

PYTHAGORE DE SAMOS

PAR : ANDRÉ ROSS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES

CÉGEP DE LÉVIS-LAUZON



Pythagore qui vécut au VI^e siècle avant Jésus-Christ, est né vers 569 av. J.-C. à Samos, une île de la mer Égée située tout près de Milet où vivait Thalès qui devait avoir une cinquantaine d'années à la naissance de Pythagore. On admet généralement que Pythagore fut l'élève de Thalès et de son disciple Anaximandre avant d'entreprendre de nombreux voyages, particulièrement, en Égypte et à Babylone. À son retour à Samos, l'île est sous la domination du tyran Polycrate et Pythagore décide de s'installer à Crotone en Italie du sud où il fonde une communauté qui tient à la fois de la secte et de l'académie. On y étudie la philosophie, les mathématiques et les sciences naturelles. Les membres de l'École vivent en communauté et gardent secret les enseignements reçus et leurs découvertes, il est donc difficile de connaître les contributions de Pythagore et celles de ses disciples. Pythagore est mort vers 475 av. J.-C.

LA DOCTRINE PYTHAGORICIENNE

L'intérêt des pythagoriciens pour les nombres et la géométrie leur vient probablement de l'astronomie. À l'époque de Thalès, les principales constellations étaient déjà

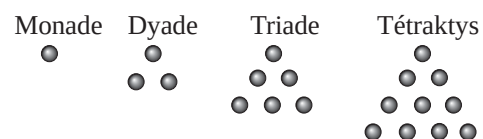
connues. Pythagore qui s'y intéressait beaucoup avait observé que chaque constellation présente deux caractéristiques : le nombre d'étoiles qu'elle comporte et la figure géométrique formée par ces étoiles. Cette constatation était une motivation suffisante pour s'adonner à l'étude des nombres et des figures géométriques. Comme chaque constellation a un nombre qui lui est associé, chaque objet doit être associé à un nombre qui lui est propre. C'est ce qu'exprime le pythagoricien Philolaos de Crotone en disant :

Toute chose a un nombre; c'est pourquoi il est impossible qu'une chose sans nombre puisse être conçue ou connue.

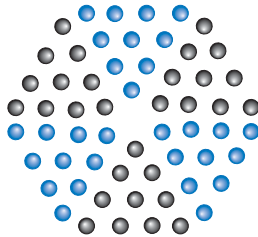
Selon Aristote, l'arithmétique, la géométrie et la physique étaient un même champ de connaissance pour les pythagoriciens. Un point géométrique, un grain de matière et l'unité arithmétique constituaient un même concept. Les nombres étaient représentables par des agencements géométriques de points et ces agencements permettaient d'en déduire les propriétés. La doctrine pythagoricienne, telle que nous la décrit Aristote, repose sur la conviction que l'Univers est entièrement régi par les nombres entiers. Les pythagoriciens auraient été convaincus qu'en découvrant les lois numériques qui gouvernent le monde, ils pourraient prétendre au divin et à l'immortalité.

Dans leur classification des nombres, on retrouve :

- la *monade* ou unité, c'est le principe d'identité;
- la *dyade*, c'est le nombre deux qui est considéré comme le premier nombre, il est pair et féminin, c'est le principe de non-contradiction;
- la *triade*, c'est le nombre trois, premier nombre impair, il est masculin;
- la *décade* ou nombre dix qui est la somme des points de la Tetraktys. La Tetraktys est un symbole ésotérique fondamental pour les pythagoriciens.

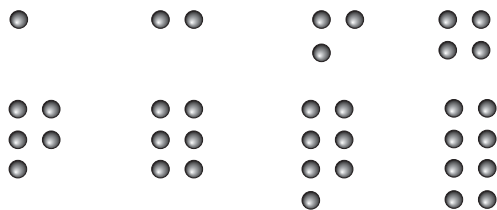


On peut remarquer que la Tétraktys est reliée à la base 60 du système de numération des babyloniens par la configuration suivante qui constitue les regroupements additifs de ce système de numération.



NOMBRES PAIRS ET NOMBRES IMPAIRS

Les nombres pairs sont les nombres qui peuvent se diviser en deux parties égales et les nombres impairs sont les nombres qui ne peuvent se diviser en deux parties égales.



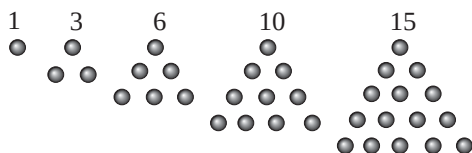
Les pythagoriciens pouvaient apprécier cette propriété visuellement grâce à la représentation des nombres par des points dans le sable ou par des regroupements de cailloux.

GÉOMÉTRIE DES NOMBRES

Les pythagoriciens ont développé une classification des nombres basée sur leur configuration géométrique lorsque les nombres sont représentés par des points.

Nombres triangulaires

Un *nombre triangulaire* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un triangle. Les cinq premiers nombres triangulaires sont représentés dans l'illustration suivante.

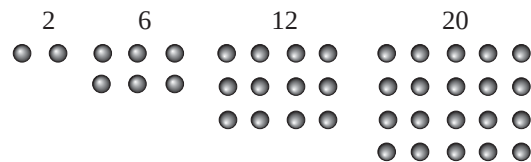


On remarque que chaque nombre correspond à une somme d'entiers. L'ajout d'une ligne extérieure signifie l'ajout d'un nombre entier de points. Le nombre triangulaire de rang n est la somme

$$1 + 2 + 3 + \dots + n.$$

Nombres oblongs

Un *nombre oblong* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un rectangle ayant une colonne de plus que de lignes. Les quatre premiers nombres oblongs sont représentés dans l'illustration suivante.

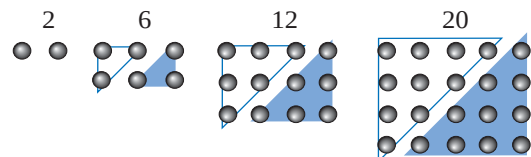


Les nombres oblongs sont des nombres rectangulaires dont un des côtés comporte un point de plus que l'autre côté. On obtient donc une formulation générale des nombres oblongs qui, en écriture moderne, donne :

$$O_n = n(n+1).$$

où O_n représente le nombre oblong de rang n . Rappelons que pour les pythagoriciens, 0 n'existe pas.

On constate assez facilement que les points d'un nombre oblong peuvent être divisés en deux nombres triangulaires égaux.



On a donc :

$$\begin{aligned} 2T_n &= O_n \\ &= n(n+1). \end{aligned}$$

On obtient alors :

Le nombre triangulaire de rang n est :

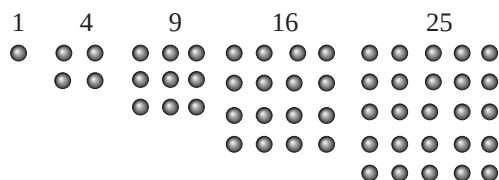
$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cela signifie que l'on peut trouver directement le nombre triangulaire de rang 6. En effet,

$$T_6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21.$$

Nombres carrés

Un *nombre carré* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un carré. Les cinq premiers nombres carrés sont représentés dans l'illustration suivante.

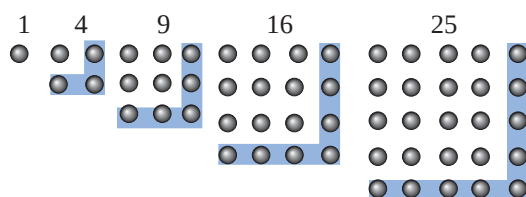


Cette illustration nous suggère l'énoncé suivant :

Le nombre carré de rang n est :

$$C_n = n^2$$

On peut construire le nombre carré de rang n en ajoutant des bandes comme dans l'illustration suivante. Ces bandes forment le *gnomon* du nombre.



En astronomie, le gnomon désigne l'assemblage formé d'une tige fixée perpendiculairement à un plan et servant de cadran solaire. En géométrie, le gnomon désigne une équerre. Dans l'illustration précédente, les points ajoutés forment une équerre qui est le gnomon de la figure ou du nombre. Héron d'Alexandrie (vers 75 à 150 ap. J.C.) en donne la définition suivante :

Définition

Gnomon

Un *gnomon* est la chose qui ajoutée à quelque chose d'autre, figure ou nombre, forme un tout semblable à la chose à laquelle elle a été ajoutée.

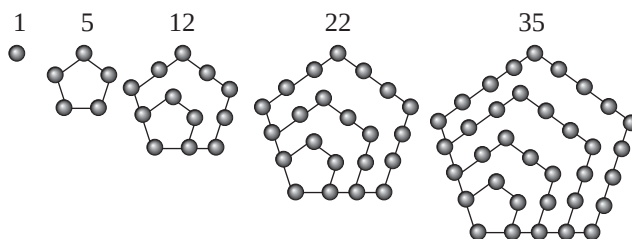
L'illustration précédente permet d'énoncer la conjecture suivante :

Le nombre carré de rang n est la somme des n premiers nombres impairs. Soit :

$$C_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

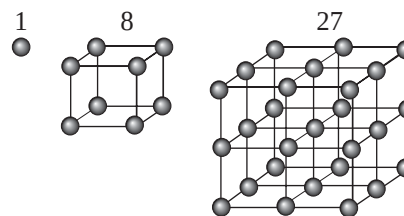
Nombres pentagonaux

Un *nombre pentagonal* est un nombre dont les points peuvent se disposer de façon à former un pentagone. Les cinq premiers nombres pentagonaux sont représentés dans l'illustration suivante.

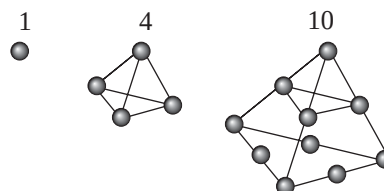


Nombres tridimensionnels

On peut facilement poursuivre cette représentation des nombres avec les nombres hexagonaux, heptagonaux, octogonaux, ainsi de suite. On peut également considérer les structures tridimensionnelles. Ainsi, les trois premiers nombres cubiques sont :

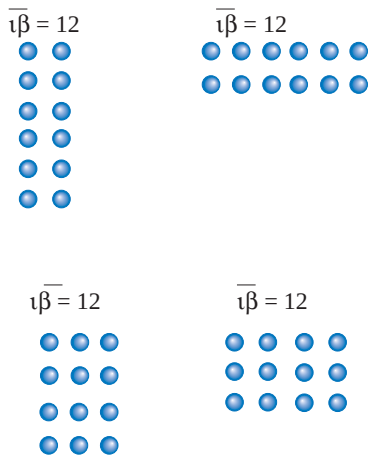


Les trois premiers nombres pyramidaux à base triangulaire sont :



DIVISIBILITÉ DES NOMBRES

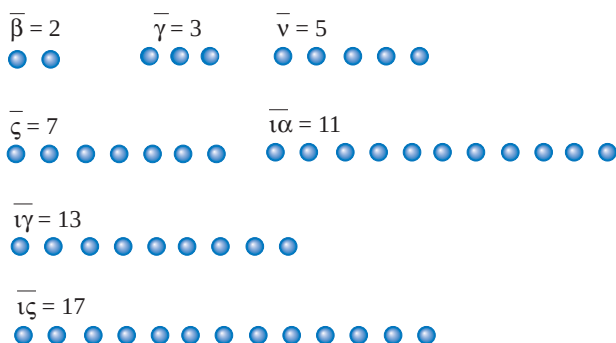
En représentant les nombres par des points on visualise une autre caractéristique des nombres, la divisibilité en parties entières.



Le nombre 12 est divisible par 2 puisque l'on peut regrouper les cailloux en 2 paquets de 6. Il est également divisible par 4 puisque l'on peut former 4 paquets de 3 cailloux. De la même façon, il est divisible par 3 et par 6.

NOMBRES PREMIERS

Dans une telle représentation, un nombre *premier* est un nombre dont les points ne peuvent se regrouper que d'une seule manière.



Les pythagoriciens sont devenus assez rapidement familiers avec les nombres premiers. Philolaos faisait la distinction entre les nombres premiers qui sont indécomposables et les nombres secondaires qui sont composés.

NOMBRES PARFAIT, DÉFICIENT, ABONDANT

Définition

Nombre parfait

Un nombre *parfait* est un nombre qui est la somme de ses diviseurs propres. Les diviseurs propres d'un nombre étant les diviseurs entiers positifs différents du nombre.

L'appellation *diviseurs propres* est une appellation moderne. Dans l'arithmétique ancienne, on appelait *partie aliquote* d'un nombre tout diviseur différent du nombre lui-même.

Le nombre 6 est un nombre parfait car il est la somme de ses diviseurs propres, en effet $1 + 2 + 3 = 6$. Les diviseurs propres de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14. Or,

$$1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$$

Le nombre 28 est la somme de ses diviseurs propres. C'est donc un nombre parfait.

Définition

Nombre déficient

Un nombre est *déficient* s'il est plus grand que la somme de ses diviseurs propres. Il est *abondant* s'il est plus petit que la somme de ses diviseurs propres.

Les diviseurs propres de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6. Or,

$$1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16$$

Le nombre 12 est donc abondant car il est plus petit que la somme de ses diviseurs propres.

Les diviseurs propres de 15 sont 1, 3, 5. Or,

$$1 + 3 + 5 = 9$$

Le nombre 15 est donc déficient car il est plus grand que la somme de ses diviseurs propres.

Le néo-pythagoriciens Nicomaque de Gerasa qui vécut probablement au deuxième siècle de notre ère donne les quatre nombres parfaits 6, 28, 496 et 8 128. Il fournit de plus la règle suivante :

Quand la somme

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = p$$

est un nombre premier, alors 2^np est un nombre parfait.

Ainsi,

$$1 + 2 = 3$$

est un nombre premier et $2 \times 3 = 6$ est un nombre parfait.

$$1 + 2 + 2^2 = 7$$

est un nombre premier et $2^2 \times 7 = 28$ est un nombre parfait.

Il est possible que cette formule ait été connue de Pythagore.

NOMBRES AMIABLES (OU AMICAUX)

Deux nombres sont *amiabes* (ou *amicaux*) si chacun est la somme des diviseurs propres de l'autre. On attribue à Pythagore la découverte des nombres amiables 284 et 220. On peut facilement vérifier que la somme des diviseurs propres de 284, soit 1, 2, 4, 71, 142 donne 220 et que la somme des diviseurs propres de 220, soit 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 donne 284. Il va sans dire que ces nombres ont joué un rôle important dans la magie, la sorcellerie, l'astrologie et le calcul des horoscopes.

Au XI^e siècle, le mathématicien et astronome Thabit Ibn Querra De Harrah, originaire de Bagdad, a énoncé que :

Si $a = 3 \times 2^n - 1$, $b = 3 \times 2^{n-1} - 1$ et $c = 9 \times 2^{2n-1} - 1$ sont premiers, alors 2^na et 2^nc sont amiables.

En 1636, Pierre de Fermat a utilisé cette règle pour obtenir deux autres nombres amicaux. En effet, pour $n = 4$, la règle donne :

$$a = 3 \times 2^4 - 1 = 47; b = 3 \times 2^3 - 1 = 23; c = 9 \times 2^7 - 1 = 1\,151.$$

Ces trois nombres sont premiers et :

$2^na = 2^4 \times 47 \times 23 = 17\,296$ et $2^nc = 2^4 \times 1\,151 = 18\,416$ sont des nombres amiables. À l'aide de cette même règle, Descartes a obtenu un autre couple de nombres amiables pour $n = 7$. À la suite d'une recherche systématique, le

suisse Leonhard Euler dévoila en 1747 une liste de 30 paires de nombres amicaux, liste qu'il étendit par la suite à 60 paires. Un italien de 16 ans Nicolo Paganini découvrit en 1866 une paire de nombres amicaux qui avait échappée à tous les mathématiciens qui s'étaient intéressés à ces nombres, ce sont les nombres 1 184 et 1 210. La venue des ordinateurs a permis d'allonger la liste des nombres amicaux à plus de 1 000 paires, ce qui diminue beaucoup le caractère magique de ces nombres.

L'ALGÈBRE PYTHAGORICIENNE

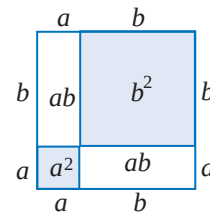
Il n'était pas simple pour les mathématiciens grecs d'établir des relations algébriques car ils ne disposaient pas d'un système adéquat de représentation des nombres. Les lettres de leur alphabet étaient déjà utilisés pour les nombres, ils ne pouvaient pas en plus les utiliser pour développer un symbolisme algébrique comme le nôtre.

C'est géométriquement qu'ils démontrent des propriétés algébriques ou qu'ils résolvent des équations algébriques.

Ainsi, pour démontrer l'identité :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ils ont recours à un carré dont la mesure du côté est $a + b$.



En divisant ce carré en deux carrés d'aire a^2 et b^2 et deux rectangles d'aire ab , ils obtiennent que l'aire du carré de côté $a + b$, soit $(a + b)^2$ est égale à la somme des aires des carrés d'aire a^2 et b^2 et des deux rectangles d'aire ab . En écrivant ce qui donne :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Ils avaient besoin d'un support géométrique pour raisonner sur les nombres et cela est dû en grande partie au fait que leur système de numération ne permettait pas une conceptualisation adéquate et une manipulation simple des nombres.

CONCLUSION

Pour nous, la géométrie des nombres peut sembler étrange. Il faut se souvenir que les grecs ne disposaient pas d'un système de numération permettant d'écrire et de manipuler adéquatement les nombres. C'est par la représentation géométrique que les pythagoriciens se sont représentés les nombres et pour eux, cet assemblage de points était le reflet de l'espace et du temps, eux aussi constitués de grains d'espace et de temps. Tout comme les points, en se regroupant constituaient les nombres.

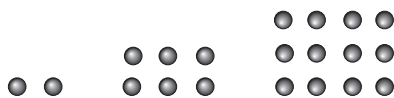
Il est tout à fait remarquable qu'ils aient pu surmonter le handicap que constituait leur système de numération pour procéder à une étude aussi poussée des nombres et déterminer autant de propriétés de ceux-ci.

L'étude des nombres va déboucher sur les progressions arithmétiques et les moyennes, ou médiétés, arithmétique, géométrique, harmonique ainsi que sur la division en extrême et moyenne raison d'un segment de droite.

EXERCICES : PYTHAGORE 01

1. Nombres oblongs

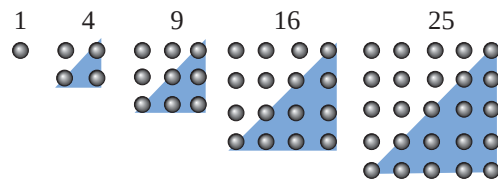
Un *nombre oblong* est un nombre qui forme un rectangle ayant une colonne de plus que de lignes.



Nombres oblongs

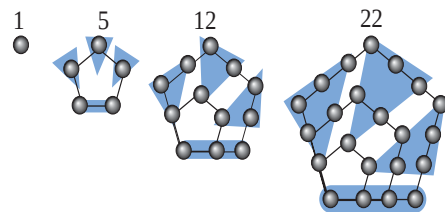
- Quelle est la forme générale du gnomon des nombres oblongs ?
- Trouver les 6 premiers nombres oblongs.
- Déterminer la forme générale des nombres oblongs.

- Que suggère l'analyse de la représentation géométrique suivante des cinq premiers nombres carrés ?



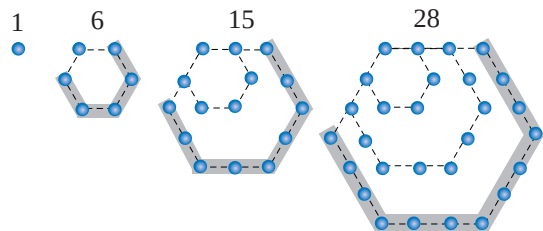
Démontrer cette propriété.

- Que suggère l'analyse de la représentation géométrique suivante des quatre premiers nombres pentagonaux ?



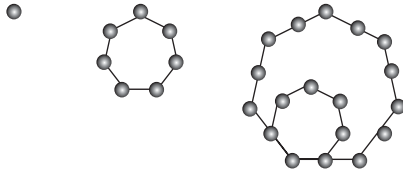
Démontrer cette propriété.

4. Nombres hexagonaux



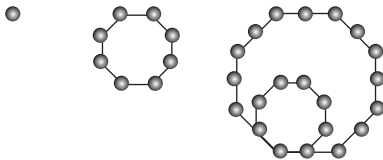
- Quel est la forme générale du gnomon des nombres hexagonaux ?
- Trouver les 6 premiers nombres hexagonaux.
- Le nombre hexagonal de rang n , que nous noterons H_n , est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. Donner la raison et les six premiers termes de cette progression.
- Trouver la forme générale des nombres hexagonaux (terme de rang n).

5. Nombres heptagonaux



- Quel est la forme générale du gnomon des nombres heptagonaux ?
- Trouver les 6 premiers nombres heptagonaux.
- Le nombre heptagonal de rang n , que nous noterons He_n , est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. Donner la raison et les six premiers termes de cette progression.
- Trouver la forme générale des nombres heptagonaux (terme de rang n).

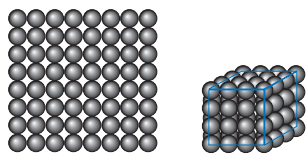
6. Nombres octogonaux



- Quel est la forme générale du gnomon des nombres octogonaux ?
- Trouver les 6 premiers nombres octogonaux.
- Le nombre octogonal de rang n , que nous noterons Oc_n , est la somme des n premiers termes d'une progression arithmétique. Donner la raison et les six premiers termes de cette progression.
- Trouver la forme générale des nombres octogonaux (terme de rang n).

7. Nombres carrés-cubiques

Un *nombre carré-cubique* est un nombre qui peut être disposé pour former un carré ou pour former un cube.



Trouver trois nombres carrés-cubiques.

8. Démontrer géométriquement les égalités suivantes (selon la méthode utilisée par les pythagoriciens).

a) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

b) $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

9. Montrer que si p est un nombre premier alors p est déficient.

10. a) Trouver 12 nombres abondants plus petits que 100.

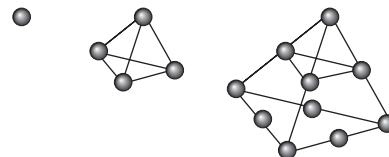
b) Les nombres trouvés sont-ils les seuls nombres abondants plus petits que 100 ? Justifier votre réponse.

11. Montrer algébriquement que 8 fois un nombre triangulaire plus 1 est un nombre carré.

12. Montrer que tout nombre m de la forme 2^n est un nombre déficient.

13. Nombres pyramidaux à base triangulaire

Un *nombre pyramidal à base triangulaire* est un nombre dont les points peuvent être disposés pour former une pyramide à base triangulaire.



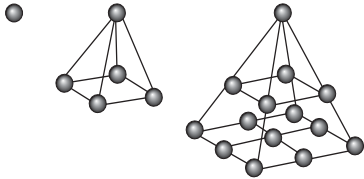
- Trouver les 6 premiers nombres pyramidaux à base triangulaire.
- Décrire le nombre pyramidal à base triangulaire de rang n comme somme partielle d'une suite. Est-ce la somme partielle des termes d'une progression arithmétique?
- Vérifier que les six premiers nombres pyramidaux à base triangulaire peuvent être obtenus par la formule suivante :

$$PT_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

où PT_n est le nombre pyramidal à base triangulaire de rang n . Croyez-vous que cette formule est valide pour tout n ? Expliquer.

14. Nombres pyramidaux à base carrée

Un *nombre pyramidal à base carrée* est un nombre dont les points peuvent être disposés pour former une pyramide à base carrée.



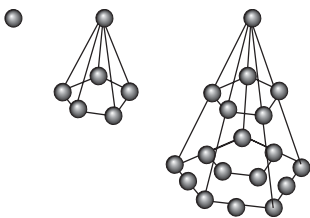
- Trouver les 6 premiers nombres pyramidaux à base carrée.
- Décrire le nombre pyramidal à base carrée de rang n comme somme partielle d'une suite. Est-ce la somme partielle des termes d'une progression arithmétique?
- Vérifier que les six premiers nombres pyramidaux à base carrée peuvent être obtenus par la formule suivante :

$$PC_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

où PC_n est le nombre pyramidal à base carrée de rang n . Croyez-vous que cette formule est valide pour tout n ? Expliquer.

15. Nombres pyramidaux à base pentagonale

Un *nombre pyramidal à base pentagonale* est un nombre dont les points peuvent être disposés pour former une pyramide à base pentagonale.



- Trouver les 6 premiers nombres pyramidaux à base pentagonale.

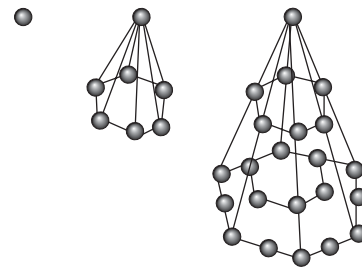
- Décrire le nombre pyramidal à base pentagonale de rang n comme somme partielle d'une suite. Est-ce la somme partielle des termes d'une progression arithmétique?
- Vérifier que les six premiers nombres pyramidaux à base pentagonale peuvent être obtenus par la formule suivante :

$$PP_n = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

où PP_n est le nombre pyramidal à base pentagonale de rang n . Croyez-vous que cette formule est valide pour tout n ? Expliquer.

16. Nombres pyramidaux à base hexagonale

Un *nombre pyramidal à base hexagonale* est un nombre dont les points peuvent être disposés pour former une pyramide à base hexagonale.



- Trouver les 6 premiers nombres pyramidaux à base hexagonale.
- Décrire le nombre pyramidal à base hexagonale de rang n comme somme partielle d'une suite. Est-ce la somme partielle des termes d'une progression arithmétique?
- Vérifier que les six premiers nombres pyramidaux à base hexagonale peuvent être obtenus par la formule suivante :

$$PH_n = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$$

où PH_n est le nombre pyramidal à base hexagonale de rang n . Croyez-vous que cette formule est valide pour tout n ? Expliquer.