codex b fehlenden, mit *ἐπειδήπερ* eingeleiteten Erläuterungen, die Konstruktion und Beweis immer wieder unterbrechen, dürften wohl eher von einem spätantiken Schulmeister als von EUKLID stammen. Besonders störend sind sie zu Beginn der Proposition XII,17; fehl am Platze in den Beweisen zu XII,10, XII,11 sowie XII,12. Denn dort werden für denselben Sachverhalt stets zwei Erläuterungen hintereinander gegeben. So wird z.B. in XII,10 (S. 367 ed. THAER) die Tatsache, daß das über dem Quadrat ABCD errichtete Prisma größer als die Hälfte des Zylinders ist, zuerst durch die in XII,2 bewiesene Ungleichung $\text{Quadrat } ABCD > 1/2 \text{ Kreis } ABCD$ gestützt. Darauf folgt eine zweite mit *ἐπειδήπερ* eingeleitete, längere Begründung, die im Gegensatz zur ersten mit den in den Elementen EUKLIDS bewiesenen Sätzen auskommt. Die mit *ἐπειδήπερ* eingeleitete Begründung kann demnach unmöglich vor der ersten entstanden sein. Aber auch diese wird kaum von EUKLID stammen. Codex b, der beide wegläßt, dürfte hier die ursprüngliche Fassung bringen. Dasselbe gilt auch für die Stellen S. 374 unten sowie S. 383 unten (ed. THAER), wo Codex b die wörtlichen Zitate von V,12 nicht hat: Im vorangegangenen Beweis zu XII,4 fehlt nämlich das Zitat von V,12 in sämtlichen Codizes. Dagegen sind Elem. Bd. IV, S. 146, 10—12, S. 168, 3—6, S. 202, 6—8 und S. 214, 7—9 (ed. HEIBERG) mit den griechischen Handschriften vorläufig beizubehalten, denn auch Codex b bezieht sich später jeweils ausdrücklich auf den in ihnen erwähnten Sachverhalt². Die von THAER in den stereometrischen Büchern eingeklammerten Stellen dürften also zumindest teilweise unecht sein. Eine genaue Beurteilung wird aber erst möglich, wenn die nach KLAMROTH beste Euklidübersetzung von ISHĀQ und THĀBIT herausgegeben ist.

Untersuchung der Bücher XI—XIII

Die Zitierweise der planimetrischen Propositionen in den stereometrischen Büchern unterscheidet sich im großen und ganzen nur wenig von derjenigen im planimetrischen Teil. So werden z.B. I,8, 12, 23, 46 und III,30 auch hier mit derselben Normalform benutzt. Im allgemeinen zeigt sich bloß eine durchaus verständliche Tendenz zur Abkürzung: Gewisse Sätze werden manchmal in gekürzter Form zitiert (z.B. I,4 in XI,31, 33 und 38), andere oft überhaupt nicht mehr (I,13—15, 29, 43, III,28, 29, 31 usw.). Ferner werden Beweisschritte hin und wieder übersprungen (z.B. in XII,17). Das Fehlen signifikanter Unterschiede in der Zitierweise deutet darauf hin, daß auch die stereometrischen Bücher zumindest sprachlich von EUKLID überarbeitet worden sind.

¹ Zur genaueren Abklärung dieser Frage fehlt vorläufig eine vollständige Edition der Elemente nach ISHĀQ und THĀBIT.

² Vgl. HEIBERG, Paralipomena, S. 199.

Betrachten wir die 3 Bücher im einzelnen. Das älteste der stereometrischen Bücher ist das XIII. Es enthält eine in sich geschlossene Abhandlung über die regulären Polyeder und wird allgemein auf THEAITETOS zurückgeführt. EUKLID hat es in seine Elemente aufgenommen und teilweise überarbeitet. Die Formulierung der Lehrsätze selbst übernahm er dabei, vermutlich weil sich die in ihnen benutzte Ausdrucksweise bereits eingebürgert hatte. Dadurch erscheint in Protasis und Beweis eine verschiedene Terminologie. In der Protasis und ihren Zitaten werden Beziehungen zwischen Quadraten im allgemeinen¹ mit *δύνασθαι* oder *δυνάμει εἶναι* ausgedrückt; im Beweis dagegen mit dem bei EUKLID üblichen *τὸ ἀπό*. Besonders deutlich tritt dies jeweils am Ende der Propositionen zu Tage, wo der Abschluß des Beweises mit *τὸ ἀπό*, und die auf die Protasis zurückgreifende, allgemeine Schlußzusammenfassung mit *δύνασθαι* oder *δυνάμει εἶναι* formuliert ist. In der Protasis der Propositionen XIII,1—5 blieb ebenfalls der Ausdruck *εὐθεία γραμμὴ* erhalten². Einzig in der Protasis von XIII,6 tritt *εὐθεία* auf (vgl. Tab. unten). Nach den von uns bei der Analyse des II. Buches gemachten

Zum Ausdruck <i>εὐθεία γραμμὴ</i>			
	Protasis	Ekthesis	Zitate
XIII 1	<i>εὐθεία γραμμὴ</i>	<i>εὐθεία γὰρ γραμμὴ</i>	XIII 6: <i>εὐθεία</i> XIII 11: — (AI)
XIII 2	<i>εὐθεία γραμμὴ</i>	<i>εὐθεία γὰρ γραμμὴ</i>	—
XIII 3	<i>εὐθεία γραμμὴ</i>	<i>εὐθεία</i>	XIII 16: <i>εὐθεία γραμμὴ</i>
XIII 4	<i>εὐθεία γραμμὴ</i>	<i>εὐθεία</i>	XIII 17 ₁ : <i>εὐθεία</i> 2: — (NΣ) 3: <i>εὐθεία γραμμὴ</i>
XIII 5	<i>εὐθεία γραμμὴ</i>	<i>εὐθεία γὰρ γραμμὴ</i>	XIII 17: <i>εὐθεία γραμμὴ</i>
XIII 6	<i>εὐθεία ῥητή</i>	<i>εὐθεία ῥητή</i>	XIII 17: <i>ῥητή γραμμὴ</i>

Erfahrungen³ müßte demnach XIII,6 späteren Datums sein. Dieses Ergebnis wird im nächsten Kapitel bestätigt werden. Ferner wird im XIII. Buch für die Abtragung einer Strecke häufig *ἀφαιρεῖν* und nicht das in den planimetrischen Büchern übliche *κείσθαι* verwendet⁴.

Im jüngern XII. Buch, welches größtenteils auf EUDOXOS zurückgehen dürfte, ist die Terminologie einheitlicher. Beziehungen zwischen Quadraten werden hier stets mit *τὸ ἀπό* ausgedrückt. Das XII. Buch ist demnach in seiner heutigen Form noch stärker überarbeitet. Dies wird bestätigt durch die abweichende Fassung von

¹ Die einzige Ausnahme bei der Protasis ist XIII, 4. In den Zitaten ist die Terminologie schwankend.

² Wir finden ihn, abweichend von der normierten Form, auch im Zitat von I, 11 in XIII, 16. Vgl. dazu NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 343.

³ NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 371.

⁴ Vgl. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 357.

Codex b¹ sowie die Vertrautheit, mit der die Termini Parallelogramm und Parallelfach verwendet werden².

Das XI. Buch schließlich bringt die Grundlagen der Stereometrie (XI,1—23) sowie die Parallelfachtheorie (XI,24—37). Einiges darin ist zweifellos sehr alt, anderes dürfte kaum vor EUKLID entstanden sein. Die Terminologie ist auch hier, von wenigen Ausnahmen abgesehen, durchaus die euklidische.

Im folgenden soll die Entstehungsgeschichte der 3 Bücher in chronologischer Reihenfolge untersucht werden. Dabei wird zu prüfen sein, welche Teile den beiden großen Mathematikern THEAITETOS und EUDOXOS zugeschrieben werden können. Diese Ergebnisse werden später dazu beitragen, die Frühgeschichte der Stereometrie zu klären.

Buch XIII

Das XIII. Buch behandelt die regulären Polyeder. Der eigentlichen Untersuchung gehen 6 Sätze über die stetige Teilung (XIII,1—6), sowie 5 Sätze über das reguläre Fünfeck (XIII,7—11) voran. Aus dem Auftreten dieser planimetrischen Hilfssätze, sowie den abweichenden Formulierungen in der Protasis³, kann geschlossen werden, daß EUKLID das Buch als Ganzes von einem früheren Mathematiker übernommen hat, nämlich von THEAITETOS, wie man heute allgemein annimmt. Dieser schrieb nach einer Mitteilung in der SUDA als erster über die fünf regulären Polyeder. Ob er diese auch selbst entdeckte, war lange Zeit umstritten.

Die Entdeckung der regulären Polyeder wurde früher meist den PYTHAGOREERN zugeschrieben, dies auf Grund einer Bemerkung in dem aus EUEDEMOS entnommenen Geometerverzeichnis des PROKLOS:

Ihnen folgte PYTHAGORAS, der ihren wissenschaftlichen Betrieb in das System der höheren Bildung einbezog. Seine Untersuchungen galten ihren obersten Prinzipien, und seine theoretischen Forschungen bewegten sich frei von materiellen Einflüssen im Bereich des reinen Denkens. Er war es auch, der die Lehre von den Proportionen und die Darstellung von den fünf Weltkörpern schuf.

(PROKLOS, Euklidkommentar, S. 211, 17—23)

Nach den kritischen Untersuchungen von EVA SACHS vertraut man heute eher dem folgenden Scholion zu den Elementen EUKLIDS:

In diesem Buche, dem 13., werden die sogenannten fünf platonischen Körper konstruiert, die aber nicht von Platon sind, sondern drei von den eben genannten fünf Körpern sind von den PYTHAGOREERN, der Würfel und die Pyramide und das Dodekaeder, von THEAITETOS aber das Oktaeder und das Ikosaeder. Den Namen erhielten sie nach Platon, weil er sie im Timaios erwähnt. Den Namen des EUKLID trägt aber auch dies Buch, weil er ihm seine Stellung innerhalb der Elemente gegeben hat⁴.

(HEIBERG, Euclidis Elementa, Bd. 5, S. 654)

¹ Siehe S. 101.

² Vgl. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 364f.

³ Vgl. dazu S. 102.

⁴ BURKERT übersetzt den letzten Satz des Scholions wie folgt: „Nach Euklid ist auch dieses Buch betitelt, weil er ihm die στοιχείων-Ordnung gegeben hat (vgl. BURKERT, Weisheit und Wissenschaft, S. 420, Anm. 122).“

Die betreffende Stelle im Geometerverzeichnis stammt nämlich, teilweise sogar wörtlich, aus JAMBlichos, wie EVA SACHS und W. BURKERT zeigten¹. Für die Mitteilung über die fünf Weltkörper kann somit nicht die Autorität des EUDEMOS² in Anspruch genommen werden. PROKLOS dürfte bei EUDEMOS über PYTHAGORAS nichts vorgefunden haben, worauf er seine Vorlage aus Jamblichos ergänzte. Die Aussage des Scholions dagegen erweckt größtes Vertrauen gerade dadurch, daß sie etwas scheinbar mathematisch Unmögliches bringt. Sie kann somit nicht von einem späteren Kommentator erfunden worden sein, sondern muß auf eine alte Quelle zurückgehen³. Bei einer genauen Prüfung erweist sie sich zudem als durchaus vernünftig. EVA SACHS⁴ und W. C. WATERHOUSE⁵ führen die folgenden Gründe dafür an, daß die PYTHAGOREER zwar das Dodekaeder, nicht aber das Oktaeder und Ikosaeder kannten:

1. Die Theorie der regulären Polyeder muß in zwei Stufen entwickelt worden sein.

a) Studium einzelner regulärer Polyeder, die von ihrer Form her schon früh das Interesse auf sich zogen (Würfel, Tetraeder).

b) Studium der regulären Polyeder im allgemeinen.

Vorbedingung für die zweite Stufe ist die Abstraktion des Begriffes des regulären Polyeders. Diese führte zur Erkenntnis, daß es nur fünf reguläre Polyeder gibt. Das Oktaeder gehört in die zweite Stufe; handelt es sich doch nur um eine doppelte Pyramide mit quadratischer Basis, die für eine nähere Untersuchung an sich zu wenig interessant war.

2. Für Würfel, Tetraeder und Dodekaeder hatten die alten Griechen populäre Bezeichnungen: Für Tetraeder „Pyramide“ und für Dodekaeder⁶ „die Kugel aus den zwölf Fünfecken“. Für die restlichen zwei Körper existieren dagegen bloß die *systematischen* Namen „Oktaeder“ und „Ikosaeder“.

3. Nach der Überlieferung⁷ muß das Dodekaeder bei den Pythagoreern eine besondere Rolle gespielt haben. Funde⁸ von künstlichen Dodekaedern bestätigen die frühe Kenntnis dieses Körpers. Seine Form konnte von den in Italien häufigen Pyritkristallen übernommen werden.

Die frühen PYTHAGOREER beschäftigten sich somit erst mit drei der regulären Polyeder. Sie haben sich dabei vermutlich mehr für ihre Form (Verhältnis von Diagonale zur Seite, Anzahl der Flächen usw.), als für die mathematische Kon-

¹ EVA SACHS, Die fünf platonischen Körper, S. 23 ff.; BURKERT, Weisheit und Wissenschaft, S. 386 ff.

² EUDEMOS spricht stets nur von den PYTHAGOREERN und nicht von PYTHAGORAS.

³ Vermutlich auf EUDEMOS. Vgl. EVA SACHS, Die fünf platonischen Körper, S. 87 unten.

⁴ EVA SACHS, Die fünf platonischen Körper, S. 82 ff.

⁵ W. C. WATERHOUSE, The discovery of the Regular Solids, S. 212—218.

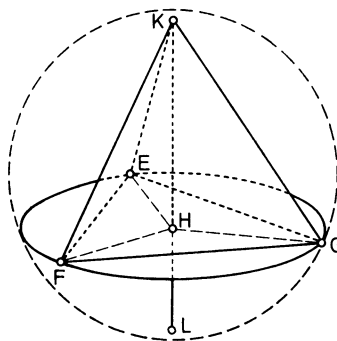
⁶ Für Stellenangaben siehe: EVA SACHS, Die fünf platonischen Körper, S. 82 ff.; sowie W. C. WATERHOUSE, The Discovery of the Regular Solids, S. 216, Randanmerkung 24.

⁷ JAMBlichos, Vita Pythagorica, 88 und 247. Zur Diskussion dieser Stellen siehe BURKERT, Weisheit und Wissenschaft, S. 433 ff.

⁸ Vgl. F. LINDEMANN, Sitzungsber. Bayr. Akad. Wiss., Math.-Phys. Kl., 26 (1896), S. 625—768.

struktions interessiert¹. Die erste Theorie der regulären Polyeder stammt nach der Mitteilung in der SUDA von THEAITETOS. Auf diesen dürfte im großen und ganzen auch das XIII. Buch der Elemente Euklids zurückgehen. Zwar kann man, wie PAPPOS² zeigte, die regulären Polyeder auch anders als in den Elementen EUKLIDS konstruieren. Doch nach allem was wir wissen ist nicht anzunehmen, daß EUKLID eine von THEAITETOS abweichende Konstruktionsmethode benutzte: Erstens geht die Formulierung der Sätze und Hilfssätze und somit auch die Konstruktionsmethode des XIII. Buches auf einen älteren Mathematiker zurück. Zweitens hat EUKLID nach dem Geometerverzeichnis³ für seine Elemente Vorarbeiten des THEAITETOS verwendet und drittens erwähnt keine der uns bekannten Quellen einen weiteren Mathematiker zwischen THEAITETOS und EUKLID, der eine Theorie der regulären Polyeder aufstellte. Wir wollen deshalb im folgenden voraussetzen, daß THEAITETOS dieselbe Konstruktionsmethode wie EUKLID benutzte und unter dieser Annahme analysieren, welche Teile des XIII. Buches auf THEAITETOS zurückgehen müssen. Die einzelnen Rekonstruktionen lassen sich anhand des Schemas auf S. 108 verfolgen.

Geht man bei der Konstruktion des Tetraeders (XIII,13) wie EUKLID und THEAITETOS vom gegebenen Kugeldurchmesser (KL) aus, so sollte man zuerst



die Höhe des Tetraeders (KH) kennen. Dazu betrachtet man das rechtwinklige Dreieck KHG . KG ist Seite des Tetraeders; HG Radius des Kreises in den man ein gleichseitiges Dreieck mit der Tetraederseite einbeschreiben kann, also (nach XIII,12) $HG^2 = \frac{1}{3} KG^2$. Damit ist das Verhältnis von KG^2 zu HG^2 und wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke auch von KL zu KH gegeben. Zur Konstruktion des Tetraeders benötigt man noch XI,12 sowie die speziell auf das XIII. Buch zugeschnittene Kugeldefinition XI, Def. 14⁴. Die Analyse der Proposition XIII,13

¹ Vgl. NIKOMACHOS, Introd. in arithm. II 26,2.

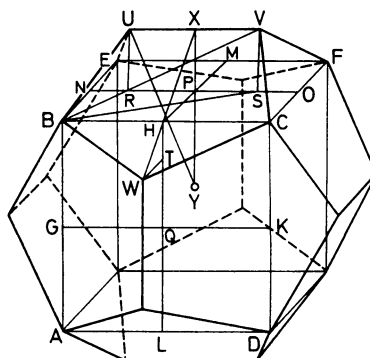
² PAPPOS (Collectio III, S. 142—163 ed. HULTSCH) schreibt die regulären Polyeder direkt in die gegebene Kugel ein. EUKLID errichtet jeweils zuerst ein Polyeder der gewünschten Größe und umschreibt diesem nachträglich eine der gegebenen Kugel gleiche.

³ PROKLOS, Euklidkommentar, S. 213, 23.

⁴ Die übliche Definition der Kugel (vgl. PLATON 33B sowie ARISTOTELES 1033^b14) dürfte analog zu der des Kreises (Elem. I, Def. 15) gewesen sein. Das in Elem. XI, Def. 14 benutzte Verfahren geht jedoch auf einen Autor vor EUKLID zurück, wie man aus Arist. Meteor. III 5 376^b12 entnehmen kann.

wesentlich auf der Figur von II,11. Die übrigen Sätze des XIII. Buches zeichnen sich jedoch gerade durch ihre Unabhängigkeit von dieser Figur aus. HEATH¹ bemerkt, daß die Resultate von XIII,1—5 viel einfacher mit Hilfe des zweiten Buches hätten gewonnen werden können. THAER² sieht in dieser Unabhängigkeit ein Zeichen für die nicht vollständige Zusammenfügung früherer Vorlagen. Die Nichtbezugnahme auf das II. Buch dürfte also daher rühren, daß EUKLID THEAITETOS folgte, der das II. Buch nicht voraussetzen konnte. Die in den Elementen (XIII,16) gegebene Konstruktion des Ikosaeders, welche das II. Buch ebenfalls nicht benützt, und nicht die oben entwickelte, wird also diejenige des THEAITETOS sein. Bei ihr geht man analog wie bei den übrigen Polyedern vor. Man sucht eines der Verhältnisse YW , WV zu YX zu bestimmen ($WV:YX$ ergibt sich leicht aus dem rechtwinkligen Dreieck ZUW) und konstruiert damit das Ikosaeder. Wenn die Kugel dem Ikosaeder umbeschrieben sein soll, muß der Winkel YUX ein Rechter sein. Also wäre $YW:WU = WU:WX$, YV in W stetig geteilt und es müßte daher Satz XIII,9 gelten. Untersucht man darauf die Gleichheit von Kugel- und Ikosaederdurchmesser, so stößt man auf Satz XIII,3. Auch beim Ikosaeder ergeben sich somit die Hilfssätze aus der Analyse des Problems.

Die Konstruktion des Dodekaeders vom Durchmesser der Kugel aus ist kompliziert. EUKLID macht in seinen Elementen (XIII,17) von der Möglichkeit Gebrauch, das Dodekaeder über dem eingeschriebenen Würfel zu errichten. Diese Idee dürfte von THEAITETOS stammen, denn wenn dieser auch hier in analoger Weise vom Kugeldurchmesser ausgegangen wäre, hätte dies EUKLID sicher beibehalten. Aus der untenstehenden Figur ist ersichtlich, daß die Würfelseite



gleich der Fünfeckdiagonale sein muß. Bei der Analyse des regulären Fünfecks folgt, daß sich seine Diagonalen gegenseitig stetig teilen und die größeren Abschnitte gleich der Fünfeckseite sind³. Dies ist die Aussage der Proposition XIII,8. NP ist demnach in R stetig geteilt, QH in T . Nun gilt es XP und WT zu bestimmen. Aus Symmetriegründen dürften sie gleich sein. Wegen der Ähnlich-

¹ T. L. HEATH, Euclid's Elements, Bd. 3, S. 441 ff.

² C. THAER, Euklid, S. 472.

³ Vgl. E. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 372f.

Davon auszunehmen sind einzig Hilfssätze, die bereits vor Theaitetos bekannt waren (vermutlich XIII,8 z.B.) und allfällige spätere Ergänzungen. Auf letztere soll abschließend noch eingegangen werden. Nachträglich ausgearbeitet könnten einige Beweise sein, die zeigen, daß die konstruierten Körper die gesuchten regulären Polyeder sind. Besonders auffällig ist dies in XIII,17. Die Sätze VI,32 und XI,38, die dort zitiert werden, scheinen nicht auf THEAITETOS zurückzugehen. VI,32 stammt vermutlich von EUKLID und XI,38 fällt durch seine Stellung im XI. Buch sowie durch die das Zitat begleitenden Worte „dies ist nämlich im vorletzten Satz des XI. Buches bewiesen“ aus dem Rahmen. Nachträglich ergänzt könnte weiter die Klassifizierung der Polyederkanten sein. Aufgrund des Kommentars von PAPPUS zum X. Buch der Elemente ist nicht klar, ob THEAITETOS bereits die vollständige Einteilung der Irrationalitäten kannte¹. Gewiß ist bloß, daß er nach dem dort überlieferten Zeugnis des EUDEMOS „die in der Länge kommensurablen Potenzen von den inkommensurablen unterschied und die bekannten Irrationallinien nach den Medietäten einteilte, indem er die Mediallinie dem geometrischen, das Binomium dem arithmetischen und die Apotome dem harmonischen Mittel zuteilte“. Die Sätze XIII,6 und XIII,11 sowie die betreffenden Stellen in XIII,18 (Vergleich der Polyederkanten) könnten somit nach-theaitetisch sein. Für XIII, 6 trifft das sicher zu. Die Proposition steht im Codex P an einem falschen Ort und fehlt im Codex b. Zu XIII,17, wo sie verwendet wird, findet man Scholien mit demselben Inhalt. HEATH² schließt daraus, daß XIII,6 nachträglich interpoliert worden ist. Entgegen der Ansicht von EVA SACHS³ ist dem zuzustimmen; tritt doch in der Protasis von XIII,6 ausnahmsweise das neuere *εὐθεία ῥητή* auf, im angeblichen Zitat dagegen das alte *ῥητὴ γραμμή*⁴. THAER andererseits zweifelt an der Echtheit gewisser Teile der Proposition XIII,18, in welcher die Kanten der regulären Polyeder miteinander verglichen werden.

Der Schlußsatz XIII,18a dagegen, der feststellt, daß man nur fünf reguläre Polyeder errichten kann, muß zumindest dem Inhalte nach bekannt gewesen sein, denn er wird schon von PLATO im Timaios⁵ vorausgesetzt. Die heutige Formulierung des Satzes mit der falschen Umschreibung⁶ des Begriffs „reguläre Polyeder“ wird aber auch hier kaum auf THEAITETOS zurückgehen.

Buch XII

Das XII. Buch behandelt die Lehre von den Rauminhalten, soweit sie mit elementaren Mitteln nicht mehr durchführbar ist. Es werden speziell die Volumen von Pyramide und Kegel bestimmt und eine Reihe von Sätzen über Verhältnisse

¹ PAPPUS widerspricht sich in diesem Punkt selber: S. 13 oben (ed. Suter) meint er, daß „die genauen Unterscheidungen und die scharfen Beweise“ zu den rationalen und irrationalen Größen hauptsächlich durch THEAITETOS festgelegt wurden, auf S. 13 unten schreibt er „die Errichtung der verschiedenen Ordnungen für die Irrationallinien“ dagegen EUKLID zu.

² T. L. HEATH, *Euclid's Elements*, Bd. 3, S. 451.

³ EVA SACHS, *Die fünf platonischen Körper*, S. 112ff.

⁴ Vgl. die Tabelle auf S. 102.

⁵ PLATO, *Timaios* 55.

⁶ Vgl. dazu H. FREUDENTHAL und B. L. VAN DER WAERDEN, *Over een bewering van Euclides*, in *Simon Stevin*, 1 (1948), S. 115—121.

zwischen Pyramiden, Kegeln und Kugeln aufgestellt. Die Beweise verlaufen meistens¹ gleich: Zu zeigen ist, daß zwei nicht elementare Größen A und B in einem gewissen Verhältnis $C:D$ stehen. Dazu werden die beiden Größen durch zwei gesetzmäßig steigende Folgen elementarer Größen $a_1, a_2, a_3 \dots$ und $b_1, b_2, b_3 \dots$ approximiert, für die stets $a_n:b_n = C:D$ gilt. Darauf wird indirekt unter Benutzung des theaitetischen Lemmas (X,1) begründet, daß dann auch $A:B = C:D$ ist. Diese Beweismethode, die in leicht modifizierter Form auch von Archimedes angewandt wurde, bezeichnet man heute als Exhaustion.

Aus den Mitteilungen (1) und (2) bei ARCHIMEDES (siehe unten) wissen wir, daß EUDOXOS die Sätze XII,7 und 10 erstmals exakt bewies. Er dürfte somit der Entdecker der obigen Beweismethode gewesen sein. Unter Benützung der Mitteilung (3) hat B. L. VAN DER WAERDEN weiter gefolgert, daß auch XII,2² und 18 von EUDOXOS stammen müssen. Dieser Schluß wird beinahe zur Gewißheit, wenn man die von VAN DER WAERDEN³ und HEATH nicht erwähnten Mitteilungen (5) und (6) noch herbeizieht⁴. Bisher wenig beachtet wurde im weiteren die Aussage (4). Zudem wird das Auftreten der zwei Lemmata in (3) ganz verschieden interpretiert. Es sollen deshalb im folgenden sämtliche die Entdeckungen des EUDOXOS im XII. Buch betreffenden Aussagen⁵ zusammengestellt und der ganze Problemkreis ausführlich diskutiert werden.

(1)

Diese Eigenschaften sind für die besagten Figuren von Natur aus vorgegeben, wurden aber verkannt durch die, welche sich vor uns mit der Geometrie abgegeben haben, da keiner von ihnen daran gedacht hatte, daß die Maße dieser Figuren vergleichbar sind. Daher möchte ich nicht zögern, die obigen Lehrsätze den Untersuchungen der andern Geometer zur Seite zu stellen sowie auch den stereometrischen Lehrsätzen des EUDOXOS, die weit hervorzustechen scheinen (und besagen), daß jede Pyramide ein Drittel des Prismas mit derselben Basis und gleicher Höhe wie die Pyramide ist, und daß jeder Kegel ein Drittel des Zylinders mit derselben Basis und gleicher Höhe wie der Kegel ist. Denn obschon diese Zusammenhänge von Natur aus für jene Figuren vorgegeben sind und es vor Eudoxos viele erwähnenswerte Geometer gegeben hat, war es geschehen, daß sie allen unbekannt blieben und von keinem erkannt wurden.

(ARCHIMEDES, Über Kugel und Zylinder, Vorwort)

(2)

Und daher sollte man von diesen Lehrsätzen vom Kegel und der Pyramide, deren Beweis EUDOXOS zuerst gefunden hatte, daß der Kegel ein Drittel des Zylinders, bzw. die Pyramide des Prismas, mit derselben Basis und gleicher Höhe ist, einen nicht geringen Anteil dem DEMOKRIT zuweisen, der als erster diese Aussage über die genannte Figur ohne Beweis dargelegt hatte.

(ARCHIMEDES, Methode, Vorwort)

¹ Einzig in XII,10 und 18 treten Abweichungen auf: In XII,10 vereinfacht sich der Beweis, da das Verhältnis 1 wird; und in XII,18 muß der Beweis aus sachlichen Gründen abgeändert werden.

² Satz XII,2 war nach EUDEMOS bereits HIPPOKRATES bekannt. Einen exakten Beweis dürfte dieser aber kaum besessen haben (vgl. Dictionary of Scientific Biography „Hippocrates of Chios“).

³ B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft I*, S. 307.

⁴ Vgl. F. LASSERRE, *Die Fragmente des Eudoxos von Knidos*, S. 30ff. Die übersichtlich zusammengestellten Fragmente sind mit einem ausführlichen Kommentar versehen.

⁵ Die Übersetzungen (1)–(4) stammen von W. D. MEIER.

(3)

... sofern für den Beweis folgendes Lemma angenommen wird: Die Differenz <zweier> ungleicher Flächen, um die sich die größere von der kleineren unterscheidet, vermag, wenn sie zu sich selbst hinzugefügt wird, jede vorgegebene endliche Fläche zu übertreffen. Auch die früheren Geometer haben dieses Lemma gebraucht: Daß nämlich die Kreise im zweifachen Verhältnis ihres Durchmessers zueinander stehen, haben sie bewiesen unter Benützung dieses selben Lemmas, sowie daß die Kugeln im dreifachen Verhältnis ihrer Durchmesser zueinander stehen; und dazu noch, daß jede Pyramide ein Drittel des Prismas mit gleicher Basis und gleicher Höhe wie die Pyramide ist, und daß jeder Kegel ein Drittel des Zylinders mit derselben Basis und gleicher Höhe wie der Kegel ist, zeigten sie unter Annahme eines dem vorhergenannten ähnlichen Lemmas.

(ARCHIMEDES, Quadratur der Parabel, Vorwort)

(4)

1. Kegel mit gleicher Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen. Kegel mit gleichen Grundflächen verhalten sich zueinander wie die Höhen.

2. Wird ein Zylinder von einer Ebene parallel zur Grundfläche geschnitten, so verhält sich Zylinder zu Zylinder wie Achse zu Achse.

3. Die Kegel mit denselben Grundflächen wie die Zylinder stehen im selben Verhältnis wie die Zylinder.

4. In gleichen Kegeln sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional. Und <Kegel> in denen die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich.

5. Kegel, deren Grundflächendurchmesser sich wie die Achsen verhalten, stehen zueinander im dreifachen Verhältnis der Grundflächendurchmesser.

All dies wurde von den Früheren bewiesen.

(ARCHIMEDES, Über Kugel und Zylinder)

(Lemmata zwischen Proposition 16 und 17)

(5)

In ihren Anfängen beschäftigte sich die Geometrie, wie der alte Bericht uns lehrt, mit den Landvermessungen und Landteilungen, wovon sie auch Geometrie (Landmessung) genannt ward. Da dies Geschäft für die Menschen nützlich war, so wurde sein Gattungsbegriff erweitert, sodaß die Handhabung der Messungen und Teilungen auch zu den festen Körpern fortschritt, und da die zuerst gefundenen Sätze nicht ausreichten, so bedurften jene Operationen noch weiterer Forschung, sodaß sogar bis zum gegenwärtigen Moment manches davon noch ungelöst ist, obwohl ARCHIMEDES und EUDOXOS den Gegenstand vortrefflich behandelt haben. Denn vor des EUDOXOS Entdeckung war es unmöglich, den Nachweis zu liefern, daß der Zylinder dreimal so gross ist, als der Kegel, der mit ihm dieselbe Basis und die gleiche Höhe hat, sowie dafür, daß die Kreise sich zueinander verhalten wie die Quadrate ihrer Durchmesser zueinander. Und vor ARCHIMEDES' scharfsinniger Entdeckung ...

(HERON VON ALEXANDRIA, Vermessungslehre, Vorwort)

(6)

Neben den Propositionen XII,2 und 10 findet sich in den Handschriften die Randbemerkung „EUDOXOS“.

(HEIBERG, Euclidis Elementa, Bd. 5, S. 622 und 628)

Aus den Mitteilungen (1)–(6) ergibt sich, daß die Beweise des EUDOXOS schriftlich fixiert waren. Entweder kannte ARCHIMEDES noch die Originalschriften oder dann entnahm er seine Angaben der Geschichte der Geometrie des EUDAMOS. Daß in der letzteren die stereometrischen Entdeckungen des EUDOXOS behandelt sein mußten, läßt die Mitteilung (5) vermuten. Aus (5) oder einer gemeinsamen

älteren Quelle dürfte schließlich der Scholiast (6) geschöpft haben. Diese Reihenfolge erklärt, warum die Scholien bloß bei den Propositionen XII,2 und 10 auftreten. Nimmt man dagegen mit LASSERRE¹ die umgekehrte Reihenfolge an, so ist nicht verständlich, weshalb beim eudoxischen Satz XII,7 kein Scholion mit entsprechendem Inhalt auftaucht.

Die Arbeiten des EUDOXOS müssen von seinen Zeitgenossen bewundert worden sein. ARCHIMEDES (1) spricht von „hervorragenden Lehrsätzen des Eudoxos“ und HERON (5) teilt uns mit, daß EUDOXOS die Stereometrie vorbildlich behandelte. EUDOXOS selbst dürfte eher einen knappen Stil geschrieben haben. Für viele Schulmeister war er zu knapp; deshalb das Einfügen der vielen mit *ἐπειδήπερ* eingeleiteten Erläuterungen in fast allen Codices des XII. Buches. XII,7 wurde durch diese Veränderungen bis zur Unkenntlichkeit verstümmelt (zur Textüberlieferung des XII. Buches siehe S. 104). Die von ARCHIMEDES gegebene Fassung der Protasis der Propositionen XII,2 und 7 ist für EUDOXOS der euklidischen gegenüber vorzuziehen: Das archimedische *διπλασίων λόγον* in XII,2 stimmt mit dem archimedischen und euklidischen *τριπλασίονα λόγον* in XII,18 überein, und daß Archimedes XII,7 mit der Formulierung von Elem. XII,7 Zus. bringt, bestätigt die oben festgestellte Umgestaltung dieser Proposition.

EUDOXOS dürfte die Sätze (XII,2, 7, 10 und 18) mit demselben Lemma wie EUKLID bewiesen haben. Die Aussage der Archimedesstelle (3) über die Verwendung zweier verschiedener Lemmata ist nur schwer verständlich. Sicher hat HEATH² recht, wenn er bemerkt, daß das in den Elementen EUKLIDS benutzte Lemma auf dem archimedischen beruhe und damit ARCHIMEDES zu Recht sagen durfte, das von ihm verwendete Lemma liege bereits den eudoxischen Beweisen von XII,2 und 18 zugrunde. Das alles erklärt aber noch nicht, weshalb in dem analog zu XII,2 verlaufenden Beweis XII,10³ von EUDOXOS plötzlich ein anderes Lemma benützt werden sollte. Die von LASSERRE⁴ vorgeschlagene Lösung, nämlich die Aufteilung der vier Sätze in die zwei bereits vor EUDOXOS mit dem archimedischen Lemma bewiesenen (XII,2 und 18) und die beiden später von EUDOXOS aufgestellten (XII,7 und 10), scheint mir ebenfalls wenig wahrscheinlich. Beruht doch der Beweis von XII,18 wesentlich auf XII,7. Ich neige eher dazu, die Textüberlieferung in (3) anzuzweifeln. Wäre es nicht möglich, daß die Erwähnung des zweiten Lemmas auf einen Interpolator zurückgehen könnte⁵, der die von HEATH

¹ LASSERRE, Die Fragmente des Eudoxos von Knidos, S. 172.

² T. L. HEATH, Archimedes, S. xlviii; Euclid's Elements, Bd. 3, S. 15.

³ In XII,2 wie 10 wird der Kreis durch reguläre Polygone von innen her approximiert.

⁴ F. LASSERRE, Die Fragmente des Eudoxos von Knidos, S. 173f.

⁵ Auch vom Text aus läßt sich, wie mir W. D. MEIER mitteilte, die Annahme einer Interpolation (urspr. Randnotiz?) rechtfertigen; neben einigen kleineren Auffälligkeiten legen v.a. folgende Beobachtungen eine solche nahe:

- Der Satz von *ἐτι δὲ καὶ ὅτι* an — schwerfällig wirkt nicht nur diese Einleitung, auch der Schluß ist es — läßt die anschließende Wiederaufnahme sehr weit von *αὐτῷ τούτῳ τῷ λήμματι* bzw. *τῷδε τῷ λήμματι* wegrücken.
- Das Imperfekt *ἐγραφον* — hier in seiner sehr speziellen Bedeutung — erscheint schwach neben dem bedeutungsgleichen, aber viel eindeutigeren Perfekt *ἀποδείχασιν*.
- Die Theoreme 3 und 4 stimmen fast wörtlich mit Text (1) überein und weichen stark vom Stil in Text (3) ab.

gemachte Feststellung nicht berücksichtigte und deshalb fälschlicherweise die Aussage¹ des ARCHIMEDES berichtigen wollte. Soweit zur Interpretation der Mitteilungen (1)—(6).

Im folgenden sollen aufgrund der Mitteilungen (1)—(6) die dem EUDOXOS bekannten Sätze im XII. und XI. Buch der Elemente rekonstruiert werden. Im XII. Buch sind dies sicher die Sätze XII,2, 7, 10 und 18, wie wir bereits früher festgestellt haben. Sie bilden den Ausgangspunkt unserer Untersuchung und wurden zur besseren Übersicht in der schematischen Darstellung auf S. 116 eingerahmt. Ihr Beweis erfolgte, wie oben dargelegt, unter Benutzung des Lemmas X,1. Ein Vergleich der Aussagen (3) und (4) wirft die Frage auf, ob auch die Sätze XII,11, 12, 13, 14 und 15 auf EUDOXOS zurückgehen könnten. Sie werden von ARCHIMEDES, wie die als eudoxisch erkannten der Mitteilung (3), früheren Autoren zugeschrieben. Die letztere Frage soll zuerst überprüft werden, und zwar durch Analyse der Beweise der Sätze.

Satz XII,12 besagt, daß die Inhalte ähnlicher Kegel und Zylinder zueinander dreimal im Verhältnis der Grundflächendurchmesser stehen. Da EUDOXOS, wie wir später sehen werden, die entsprechenden Sätze für Parallelfäche (XI,33), dreiseitige Pyramiden (XII,8) und für Kugeln (XII,18) aufstellte, ist anzunehmen, daß er auch XII,12 bewiesen hat. Der Beweis läßt sich in der gewohnten Weise durch Exhaustion unter Benutzung von XII,8 führen².

Der Satz XII,15 lautet wie folgt: „In gleichen Kegeln sowie Zylindern sind die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional. Und Kegel sowie Zylinder in denen die Grundflächen den Höhen umgekehrt proportional sind, sind gleich“. Könnte EUDOXOS diesen Satz anders als in den Elementen EUKLIDS bewiesen haben? Es wäre naheliegend, den Beweis mit Hilfe der Exhaustionsmethode zu erbringen: Man nähert die Kegel durch einbeschriebene Pyramiden an und versucht darauf die Aussage von XII,15 für vielseitige Pyramiden aus derjenigen von XII,9 für Pyramiden mit dreiseitiger Grundfläche herzuleiten. Dies gelingt aber nicht bei Pyramiden mit beliebiger Basis: Bei der Aufteilung in dreiseitige Pyramiden geht im allgemeinen die Gleichheit verloren. Man müßte also den entsprechenden Satz für vielseitige Pyramiden direkt beweisen. Dabei wäre man genötigt, gestützt auf XII,7, den Weg über das Prisma zu nehmen, wo man jedoch wieder auf dasselbe Problem stößt. Es bieten sich zwei Auswege: Entweder sucht man eine andere Beweismethode oder beschränkt den Hilfssatz auf Pyramiden mit ähnlichen Grundflächen. Bei der Durchführung des eigentlichen Exhaustionsbeweises treten noch weitere Schwierigkeiten auf: Aus der Gleichheit der Kegel muß auf die Gleichheit der einbeschriebenen Pyramiden mit ähnlicher Grundfläche geschlossen werden, usw. Es scheint mir daher wenig wahrscheinlich, daß EUDOXOS zum Beweis von XII,15 die Exhaustionsmethode verwendete.

¹ Die genaue Formulierung des Lemmas in dieser Aussage war natürlich für Archimedes auch durch die Anwendung in Quadr. 16 bestimmt.

² Der Exhaustionsbeweis in XII,12 kann vermieden werden, wenn man die Beweismethode von XII,15 benutzt. Aus XII,13 folgt $Z_1:Z_3 = d_1:d_2$ und aus XII,11 und 2 $Z_3:Z_2 = (d_1:d_2)^2$ (Z_3 ist ein Hilfszylinder mit der Höhe von Z_2 und der Grundfläche von Z_1). Das einzige Problem stellt die Zusammensetzung der Verhältnisse. Dazu ginge man am besten von einer stetigen Proportion mit vier Größen aus: $d_1:d_2 = d_2:d_3 = d_3:d_4 = \dots$.

Benützte er jedoch den Beweis der Elemente EUKLIDS, so muß er unbedingt die Sätze XII,11 und 13 besessen haben. Beide sind anschaulich klar. XII,11 kann mit Hilfe der Exhaustionsmethode über Kegel (XII,10) und Pyramide (XII,6) exakt bewiesen werden.

Von den anfangs erwähnten Sätzen bleibt noch XII,14 übrig. Dieser ist eine leichte Verallgemeinerung von XII,13. Es ist daher fraglich, ob beide Sätze zur Zeit des EUDOXOS bereits explizite bestanden haben. Der in den Elementen gegebene Beweis von XII,14 über XII,13 bietet sich sofort an. Es wäre möglich, XII,14 unabhängig von XII,13 mit Hilfe der Exhaustionsmethode zu beweisen. Da jedoch die dazu benötigten Hilfssätze für Pyramiden und Parallelfäche fehlen, ist es wenig wahrscheinlich, daß EUDOXOS diesen Weg beschritten hat.

Falls somit EUDOXOS XII,12 und XII,15 aufstellte, wird er auch XII,11 und 13 gekannt haben. XII,12 (Lemma 5) wird von ARCHIMEDES in einer von den Elementen verschiedenen Form zitiert und in Sph. Cyl. 41 auch angewendet. Satz XII,15 (Lemma 4) benutzt ARCHIMEDES gleich in der nächsten auf die Lemmata folgenden Proposition in Sph. Cyl. 17. Diese beiden Sätze können also nicht nachträglich zu den übrigen Lemmata aus den Elementen hinzugefügt worden sein¹. Für das 2. und 3. Lemma wäre dies dagegen denkbar. Sie handeln im Gegensatz zu den andern von Zylindern und werden von ARCHIMEDES nie direkt verwendet. Da jedoch das 2. Lemma, wie oben gesehen wurde, sowieso zum Beweis des 4. notwendig ist, hat diese Möglichkeit keinen Einfluß auf das Resultat unserer Untersuchung. Ganz allgemein spricht die von den Elementen abweichende Formulierung eher gegen eine nachträgliche Interpolation. Die betreffenden Sätze könnten also durchaus auf EUDOXOS zurückgehen.

Analysieren wir im weiteren die sicher von EUDOXOS stammenden Sätze XII,2, 7, 10 und 18. Wie bereits früher gezeigt, hat EUDOXOS diese Sätze mit Hilfe derselben Lemmas wie EUKLID bewiesen. Er wird daher in den meisten Fällen ähnlich wie EUKLID vorgegangen sein. Zum Beweis von XII,7 wird er ebenfalls die in XII,3—5 dargelegten Schritte benutzt haben. Formulierung und Gliederung der Propositionen XII,3—7 dürfte freilich anders gewesen sein. So wurde XII,7 von EUDOXOS verschieden formuliert² und XII,6 war vermutlich erst viel später zwischen XII,5 und 7 interpoliert worden. Die Proposition fehlt im Cod. b und tritt bei den Arabern nur zum Teil und als bloßer Zusatz auf³. Zum Beweis der Sätze XII,3—5 sind die Propositionen XI,39 und 32 erforderlich. XI,39 könnte EUDOXOS eventuell nicht explizite formuliert haben⁴. Der Satz ist eine einfache Folgerung aus XI,31. Der zweite Satz XI,32 beruht ebenfalls auf XI,31, der also EUDOXOS bekannt gewesen sein muß. Den Beweis von XI,31 dürfte er ähnlich wie in den Elementen über die beiden Spezialfälle XI,29 und XI,30 geführt haben. Hätte EUDOXOS einen einfacheren, direkteren Beweis gegeben, so wäre dieser von EUKLID sicher übernommen worden. Zudem ist es naheliegend, eine volumen-

¹ XII,12 wegen seiner abweichenden Formulierung und XII,15 weil durch seine Verwendung die Stellung der Lemmata bei ARCHIMEDES bestimmt wurde.

² Siehe S. 112.

³ XII,8 Zus., der XII,8 auf Pyramiden mit vieleckiger Grundfläche verallgemeinert, dürfte ebenfalls interpoliert sein. In XII,12 wird XII,8 Zus. bei seiner Verwendung nochmals explizite bewiesen.

⁴ Der Satz scheint aufgrund seiner Stellung erst nachträglich zum XI. Buch beigelegt worden zu sein.

erhaltende Umwandlung des einen Körpers in den andern durch schrittweise Anpassung von Grundflächen und Kantenwinkel zu suchen, was zwangsläufig zu den beiden Hilfssätzen führte. Zum Beweis der Satzgruppe XI,29—31 müssen unbedingt die Aussagen der Sätze XI,24 und 25 bekannt gewesen sein. Der damalige, genaue Wortlaut dieser beiden Sätze ist fraglich. Er hängt bei XI,24 wesentlich von der zugrunde gelegten Definition des Parallels ab¹. Die uns überlieferte Fassung dieses Satzes ist ungenau². Sie bringt im Gegensatz zu den Definitionen XI, Def. 9 und 10 und den Propositionen XI,27, 31, 33 und XII,8 nur *ἴσος* und nicht das im XI. Buch üblichere *ἴσος καὶ ὁμοιος*³. Andererseits soll XI,25 zur Zeit des EUDOXOS nach BECKER⁴ noch mit Hilfe der Wechselwegnahme bewiesen worden sein.

Für den Exhaustionsbeweis von XII,10 sind die Sätze XII,7 und XI,28 unbedingt erforderlich. XI,32 kann im gegebenen Fall auf XI,28 zurückgeführt werden. Die Analyse ergibt somit nur Sätze, die EUDOXOS bereits früher zugewiesen wurden.

Will man den Satz XII,18 exakt beweisen, so bietet sich die Approximation der Kugel durch konvexe Polyeder an. Für letztere läßt sich die Aussage von XII,18 mittels XII,8⁵ sofort herleiten. Damit ist der Exhaustionsbeweis durchführbar. Diese Lösungsmethode dürfte im großen und ganzen auch EUDOXOS verwendet haben: Die Inbeziehungsetzung von Kugel und Polyeder war ihm von den Atomisten her bekannt⁶ und der Hilfssatz XII,8 ergab sich organisch aus den von ihm bereits früher bewiesenen Sätzen. Des weitern muß er, wie wir von ARCHIMEDES wissen, das Lemma X,1 benutzt haben. XII,8 und X,1 sind aber ebenfalls die wichtigsten Hilfssätze des euklidischen Beweises⁷. EUKLID könnte also auch hier in der Hauptsache EUDOXOS gefolgt sein. Die Gliederung des Beweises, die Aufteilung in die drei Propositionen XII,16—18, dürfte freilich nicht auf Eudoxos zurückgehen: Der Hilfssatz XII,16 ist nämlich ungenau formuliert. Geleistet und auch gebraucht wird „ein gleichseitiges Vieleck von gerader Seitenzahl so einzubeschreiben, daß auch das gleichseitige Vieleck von halber Seitenzahl nicht an den kleineren Kreis rührt“. Die für den Beweis von XII,18 wesentliche Aussage XII,17 Zus. ist in den Elementen mitsamt ihrem Beweis an die Proposition XII,17 angehängt worden. Das alles erweckt den Eindruck, als sei der ursprüngliche, eudoxische Beweis von XII,16—18 später redigiert und in Propositionen aufgeteilt worden. Auf jeden Fall sind große Teile der

¹ Eine solche Definition fehlt bei EUKLID. Vgl. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 366.

² HEATH, Euclid's Elements, Bd. 3, S. 324.

³ Zur Entwicklungsgeschichte dieser beiden Termini siehe CH. MUGLER, Platon et la recherche mathématique, S. 45—108; sowie VON FRITZ, Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, u.a. S. 430ff. und Platon, Theaetet und die antike Mathematik, S. 84. Zu XI, Def. 9 und 10 vgl. auch S. HELLER, Über Euklids Definitionen ähnlicher und kongruenter Polyeder, Janus, LI (1964).

⁴ BECKER, Eudoxos-Studien I, S. 326.

⁵ Satz XII,8 lautet: „Ähnliche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen stehen dreimal im Verhältnis entsprechender Kanten.“

⁶ DEMOKRITOS betrachtete die Kugel als Polyeder mit übersinnlich großer Seitenflächenzahl. Vgl. dazu ARISTOTELES, de caelo III 8 307^a2 und 17 (= VS 68 B 155a).

⁷ Vgl. Schema S. 116.

konzentrischen Kugeln stets ein konvexes Polyeder konstruieren kann, welches der äußern einbeschrieben ist und nicht an die innere rührt. XII,2 könnte unter Benutzung des Hilfssatzes XII,16 analog wie XII,18 bewiesen werden.

Aus unserer Analyse ergeben sich folgende Resultate (vgl. Schema S. 116):

I. Die meisten Sätze der Parallelfachtheorie (XI,24—37) müssen EUDOXOS bekannt gewesen sein.

II. Das XII. Buch geht größtenteils auf EUDOXOS zurück.

Nimmt man speziell an, daß ARCHIMEDES in (3) und (4) mit *οἱ πρότερον* jeweils EUDOXOS meinte, so läßt sich das ganze XII. Buch EUDOXOS zuschreiben. Das Resultat I ist von der Interpretation der Archimedesstellen (3) und (4) weitgehend unabhängig. Ein Verzicht auf die unsicherste Mitteilung (4)¹ ändert überhaupt nichts und die Weglassung von (3)² nur wenig bezüglich seiner Aussagekraft. Fügt man die anderorts³ gemachte Feststellung hinzu, daß die Parallelogrammtheorie erst kurz vor EUKLID entstanden sein kann, so lassen sich die Sätze unter I EUDOXOS selbst zuschreiben. EUDOXOS wäre demnach der Schöpfer von Parallelogramm- und Parallelfachtheorie sowie der Sätze des XII. Buches gewesen. Scholien⁴ zum Buch V entnimmt man, daß dieses ebenfalls auf EUDOXOS zurückgeht⁵. Damit dürften auch große Teile des VI. Buches (Anwendungen der Proportionen- und Parallelogrammtheorie) von EUDOXOS stammen.

Der so erhaltene Komplex erweist sich als ein abgeschlossenes Ganzes. Neben der Aussage für den ebenen Fall im I. oder VI. Buch stehen meist die analogen räumlichen Sätze (für Parallelfach, Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, Kegel

Korrespondenz zwischen den Sätzen der Parallelogrammtheorie, der Parallelfachtheorie und des XII. Buches

eben	I 34	I 36 I 38	VI 18	VI 22	VI 1 VI 33	VI 1	VI 19 VI 20 XII 1 XII 2	VI 14 VI 15
räumlich								
Parallelfach	XI 24 XI 28	XI 31	XI 27	XI 37	XI 25	XI 32	XI 33	XI 34
Pyramide mit dreieckiger Grundfläche							XII 5	XII 8 XII 9
Kegel und Zylinder					XII 13	XII 11	XII 12	XII 15
Kugel							XII 18	

¹ Die aus dieser Mitteilung gezogenen Schlüsse sind im Schema auf S. 116 gestrichelt eingetragen.

² Es fielen die eingerahmten Sätze XII, 2 und 18 sowie die aus ihnen gezogenen Folgerungen weg.

³ E. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 366.

⁴ HEIBERG, Euclidis Elementa, Bd. 5, S. 280f. und S. 282, 13ff.

⁵ Die Frage, ob EUDOXOS das V. Buch vor dem XII. verfaßte ist umstritten: Dafür ist LASSERRE, Eudoxos-Fragmente, S. 173; dagegen BECKER, Eudoxos-Studien I, S. 326ff.

und Zylinder) im XI. und XII. Buch. Analoge Sätze werden in den Elementen fast immer mit denselben Worten formuliert, was die Einheitlichkeit hervorhebt. Einige Beispiele mögen dies erläutern: In VI,1 wird der Satz behandelt, daß sich Parallelogramme unter derselben Höhe zueinander verhalten wie die Grundlinien. XI,32 bringt den entsprechenden Satz für Parallelfäche, XII,5 für Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche und XII,11 für Kegel und Zylinder. Dem ebenen Satz VI,22 entspricht der räumliche XI,37. Die Beweise der sich entsprechenden Sätze VI,1, VI,33, XI,25 und XII,13 stimmen in großen Teilen wortwörtlich überein. Sie beruhen alle auf der eudoxischen Definition V Def. 5. Weitere Beispiele lassen sich der Zusammenstellung auf S. 117 entnehmen. Diese auffallende Konkordanz¹ bestätigt m.E. daß die wesentlichsten Teile des obigen Komplexes auf die Schule des EUDOXOS zurückgehen.

Buch XI

Das XI. Buch gliedert sich in 2 Teile: Im ersten werden die Grundlagen der Stereometrie behandelt, im zweiten die Lehre von den Parallelfächen. Letztere haben wir im vorangehenden Kapitel analysiert und erkannt, daß sie hauptsächlich auf EUDOXOS zurückgeht. Nachfolgend wollen wir uns mit dem ersten Teil (Propositionen XI,1—23) befassen. Sein Aufbau ist im Schema auf S. 119 dargestellt. Bei genauer Betrachtung desselben fällt auf, daß einige Propositionen des ersten Teils in den Elementen nirgends benutzt werden (z.B. XI,15, 17, 23). Diese könnten z.T. erst nachträglich beim Ausbau der Grundlagen entstanden sein. Andere Sätze freilich müssen auf die Frühzeit der Stereometrie zurückgehen (z.B. die bereits THEAITETOS bekannten XI,12 und 21). Der erste Teil enthält somit Propositionen ganz verschiedenen Datums. Da zudem wesentliche Angaben über die Herkunft der Sätze bei antiken Schriftstellern fehlen, ist die Rekonstruktion seiner Entstehungsgeschichte problematisch.

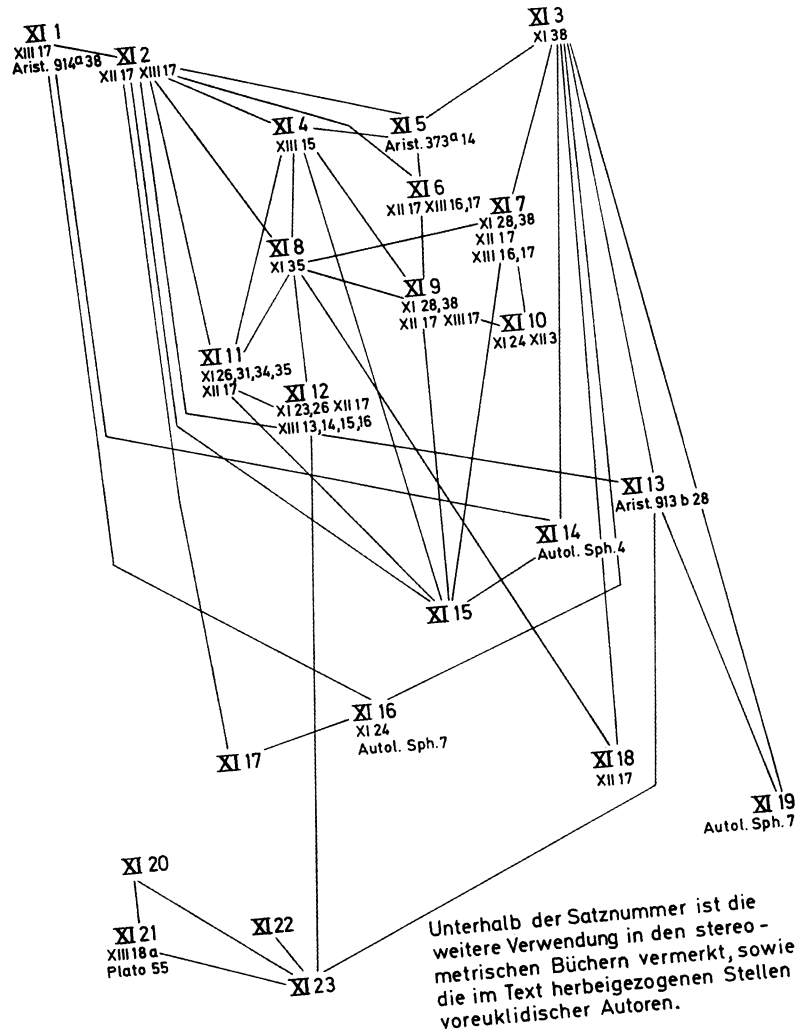
Am besten geht man dabei von der Proposition XI,12 aus. Für die Konstruktion der regulären Polyeder muß THEAITETOS eine Methode besessen haben, mit der er die Senkrechte zu einer Ebene in einem gegebenen Punkt errichten konnte. Es wäre möglich, hierfür das von HADAMARD² und HAJÓS³ angegebene Verfahren zu benutzen: Man zieht in der gegebenen Ebene zwei sich schneidende Hilfsgeraden, errichtet zu ihnen durch den gegebenen Punkt die Normalebenen und bestimmt die Schnittgerade der letzteren. Diese ist dann (vgl. Elem. XI,19) die gesuchte Normale. — Nun fehlt jedoch in den Elementen eine Proposition, welche die Konstruktion der Normalebene behandelt. Diese wird in den Propositionen XI,9 und 11 zwar sorgfältig durchgeführt, aber nicht als solche bezeichnet. Es scheint mir daher unwahrscheinlich, daß THEAITETOS das von HADAMARD und HAJÓS angegebene Verfahren benutzte. Viel eher dürfte er so wie EUKLID vorgegangen sein und hätte damit die Propositionen XI,4, 8 und 11 ebenfalls gekannt.

¹ Im allgemeinen zeigt sich in den Elementen häufig die entgegengesetzte Tendenz. Vgl. z.B. S. 107 sowie E. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente EUKLIDS, S. 355.

² J. HADAMARD, *Géométrie élémentaire*, Bd. 2, S. 22.

³ G. HAJÓS, *Einführung in die Geometrie*, S. 220.

Schema zu XI, 1—23



Die Proposition XI,4 bringt eine grundlegende Aussage, die sich bei der Analyse von XI, Def. 3 zwangsläufig aufdrängt. XI,8 ist die Umkehrung von XI,6. Die beiden Sätze ergeben zusammen ein notwendiges wie hinreichendes Kriterium für die Parallelität zweier Geraden. Beide werden in späteren Propositionen wesentlich benützt; XI,6 unter anderem auch in XIII,16 und 17, welche auf THEAITETOS zurückgehen. Beim Beweis von XI,6 wiederum stößt man unmittelbar auf den Hilfssatz XI,5, der zumindest für ARISTOTELES¹ belegt ist. THEAITETOS wären demnach vorerst die Propositionen XI,4, 5, 6, 8, 11 und 12 zuzuschreiben. Des weiteren dürfte ein Teil der Satzgruppe XI,20—23 von ihm stammen; XI,21 wird in PLATONS Timaios vorausgesetzt. Dagegen ist fraglich, ob er die im XIII.

¹ ARISTOTELES, Meteor. III 3 373^a14.

Buch ebenfalls benutzten Propositionen XI,1—3¹, 7 und 9 bereits explizite formulierte. Aufgrund ihrer Zitierweise² und ihres Inhaltes könnte man vermuten, daß diese Sätze zunächst der Anschauung entnommen und erst später bewiesen worden sind³.

Einen weiteren Ausbau dürften die Grundlagen der Stereometrie bei der Entwicklung der Sphärik und der Parallelfachtheorie erfahren haben. AUTOLYKOS verwendet in seiner rotierenden Kugel neben den Lehrsätzen der voreuklidischen Sphärik⁴ auch Elem. XI,14⁵, XI,16⁶ und XI,19⁶; ferner werden die Propositionen XI,10 und 16 in der Parallelfachtheorie (XI,24) benötigt. Große Teile sind somit auch hier der Schule des EUDOXOS und nicht EUKLID zuzuschreiben.

Folgerungen für die Frühgeschichte der Stereometrie

Die zur Frühgeschichte der Stereometrie überlieferten Mitteilungen und Fragmente konzentrieren sich hauptsächlich auf die PYTHAGOREER und DEMOKRITOS. Die ersteren haben sich mit den regulären Körpern sowie der Würfelverdoppelung beschäftigt; letzterer untersuchte die durch den Atomismus bedingte Gestalt der Körper, bestimmte ihre Volumina und schrieb Abhandlungen über die Perspektive. Wir wollen im folgenden die wenigen dazu überlieferten Mitteilungen zusammenstellen und anschließend versuchen, mit ihrer Hilfe ein Bild vom damaligen Zustand der Stereometrie zu entwerfen. Dieses soll darauf mit den Folgerungen, die sich aus unserer Arbeit ziehen lassen, verglichen werden.

Die Beiträge der PYTHAGOREER zur Entwicklung der Theorie der regulären Polyeder wurden bereits früher diskutiert⁷. Es scheint, daß diese sich mehr für die den Polyedern innewohnenden Verhältnisse als für ihre exakte mathematische Konstruktion interessierten. EVA SACHS⁸ z.B. glaubt nicht, daß HIPPOSOS das Dodekaeder in einer gegebenen Kugel konstruierte. Sie übersetzt die Iamblichos-Stelle (V. Pyth. 88) mit: „Er *zeichnete* die Kugel aus den 12 Fünfecken“. In die gleiche Richtung weist eine Bemerkung bei NIKOMACHOS⁹, die zeigt, wie PHILOLAOS den Würfel behandelte:

Einige aber glauben, in Übereinstimmung mit Philolaos, daß das Mittel harmonisch genannt werde, weil es jeweilen geometrische Harmonie begleitet; als geometrische Harmonie bezeichnen sie den Würfel, weil er in den drei Dimensionen dreimal mit sich selbst multipliziert aufgebaut ist. Denn in jedem Würfel wird dieses Mittel

¹ XI, 1 wird in den Problemata (914^a38), welche nicht auf ARISTOTELES zurückgehen, mit abweichendem Wortlaut zitiert.

² Die Zitierweise dieser Sätze ist sehr unterschiedlich innerhalb der stereometrischen Bücher. Besonders auffallend sind die isoliert dastehenden Zitate von XI,1, 7 und 9 im neuern Satz XI,38 sowie in den überarbeiteten Propositionen XII,17 und XIII,17.

³ Älter ist allenfalls noch XI,13. Ein ihm verwandter Satz wird in ARISTOTELES, Problemata 913^b28 zitiert.

⁴ Eine Rekonstruktion dieser Sphärik, von den einen EUDOXOS und von andern ARCHYTAS zugeschrieben, wurde von verschiedenen Seiten versucht. Vgl. dazu F. LASSERRE, Eudoxos-Fragmente, S. 179.

⁵ AUTOLYKOS, Die rotierende Kugel, Prop. 4.

⁶ AUTOLYKOS, Die rotierende Kugel, Prop. 7.

⁷ Vgl. S. 103 ff.

⁸ EVA SACHS, Die fünf platonischen Körper, S. 82f.

⁹ NIKOMACHOS, Introductio arithmetica, II 26,2 = (VS 44 A 24).

gespiegelt. Jeder Würfel hat nämlich 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen. Also ist 8 das Mittel von 12 und 6 beim harmonischen Mittel. (nach W. D. MEIER)

Die Würfelverdoppelung wurde nach PROKLOS und EUTOKIOS¹ durch HIPPOKRATES VON CHIOS² auf die Konstruktion zweier mittlerer Proportionalen zurückgeführt. Dieses Problem löste aber erst ARCHYTAS und zwar vermutlich nicht vor den stereometrischen Arbeiten des THEAITETOS³.

DEMOKRITOS hat aufgrund einer Mitteilung des ARCHIMEDES⁴ als erster das Volumen von Kegel und Pyramide bestimmt. Diese Mitteilung des ARCHIMEDES wird gern mit dem folgenden DEMOKRITfragment⁵ kombiniert:

Wenn ein Kegel parallel zur Grundfläche mit einer Ebene geschnitten wird, wie soll man sich die entstehenden Schnittflächen vorstellen, gleich oder ungleich? Sind sie ungleich, dann werden sie den Kegel ungleichmäßig machen, da er viele treppenartige Einschnitte und Vorsprünge erhält; sind sie dagegen gleich, so werden (auch) die Schnitte gleich sein und der Kegel wird die Erscheinung eines Zylinders darbieten, insofern er aus gleichen, nicht aus ungleichen Kreisen bestehen wird, was doch sehr ungereimt ist. (nach LURIA)

Daraus wird dann abgeleitet, daß DEMOKRITOS das Volumen des Kegels unter Zuhilfenahme der Methode von CAVALIERI bestimmte⁶. Diese Annahme ist sehr verlockend, doch sollte man dabei nicht übersehen, daß beide Aussagen auch einzeln in befriedigender Weise in die Entstehungsgeschichte der Stereometrie eingegliedert werden können: Aus der kürzlich von PARKER herausgegebenen Sammlung demotisch-mathematischer Texte geht hervor, daß der Faktor $\frac{1}{3}$ für das Pyramidenvolumen in Ägypten zur Zeit des DEMOKRITOS bekannt war⁷. DEMOKRITOS, für den ausgedehnte Reisen nach Ägypten und Babylonien belegt sind⁸, hätte somit seine Formel, vielleicht mitsamt eines heuristischen Beweisverfahrens, in Ägypten kennenlernen können. Auf die obige Kegel-Aporie sowie zur Ansicht, daß die Kugel ein konvexes Polyeder mit übersinnlich großer Seitenflächenzahl ist⁹, könnte er gekommen sein, als er die Auswirkungen seiner atomistischen Theorie bezüglich der mathematischen Körper untersuchte. Auf alle Fälle hat DEMOKRITOS den Satz über das Pyramidenvolumen nach der Meinung des ARCHIMEDES nicht bewiesen und ein allfälliger heuristischer Beweis wäre zudem nicht sehr verbreitet gewesen. Kennt doch ARCHIMEDES einen solchen bei der Abfassung seiner ersten Mitteilung (1) noch nicht¹⁰.

¹ PROKLOS, Euklidkommentar, S. 315, 27ff.; EUTOKIOS, Archimedeskommentar, ed. Heiberg Bd. 3, S. 104, 11 = (VS 42 A 4).

² HIPPOKRATES stützte sich dabei wahrscheinlich auf Vorarbeiten der Pythagoreer (vgl. Dictionary of Scientific Biography „Hippocrates of Chios“).

³ Vgl. E. NEUENSCHWANDER, Zur Archytas-Lösung des delischen Problems, S. 1.

⁴ Mitteilung (2) auf S. 110.

⁵ PLUTARCH, de comm. notit. 39,1 = (VS 68 B155).

⁶ Vgl. z.B. S. LURIA, Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten, S. 138ff.

⁷ Vgl. dazu VAN DER WAERDEN, Erwachende Wissenschaft I, S. 54–57, sowie R. A. PARKER, Demotic Mathematical Papyri, Problem 40 (S. 52), wo das Volumen einer Pyramide berechnet wird.

⁸ Vgl. DIELS, VS 68; speziell B299.

⁹ Vgl. ARISTOTELES, de caelo III,8 307^a2 und 17.

¹⁰ Der Vergleich der beiden Archimedesstellen [(1) und (2)] bedingt eine Umstellung in der bisher angenommenen Reihenfolge der Werke des ARCHIMEDES. Für letztere siehe z.B. HEATH, Greek Mathematics, Bd 2, S. 22 oder Dictionary of Scientific Biography, Bd. 1, S. 214.

Das Verfassen einer Schrift über Perspektive¹ setzt ebenfalls keine allzugroßen Kenntnisse der Grundlagen der Stereometrie voraus, wie man aus der Behandlung der Probleme in der Optik des EUKLID² ersehen kann. Es steht somit nichts im Wege, die unten zitierte Rüge PLATONS³ auf den damaligen aktuellen Zustand der Stereometrie (um 375 v.Chr.) zu beziehen.⁴

(Sokrates:) «Gerade vorhin nach der Geometrie wahrten wir die richtige Reihenfolge nicht!»

(Glaukon:) «In welcher Hinsicht denn?»

(Sokrates:) «Als wir auf die Lehre von der Ebene gleich die vom umlaufenden Körper folgen ließen, bevor wir noch den Körper für sich selbst betrachtet hatten! Und doch wäre die richtige Folge die, daß wir nach der zweiten Ausdehnung die dritte hinstellten. Es gilt ja wohl hier der Ausdehnung der Würfel und allem, was Tiefe hat.»

(Glaukon:) «Schon! Indessen scheint mir, Sokrates: das ist noch nicht gefunden.»

(Sokrates:) «Allerdings, und zwar aus doppelter Ursache: weil kein einziger Staat diese Wissenschaft in Ehren hält, wird ihre Erforschung der großen Schwierigkeit wegen nur matt betrieben; sodann bedürfen die Forscher des Leiters, ohne den sie schwerlich etwas erreichen. Aber erstens, daß uns ein solcher Geist erstehe, ist kaum anzunehmen, und zweitens: auch wenn er erstünde — so, wie die Dinge jetzt liegen, würden ihm die Fachgelehrten in ihrem Eigendünkel doch nicht folgen! Nur wenn ein ganzer Staat, der diese Wissenschaft in Ehren hielte, die Gesamtleitung übernähme, würden sie folgen, und auch in diesem Wissensgebiet würde dann durch beständiges und angestregtes Forschen klar werden, wie die Sachen liegen.

Wird dieser Wissenszweig doch auch jetzt schon, obwohl vom großen Haufen verachtet und in den Hintergrund geschoben, doch von solchen, die ihn erforschen wollen, ohne dabei an seinen praktischen Nutzen zu denken, allen Hindernissen zum Trotz seines hohen Reizes wegen durch kräftiges Studium gehoben! Und da wäre es nicht verwunderlich, wenn er an das Licht hervorträte.»

(nach VAN DER WAERDEN)

Die bisherigen Ausführungen zeigen, daß vor PLATO bloß vereinzelte stereometrische Sätze bekannt gewesen sind (Die Pythagoreer untersuchten einige der regulären Polyeder; DEMOKRITOS anderseits bestimmte das Volumen verschiedener Körper). Es fehlte aber eine systematische Grundlagenforschung, wie sie in der Geometrie schon lange üblich war. Die Rüge PLATONS ist deshalb gut zu verstehen. Sie hat ihre Wirkung auch nicht verfehlt: Kurz nach der Abfassung des „Staates“ löste ARCHYTAS das delische Problem und entwickelte THEAITETOS seine Theorie der regulären Polyeder, die PLATO bereits im nachfolgenden „Timaios“ benutzte⁵.

¹ Nach VITRUVIUS (De Architectura, Bd. 7, Vorwort) schrieben DEMOKRITOS und ANAXAGORAS über das Thema, „wie man Geraden in natürlichem Verhältnis dem scharfen Blick und der Ausbreitung der Strahlen entsprechen lassen muß, nachdem man einen bestimmten Ort als Mittelpunkt angenommen hat, damit bestimmte Bilder einer unbestimmten Sache auf den gemalten Kulissen den Schein von Gebäuden geben und damit das, was auf der ebenen Vorderseite abgebildet ist, teils zurückweichend, teils nach vorne gerückt erscheint“. Nach DIOGENES LAERTIOS (IX,47) verfaßte Demokritos ein Buch mit dem Titel *ἐκπετάσματα* (Projektionen).

² Vgl. dazu A. LEJEUNE, Euclide et Ptolémée, deux stades de l'optique géométrique grecque.

³ PLATO, Staat 528 A—D.

⁴ Zur weiteren Begründung vergleiche die interessanten Ausführungen von EVA SACHS, Die fünf platonischen Körper, S. 146—160.

⁵ Vgl. dazu EVA SACHS, Die fünf platonischen Körper, S. 207 ff.

Die so aufgrund der Quellen rekonstruierte Entwicklung der Frühgeschichte der Stereometrie deckt sich mit den Resultaten unserer Untersuchung der stereometrischen Bücher. Nimmt man in den letzteren, die von uns THEAITETOS, EUDOXOS und Späteren zugeschriebenen Teile weg, so bleibt außer gewissen Grundsatzsätzen und allfälligen bereits früher bekannten Einzelergebnissen nichts mehr übrig. Es ist jedoch nicht anzunehmen, daß bedeutende Teile der Grundlagen (Elem. XI,1—23) bereits vor THEAITETOS entwickelt worden sind, erwecken diese doch selbst bei EUKLID einen noch wenig überarbeiteten Eindruck¹. So wurden Postulate für die Stereometrie erst von PAPPUS aufgestellt und die den Dreiecksätzen entsprechenden Kongruenzsätze für Dreikante erst von MENE-
LAOS gegeben.

Literatur

Ausgaben der Elemente

- Euclidis opera omnia, ediderunt I. L. HEIBERG et H. MENGE, Teubner (Leipzig 1883—1916).
 Euclidis elementa, post I. L. Heiberg edidit E. S. STAMATIS (Leipzig 1969—1973).
 The Thirteen Books of Euclid's Elements, T. L. HEATH (Cambridge 1908, 1926; repr. New York 1956).
 EUKLID, Die Elemente, übersetzt von C. THAER (Darmstadt 1962).

Literatur über die Elemente

Antike:

- PAPPUS VON ALEXANDRIA: Der Kommentar des Pappus zum X. Buche des Euklides, übersetzt von H. SUTER, in Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und Medizin, IV (Erlangen 1922).
 PAPPUS VON ALEXANDRIA: The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's Elements: Arabic Text and Translation, Harvard Semitic Series, VIII (Cambridge, Mass. 1930; repr. 1968).
 PROKLOS DIADOCHOS: Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ed. G. FRIEDLEIN (Leipzig 1883, repr. 1967).
 PROKLOS DIADOCHOS: Proklus Diadochos Kommentar zum ersten Buch von Euklids Elementen, übersetzt von P. L. SCHÖNBERGER, herausgegeben von M. STECK (Halle 1945).
 PROKLOS DIADOCHOS: Proclus, A Commentary on the First Book of Euclid's Elements, translated by GLENN R. MORROW (Princeton 1970).

Neuere:

- FREUDENTHAL, H. und VAN DER WAERDEN, B. L.: Over een bewering van Euclides, in Simon Stevin, 1 (1948).
 HEIBERG, I. L.: Litterargeschichtliche Studien über Euklid (Leipzig 1882).
 HEIBERG, I. L.: Paralipomena zu Euklid, in Hermes, 38 (1903).
 HEIBERG, I. L.: Die arabische Tradition der Elemente Euklid's, in Zeitschrift für Mathematik und Physik, Hist.-lit. Abt., 29 (1884).
 HELLER, S.: Über Euklids Definitionen ähnlicher und kongruenter Polyeder, in Janus, LI (1964).
 KLAMROTH, M.: Über den arabischen Euklid, in Zeitschrift der Deutschen morgenländischen Gesellschaft, 35 (1881).
 MURDOCH, J.: Euclid: Transmission of the Elements, in Dictionary of Scientific Biography (New York 1971).

¹ Vgl. auch I. TÓTH, Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum, S. 288, Randanmerkung 79.

- SACHS, EVA: Die fünf platonischen Körper (Berlin 1917).
 SZABÓ, Á.: Anfänge des euklidischen Axiomensystems, in *Archive for History of Exact Sciences*, 1 (1960).
 SZABÓ, Á.: Der älteste Versuch einer definitorisch-axiomatischen Grundlegung der Mathematik, in *Osiris*, 14 (1962).
 SZABÓ, Á.: Anfänge der griechischen Mathematik (Wien 1969).
 THAER, C.: Die Euklid-Überlieferung durch At-Tûsî, in *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B., Bd. 3* (1934).
 TÓTH, I.: Das Parallelenproblem im Corpus Aristotelicum, in *Archive for History of Exact Sciences*, 3 (1967).

Weitere Literatur

Antike:

- HIPPOKRATES VON CHIOS: Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates, griechisch und deutsch von F. RUBIO, in *Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume*, 1 (1907).
 EUDOXOS VON KNIDOS: Die Fragmente des Eudoxos von Knidos, herausgegeben, übersetzt und kommentiert von F. LASSERRE (Berlin 1966).
 AUTOLYKOS VON PITANE: Autolycus de Pitane, *Histoire du texte suivie de l'édition critique des traités*, par J. MOGENET (Louvain 1950).
 AUTOLYKOS VON PITANE: Die rotierende Kugel, übersetzt und mit Anmerkungen versehen von A. CSWALINA, in *Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften*, Nr. 232 (Leipzig 1931).
 EUKLID: Die Data von Euklid, nach Menges Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von C. THAER (Springer 1962).
 ARCHIMEDES: Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, ed. J. L. HEIBERG (Leipzig 1880—81).
 ARCHIMEDES: The Works of Archimedes, by T. L. HEATH (Cambridge 1897 und 1912, repr. 1953).
 HERO VON ALEXANDRIEN: Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia (Leipzig 1899—1914).
 NIKOMACHOS VON GERASA: Introduction to Arithmetic, translated into English, by M. L. d'OOGHE, with Studies in Greek Arithmetic by F. E. ROBBINS and L. C. KARPINSKI (New York 1926, repr. 1972).
 IAMBLICHOS: De Vita Pythagorica liber, griechisch und deutsch von M. VON ALBRECHT (Zürich 1963).
 PAPPUS VON ALEXANDRIEN: Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt, ed. F. HULTSCH (Berlin 1876).

Neuere:

- BECKER, O.: Eudoxos-Studien, in *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien*, Bd. 2 und 3 (1933).
 BURKERT, W.: Weisheit und Wissenschaft (Nürnberg 1962); englische Ausgabe: *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism* (Cambridge, Mass. 1972).
 DIELS, H.: Die Fragmente der Vorsokratiker.
 GILLISPIE, CH. C.: Dictionary of Scientific Biography (New York 1970—).
 HADAMARD, J.: *Leçons de Géométrie élémentaire* (Paris 1916).
 HAHM, D. E.: Chrysippus' Solution to the Democritean Dilemma of the Cone, in *Isis*, 63 (1972).
 HAJÓS, G.: Einführung in die Geometrie (Leipzig 1970).
 HEATH, T. L.: A History of Greek Mathematics (Oxford 1921).
 HEATH, T. L.: Mathematics in Aristotle (Oxford 1949, repr. 1970).
 HELLER, S.: Theaetets Bedeutung als Mathematiker, in *Sudhoffs Archiv*, 51 (1967).
 KRAFFT, F.: Dynamische und statische Betrachtungsweise in der antiken Mechanik, in *Boethius*, X (1970).
 LEJEUNE, A.: Euclide et Ptolémée, deux stades de l'optique géométrique grecque (Louvain 1948).

- LURIA, S.: Die Infinitesimaltheorie der antiken Atomisten, in Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abt. B, Bd. 2 (1932).
- MUGLER, CH.: Platon et la recherche mathématique de son époque (Strasbourg 1948).
- MUGLER, CH.: Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs (Paris 1958).
- NEUENSCHWANDER, E.: Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, in Archive for History of Exact Sciences, 9 (1973).
- NEUENSCHWANDER, E.: Zur Überlieferung der Archytas-Lösung des delischen Problems, in Centaurus, 18 (1973).
- NEUENSCHWANDER, E.: Beiträge zur Frühgeschichte der griechischen Geometrie I, in Archive for History of Exact Sciences, 11 (1973).
- PARKER, R. A.: Demotic Mathematical Papyri (London 1972).
- SUTER, H.: Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist des Ibn Abi Ja'kûb an-Nadim, in Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik, VI (1892).
- VAN DER WAERDEN, B. L.: Erwachende Wissenschaft I (Basel 1956).
- VON FRITZ, K.: Platon, Theaetet und die antike Mathematik (Darmstadt 1969).
- VON FRITZ, K.: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft (Berlin 1971).
- WATERHOUSE, W. C.: The Discovery of the Regular Solids, in Archive for History of Exact Sciences, 9 (1972).

Abteilung Geschichte der Wissenschaft
Universität Zürich

(Eingegangen am 24. Februar 1974)