

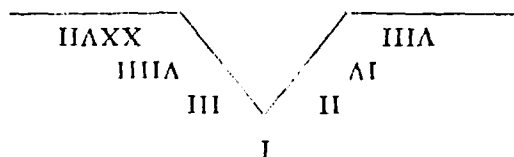
In: Hermes, 87 - 1959 - p. 393 - 413

5683
KYTZLER, B
1959

D Kytzler (Bernhard) (Sole) Tetractys
Plato
Music
Weltseele und Musikalische Raum
Hermes 87 (1959) 393 - 414
notes (35) + notenblatt VV 563

~~1959~~

Es bleibt noch zu bemerken, daß es sich bei diesen 7 Zahlen um die sog.
große Tetraktys handelt, bei welcher die Summe der ersten 6 Glieder dem



Der Codex Parisinus 6371 gibt dazu fol. 16 verso die Zeichnung:

DIE WELTSEELE UND DER MUSIKALISCHE RAUM

(Platon Timaios 35 a ff.)

Um die Weltseele zu bilden, so erzählt Timaios in dem gleichnamigen Dialog Platons, »mischte der Demiurg aus dem unteilbaren und sich immer gleich verhaltenden Sein sowie aus dem im körperlichen Bereich entstehenden teilbaren Sein eine dritte Gattung des Seins aus beiden in der Mitte; und zwar vollzog er die Zusammenstellung sowohl hinsichtlich des Wesens des Selben und des Wesens des Anderen als auch in derselben Weise in der Mitte des Teillosen von ihnen¹ und des im körperlichen Bereich Teilbaren. Und diese drei nahm er und mischte sie allesamt zu einer einzigen Gattung zusammen, indem er das schwer mischbare Wesen des Anderen gewaltsam mit dem Selben zusammenfügte. Und da er sie mit dem Sein mischte und aus dreien Eins gemacht hatte, teilte er dieses Ganze wiederum in so viele Teile, als es gemäß war; jeder Teil aber war gemischt aus dem Selben und dem Anderen und dem Sein.«

Dieser metaphysischen Komposition der Weltseele folgt die im letzten Satz angekündigte neue Einteilung, eine Einteilung in Zahlen, die in drei sich stufenweise ergänzenden Operationen vorgenommen wird. Schon Aristoteles² hat darauf hingewiesen, daß es sich um Zahlenverhältnisse handelt, die im musikalischen Bereich Geltung haben; und in der Tat sind zwar die beiden ersten Operationen noch als rein mathematische Gliederungen verständlich, die dritte dagegen folgt nicht mehr einem mathematischen, sondern einem aus den Notwendigkeiten der Musiktheorie resultierenden Ordnungsprinzip. Der Versuch freilich, diese nur in Formeln gegebenen Zahlenreihen genau zu konkretisieren, sie sodann auf musikalische Verhältnisse zu übertragen und zu deuten, hat zu einer langen Reihe von einander widersprechenden Ergebnissen geführt, die nicht nur unter sich uneins sind, sondern auch meinen, dem Texte Platons, der sich scheinbar als unvollständig und unklar erweist, in unterschiedlicher Weise mit Ergänzungen zu Hilfe kommen zu müssen. Dennoch lassen sich diese Interpretationen mit den sonst bekannten antiken musiktheoretischen Darlegungen nur schwer in Einklang bringen; darüber hinaus vermögen sie nicht, den Zusammenhang der Stelle mit dem Ganzen des

¹ d. h. der im ersten Satz genannten beiden Seinsweisen: des Selbig-Unteilbaren und des Teilbar-Anderen.

² De Anima A 3, 10: *μεμερισμένην* (scil. *τὴν ψυχὴν*) *κατὰ τοὺς ἀρμονικοὺς ἀριθμούς*.

Dialogs zu klären¹. Im Folgenden soll versucht werden, durch genaue Interpretation des Textes die Schwierigkeiten zu beheben und auf die ungelösten Fragen Antwort zu geben. Dabei werden zunächst die Ansichten der Kommentatoren referiert, um die Fehler ihrer Methode und die aus ihnen resultierenden Schwierigkeiten deutlich werden zu lassen; anschließend wird die u. E. richtige Lösung dargestellt. Um hierbei größtmögliche Klarheit zu erreichen, wird von Anfang an die Darstellung in zweifacher Weise gegeben, indem den Zahlen entsprechende Tonnamen zur Seite gestellt werden. Freilich ist die Art dieser Entsprechung ebenfalls problematisch und umstritten, so daß einige Vorbemerkungen über das Verhältnis zwischen den von Platon genannten Zahlen und den von ihnen bezeichneten Tönen gemacht werden müssen.

I

Selbstverständlich sind die von Platon gegebenen Zahlen nur auf relative Tonverhältnisse bezogen, nicht dagegen auf absolute Tonhöhen. Wenn diese im Folgenden dennoch angegeben werden, so nur, um die relativen Tonverhältnisse an einem Beispiel mit absoluter Tonhöhe zu verdeutlichen. Gewählt wurde diese Tonhöhe nach dem Prinzip, im Verlaufe der Erörterungen mit möglichst wenig Versetzungszeichen, d. h. mit möglichst wenig chromatisch veränderten Tonnamen, auszukommen, sowie nach dem Grundsatz, die aus der griechischen Musiktheorie bekannten Skalen in untransponierter Gestalt zu gewinnen. Aus diesen Gründen wird im Verlaufe der Darlegungen Platons Zahl 1 zum Zwecke beispielhafter Verdeutlichung mit dem dreigestrichenen e (e''') gleichgesetzt.

Das eigentliche Problem der Beziehung zwischen den von Platon angegebenen oder angedeuteten Zahlen und den durch sie bezeichneten Tonverhält-

¹ Kommentierungen der Stelle, auf die im Folgenden Bezug genommen wird: 1. A. BOECKH, *Kleine Schriften* 3, 109 ff.: Über die Bildung der Weltseele im Timaeus des Platon, bes. S. 158; 1866, veröffentlicht 1807 — 2. TH. H. MARTIN, *Etudes sur le Timée de Platon*, 2, Paris 1841 — 3. A. J. H. VINCENT, *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque du Roi et autres bibliothèques*, 16, 2, S. 176 ff.: sur le diagramme musical de Platon, 1847 — 4. G. STALLBAUM, *Scholia critica et historica super loco Timaei Platonici de animae mundanae elementis*, Leipzig 1857 — 5. A. v. THIMUS, *Die harmonikale Symbolik des Altertums*, 1, 156 ff. und 2, 210 ff., 1868 — 6. A. ROSSBACH und R. WESTPHAL, *Theorie der musischen Künste der Hellenen*³, 1886, Bd. 2, *Griechische Harmonik und Melopoeie* v. WESTPHAL, S. 68 ff. — 7. R. D. ARCHER-HIND, *The Timaeus of Plato*, London 1888 — 8. E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer*, Halle 1923, S. 264 ff.; 155; 163 Anm. — 9. A. E. TAYLOR, *A Commentary of Plato's Timaeus*, 1928, S. 136 ff. — 10. J. STENZEL, *Zahl und Gestalt bei Plato und Aristoteles*², 1933 — 11. F. CORNFORD, *Plato's Cosmology*, London 1937, 4. Aufl. 1956 — 12. O. TIBY, *Note musicologique al Timeo di Platone*, *Dioniso* 12, 1949, 1 ff. — 13. J. HANDSCHIN, *The Timaeus Scale*, *Musica Disciplina* 4, 1950, 3 ff. — 14. A. RIVAUD, *Platon Timée*, *Les Belles Lettres*, Paris 1956³, 42 ff. (als Textausgabe zugrunde gelegt).

nissen aber ist die Frage, was diese Zahlen eigentlich darstellen. Da es sich um Verhältnisse im mathematischen Bereich, um Intervalle im Bereich der Musik handelt, sind zwei Deutungen möglich. Die eine, nächstliegende, sieht in den angegebenen Zahlen das Längenmaß der zum Klingen gebrachten Saiten, Pfeifen, Metallstäbe o. ä. In diesem Falle entsprechen die längeren Saiten usw. den tieferen Tönen, die kürzeren den höheren, d. h. die kleinere Zahl bezeichnet den höheren Ton, die größere den tieferen; die Zahlen 1 : 2 entsprechen der abwärts gerichteten Oktave, also z. B. den Tönen a : A. Diese Annahme ist im allgemeinen als zutreffend für die platonischen Zahlenverhältnisse angesehen worden, fast sämtliche Kommentatoren der Antike wie der Moderne folgen ihr, die meisten sogar ohne Diskussion, als ob es sich um eine durchaus evidente Tatsache handele. Dies ist jedoch keineswegs der Fall.

Schon von den antiken Kommentatoren hat Plutarch¹, ebenso wie unter den neueren THIMUS, nicht Saitenlängen, sondern Schwingungszahlen in den von Platon gegebenen Zahlen gesehen. Das Verhältnis dieser Zahlen ist reziprok zu dem der Saitenlängen, d. h. hier entsprechen der kleineren Zahl tiefere, der höheren Zahl auch höhere Töne; das Verhältnis 1 : 2 bezeichnet hier die aufwärts gerichtete Oktave, also die Töne A : a = 440 : 880 Doppelschwingungen. Was hat Platon gemeint, als er seine Zahlenreihe aufstellte?

Man könnte meinen, diese Frage zu stellen sei müßig, denn da es sich nur um Verhältnisse handele, nicht um absolute Tonfolgen, so sei die Richtung der bezeichneten Intervalle nicht von Belang; Oktave bleibt Oktave, ob aufwärts oder abwärts gemessen. So glaubt HANDSCHIN² sagen zu dürfen: »It is rather in the style of Plato to let the question open: what did matter for him was the correspondence between tones and numbers, or tone relations and numerical relations; whether the reader would choose one or the other among those reverse proportionals, was to him a secondary question«.

Aus zwei Gründen ist diese Meinung abzulehnen. Einmal darum, weil die im Verlaufe der Operationen vorgenommene Konstruktion einer diatonischen Tonleiter ein völlig anderes Bild ergibt, je nachdem man die Intervallfolge dieser Skala abwärts oder aufwärts ansetzt. Es wird nämlich in der letzten Operation zur Aufstellung der Skala die Intervallfolge Ganzton—Ganzton—Halbton—Ganzton—Ganzton—Ganzton—Halbton gewonnen. Diese Intervallfolge entspricht in der Richtung nach oben der modernen Durtonleiter, in derselben Reihenfolge abwärts aber der Grundtonart der griechischen Musiktheorie, dem Dorischen. Beide Tonleitern, jeweils die Grundlage innerhalb ihres musikalischen Systems, entsprechen also einander als Spiegelformen derselben Intervallfolge, eine Übereinstimmung, die u. W. noch nicht genügend beachtet worden ist und für den 'natürlichen' Charakter beider Skalen in Betracht gezogen werden sollte.

¹ De animae procreatione, 16 ff.

² S. 15.

Ist also einmal für die Konstruktion der zu gewinnenden Tonleiter die Frage nach der Richtung der Intervalle bzw. nach der Art der durch die Zahlen bezeichneten Verhältnisse durchaus von Wichtigkeit, so ist sie es zum anderen auch darum, weil Platon, wie sich im Verlaufe der Darstellung zeigen wird, bei seinen musiktheoretischen Angaben an unserer Stelle durchaus konkrete Phänomene beschreibt und sich keineswegs in abstrakte Spekulationen verliert, wie man vielfach meinte¹. Es gilt also von vornherein zu versuchen, seine Angaben präzise zu verstehen.

Für die Theorie, in den Zahlen Frequenzen zu sehen, scheint Platon selbst zu sprechen. Er definiert nämlich im Timaios 67b den Ton als Bewegung, die, wenn sie schnell vor sich geht, einen hohen Ton bewirkt, langsam aber einen tiefen. Es könnte also scheinen, daß Platon, da er den Ton als Bewegung = Schwingung versteht, ihn auch zahlenmäßig nach Anzahl der in einem bestimmten Zeitraum erfolgenden Schwingungen messen und darstellen wollte, so wie es die moderne Akustik auch tut. Das würde bedeuten, daß höhere Zahlen auch höheren Tönen entsprechen und umgekehrt. Platons Zahlenreihe würde also einer aufsteigenden Tonfolge entsprechen. Zwei Tatsachen erwecken Bedenken, dieser Annahme zu folgen.

Die im Timaios aufgestellte Zahlenreihe erstreckt sich von 1 bis 27. Entsprechend dem eben Gesagten würde sie, als Frequenzzahlenreihe gedeutet, einen Tonumfang von 4 Oktaven plus einer großen Sext bezeichnen², einen Tonumfang in aufwärts gerichtetem Sinne wohlgemerkt. Nun ist aber bekannt, daß alle antike Musiktheorie wie auch antikes Musizieren und Musikempfinden überhaupt, entgegen der heute üblichen Richtung nach oben, in abwärts gerichtetem Sinne gedacht und empfunden wurde. Es wäre verwunderlich, wenn Platon hier von dieser Eigentümlichkeit antiken Musiklebens völlig abwicke.

Ferner muß darauf hingewiesen werden, daß die hier zur Debatte stehenden Spekulationen über die zahlenmäßigen Beziehungen zwischen verschiedenen Tönen ihren Ursprung haben in pythagoreischer Lehre. Hier aber findet sich als Ausgang und Mittelpunkt der Betrachtung das Monochord, anhand dessen die in Betracht gezogenen Zahlenverhältnisse praktisch aufgewiesen werden konnten. Am Monochord aber, als an einer Saite, entsprechen natürlich kurze

¹ So vor allem FRANK, z. B. S. 167: »Die Tonleiter des Timaios ist eine metaphysische Konstruktion, die mit wirklicher griechischer Musik nichts zu tun hat und mit bewußter Absicht ihre Töne und Konsonanzen außer acht läßt.« Merkwürdigerweise stimmt ihm HANDSCHIN, der sonst diese 'Phantomtheorie' mit heftigen Worten verdammt (vgl. die unerfreuliche Polemik S. 32), in der Betonung des abstrakten Charakters der platonischen Darlegungen weitgehend bei.

² Das Verhältnis 1 : 2 bezeichnet die Oktave, 1 : 16 bezeichnet demnach 4 Oktaven; 16 : 24 = 2 : 3 bezeichnet das Verhältnis der Quint, 24 : 27 = 8 : 9 das des Ganztons. Da Ganzton und Quint sich zur großen Sext addieren, bezeichnet das Verhältnis von 1 : 27 also den Umfang von 4 Oktaven plus einer großen Sext.

Abschnitte der Saite, also niedrige Zahlen, hohen Tönen, längere Saitenabschnitte mit größeren Zahlen aber tieferen Tönen. Auch aufgrund dieser Überlegungen liegt es nahe zu vermuten, daß die platonischen Zahlen Saitenlängen bezeichnen und so in ihrem Ablauf von 1 bis 27, also von den geringeren zu den größeren Zahlen, einem Abstieg der durch sie bezeichneten Töne entsprechen. Und doch müßte man, da Platon den Ton als Bewegung = Schwingung definiert hat, vermuten, seine Zahlen bezeichneten die Anzahl der Schwingungen verschiedener Töne; nach diesem Prinzip aber müßten die Zahlen 1 bis 27, als Frequenzzahlen verstanden, eine aufsteigende Tonreihe bezeichnen.

Der Widerspruch, der sich aus dem nach unten orientierten antiken Musikempfinden und der steigenden Frequenzenreihe Platons zu ergeben scheint, läßt sich durch eine heute unübliche, in der Antike aber gebräuchliche Umkehrung der Messungsmethode, d. h. von Maßeinheit und Gemessenem, befriedigend lösen. Die Entsprechung zwischen Schwingungszahl und Zeit kann auf zweifache Weise gemessen werden; entweder mit der heute üblichen Methode, die Zahl der in einem festgelegten Zeitraum erfolgenden Schwingungen zu messen, wobei mehr Schwingungen = höhere Zahlen auch höheren Tönen entsprechen, oder aber indem man die Zahl der für eine bestimmte Anzahl von Schwingungen benötigten Zeiteile angibt. In diesem Falle werden wiederum höhere Zahlen tiefere Töne bezeichnen, niedrigere Zahlen umgekehrt höhere Töne. Um das vorher gegebene Beispiel zu benutzen: der Ton a als der höhere vollendet in 1 Sekunde 880 Schwingungen; der Ton A mit 440 Schwingungen in 1 Sekunde benötigt, um 880 Schwingungen zu vollenden, 2 Sekunden, steht also, obwohl von den Schwingungszahlen ausgegangen wird, zu dem um eine Oktave höheren Ton a im Verhältnis 2 : 1, da nun nicht mehr die Schwingungszahlen in einer Zeiteinheit, sondern die Zeiteinheiten für die zu vollendenden Schwingungen gemessen werden. Aufgrund dieser Betrachtungsweise ergibt die platonische Zahlenreihe von 1 bis 27 auch dann, wenn man die Töne als Schwingungen auffaßt, eine abwärts gerichtete Reihe, sie bleibt in Übereinstimmung sowohl mit der allgemeinen antiken Musikanschauung wie auch mit den praktischen Experimenten der pythagoreischen Schule am Monochord. Denn es muß betont werden, daß die antiken Theorien über die Schwingungen von Tönen reine Spekulation waren, da sie ja auf keine Weise experimentell aufgewiesen werden konnten¹. So lag es nahe, die Meßmethode der durch Spekulation erschlossenen Schwingungen in Übereinstimmung zu bringen mit der allein zur Verfügung stehenden Meßmethode bei den Experimenten am Monochord oder an Pfeifen².

¹ Vgl. die umständlichen theoretisierenden Darlegungen zu Beginn der Sectio Canonis des Euklid, mit denen die Bewegung als Ursache der Töne und ihrer Unterschiede bewiesen werden soll.

² Vgl. auch БОЕЦКН, S. 140 über die Verwendung der hier beschriebenen Meßmethode in der Antike.

Diese Auffassung wird unterstützt durch eine andere Stelle im Timaios (80a b)¹. Hier ist die Rede davon, daß die höheren Töne infolge ihrer schnelleren Bewegung den Hörer früher erreichen, die tieferen infolge ihrer langsameren Bewegung aber erst später anlangen. Es wird also irrigerweise nicht eine absolute Schallgeschwindigkeit angenommen, sondern die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines Tones mit seiner Schwingungszahl gleichgesetzt. Von hier aus versteht sich auch die Annahme, daß ein Ton eine bestimmte Strecke in 1 Sekunde bewältigt, der um eine Oktave tiefere Ton aber infolge seiner »Langsamkeit« für dieselbe Strecke 2 Sekunden benötigt. Die abwärts gerichtete Oktave entspricht also auch in dieser Sicht dem Verhältnis 1 : 2. Platons Zahlen bezeichnen also, obwohl sie von der Voraussetzung der Töne als Schwingungen ausgehen, mit Sicherheit eine abwärts gerichtete Tonfolge. Denn sie bezeichnen entweder den zur Vollendung einer bestimmten Anzahl von Schwingungen benötigten Zeitraum oder aber irrigerweise den von den Tönen zur Bewältigung einer bestimmten Strecke benötigten Zeitraum. Die letzte Meßmethode wird durch die Erörterungen Tim. 80 ab wahrscheinlich gemacht. In jedem Fall ist die Auffassung des Tones als Schwingung berücksichtigt und dennoch die platonische Zahlenreihe in Übereinstimmung mit der antiken Musikauffassung gebracht.

II

Sind so die Anstöße für das Verständnis der durch die Zahlen bezeichneten musikalischen Verhältnisse behoben, so bleiben doch noch mannigfache Schwierigkeiten, die in den Zahlen selbst liegen. Platon gibt diese nämlich nicht expressis verbis an, sondern er nennt nur die drei mathematischen Operationen, anhand deren der Leser selbst die Zahlen finden und ihre Bedeutung verstehen soll. So ist denn die Aufstellung der dritten Zahlenreihe, in der das Endergebnis des ganzen Passus formuliert ist, von den Kommentatoren immer wieder unterschiedlich vorgenommen worden, so daß der Sinn der ganzen Darlegung stets anders verstanden worden ist. Übereinstimmung herrschte lediglich über das Verständnis der ersten beiden Zahlenreihen.

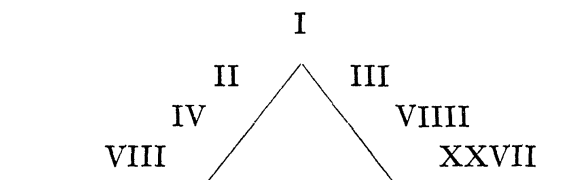
Platon beschreibt die erste der drei Operationen folgendermaßen: »Der Demiurg begann aber auf folgende Weise einzuteilen: zuerst nahm er einen einzigen Teil von dem Ganzen hinweg, nach diesem das Doppelte, als Dritten das Anderthalbfache des Zweiten beziehungsweise das Dreifache des Ersten; als Vierten das Doppelte des Zweiten, als Fünften das Dreifache des Dritten; als Sechsten das Achtfache des Ersten, als Siebenten das Siebenundzwanzigfache des Ersten²«. Wir erhalten also die Reihe³

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & - & 2 & - & 3 & - & 4 & - & 9 & - & 8 & - & 27 \\ e''' & - & e'' & - & a' & - & e' & - & d & - & e & - & \underline{G}. \end{array}$$

¹ Eine eingehende Erklärung dieser Stelle wird demnächst in dieser Zeitschrift vorgelegt werden.

² Vgl. über die Bedeutung der unterschiedlichen Definitionsweise der einzelnen Zahlen unten S. 411 f. ³ Vgl. Notenblatt Nr. 1

Diese Reihe stellt, von 1 ausgehend, die geometrische Reihe der Potenzen von 2 und 3 bis zur Kubikzahl dar. Aus diesem Strukturprinzip der Reihe erklärt sich auch die auffällige Vertauschung der Reihenfolge von 8 und 9. Die Zahl 9, als Quadrat von 3, rangiert als solches neben der Quadratzahl von 2, also 4, während 8 als Kubikzahl von 2 neben die Kubikzahl von 3, also 27, an die vorletzte Stelle treten muß. Aufgrund dieses Strukturprinzips hat man diese Zahlenreihe in der Antike auch nicht als einfache Reihe, sondern in Form eines Lambda mit Gleichstellung der jeweiligen Potenzen auf einer Ebene gliedert, vgl. Macrobius comm. in Somnium Scipionis 1, 6, 45f.: *Nam primo omnium hoc numero (scil. VII) anima mundana generata est, sicut Timaeus Platonis edocuit. monade enim in vertice locata terni numeri ab eadem ex utraque parte fluxerunt, ab hac pares, ab illa impares, id est post monadem a parte altera duo, inde quattuor, deinde octo, ab altera vero parte tria, deinde novem et viginti septem. et ex his numeris facta contextio generationem animae imperio creatoris effecit*¹. Der Codex Parisinus 6371 gibt dazu fol. 16 verso die Zeichnung:



Es bleibt noch zu bemerken, daß es sich bei diesen 7 Zahlen um die sog. große Tetraktys handelt, bei welcher die Summe der ersten 6 Glieder dem 7. Gliede gleich ist: $1 + 2 + 3 + 4 + 8 + 9 = 27$. Von den vielerlei symbolischen Deutungen, die sich in mystischer Betrachtungsweise an sie knüpfen, können wir hier füglich absehen. Musiktheoretisch gesehen, bietet die Reihe bereits 4 Grundintervalle, nämlich die Oktave $1 : 2 : 4 : 8 = e''' - e'' - e' - e$, ferner die Quint $2 : 3 = e'' - a'$ und die Quart $3 : 4 = a' - e'$, schließlich auch den Ganzton $8 : 9 = e - d$. Doch versucht Platon nicht etwa, durch Transponierung dieser Intervalle eine Tonleiter zu gewinnen, was gut möglich wäre, sondern er schreitet auf mathematischem Wege weiter voran und fügt eine zweite arithmetische Operation an.

III

Der Demiurg, so fährt Platon fort, »füllte darauf die zweifachen und die dreifachen Zwischenräume aus, indem er weitere Teile vom Ganzen abschnitt und sie in die Mitte zwischen diese setzte, sodaß sich in jedem Zwischenraum je zwei Mittelglieder befanden, von denen das eine die Außenglieder um

¹ Das Gleiche wird 2, 2 mit größerer Ausführlichkeit und geringerer Deutlichkeit vorgetragen. Die Lehre von der Anordnung der platonischen Zahlen in der Form eines Lambda wird von Plutarch, *De animae procreatione* 29, dem Krantor zugeschrieben. Die Codices bieten hier ebenfalls die oben abgebildete Figur.

denselben Teil übertraf bzw. von ihnen übertroffen wurde, das andere aber um dieselbe Zahl.« Platon läßt also in jede der beiden Reihenhälften in jedes Intervall zwei Mittelglieder einfügen, von denen das eine das sog. harmonische Mittel darstellt, das andere das sog. arithmetische Mittel¹. Es ergeben sich somit die beiden folgenden, insgesamt 19 Zahlen umfassenden Reihen²

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & e''' & & \\
 & & & & \text{I} & & \\
 & & h'' & 4/3 & & 3/2 & a'' \\
 & a'' & 3/2 & & 2 & e'' & \\
 & e'' & 2 & \text{-----} & 3 & a' & \\
 & h' & 8/3 & & & 9/2 & d' \\
 & a' & 3 & & & 6 & a \\
 & e' & 4 & \text{-----} & & 9 & d \\
 & h & 16/3 & & & 27/2 & G \\
 & a & 6 & & & 18 & D \\
 & e & 8 & \text{-----} & & 27 & \underline{G}
 \end{array}$$

Nun sind mehrere Zahlen in beiden Reihen identisch; sie sind zwar in sie in verschiedener Funktion aufgenommen worden, sind jedoch als Zahl gleich³. Da außerdem Platon nur von einer einzigen Reihe zu sprechen scheint, wie es die von 1 bis 27 geordnete Aufzählung ihrer sieben Glieder vermuten läßt, da er auch am Ende des Passus nur singularisch von einer einzigen *σύστασις* spricht, und schließlich um der Übersichtlichkeit willen, zog man nun beide Reihen⁴ wieder in eine einzige Reihe zusammen⁵, setzte die doppelt vorhandenen Glieder nur einfach ein und erhielt so die aus 15 Zahlen bestehende Reihe⁶

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & - & 4/3 & - & 3/2 & - & 2 & - & 8/3 & - & 3 & - & 4 & - & 9/2 & - & 16/3 & - & 6 & - & 8 & - & 9 & - & 27/2 & - & 18 & - & 27 \\
 e''' & - & h'' & - & a'' & - & e'' & - & h' & - & a' & - & e' & - & d' & - & h & - & a & - & e & - & d & - & G & - & D & - & \underline{G}
 \end{array}$$

¹ Das arithmetische Mittel ist das Mittel, welches in der Mitte von zwei gegebenen Zahlen zu beiden Außengliedern den zahlenmäßig gleichen Abstand hält, also zwischen 2 und 4 die Zahl 3, errechnet nach der Formel $\frac{a+b}{2}$, also $\frac{2+4}{2}=3$. Beim harmonischen Mittel übertrifft das Mittel die kleinere Zahl um denselben Teil dieser kleineren Zahl, um den es im Verhältnis zur größeren Zahl von dieser übertroffen wird; 3 — 4 — 6 bilden eine solche Zahlenfolge, indem die 4 die 3 um $1/3$ von $3=1$ übertrifft, umgekehrt aber um $1/3$ von $6=2$ von der 6 übertroffen wird. Die Formel ist $\frac{2ab}{a+b}$, in unserem Falle also

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 6}{3+6} = \frac{36}{9} = 4.$$

² Vgl. Notenblatt Nr. 2.

³ 2 und 3 sind jeweils Grundzahl in einer Reihe, arithmetisches Mittel in der anderen, 6 ist arithmetisches Mittel in beiden Reihen, $3/2$ arithmetisches Mittel in der Zweierreihe, harmonisches Mittel in der Dreierreihe.

⁴ 'for convenience's sake', wie TAYLOR S. 138 verräterisch formuliert.

⁵ Nach Plutarch, De animae procreatione 20 und 29, tat das in der Antike als erster Theodoros. ⁶ Vgl. Notenblatt Nr. 3.

Es läßt sich leicht erkennen, daß im Gegensatz zur Intervallfolge der Ausgangsreihe nur ein einziger neuer Ton und mit ihm ein einziges neues Intervall hinzugekommen sind; das harmonische Mittel der Zweierreihe, $4/3$ resp. $8/3$ resp. $16/3$, liefert die Töne h'' , h' und h , von denen der Ton h mit dem Ton d' das Intervall der kleinen Terz bildet, mathematisch formuliert das Verhältnis $16/3 : 9/2 = 16 \cdot 2 / 3 \cdot 9 = 32/27 = 2^5 : 3^3$. Durch das Hinzutreten dieses Tones aber ergibt sich bei transponierter Aneinanderreihung der bisher gewonnenen Töne die anhemitonische pentatonische Tonleiter mit den Tönen $G - A - H - d - e^1$. Doch nicht diese ist Platons resp. des Demiurgen Ziel. In einer dritten Operation geht er an die Konstruktion einer diatonischen Skala. Die für sie benötigten Zahlen werden in einem Verfahren gewonnen, das nun nicht mehr durch mathematische, sondern durch musiktheoretische Erwägungen diktiert ist. Um sie zu erhalten, verfährt der Demiurg nach Platons Worten folgendermaßen:

»Da aber durch diese Verbindungsglieder Zwischenräume von $3/2$, $4/3$ und $9/8$ in den vorherigen Zwischenräumen entstanden waren, füllte er alle Zwischenräume von $4/3$ mit dem Zwischenraum von $9/8$ aus, so daß jeweils ein Teil übrigblieb, der durch das Zahlenverhältnis von $256/243$ bestimmt wurde. Und so hatte er denn die Mischung, von welcher er diese Teile abschnitt, ganz aufgebraucht.« Musiktheoretisch formuliert, bedeutet das, daß bei der zweiten Operation in den vorher, d. h. in der Grundreihe gegebenen Intervallen neue Intervalle entstanden sind, und zwar Quinten, Quarten und Ganztöne. Von diesen sollen nun sämtliche Quarten mit Ganztonintervallen ausgefüllt werden, und zwar jeweils so, daß dabei am Ende das Halbtonintervall übrigbleiben soll. Hierbei setzen nun die Schwierigkeiten ein, deren Lösung vorgeschlagen werden soll.

IV

Es sind ihrer insgesamt sechs.

1. Bereits der Anfang des eben zitierten platonischen Satzes scheint einen Irrtum Platons zu enthalten. Es wird konstatiert, daß infolge der zweiten Operation in der Grundreihe Verhältnisse von $3/2$, $4/3$ und $9/8$ neu entstanden sind, also Quinten, Quarten und Ganztöne. Platon scheint zu übersehen oder zu verschweigen, daß auch einmal das Verhältnis $32/27$, also eine kleine Terz, entstanden ist.

2. Ein weiteres Versehen oder Verschweigen Platons scheint darin zu bestehen, daß er als dritte der Operationen die Zwischenräume im $4/3$ -Verhältnis, also die Quarten, ausfüllen läßt, dabei aber nicht in Anschlag bringt, daß seine bisherige Reihe ja noch nicht überall in dieses Verhältnis unterteilt ist. Zwischen den Zahlen 9 und $27/2$ sowie zwischen 18 und 27 besteht nicht das Quartenverhältnis $4/3$, sondern das Quintverhältnis $3/2$. Um dieser Schwierigkeit zu

¹ Vgl. Notenblatt Nr. 4.

entgehen, meinte man, Platon dahingehend korrigieren zu sollen, daß man entweder stillschweigend und entgegen dem Wortlaut des Textes auch die Quintverhältnisse $3/2$ in der angegebenen Weise ausfüllte (z. B. Proklos¹, RIVAUD) oder aber sich mühte, in einer Zwischenoperation, die man aus eigenem Ermessen einschaltete, die fehlenden Quartverhältnisse von $4/3$ herzustellen, indem man den Raum zwischen 8 und 27 auf entsprechende Weise unterteilte. Dabei ergeben sich wiederum mehrere Möglichkeiten, die nebeneinander treten und von denen man nicht mit Sicherheit die von Platon gewollte herausheben kann, so daß das Endergebnis der ganzen Darlegung im Dunkeln bleibt (HANDSCHIN).

3. Doch auch innerhalb der schon in $4/3$ -Verhältnisse (Quarten) unterteilten Reihe von 1—8 ergibt sich eine Schwierigkeit. Hier sind nämlich 2 übereinandergelagerte $4/3$ -Verhältnisse (Quarten) zu konstatieren, 4: 16/3 und $9/2 : 6$, d. h. $e' - h$ und $d' - a$. Will man diese Quarten entsprechend der platonischen Vorschrift mit Ganztönen ausfüllen, so erhalten wir die Tetrachorde $e' - d' - c' - h$ und $d' - c' - b - a$, in denen die Töne h und b chromatisch miteinander dissonieren. Das entspricht den Zahlenfolgen $4 - 9/2 - 81/16 - 16/3$ und andererseits $9/2 - 81/16 - 729/128 - 6^2$. Es differiert also der Grenzwert des einen Verhältnisses, nämlich $16/3$, mit dem zweiten eingesetzten Wert des anderen Verhältnisses, nämlich mit $729/128$, während die anderen Werte aus beiden Verhältnissen übereinstimmen. Die Differenz der beiden einander störenden Werte beträgt $2187/2048 = 3^7 : 2^{11}$. Dieses Zahlenverhältnis ist sicherlich nicht von Platon beabsichtigt, da er als geringsten Wert innerhalb seines Systems das Verhältnis $256/243 = 2^8 : 3^5$ genannt hat. Dennoch ergibt sich dieser Wert, folgt man den zitierten Anordnungen zur Ausfüllung der bestehenden $4/3$ -Quart-Verhältnisse. Es bleibt also die Frage offen, ob man diesen Wert annehmen und einen Lapsus des Autors zugeben soll, oder ob man die Zahl $729/128$ stillschweigend nach dem Wert ihrer Nachbarzahl $16/3$ korrigieren soll, ob man also b in h umändern müsse.

Desgleichen ergibt sich bei der Ausfüllung des Quartverhältnisses $G : D = 27/2 : 18$ die Zahlenfolge $27/2 - 243/16 - 2187/128 - 18$, die der Tonfolge $G - F - Es - D$ entspricht³. Wiederum differiert der zweite eingesetzte Wert, also $2187/128$, mit dem von Platon zwar nicht genannten, aber dem Prinzip der Ausgangsreihe $1 - 2 - 4 - 8$ entsprechenden Wert von 16, d. h. wie eben h und b , so dissonieren hier E und Es . Die Differenz dieses Halbtons beträgt wiederum $2187/2048$ oder $3^7 : 2^{11}$; wieder bleibt die Frage offen, ob man diese Diskrepanz akzeptieren soll oder ob man sie korrigieren muß.

¹ Comm. ad. Tim. Im allgemeinen folgte man der bei Plutarch, De animae procreatione 19, überlieferten antiken Lösung, die Quinte als die Addition von Quarte + Ganzton anzusehen und dementsprechend — freilich willkürlich und ohne Anhalt im Texte Platons — zu unterteilen.

² Vgl. Notenblatt Nr. 5.

³ Vgl. Notenblatt Nr. 6.

4. Stillschweigend ist hierbei auch schon die Umstellung der Ziffer 9 vor der Ziffer 8 zugunsten der arithmetischen Reihenfolge korrigiert worden, obwohl diese Umstellung von Platon ausdrücklich genannt und aus erkennbaren Gründen vorgenommen worden ist, indem er eigens die 9 als die fünfte, die 8 erst als die sechste Zahl der Grundreihe nannte. Über die Gründe für diese Umstellung ist schon gesprochen worden¹.

5. Weiterhin ist es offenbar Platons Absicht, durch den Demiurgen eine diatonisch strukturierte Skala konstruieren zu lassen; das beweist die Art der dritten der drei mathematischen Operationen, das Einfügen von Ganztönen mit dem Verhältnis 9/8, mit hinreichender Deutlichkeit. Nun ist das Verhältnis von 1 zu 27 musikalisch gleich dem Umfang von 4 Oktaven und einer großen Sext. Ein solcher Umfang ist aber in griechischer Musiktheorie und -praxis völlig unbekannt, kein Instrument der Antike vermöchte diese Skala vorzuführen, ebensowenig wie es normalerweise die menschliche Stimme vermag; kein Musiktheoretiker vermöchte aber auch die einzelnen Töne einer solchen für antike Begriffe monströsen Skala mit den griechischen Tonnamen zu benennen, die nur für den Umfang von 2 Oktaven zur Verfügung stehen². Weder Theorie noch Praxis vermögen also mit dieser zweifelhaften Skala etwas anzufangen, und es ist sicherlich zu sehr mystisch-spekulative Aussage, wenn man zur Erklärung anführt, Platon habe bis zur dritten Potenz, bis zu den Kuben, vorgehen müssen, weil auch die Seele bis zu den Körpern vordringen müsse³, und ebenso erscheint die Auskunft recht primitiv, die Skala der Weltseele müsse eben irdische Maße weitaus überragen⁴.

6. Offen bleiben schließlich die wichtigen, freilich u. W. bisher nicht eigentlich gestellten Fragen, warum Platon diese Art musikalischer Proportionen einmal in so umständlicher, verklausulierter und durch ihre Verschlüsselung zu Unklarheiten Anlaß gebender Weise darstellt, zum anderen, warum er sie gerade in diesem Dialog und an dieser Stelle seines Werkes vorführt. Zur Konstruktion einer diatonischen Skala genügten geringere Zahlen und einfachere mathematische Operationen. Und die Verknüpfung der von ihm dargestellten Methode zur Bildung einer Skala mit dem Ganzen des Dialogs, der ja metaphysische Erkenntnisse vermitteln will und nicht musiktheoretische, bleibt im Dunkeln. Allein zum Beweise, daß auch in der Musik und ihren Intervallen

¹ Vgl. oben S. 399.

² Die grundsätzliche Beschränkung auf einen Umfang von nur 2 Oktaven blieb bekanntlich in der Musiktheorie bis ins Mittelalter erhalten, und noch die Notenschrift in lateinischen Buchstaben im 10. Jhdt. bezieht sich auf die antike, 2 Oktaven umfassende diatonische Skala. ³ Adrast bei Theon Mus. S. 98; Proclus, Comm. ad Tim. 3, 192 b.

⁴ Macrobius in Somn. Scip. 2, 1, 24 im Anschluß an die Erwähnung der Doppeloktav als des größten Intervalls der griechischen Musiktheorie: *Sed hic numerus symphoniarum ad musicam pertinet, quam vel flatus humanus intendere vel capere potest humanus auditus, ultro autem se tendit harmoniae caelestis accessio, id est usque ad quater diapason kai diapente* (was dazu noch verkehrt ist, da es sich um 4 Oktaven plus große Sext handelt).

mathematische Verhältnisse zu konstatieren sind, wäre die Vorführung dieser umständlichen Operationen nicht vonnöten gewesen, einige einfacher gehaltene Hinweise auf konsonierende Intervalle und ihre Zahlenverhältnisse bzw. die Konstruktion einer Skala im Raume von ein oder zwei Oktaven, also innerhalb der Zahlen von 1 bis 2 oder 4 und somit auch innerhalb der Grenzen der griechischen Musiktheorie, hätte genügt. Freilich bliebe auch dann die Einfügung einer musiktheoretischen Erörterung an einem so wichtigen Punkte des Dialogs, als erste Handlung des Demiurgen zur Einteilung der aus metaphysischen Urgründen geschaffenen Weltseele, unverständlich.

Die aufgeführten sechs Probleme ergeben sich, folgen wir in der Interpretation des platonischen Textes den Kommentaren. Ihre mannigfachen, aber immer erfolglos gebliebenen Versuche zur Behebung der Schwierigkeiten sollen hier nicht im einzelnen referiert werden¹; es genügt zu sagen, daß man stets meinte, dem Texte Platons mit Hilfskonstruktionen — Ausfüllung auch der Quintverhältnisse oder eigenmächtige Einteilung in Quarten u. a. m. — zu Hilfe kommen zu müssen, daß jedoch stets das Ergebnis unbefriedigend und anstößig blieb; insbesondere sind die unter 2, 3, 5 und 6 angeführten Probleme bisher stets ohne Lösung geblieben.

Und doch läßt sich die Lösung der Schwierigkeiten und Unklarheiten, folgt man dem Texte Platons ohne von außen herangetragene Postulate, mit geringer Mühe erreichen und eine befriedigende Klärung der aufgezählten Probleme gewinnen. Es gilt, den Anweisungen des Autors mit voraussetzungsloser Genauigkeit zu folgen und die so gewonnenen Ergebnisse ohne Voreingenommenheit zu interpretieren. Denn der Text vermag, wird er in dieser Weise befragt, durchaus befriedigend Antwort zu geben. Der Satz Ciceros gilt zu Recht: *Timaecus Platonis ut non intellegatur, rerum obscuritas, non verborum facit*².

V

Die ersten beiden der drei mathematischen Operationen, also die Aufstellung der Grundreihe und die Einfügung der Mittelglieder, sind als solche eindeutig; sie sind auch bisher richtig dargestellt worden und brauchen hier nicht wiederholt zu werden. Am Ende der 2. Operation ergibt sich das auf S. 400 dargestellte Lambda, das aus den 7 Zahlen der Grundreihe und den 12 eingefügten Mittelgliedern besteht. Es gilt nun, die Trennung dieser beiden Reihen des Lambda beizubehalten. Platon fordert diese Trennung durch drei Hinweise: einmal durch die Nennung der 9 als zweiter Zahl der Potenzreihe von

¹ Eine Übersicht über die Lösungsversuche aus Antike und Neuzeit gibt HANDSCHIN, S. 24 ff. Allerdings behandelt er nur die ihm am wichtigsten erscheinenden 8 Interpretationen.

² De fin. 2, 15. Ebenso hat der Satz Vitruvs seine Berechtigung, mit dem dieser seine Behandlung der vorliegenden Probleme einleitet: *Harmonia autem est litteratura obscura et difficilis, maxime quibus Graecae litterae non sunt notae* (5,4).

3 vor der 8 als dritter Zahl der Potenzreihe von 2; zum anderen durch die Auslassung der Zahl 16, die innerhalb der arithmetischen Ordnung als vierte Potenz von 2 vor 27 genannt werden müßte, deren Nennung jedoch unterbleibt zugunsten des Prinzips, innerhalb der Zweier- wie der Dreierreihe nur bis zur Kubikzahl vorzugehen¹, also beide Reihen als getrennt voneinander bestehende, jeweils für sich selbst gültige Bezugssysteme zu verstehen; und schließlich dadurch, daß er bei der zweiten Operation ausdrücklich nur die Ausfüllung der Zweier- und der Dreierintervalle fordert, nicht aber auch die Intervalle 2 : 3, 3 : 4, 8 : 9 oder gar 8 : 27 durch entsprechende Mittelglieder ausfüllen läßt, was bei einer zusammenschauenden Sicht des ganzen Systems wohl zu erwarten wäre, jedoch dann unterbleiben muß, wenn die beiden Reihen der Zweier- und der Dreierpotenzen von einander getrennte Systeme darstellen, so daß Zahlen der einen Reihe nicht mit denen der anderen Reihe in Beziehung gesetzt werden können. Wir behalten also, gestützt auf die nicht anders zu deutenden Hinweise des platonischen Textes, die anfänglich vorgenommene Unterscheidung in eine Reihe von Zweierpotenzen und eine ihr an die Seite gestellte Reihe von Dreierpotenzen bei, denen lediglich der Ausgangspunkt, die Zahl 1, gemeinsam ist².

Dadurch entfällt sogleich die erste der Schwierigkeiten. Das nach der zweiten Operation mögliche Terzverhältnis zwischen der 8. Zahl der Zweierreihe und der 5. Zahl der Dreierreihe, also zwischen $16/3$ und $9/2$, wird von Platon nicht erwähnt, eben weil er beide Reihen nicht zueinander in Beziehung setzt, sondern sie bis zum Ende der Darlegungen als zwei zwar zueinander gehörige, jedoch grundsätzlich unterschiedene Prinzipien versteht. Ebenso bleibt das vierte der Probleme gegenstandslos: 8 und 9 stehen jeweils durchaus zu Recht an ihrem Platz innerhalb der Reihen, denen sie angehören, eine Korrektur der platonischen Verkehrung ihrer arithmetischen Reihenfolge ist durchaus nicht vonnöten, beide stehen, auf verschiedener Ebene, die eine als Quadratzahl der Dreierreihe, die andere als Kubus der Zweierreihe, am richtigen Orte.

Stellen sich so gleich zu Anfang zwei der aufgeführten Schwierigkeiten als gegenstandslos heraus, so zeigt sich auch im Fortgang die Richtigkeit des eingeschlagenen Weges. Als letzte Operation fordert Platon die Ausfüllung aller Quartverhältnisse ($4/3$) mit dem Ganztonverhältnis ($9/8$), so daß dabei ein Rest im Halbtonverhältnis ($256/243$) übrigbleiben soll. Wiederum gilt es, die Anweisungen des Textes genau zu erfüllen und von allen vermeintlich nötigen Hilfskonstruktionen Abstand zu nehmen.

¹ Über die Gründe des Vorgehens bis zur Kubikzahl vgl. S. 409.

² Vgl. jedoch S. 411f. über die gegenseitige Beziehung beider Reihen zueinander sowie die Ausführungen über die platonischen Bezeichnungen der Grundzahlen S. 410f. Über die Berechtigung zur Trennung infolge verschiedener Funktion gleicher Zahlen in beiden Reihen S. 412.

Die beiden in der zweiten Operation gewonnenen Reihen enthalten neun $4/3 =$ Quart-Verhältnisse. Die Zweierreihe weist sechs auf, da die jeweils eingefügten Mittelglieder zu den ihnen benachbarten Außengliedern in diesem Verhältnis stehen, während die Mittelglieder selbst untereinander das Ganztonverhältnis ($9/8$) bilden. Umgekehrt bilden die Mittelglieder der Dreierreihe jeweils miteinander das Quartverhältnis ($4/3$), während sie mit den ihnen benachbarten Außengliedern der Grundzahlenreihe das Quintverhältnis ($3/2$) bilden. Die Dreierreihe enthält also sechs Quintverhältnisse und drei Quartverhältnisse, von denen das erste mit dem zweiten Quartverhältnis der Zweierreihe identisch ist, ($3/2 : 2 = a'' - e''$), das zweite sich mit dem fünften Quartverhältnis der Zweierreihe zahlenmäßig überschneidet ($4 : 16/3$ und $9/2 : 6 = e' - h$ und $d' - a$), das dritte schließlich ganz für sich allein dasteht ($27/2 : 18 = G - D$).

ZWEIERREIHE

Verhältnis: $4/3$ $9/8$ $4/3$ $4/3$ $9/8$ $4/3$ $4/3$ $9/8$ $4/3$

$1 - 4/3 - 3/2 - 2 - 8/3 - 3 - 4 - 16/3 - 6 - 8$
 $e''' - h'' - a'' - e'' - h' - a' - e' - h - a - e$

Intervall: Quarte - Ganzton - Quarte - Quarte - Ganzton - Quarte - Quarte - Ganzton - Quarte

DREIERREIHE

Verhältnis: $3/2$ $4/3$ $3/2$ $3/2$ $4/3$ $3/2$ $3/2$ $4/3$ $3/2$

$1 - 3/2 - 2 - 3 - 9/2 - 6 - 9 - 27/2 - 18 - 27$
 $e''' - a'' - e'' - a' - d' - a - d - G - D - G$

Intervall: Quinte - Quarte - Quinte - Quinte - Quarte - Quinte - Quinte - Quarte - Quinte

Was ergibt sich nun, wenn wir, statt wie bisher die ganze in Eins zusammengezogene Reihe in Quartan zu unterteilen oder aber auch die Quinten auszufüllen, lediglich die Quartan ausfüllen, von diesen aber nach Platons ausdrücklicher Vorschrift alle? Die beiden Reihen gewinnen dann folgende Gestalt¹:

ZWEIERREIHE

$1 - 9/8 - 81/64 - 4/3 - 3/2 - 27/16 - 243/128 - 2 - 9/4 - 81/32 -$
 $e''' - d''' - c''' - h'' - a'' - g'' - f'' - e'' - d'' - c'' -$

$8/3 - 3 - 27/8 - 243/64 - 4 - 9/2 - 81/16 - 16/3 - 6 - 27/4 - 243/32 - 8$
 $h' - a' - g' - f' - e' - d' - c' - h - a - g - f - e$

DREIERREIHE

$1 - 3/2 - 27/16 - 243/128 - 2 - 3 - 9/2 - 81/16 - 729/128 - 6 - 9 -$
 $e''' - a'' - g'' - f'' - e'' - a' - d' - c' - b - a - d -$

$27/2 - 243/16 - 2187/128 - 18 - 27$

$G - F - Es - D - G$

¹ Vgl. Notenblatt Nr. 7.

Es läßt sich leicht erkennen, daß beide Reihen, mathematisch wie musikalisch verstanden, zwei einander entgegengesetzte Prinzipien darstellen. Gehen wir von den Zahlen und ihren Verhältnissen aus, so bedingt die Struktur der Zweierreihe in ihrem Fortschreiten, sowohl innerhalb der von Platon gegebenen Grenzen als auch in entsprechender Fortführung, ein stets gerades, unveränderliches Verhältnis ihrer Glieder; das zeigt sich besonders darin, daß im weiteren Voranschreiten an die Stelle der Brüche ganze Zahlen treten¹. So repräsentiert die Zweierreihe einen sich stets gleichbleibenden Ablauf, vom Ausgang bis zu jedem beliebigen Punkt des Weiterschreitens; es ist das Wesen der geraden Zahl, das hier zum Ausdruck kommt, das Prinzip des Unveränderlichen, Gleichbleibenden, Einen, das in mathematischer Formulierung dargestellt wird.

Demgegenüber steht die Dreierreihe zur Verdeutlichung des Wesens der ungeraden Zahl. Die Ausfüllung der sich in ihr findenden $4/3$ -Verhältnisse führt schon innerhalb der von Platon gegebenen Grenzen und ebenso auch in entsprechendem Vorangehen über sie hinaus zu immer komplizierteren Brüchen, die Zahlen verlieren sich in Werte, die der ganzen Zahl immer ferner stehen, stets zeigt sich ein andersartiges Verhältnis, so daß diese Reihe in schroffem Gegensatz zu der ihr gegenübergestellten Zweierreihe steht und in mathematischer Formulierung das Prinzip des stets Veränderlichen, Wandelbaren, Anderen darstellt.

Ebendasselbe Bild des nämlichen Gegensatzes findet sich im musikalischen Bereich. Hier ist in der Zweierreihe das Prinzip der diatonischen heptaphonischen Tonalität dargestellt, das, in feste, unwandelbare Ordnung gefaßt, unveränderlich und stets mit sich selbst gleichbleibend den ganzen musikalischen Raum zu strukturieren vermag. Daß dieses Prinzip der Tonalität an der dorischen Skala exemplifiziert wird, nimmt nicht wunder; denn einmal ist diese die Grundtonart der griechischen Musiktheorie, von der alle Betrachtungen ihren Ausgang nehmen, zum anderen aber ist sie in der Sicht Platons diejenige Tonart, die ihrem Charakter nach den besten ethischen Einfluß auf die Menschen auszuüben vermag, »die einzige wahrhaft hellenische Tonart«².

Dem Prinzip der Tonalität aber ist ergänzend hinzugesellt das in der Dreierreihe faßbare Prinzip der aus den tonalen Grenzen herausführenden, hier subdominantisch formulierten Modulation. Innerhalb der von Platon gegebenen Begrenzung ergeben sich hier die der dorischen Skala fremden Töne b und es, so daß auf diese Weise das Prinzip, das die Dreierreihe strukturiert, erkennbar wird; denn bei weiterem Voranschreiten würden sich in ihr

¹ Allerdings mit der einen Ausnahme des innerhalb jeder Oktave 4. Tones, also der Quint, vom jeweils tiefsten Ton der Oktave aus gesehen. Dieser, $4/3$, $8/3$, $16/3$ usw. bleibt weiterhin Bruchzahl, hat somit stark Anteil am Prinzip der Dreierreihe. Über die gegenseitige Beeinflussung beider Reihen s. S. 411 f.

² Laches 188d. Vgl. auch Rep. 399a. Über die grundlegende Bedeutung des Dorischen für die griechische Musiktheorie vgl. besonders J. O. GOMBOSI, Tonarten und Stimmungen der antiken Musik, Kopenhagen 1939.

zunächst alle 12 Töne der chromatischen Skala ergeben, insofern sich bei gleichem Verfahren in der nächsten Potenzstufe As, danach Des, Ges, Ces usw. ergeben würden. Darüber hinaus aber ergibt der bei der Ausfüllung des 8. Tetrachords auftretende Wert für Fes, das in der gleichschwebenden Temperatur enharmonisch mit E verwechselt werden könnte, zu dem entsprechenden Wert für E, der sich aus der Zweierreihe ergibt und also eine ganze Zahl ist, eine Differenz, nämlich $531\,441/128 : 4096 = 3^{12}/2^7 : 2^{12} (= 3^{12}/2^7 : 2^{12})$. Das bedeutet, daß die Dreierreihe infolge des sie strukturierenden Prinzips sich in stets weiter von der Ausgangstonalität entfernte Bereiche verliert, immer neue, andersartige Töne bezeichnet, über den Bereich der Halbtonchromatik hinaus zu immer feiner differenzierten Tonverhältnissen gelangt.

Beide Prinzipien stehen antithetisch nebeneinander, schließen einander jedoch nicht aus, sondern ergänzen sich zu dem Gesamtbereich des *musikalischen Raumes*. Dieser ist einmal in der tonalen Ordnung abschreitbar, nach unveränderlichen, nirgends abweichenden Gesetzen strukturiert. Andererseits aber birgt er gleichberechtigt in sich das Prinzip der Abweichung, das es ermöglicht, den tonalen Bezug zunächst zu variieren, danach aber zu verlassen, aus dem Bezirk der 7 Töne in den der 12 Töne, darüber hinaus aber in weitere, stets abweichende Bereiche vorzudringen.

In dieser Sicht gewinnt auch der Satz, mit dem Platon seine musiktheoretischen Erörterungen an dieser Stelle beschließt, sein volles Gewicht. Nach der 3. Operation sei die Mischung aufgebraucht, sagt Platon. Das soll bedeuten, daß mit der 3. Operation, der Ausfüllung der Quartan mit Ganztönen, innerhalb der beiden Reihen beide Prinzipien des musikalischen Raumes, die Tonalität und die Abweichung von dieser, befriedigend zur Darstellung gekommen sind. Es ist somit alles, was innerhalb der angesetzten Begrenzung über den Bereich der Musik gesagt werden kann, wirklich ausgesagt, die »Mischung« ist in der Tat »aufgebraucht«.

VI

Damit sind aber auch schon die Antworten auf die noch offen gebliebenen Fragen gegeben. Platon beabsichtigt, wie sich gezeigt hat, mehr als nur die Aufstellung einer diatonischen Skala: er will den gesamten musikalisch-harmonischen Raum darstellen. Freilich gehört dazu auch die Konstruktion einer diatonischen Skala. Diese, in der Zweierreihe dargestellt und durch das Verhältnis 1 : 8 begrenzt, umfaßt nun den Bereich von 3 Oktaven. Damit entfällt das Problem der übergroßen Ausdehnung der früher angenommenen, durch die Zahlen 1 und 27 begrenzten Skala (oben Nr. 5). Die nun gewonnene, nur 3 Oktaven umfassende Tonleiter steht mit griechischer Musiktheorie insofern im Einklang, als diese zwar nur 2 Oktaven mit Notennamen benennt, jedoch den musikalischen Bereich auch in der Theorie auf 3 Oktaven auszuweiten vermag durch Aneinandersetzung der 13 jeweils um einen Halbton

differierenden *τόνοι*. Da diese *τόνοι* jeweils 2 Oktaven umfassen, andererseits 13 Halbtöne sich zu einer Oktave addieren¹, so ergeben sich durch die Über-einanderlagerung der *τόνοι* 3 Oktaven². Doch war das Vorgehen bis zur dritten Potenz auch darum nötig, weil erst in der dritten Potenz das Gesetz der Dreierreihe, die Abweichung, als Regel erkennbar wird. Die Ausfüllung der sich in ihr findenden Quartverhältnisse ergibt ja in der zweiten Potenz bereits b; jedoch wäre eine Abweichung allein nicht hinreichend, um zu zeigen, daß die Abweichung als Prinzip in der Dreierreihe vorliegt. Erst das Es in der dritten Potenz läßt deutlich werden, daß die Erzeugung von chromatisch veränderten Tönen die Grundtendenz der Dreierreihe darstellt.

Dennoch bleibt festzuhalten, daß die Töne, die in der Dreierreihe jenseits des Zahlwertes 9 dargestellt sind, tatsächlich Töne außerhalb des in der griechischen Musiktheorie erfaßten Bereiches darstellen. Sie sind in der Tat nicht singbar oder auf Instrumenten der Antike wiederzugeben; und so bleibt zu fragen, ob die beiden Reihen nicht außer dem Gegensatz zwischen Tonalität und außertonalen Klängen auch noch einen weiteren Gegensatz repräsentieren sollen, den zwischen Praxis und Theorie, zwischen konkretem, sinnlich erfahrbarem Phänomen und abstrakter, nur dem Verstand offenliegender Spekulation. Denn während die Zweierreihe die gebräuchliche Tonalität in ihrer wichtigsten Skala darstellt, bietet die Dreierreihe ja gar keine Skala, sondern nur die Prinzipien, die es ermöglichen, die in der anderen Reihe gegebene Tonleiter zu erweitern resp. zu verlassen.

Auch das zweite und dritte der aufgeführten Probleme erweisen sich nun als gegenstandslos. Natürlich hat Platon nicht übersehen, daß seine Konstruktion nach der zweiten Operation noch nicht überall in Quartverhältnisse unterteilt ist. Da es ihm jedoch darauf ankam, die Prinzipien des musikalischen Raumes in der mathematisch einfachsten Weise zu demonstrieren, genügte es ihm, die Ausfüllung der bereits entstandenen Quartverhältnisse vornehmen zu lassen. Allerdings betont er ausdrücklich, daß alle ausgefüllt werden sollen. Es geht weder an, eigenmächtig weitere Quartverhältnisse zu konstruieren oder die Quintverhältnisse nach Art der Quart auszufüllen, noch darf man umgekehrt die Quartverhältnisse der Dreierreihe außer acht und ohne Ausfüllung lassen³. Die Ausfüllung der in beiden Reihen sich findenden Quart genügt, um das erstrebte Ergebnis zu zeitigen: hier die 6 dorischen Tetrachorde, die sich zur dorischen Skala zusammenfügen, da die 3 ebenfalls dorischen

¹ Natürlich in antiker Zählweise, die Ausgangs- und Endpunkte mit einbegreifen.

² Vgl. die Darstellung der *τόνοι* durch Aristoxenos bei Euclid, *introductio harmonica* 12. Es bleibt zu fragen, ob sich aufgrund der hier gegebenen Deutung der platonischen Zahlen beweisen läßt, daß die Ausdehnung des musikalischen Systems auf 3 Oktaven in dieser Form schon vor Aristoxenos statuiert worden ist.

³ Τίβυ, der ebenfalls für die Trennung beider Reihen eintritt, übersieht die wichtige Bedeutung der Dreierreihe. Er versteht sie als »puro giuoco aritmetico, destinato a scomparire nella conclusione ultima a cui vuol giungere l'autore.«

Tetrachorde, die aber gerade durch diese ihre Struktur aus der dorischen Skala und aus der Tonalität überhaupt hinausführen. Selbstverständlich kann nun auch nicht mehr die Rede davon sein, daß die beiden sich zahlenmäßig überschneidenden Quartverhältnisse $4:16/3$ und $9/2:6$ zu Schwierigkeiten oder Korrekturen Anlaß geben. Da sie jeweils einer anderen Reihe und einem anderen Bezugssystem angehören, stören sie sich in keiner Weise, im Gegenteil wird dadurch, daß sie von einander abweichen, d. h. in der Zweierreihe h, in der Dreierreihe aber b aufweisen, mit umso größerer Klarheit deutlich, was demonstriert werden soll: die unterschiedliche Struktur der beiden Reihen und der durch sie verdeutlichten musikalischen Prinzipien¹.

Aus dem Gesagten ergibt sich aber auch schon die Antwort auf das wichtigste, das letzte der oben genannten Probleme. Es ist die Frage nach dem philosophischen Sinn der Einfügung einer so speziellen musiktheoretischen Darlegung in einen Dialog, der metaphysische Erkenntnisse vermitteln will. Als erstes und vornehmstes Beispiel soll der Raum der Musik, als reinste Materie, beweisen, was bei der Konstruktion der Weltseele unmittelbar vorher im reinen Logos ausgesagt worden ist: daß alle Bereiche der Welt einer Zweiteilung unterliegen, daß sich im Raum der Musik ebenfalls die beiden eingangs genannten Prinzipien auswirken, daß auch hier das Eine, immer Unveränderliche und das Andere, stets Veränderliche, ihren Platz haben und erst in ihrer Gemeinsamkeit den ganzen musikalischen Raum bilden; ebenso wie in dem sich unmittelbar anschließenden zweiten Beispiel der kosmische Raum dargestellt wird als ebenfalls durch diese Zweiheit gegliedert, indem der Demiurg (36c) »dem Fixsternhimmel die Natur des Selben zusprach, den von ihm umschlossenen Planetenbahnen aber die Natur des Anderen«. Daß Platon einen ähnlichen Satz bei der musiktheoretischen Darlegung nicht einfügt, ist bei der sich hier klar ergebenden und ohne Schwierigkeit deutbaren Natur der beiden Reihen verständlich; die Bezüge liegen hier so eindeutig auf der Hand, daß dem Autor jede Kommentierung überflüssig erscheinen mochte. Denn der musiktheoretische Passus ist ja engstens umklammert durch die Einleitung, die eingangs zitiert wurde, in der die darzustellenden Prinzipien *expressis verbis* genannt werden, und die sich unmittelbar anschließende Behandlung des kosmischen Raumes, für den die beiden Prinzipien, wie eben angeführt, ausdrücklich mit Namen genannt werden. Es versteht sich von selbst, daß ein von der Darlegung des reinen Begriffs und einem zweiten Beispiel umschlossenes erstes Beispiel nichts anderes enthalten kann als die Prinzipien, die die umschließenden Partien zum Ausdruck bringen. Schließlich aber spricht Platon etwas weiter auch offen aus, daß der ganze bisherige Teil mit zwei Prinzipien arbeitete: »Wir haben bisher zwei Prinzipien unterschieden, müssen nun aber

¹ Daß durch die Ergänzung beider Reihen miteinander sich das *σύστημα τέλειον μετὰ βολον* ergäbe, ist wie oben das Auftreten der anhemitonischen pentatonischen Skala (vgl. S. 401) Nebenprodukt, nicht Ziel der Darlegungen Platons.

noch ein drittes aufdecken; für die vorherigen Ausführungen genügten diese beiden . . .« (48e). So ist kein Zweifel möglich, daß der musiktheoretische Passus in dieser — und nur in dieser — Weise verstanden werden kann.

Und es scheint, daß so auch die Bezeichnungen, mit denen Platon die sieben Zahlen der Grundreihe benennt, ihre tiefere Bedeutung erkennen lassen. Die mit den Ordnungszahlen von 1—7 angegebene Folge der Glieder betont stark die Einheit des ganzen Bereichs. Sie wird betont an den Anfang gestellt: »*Einen* Teil nahm er . . .«. Danach läßt sich deutlich die einheitliche Darstellung in jeder einzelnen Potenzstufe im Gegensatz zu den anderen Potenzstufen erkennen. Die 2 wird als das Doppelte im Verhältnis zur 1 gesetzt, die 3 aber wird sowohl als das Dreifache der 1 wie auch als das Anderthalbfache der 2 bestimmt, d. h. diese auffällige doppelte Bezeichnung der 3 betont ebenso die Zusammengehörigkeit, das Aufeinander-Bezogensein beider Prinzipien wie ihre jeweilige andersartige Beziehung zur Einheit und zum Sein. Anschließend wird die 4 als das Doppelte der 2, die 9 als das Dreifache der 3 definiert, so daß auf dieser Potenzstufe einheitlich die andersartige Strukturierung der beiden einander entgegengesetzten Reihen hervorgehoben wird. Schließlich werden in der dritten Potenzstufe 8 und 27, wiederum einheitlich, bezeichnet als das Achtfache bzw. das Siebenundzwanzigfache der Eins, so daß abschließend wieder die gemeinsame Beziehung beider Reihen zur Einheit des Ausgangspunktes bezeichnet wird und mit der Betonung der Einheit die Aufstellung schließt, wie sie mit ihr begonnen hatte.

VII

Auf zwei Erscheinungen soll noch kurz hingewiesen werden. Die Mischungen, die der Demiurg im Anfang zur Erschaffung der Weltseele vorgenommen hatte, hatten dazu geführt, daß »jeder Teil gemischt war aus dem Selben und dem Anderen und dem Sein«. Nun zeigt sich, daß die beiden den musikalischen Raum bezeichnenden Reihen, die jede für sich ein besonderes Prinzip darstellen, jeweils auch Anteil haben am Prinzip der gegenüberliegenden Reihe, so jedoch, daß das fremde Prinzip zwar vorhanden ist, aber von dem der Reihe eigenen Prinzip derart beherrscht wird, daß es nicht zur Entfaltung seiner ihm eigentümlichen entgegengesetzten Wirkungskraft kommen kann. Die eine Reihe nämlich, ursprünglich aus Potenzen von 2 gebildet, gewinnt durch das Einsetzen der Mittelglieder in der zweiten Operation viermal das Duodezimenverhältnis 1 : 3 hinzu ($1 : 3$, $4/3 : 4$, $2 : 6$, $8/3 : 8$), zu den Oktaven $e''' - e'' - e' - e$ kommen nun die Duodezimen $e''' - a'$, $h'' - e'$, $e'' - a$, $h' - e$. Weitere sechs solcher Duodezimenverhältnisse von 1 : 3 kommen bei der dritten Operation hinzu, nämlich $9/8 : 27/8 = d''' - g'$, $81/64 : 243/64 = c''' - f'$, $3/2 : 9/2 = a'' - d'$, $27/16 : 81/16 = g'' - c'$, $9/4 : 27/4 = d'' - g$, $81/32 : 243/32 = c'' - f$. So enthält die endgültige Form der Zweierreihe mit ihren

22 Zahlen fünfzehnmal das Oktavverhältnis $1:2$, das das wesentliche Prinzip dieser Reihe ist, und zehnmal das Duodezimenverhältnis $1:3$, das als tragendes Prinzip der anderen Reihe angehört, hier in der Zweierreihe aber nicht zur Entfaltung seiner eigentlichen Funktion kommt, sondern in Unterordnung dem Zweierprinzip eingefügt ist.

Umgekehrt enthält die Dreierreihe bereits nach der zweiten Operation sechsmal das Oktavverhältnis $1:2$, nämlich $1:2 = e''' - e''$, $3/2:3 = h'' - h'$, $3:6 = h' - h$, $9/2:9 = d' - d$, $9:18 = d - D$, $27/2:27 = G - \underline{G}$. Durch die Einfügungen der dritten Operation kommt hier kein weiteres Oktavverhältnis $1:2$ zustande¹. Die Dreierreihe enthält also in ihrer endgültigen Gestalt 16 Zahlen, die zehnmal das Duodezimenverhältnis $1:3$ und sechsmal das Oktavverhältnis $1:2$ ausdrücken. Wiederum ist also das Grundprinzip der anderen Reihe, das Zweierverhältnis, der Dreierreihe in Unterordnung unter ihr tragendes Prinzip, das Dreierverhältnis, eingefügt.

So haben beide Reihen teil an dem Wesen der ihnen gegenübergestellten anderen Reihe, sie sind beide gemischt aus dem Einen und dem Anderen, dem Selben und dem Veränderlichen, und doch ist die Prävalenz je eines Prinzips in beiden Reihen deutlich; wie ja auch das Eine, in bezug auf das Andere gesehen, ein anderes ist, dennoch aber an sich das Eine bleibt, und wie umgekehrt das Andere in bezug auf sich selbst das Selbe ist, in bezug auf das Ganze aber das Andere.

Abschließend ein Wort über die Anzahl der sich nun in dem platonischen Diagramm ergebenden Zahlen resp. Töne. Man hat in früheren Interpretationen oftmals die Zahl 36 erhalten (diatonisch $e''' - G = 34 \text{ Töne} + b + \text{Es} = 36$) und geglaubt, darin einen Beweis für die Richtigkeit der aufgestellten Skala sehen zu können, da die Zahl 36 als symbolisch bedeutsame Zahl verstanden worden ist. In der hier vorgeschlagenen Aufstellung ergeben sich in den drei Operationen zunächst 7, dann 19, schließlich 37 Zahlwerte bzw. Töne. Sicherlich werden dabei die in beiden Reihen auftretenden gleichen Zahlen, obwohl als Zahl identisch, ihrer verschiedenen Bedeutung wegen, die sie in den beiden Reihen besitzen, auch zweimal gezählt. Dieses Verfahren unterliegt keinem Bedenken, da ja das Wesentliche sowohl in der platonischen wie in der modernen Musiktheorie nicht der Ton an sich, sondern seine Beziehung innerhalb eines Tonsystems ist. Und wie die moderne Musiktheorie die Umdeutung der tonalen Funktion eines Tones als Modulationsmittel kennt, so kennt auch die antike Musiktheorie die Unterscheidung zwischen *δύναμις* und *θέσις* eines Tones. So wird man auch hier wegen des völlig verschiedenen Bezugssystems beider Reihen etwaige ihnen beiden gemeinsame Zahlen resp. Töne zwar als im Absoluten gleich, ihrer verschiedenen Bezogenheit wegen aber als unterschiedlich verstehen und dementsprechend auch zweifach zählen. Und so mag es als

¹ Jedoch ergibt sich zweimal das auch dem Zweierbereich zugehörige Verhältnis $1:8$, d. h. dreimal die Oktave, mit den Zahlen $27/16:27/2$ und $243/128:243/16$, also den Tönen $g'' - G$ und $f'' - F$.

weiterer Beweis für die Richtigkeit der hier vorgeschlagenen Erklärung herangezogen werden, daß sich nun als Anzahlen der in den drei Operationen gewonnenen Glieder die Zahlen 7, 19 und 37 ergeben. Denn diese, die vierte, achte und zwölfte Primzahl, sind zu verstehen als $7 = 1 + 2 \cdot 3$; $19 = 1 + 2 \cdot 3^2$; $37 = 1 + 2^2 \cdot 3^2$. So erweisen auch hier noch einmal die Einheit, von der alles ausgeht und die alles umschließt, und die beiden den musikalischen Raum strukturierenden Zahlen 2 und 3 ihre Wirkung.

VIII

Es hat sich gezeigt, daß Platon es unternommen hat, mit möglichst einfachen mathematischen Operationen den gesamten musikalisch-harmonischen Raum mit allen seine Phänomenen darzustellen. Daß ihm die Lösung dieses Problems in genialer Weise, in äußerster Knappheit und Klarheit, gelungen ist, haben die bisherigen Ausführungen gezeigt. Daß er dabei Terzverhältnisse gewonnen hat, die in einem auf Mehrstimmigkeit bedachten harmonischen System zu Schwierigkeiten führen würden, hat in seinem auf die Einstimmigkeit bezogenen melodischen System keinen Belang. Alle Angaben aber haben sich als konkrete Daten erwiesen, die bestimmten Phänomen der Musik mit Sicherheit zuzuordnen sind. Doch stehen sie nicht um ihrer selbst willen da, nicht musiktheoretische Erkenntnisse sollen vorgetragen werden, sondern diese erscheinen nur als erstes, reinstes Abbild der in der Formation der Weltseele zum Ausdruck kommenden zweigeteilten Struktur der Welt. Auch im Raum der Musik stehen, ebenso wie im kosmischen Raum, zwei Prinzipien einander gegenüber, ein wie auch immer geartetes, in jedem Fall aber auf Auswahl und Unveränderlichkeit beruhendes tonales Element und ein von diesem fortführendes, in anders geordnete, weitere außertonale Bereicheweisendes Element. Und die Erkenntnis dieser in den Zahlen faßbaren Zusammenhänge, die im Sternenhimmel ihr Spiegelbild finden ebenso wie in der menschlichen Seele, ist die rechte Weise, an der Musik teilzuhaben, nicht der unverständige, auf dem unkontrollierten Eindruck der Sinne beruhende schwelgerische Genuß (47 d). Dieser rechte, vernunftgemäße Umgang mit den Musen aber ist für den Menschen, wegen der in ihm bestehenden Unregelmäßigkeiten, wegen seines der Grazien so sehr bedürftigen Wesens, von Nutzen und von Nöten: er vermag ihn zur Ordnung zu führen und zur Übereinstimmung mit dem Regelmäßigen, Guten in der Welt.

Es erscheint gut, gerade in unseren Tagen an diese Gedanken Platons zu erinnern; denn gerade heute vollzieht die abendländische Musik den folgenschweren Schritt aus der Tonalität der 7 Töne hinaus in die weiteren, außertonalen Bereiche; und gerade heute verwandelt sie sich in den mathematischen Diagrammen, in denen die Werke der elektronischen Musik ihre Chiffrierung finden, zurück in die reine Zahl, die in der Theorie des Pythagoras und Platon am Anfang europäischer Musikbetrachtung steht.

Berlin-Zehlendorf

BERNHARD KYTZLER

NOTENBLATT

1.) Grundreihe (S. 398 unten)



2.) Ausgefülltes Lambda (S. 400 oben) = Zweierreihe und Dreierreihe (S. 14 oben)
a) linker Schenkel (Zweierreihe) b) rechter Schenkel (Dreierreihe)



3.) Zusammengezoogene Reihe (S. 400 unten)



4.) Die anhemitonische pentatonische Skala (S. 401)



5.) Die beiden übereinandergreifenden Tetrachorde (S. 402, Nr. 3)



6.) Der dritte fragliche Tetrachord (S. 402 unten)



7.) Endgültige Gestalt des Lambda (S. 406 unten)

a) linker Schenkel = Zweierreihe



b) rechter Schenkel = Dreierreihe

