

6096
L. D. Ann. C. 3 A.
1933

Il teorema di Pitagora nell' antica Grecia

PARTI PRIMA

I più antichi testi sul teorema di PITAGORA, nella letteratura dell' antica Grecia, sono i seguenti:

1. Un passo del « Menone » platonico che contiene la dimostrazione del teorema nel caso particolarmente semplice ed intuitivo del triangolo rettangolo isoscele.

2. Le proposizioni degli *Elementi* d' EUCLIDE: I, 47 e 48, e VI, 31, che danno rispettivamente, la dimostrazione generale del teorema e del suo inverso, e poi la generalizzazione al caso di figure poligonali simili costruite sui lati di un triangolo rettangolo.

3. Un frammento sulla quadratura delle lunule di IPOCRATE di Chio — che deve risalire a circa il 450 a. C. — quale ci è stato tramandato da SIMPLICIO nel *Commento* alla fisica di ARISTOTILE.

Riferiamo anzitutto il contenuto di questi testi; ragioneremo poi sulle origini delle conoscenze e dei metodi che in essi appaiono.

1. Nel dialogo platonico intitolato a « Menone ».

Il dialogo si svolge fra SOCRATE e MENONE, in casa di quest' ultimo.

MENONE chiede a SOCRATE se la virtù si può insegnare, o se non insegnandosi, si può praticare; oppure se, non potendosi nè insegnare, nè praticare, venga agli uomini dalla natura, o in qual altro modo (¹).

(¹) Cfr. A. FAVARO: *Sull' ipotesi geometrica nel « Menone »* di PLATONE. Padova, Tipografia del Seminario, 1875.

SOCRATE risponde affermando che « ricercare ed apprendere è solo un ricordarsi ».

MENONE chiede una dimostrazione di questo asserto, ed allora SOCRATE, chiamato uno dei servi di Menone, lungamente lo interroga, e fa vedere che esso è a conoscenza di alcune proprietà geometriche, delle quali, a priori, poteva ritenersi completamente ignorante.

Noi, per brevità, faremo iniziare il dialogo da quando principia la parte che più direttamente c'interessa.



Fig. 1.

noscere che un quadrato $ABCD$ (fig. 1), costruito su un lato di due piedi, misura quattro piedi quadrati.

Socr. - L'area $ABCD$ è dunque di quattro piedi?

Serv. - Sì.

Socr. - Ora ad essa aggiungiamo l'altra $BINC$ ad essa uguale.

Serv. - Sì.

Socr. - Ed a esse due l'altra uguale $CNLO$, pure uguale.

Serv. - Sì.

Socr. - Per far piena la figura, non potremo aggiungere anche l'altra $DCOM$, nell'angolo?

Serv. - Sicuro.

Socr. - Ora tutta la figura $AILM$, non comprende quattro aree, $ABCD$, $BINC$, $CNLO$, $DCOM$, uguali fra loro?

Serv. - Sì.

Socr. - E dunque? tutta l'area $AILM$, quanto è più grande dell'altra $ABCD$?

Serv. - È il quadruplo.

Socr. - Ma a noi occorre fare il doppio; non te ne ricordi?

Serv. - Appunto.

Socr. - Ma ciascuna delle linee DB , BN , NO , OD , che va da un angolo all'altro delle proposte figure $ABCD$, $BINC$, $CNLO$, $DCOM$, non le taglia esse in due?

Serv. - Sì.

Socr. - E le linee DB , BN , NO , OD , non sono quattro lati uguali che comprendono l'area $DBNO$?

Serv. - E ci son bene.

Socr. - Or guarda; quant'è l'area $DBNO$?

Serv. - Io non so dirlo.

Socr. - Delle quattro aree $ABCD$, $BINC$, $CNLO$, $DCOM$, non n'ha tagliato metà di ciascuno, ciascuna delle linee DB , BN , NO , OD , al dentro, come DCB , CBN , NCO , OCD ? Non ti pare che sia così?

Serv. - Di certo.

Socr. - Quante dunque delle aree BCD sono nella figura $DBNO$?

Serv. - Quattro.

Socr. - E quante delle aree BCD , in $ABCD$?

Serv. - Due.

Socr. - Come sta il quattro al due?

Serv. - È il doppio.

Socr. - L'area $BNOD$, adunque di quanti piedi è?

Serv. - Di otto.

Socr. - E da che lato è formata?

Serv. - Da BD .

Socr. - Dalla linea che si tende da un angolo all'altro del quadrato $ABCD$?

Serv. - Sì.

Socr. - Orbene, i dotti chiamano questa linea, diagonale, tanto che chiamandola con questo nome anche noi, secondo che tu dici, o servo, dalla diagonale si formerebbe l'area doppia.

Serv. - Per l'appunto, o Socrate.

Come si vede nelle ultime battute del dialogo è contenuto il teorema di PITAGORA, relativo al triangolo rettangolo isoscele.

2. Negli "Elementi", d'Euclide.

Libro I. Prop. 47^a.

Sia ABC un triangolo rettangolo avente l'angolo retto BAC (fig. 2).

Dico che il quadrato costruito su BC è uguale alla somma dei quadrati costruiti su BA , AC ⁽¹⁾.

Si descriva, infatti, su BC il quadrato $BDEC$; su BA , AC si descrivano GB , HC ; per A si conduca la parallela AL ad

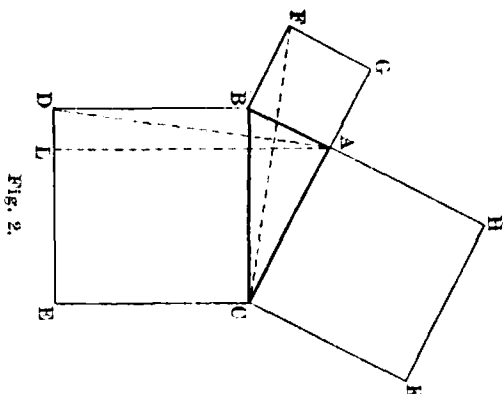


FIG. 2.

ogn'una delle BD , CE , e si congiunga A con D ; F con C . Poiché ogn'uno degli angoli BAC , BAG , è retto, su una retta BA ed in un suo punto A , le rette AC , AG , non giacenti dalla stessa parte, fanno angoli adiacenti uguali a due retti, per la stessa ragione BA è per diritto alla AH .

E poiché l'angolo DBC è uguale ad FBA , perchè ogn'uno è retto, si aggiunga ABC , comune. Così, tutto $\widehat{DBA}$ è uguale a tutto $\widehat{FBC}$. E poiché BD è uguale a BC , ed FB a BA , le due DB , BA sono rispettivamente uguali alle due, FB , BC , e l'angolo DBA è uguale all'angolo FBC . Dunque la base AD è uguale alla base FC , ed il triangolo ABD è uguale al triangolo FBC .

Ma il parallelogramma BL è doppio del triangolo ABD : infatti, essi hanno la stessa base, e sono tra le stesse parallele BD , AL . Inoltre, il quadrato GB è doppio del triangolo FBC ; infatti, essi hanno la stessa base FB , e sono fra le stesse parallele FB , GC . Dunque il parallelogramma BL è uguale al quadrato GB . Similmente condotte le AE , BK , si dimostrerà anche che il parallelogramma CL è uguale al quadrato HC . Dunque tutto il quadrato $BDEC$ è uguale alla somma dei quadrati GB , HC . Ma il quadrato $BDEC$ è descritto su BC , e GB , HC , su AB , AC .

Dunque il quadrato del lato BC è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati BA , AC .
c. d. d.
Dunque, nei triangoli rettangoli ecc...

⁽¹⁾ Cfr. *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna*, Vol. 1°, col concorso di diversi collaboratori, editi da F. Enriques, Zanichelli, Bologna.

Libro I. Prop. 48°.

Se in un triangolo il quadrato costruito su uno dei lati è uguale alla somma dei quadrati costruiti sui rimanenti due lati del triangolo, l'angolo compreso dai due rimanenti lati del triangolo è retto ⁽¹⁾.

Infatti, nel triangolo ABC (fig. 3), il quadrato costruito su uno dei lati, BC , sia uguale alla somma dei quadrati costruiti sui lati BA , AC . Dico che l'angolo BAC è retto.

Si conduca infatti per il punto A la AD , ad angolo retto con la retta AC , si faccia AD uguale a BA , e si congiunga D con C . Poiché DA è uguale ad AB , anche il quadrato costruito su DA è uguale al quadrato costruito su AB . Si aggiunga il quadrato costruito su AC , comune. Così, la somma dei quadrati costruiti su DA , AC sarà uguale a quella dei quadrati costruiti su BA , AC . Ma anche il quadrato costruito su DC è uguale alla somma di quelli costruiti su DA , AC , perchè $\widehat{DAC}$ è retto (prop. 47°); e il quadrato costruito su BC si è supposto uguale alla somma di quelli costruiti su BA , AC : dunque il quadrato costruito su DC è uguale a quello costruito su BC ; quindi, anche il lato DC è uguale a BC ; ora poiché DA è uguale a AB , ed AC è comune, le due DA , AC sono uguali alle due BA , AC , e la base DC è uguale alla base BC ; quindi $\widehat{DAC}$ è uguale all'angolo BAC . Ma $\widehat{DAC}$ è retto, perciò anche $\widehat{BAC}$ è retto.

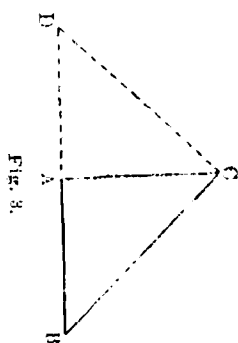


FIG. 3.

Dunque, se in un triangolo ecc...
c. d. d.

Libro VI. Prop. 31°.

Nei triangoli rettangoli, ogni poligono costruito sul lato opposto all'angolo retto, è uguale alla somma dei poligoni, simili e similmente posti, costruiti su gli altri due lati ⁽²⁾.

Il triangolo ABC sia rettangolo, avendo retto l'angolo BAC

⁽¹⁾ Cfr. F. Enriques, Op. cit.

⁽²⁾ Cfr. F. Enriques, Op. cit., vol. 2°.

(fig. 4). Dico che ogni poligono costruito su BC è uguale alla somma dei poligoni simili e similmente posti, costruiti su AB , ed AC .

Si conduca la perpendicolare AD . Poichè nel triangolo rettangolo ABC è stata condotta la perpendicolare AD dell'angolo retto alla base BC , i triangoli ABD , ADC sono simili tra loro, e simili al triangolo dato ABC (prop. 8°). E poichè

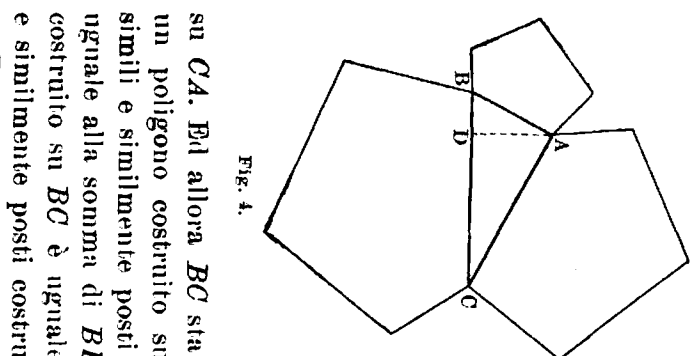


FIG. 4.

ABC è simile ad ABD , il lato CB sta a AB come AB a BD . Ma se tre rette sono in proporzione, la prima sta alla terza come un poligono costruito sulla prima sta al poligono simile e similmente posto, costruito sulla seconda (prop. 19°, corol.), cioè CB sta a BD come un poligono costruito su CB sta al poligono, simile e similmente posto, costruito su AB . Per la stessa ragione BC sta a CD come un poligono costruito su BC sta a quello simile e similmente posto costruito su CA . Ed allora BC sta alla somma di BD con DC , come un poligono costruito su BC sta alla somma dei poligoni simili e similmente posti costruiti su AC ed AD . Ma BC è uguale alla somma di BD con DC . Perciò anche un poligono costruito su BC è uguale alla somma dei poligoni simili e similmente posti costruiti su BA , AC .

Dunque nei triangoli rettangoli ecc....

c. d. d.

Nei passi riferiti d'EUCLIDE troviamo dunque due dimostrazioni generali del teorema di PITAGORA, una basata sui criteri dell'uguaglianza delle superficie, l'altra sulle proporzioni, e quest'ultima anzi ci vien porta per stabilire un teorema più generale della relazione pitagorica. PROCLIO nel sesto storico del suo *Commento all'Euclide*, riferisce la tradizione che fa risalire a PITAGORA la scoperta del teorema I, 47, ma attribuisce in proprio ad EUCLIDE il metodo della dimostrazione adoperata, e sembra pure dargli tutto il merito della prop. VI, 31. Dice:

« Fra gli scrittori d'antiche storie (EUDEMIO), vi sono alcuni

che fanno risalire questo teorema (I, 47) a PITAGORA, e raccontano che egli sacrificò un bue in onore di tale scoperta. Ma per mio conto, mentre ammiro quelli che per primi osservarono la verità di questo teorema, ammiro ancor più lo scrittore degli *Elementi*, che non soltanto ci ha dato di tale affermazione una dimostrazione più lucida, si anche la dimostrazione del teorema più generale, mediante gli infrangibili argomenti di scienza del VI libro ».

Ma, in verità, riesce difficile ammettere che di questo teorema più generale non si avesse conoscenza prima di EUCLIDE (sia pure che il trattamento delle proporzioni, prima di EUDEMIO, riuscisse incompleto e non rigoroso); giacchè lo scritto sulle linee quadrabili di IPPOCRATE di Chio, ci offre esempio di una considerazione affatto analoga.

3. Le lunule di Ippocrate.

Nel frammento di IPPOCRATE tramandatici da SIMPLICIO si espone il seguente procedimento:

Si abbia il triangolo rettangolo isoscele ABC , e si descrivano i tre semicerchi Amb , BpC , $AuBoC$, aventi rispettivamente per diametri i lati AB , BC , AC (fig. 5).

Siccome le superficie dei cerchi stanno fra loro come i quadrati dei rispettivi diametri, indicando con S la superficie del semicercolo $AuBoC$, e con s le superficie uguali dei semicercoli Amb , BpC , avremo:

$$(1) \quad S : s : s = \overline{AC}^2 : \overline{AB}^2 : \overline{BC}^2.$$

Ma per la proprietà del triangolo rettangolo, si ha:

$$(2) \quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

dunque

$$(3) \quad S = s + s$$

ovvero

$$s = \frac{1}{2} S.$$

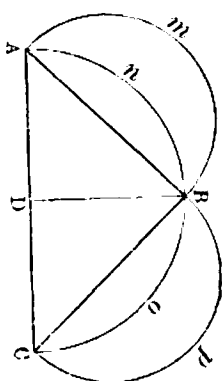


FIG. 5.

Ora, abbassando la perpendicolare BD , si vede che $DA \perp B$ è la metà del semicircolo S , e perciò,

$$T_{A \cap B} = A \cap B$$

e sottraendo da queste due figure uguali, lo spazio AnB , comune ad entrambe, da una parte rimane la lunetta, $AmBuA$, e dall'altra il triangolo DAB , dunque:

(4) $\text{Iunula AmBud} = \text{triang. DAB.}$

L'interesse di questa proposizione sta per noi in ciò: che essa contiene e suppone una dimostrazione del teorema di PYRAGORA mediante le proporzioni, nonché una veduta della Generalizzazione offerta in ETCULIDE VI, 31.

4. Supposizioni sulla dimostrazione originale di Pitagora.

Il teorema che « il quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo è uguale alla somma dei quadrati dei cateti » è attribuito a PITAGORA, non solo — come abbiamo visto nella tradizione raccolta da PROCLUSO — sì anche da PLUTARCO, ATENEIO, DIOGENE LAERZIO. Questa tradizione concorde, cui risponde il nome dato al teorema stesso nei secoli (teorema di PITAGORA) deve avere un fondamento di verità: ma conviene esaminare in qual senso possa essere accettata.

Intorno al 530 o 540 a. Cr. PITAGORA abbandonò la natia Samo e prese dimora a Crotone, ove fondò la *Scuola itálica*. Era questa una scuola o setta di tipo religioso, che inculcava la stretta sorveglianza di certe regole di vita, assumendo idee e credenze di altre più antiche tradizioni, sia orliche, sia egiziane. Ma al loro misticismo si associa la tendenza scientifica razionale, che si esprime massimamente nel culto delle matematiche. La più antica concezione dei Pitagorici assimila la materia al numero, giusta la formula « le cose sono numeri », che è stata spiegata da P. TANSEY, nel senso di ammettere una teoria monadica della materia: ogni materia sarebbe formata da corpuscoli unitari o monadi, e ritrarrebbe le sue proprietà o qualità semplicemente dal

numero e dall'ordine geometrico di codesti corpuscoli elementari (essi stessi privi di qualità o tutti uguali fra loro). Questa stessa concezione doveva avere non solo un senso fisico sì anche geometrico, almeno sino alla scoperta degli incommensurabili, cui dette occasione il caso del triangolo rettangolo isoscele, e che dovette provocare una crisi della scienza pitagorica.

Sulla base di queste notizie possiamo facilmente comprendere come i Pitagorici più antichi potessero presto giungere ad una teoria delle figure simili, di cui infatti viene loro fatto credito da Proclo. Sorge quindi naturale l'idea che sulla base di questa teoria essi possano aver raggiunto una dimostrazione del teorema sul quadrato dell'ipotenusa del triangolo rettangolo: dimostrazione *generale* del loro concetto, che tuttavia restava affetta dalle limitazioni con cui le propor-

FIG. 6.

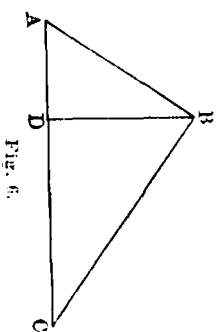


Fig. 6.

zioni stesse erano trattate. Invero il teorema di PITAGORA riesce dimostrato appena si riconosca che l'altezza del triangolo rettangolo, relativa all'ipotenusa, divide il triangolo in due altri simili all'intero (fig. 6); e perciò occorre riconoscere l'uguaglianza degli angoli di codesti triangoli, che è una conseguenza della somma degli angoli di un triangolo uguale a due retti (prop. attribuita pure ai pitagorici); la proporzionalità dei lati dei triangoli simili si conclude dalla proporzionalità dei segmenti staccati sui lati d'un angolo da due rette parallele, in un ordine d'idee che sembra risalire alle prime speculazioni su gli angoli dei più antichi geometri greci (forse già di TALETE di Mileto).

5. Un'estensione di Pappo.

Sia ABC un triangolo qualunque, e siano $ABED$, $BCFG$, $ACIH$ tre parallelogrammi qualunque, costruiti sui lati AB , BC , CA (fig. 7). Sia H il punto di incontro dei lati DE , FG . Si unisca H con B . Si prolunghi la HB al di là del lato AC , di una lunghezza PK , uguale ad HB . Per il punto K si tirerà la parallela al lato AC , e dai punti A e C si tirino le AL , CM , entrambe parallele a PK .

Dico che il parallelogramma $ALMC$ è uguale alla somma dei parallelogrammi $ABED$, $BCFG$. Infatti ⁽¹⁾:

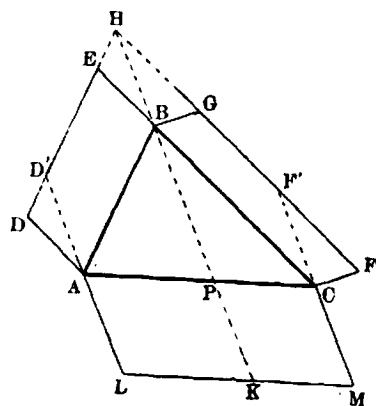


Fig. 7.

Si prolunghino i lati AL , CM , sino ad incontrare in D' ed F' , rispettivamente DE ed FG . Si ha che:

$$(1) \quad ABED = ABHD'$$

perchè hanno la stessa base e sono compresi fra due parallele. Similmente:

$$(2) \quad BCFG = BCF'H.$$

Inoltre

$$(3) \quad ABHD' = ALKP$$

perchè anch'essi hanno basi uguali e sono compresi fra le stesse parallele. E si ha anche:

$$(4) \quad BCF'H = PKMC;$$

dalle (1) e (2) si deduce che

$$(5) \quad ABED + BCFG = ABHD' + BCF'H,$$

dalle (3) e (4):

$$(6) \quad ABHD' + BCF'H = ALKP + PKMC = ALMC$$

e dal confronto delle (5) e (6) si ricava che

$$ABED + BCFG = ALMC.$$

e. d. d.

6. Una proprietà della figura 47^a - I. d'Euclide, dimostrata da Erone.

ERONE dimostra che « le rette AL , BE , CG , (fig. 8) s'incontrano in uno stesso punto; e per giungere a questo risultato, stabilisce prima i seguenti tre lemmi ⁽²⁾:

⁽¹⁾ PAPPI ALEXANDRINI: *Collectionis*. F. HULTSCH. V. 1^o, p. 177. Weidmanns, 1876.

⁽²⁾ Cfr. T. L. HEATH: *The thirteen books of Euclid's Elements*. Vol. 1^o

1^o Lemma. In un triangolo ABC , se si tira la parallela DE a BC (fig. 9) e dal vertice A si tira la AF , che bisecchi la BC , anche la DE sarà bisecata dalla AF .

2^o Lemma. È costituito dall'estensione del 1^o lemma al caso in cui la retta ED incontra i lati AB , AC , al di sopra del punto A (fig. 9).

3^o Lemma. Se un parallelogramma AB è diviso in quattro parallelogrammi, $ADGE$, DF , $FGCB$, CE , in modo che siano uguali DF e CE (fig. 10) il vertice in comune, G , starà sulla diagonale AB .

Dopo ciò, segue la dimostrazione del primo asserto: e

cioè che: se AKL è perpendicolare a BC (fig. 8), incontra EC in M , e se si tirano le rette BM ed MG , esse sono per

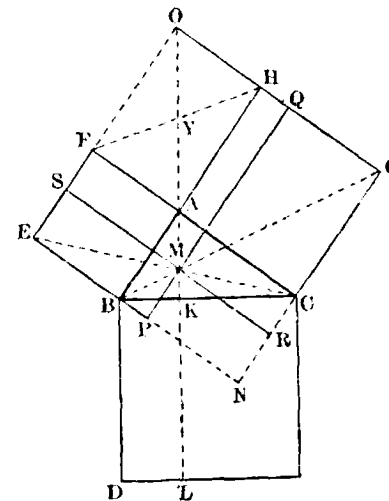


Fig. 8.

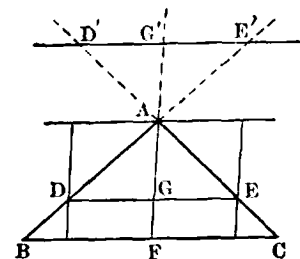


Fig. 9.

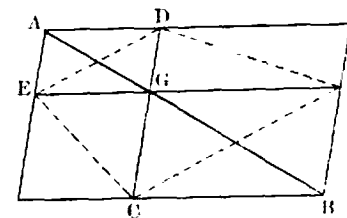


Fig. 10.

diritto. Infatti, si completi il parallelogramma OA . Si tirino le diagonali OA ed FH . I triangoli BAC e FAH sono uguali, e si ha:

$$\widehat{HFA} = \widehat{ABC}$$

e siccome

$$\widehat{ABC} = \widehat{CAK}$$

perchè AK è perpendicolare a BC , sarà anche

$$(1) \quad \widehat{HFA} = \widehat{CAK}.$$

Ma le diagonali del rettangolo FH si tagliano in X , quindi

$$FY = YA$$

e per la (1)

$$HF = HA$$

$$OF = OA.$$

Dunque OA ed AF stanno per diritto.

Ora, OM è diagonale di SQ , e quindi i parallelogrammi AS ed AQ sono uguali. Se si aggiunge ad entrambi il parallelogramma AM , si ha:

$$FM = HM.$$

Ma

$$FM = MN$$

perciò

$$MH = MN$$

e per il 3° lemma

$$BM \text{ ed } MG \text{ stanno per diritto}$$

c. d. d.

PARTE SECONDA

7. L'equazione pitagorica

È così chiamata l'espressione

$$(1) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

essendo stata studiata dai Pitagorici, per trovare quelle terne di numeri interi che potessero rappresentare i lati di un triangolo rettangolo.

PROCLIO (*Op. cit.*), ci ha trasmesse due soluzioni della (1), che, a suo dire sarebbero dovute, una a PITAGORA, e l'altra a PLATONE.

Quella pitagorica parte dei numeri dispari, e dice:

« Si assuma un numero dispari come misura del più corto dei lati intorno all'angolo retto. Dal quadrato di questo numero si sottragga l'unità, e si assuma la metà di questa differenza, come misura dell'altro lato intorno all'angolo retto. Si sommi invece l'unità al quadrato del lato più corto, e si

prenda la metà di questa somma come misura del lato opposto all'angolo retto ».

Dunque, per m dispari, i lati del triangolo rettangolo saranno dati da:

$$m; \quad \frac{m^2 - 1}{2}; \quad \frac{m^2 + 1}{2}$$

si ha infatti:

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2.$$

La soluzione platonica prende invece le mosse dei numeri pari, e dice:

« Si assuma un numero pari come misura di uno dei lati intorno all'angolo retto; per misura del secondo lato, intorno all'angolo retto, si assuma il quadrato della metà di questo numero, meno l'unità; e come misura del terzo lato, quello opposto all'angolo retto, il quadrato della metà dello stesso numero, più l'unità ».

Essendo dunque $2n$ un numero pari, i lati del triangolo rettangolo saranno:

$$2n; \quad n^2 - 1; \quad n^2 + 1$$

infatti

$$(3) \quad (2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2.$$

È interessante seguire le varie argomentazioni, intorno alla genesi di queste due formule, che sono state raccolte in succinte note dall'HEATH, nel suo commento alla 1-47^a (*Op. cit.*).

Egli incomincia con l'esporre i procedimenti proposti dal CANTOR (1) e dal RÖTH (2), che possono entrambi così condensarsi: Se

$$c^2 = a^2 + b^2$$

segue che

$$(4) \quad a^2 = c^2 - b^2 = (c + b) \cdot (c - b).$$

Ora, affinché la (4) sia soddisfatta per numeri interi, per c e b , devono verificarsi le seguenti condizioni:

(1) CANTOR: I, pp. 185-6.

(2) RÖTH: *Geschichte der abendländischen Philosophie*, II, 327.

1° - Che $e + b$ e $e - b$, risultino entrambi pari o dispari.
 2° - Che il prodotto $(e + b) \cdot (e - b)$ sia uguale ad un numero quadrato.

La 1ª condizione è necessaria, infatti, se a^2 è dispari, tali devono essere $e + b$ e $e - b$, viceversa, se a^2 è pari, devono pure essere pari $e + b$ e $e - b$.

La 2ª condizione è soddisfatta se i due numeri $e + b$ e $e - b$ sono « quelli che furono chiamati numeri simili », ossia numeri quadrati (formati da due fattori uguali), o numeri rettangolari (formati da due fattori disuguali), i cui fattori siano fra loro proporzionali.

Es.: 6 è un numero rettangolare, avente larghezza 3 ed altezza 2; 24 è un numero rettangolare, avente larghezza 6 ed altezza 4; 6 e 24 sono numeri simili perchè,

$$6 : 3 = 4 : 2.$$

Ora, il più semplice caso di due numeri simili, è quello dato dai numeri 1 e n^2 . E se si vuole che essi soddisfino la (4) si deve verificare, per essi, la 1ª condizione; perciò essendo 1 dispari, deve pure essere dispari n^2 , ossia n .

Facendo dunque

$$n = 2m + 1$$

si può porre

$$e - b = 1$$

$$e + b = (2m + 1)^2 = n^2$$

e si ricavano facilmente i valori:

$$a = 2m + 1$$

$$b = \frac{(2m + 1)^2 - 1}{2}$$

$$e = \frac{(2m + 1)^2 + 1}{2}.$$

Questo risultato è, come si vede, molto simile a quello attribuito da PROCOLO a PITAGORA.

Si ha invece un risultato analogo a quello attribuito a PLATONE se si pone, in luogo di $b - e = 1$; $b - e = 2$.

In tal caso, il numero simile $b + e$ sarà della forma $2n^2$,

oppure $\frac{(2n)^2}{2}$. Posto quindi:

$$e - b = 2$$

$$e + b = \frac{(2n)^2}{2}$$

si ricavano i valori:

$$a = 2n; \quad b = n^2 - 1; \quad e = n^2 + 1.$$

Dunque lo stesso metodo può portare facilmente ad entrambe le soluzioni.

1) HEATH è però più propenso ad ammettere che PITAGORA abbia adoperato un metodo diverso da quello seguito poi da PLATONE. E siccome ritiene probabile che la soluzione pitagorica possa essere stata ispirata da qualche diretta osservazione, riconosce come abbastanza soddisfacente, a questa condizione, un metodo progettato dal BIERSCHEIDT.

Esso consiste nello scrivere su tre righe successive: i numeri naturali, i quadrati di questi, e le differenze fra i quadrati successivi (fig. 11):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23

FIG. 11.

PITAGORA avrebbe dovuto soltanto porre attenzione alla relazione che collega i quadrati contenuti nella terza riga, con i quadrati della seconda (quello immediatamente sopra, ed il precedente = es.: 9, 16, 25) per stabilire la sua formula di risoluzione.

Ma un procedimento più semplice è quello proposto dal TREUBMAN (*). È noto, egli dice, che i Pitagorici usavano rappresentare i numeri mediante figure composte di punti. Essi consideravano, perciò, numeri triangolari, rettangolari, quadrati, e così via.

(*) TREUBMAN, « Zeitschrift für Mathematik und Physik », XXVIII, 1833.

Si osservi ora che un numero quadrato può essere trasformato nel numero quadrato immediatamente superiore, ponendo una semplice linea di punti, su due lati adiacenti del

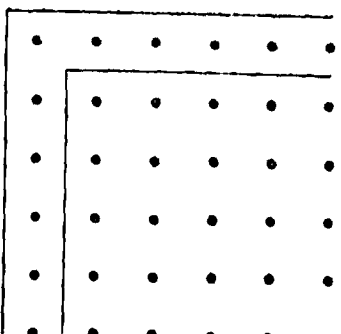


Fig. 12.

primo, in forma di gnomone (fig. 12); e che se a è il lato di un quadrato, lo gnomone intorno ad esso contiene $2a + 1$ punti. Si faccia ora

$$2a + 1 = m^2$$

risulta che

$$a = \frac{m^2 - 1}{2}$$

$$a + 1 = \frac{m^2 + 1}{2}$$

E siccome, come abbiamo detto, lo gnomone più il quadrato di lato a , dà il quadrato di lato $a + 1$, si ha:

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2$$

che per m dispari rappresenta la soluzione pitagorica.

Esposte così le probabili vie seguite da PRAGAON per giungere alla soluzione generale della (1), l'HEATH si rivolge a considerare la soluzione platonica.

S'è visto come dalla soluzione pitagorica si può passare a quella platonica, raddoppiando semplicemente i lati dei quadrati; ciò secondo il metodo proposto dal BRETSCHNEIDER. Ma anche questa volta, l'HEATH, dà la preferenza ad una soluzione dovuta al TREUTLEIN, che si basa su un'estensione dell'idea di gnomone.

Col metodo del TREUTLEIN, già esaminato, si otteneva la soluzione pitagorica della (1), aggiungendo una sola linea di punti, in forma di gnomone, ai lati adiacenti di un quadrato. Si aggiunga ora, pure in forma di gnomone, una doppia fila di punti (fig. 13): si vede, in questo caso che dal quadrato

primitivo, si perviene pure ad un quadrato primitivo, e che se a è il lato del quadrato di partenza, il doppio gnomone contiene $4a + 4$ punti. Pongasi ora:

$$4a + 4 = 4n^2$$

se ne ricava

$$a = n^2 - 1$$

$$a + 2 = n^2 + 1$$

e si ha subito la formula di PLATONE, data da

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2.$$

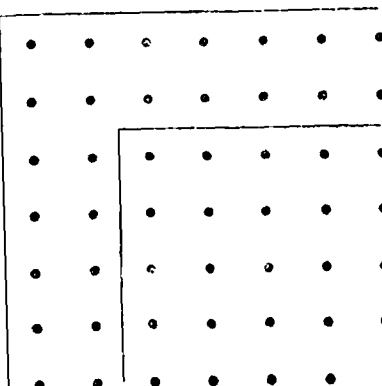


Fig. 13.

Il procedimento è ritenuto soddisfacente dall'HEATH; ma egli considera più probabile che PLATONE, anziché pensare all'applicazione del doppio gnomone, abbia considerato un quadrato più una semplice linea di punti, disposta a gnomone sui lati di esso, e lo stesso quadrato, meno una semplice linea di punti, disposta pure a gnomone, su gli stessi lati adiacenti.

8. La soluzione d'Euclide.

Nel 1° lemma precedente la 28ª proposizione del X libro degli Elementi, EUCLIDE risolve geometricamente il problema di « trovare due numeri quadrati tali che anche la loro somma sia un quadrato ».

Il procedimento è il seguente⁽¹⁾:

Si pongano due numeri AB , BC , o entrambi pari o entrambi dispari. Poiché, tanto se si sottrae un numero dispari da un numero pari, quanto se si sottrae un numero dispari da un numero dispari, i risultati sono pari, la differenza AC è pari (fig. 14). Si divida AC in due parti uguali in D .

Siano inoltre AB , BC , due numeri piani simili, o quadrati che pure sono due numeri piani simili. Così

$$AB \cdot BC + CD^2 = BD^2.$$

[II-6ª]

(1) Cfr. F. ENRIQUES, Op. cit., Vol. III.

Ma $AB \cdot BC$ è un quadrato perchè abbiamo dimostrato che se due numeri piani simili moltiplicati fra loro, formano un numero, questo è un quadrato (IX-1°). Dunque son stati tro-

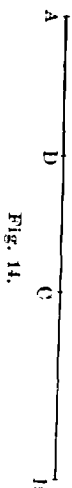


Fig. 14.

vati due numeri quadrati $AB \cdot BC$ e CD^2 , la cui somma è BD^2 . Ed è manifesto che sono stati anche trovati due numeri quadrati BD^2 e CD^2 in modo che la loro differenza $AB \cdot BC$ è un quadrato, se AB , BC , sono numeri piani simili. Se non sono numeri piani simili, i due numeri quadrati trovati sono BD^2 e DC^2 , la cui differenza $AB \cdot BC$ non è un quadrato.

c. d. d.

Interpretando algebricamente la precedente proposizione, per numeri primi simili, possiamo assumere i seguenti prodotti

$$ap \cdot bp; \quad aq \cdot bq$$

con a , b , p , q , numeri interi qualunque, soggetti alla sola condizione che abp^2 ed abq^2 , siano entrambi pari, o dispari. Allora per la 6°-II, si ha:

$$abp^2 \cdot abq^2 + \left(\frac{abp^2 - abq^2}{2} \right)^2 = \left(\frac{abp^2 + abq^2}{2} \right)^2.$$

Dunque la soluzione d'EUCLIDE della equazione

$$(1) \quad x^2 = y^2 + z^2$$

dà i seguenti valori

$$(2) \quad \begin{cases} x = abpq \\ y = \frac{abp^2 - abq^2}{2} \\ z = \frac{abp^2 + abq^2}{2} \end{cases}$$

La soluzione euclidea è più generale di quelle attribuite a PITAGORA ed a PLATONE, perchè, come facilmente può verificarsi, i valori dei lati, relativi a queste soluzioni, sono casi particolari delle (2).

9. Nell'Aritmetica di Diofanto.

Libro II. - Prop. 8°.

« Dividere un quadrato in due altri quadrati »

Il numero quadrato sia 16; x^2 sia uno dei quadrati richiesti. Sarà $16 - x^2$ uguale all'altro quadrato. Si prenda un quadrato della forma $(mx - 4)^2$, essendo m intero qualunque, e 4 la radice quadrata di 16, e si uguagli a $16 - x^2$. Così:

$$4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$$

e quindi

$$5x^2 = 16x$$

da cui

$$x = \frac{16}{5}.$$

I quadrati richiesti sono dunque $\frac{256}{25}$ e $\frac{144}{25}$.

A questa proposizione, che appartiene ad uno degli ultimi luminari della matematica greca, si rammentano, in epoche più recenti, gli sviluppi d'ordine superiore del FERMAT, EULER, DIRICHLET, KUMMER ecc.

E si può dire che la catena dei risultati, avendo origine dal teorema di PITAGORA, si prolunga fino ai nostri giorni.

ALFONSO LADONICI