

6115 pdf
NEUENSCHWANDER, E.
1973

Beiträge zur Frühgeschichte der griechischen Geometrie I

E. NEUENSCHWANDER

Communicated by B. L. VAN DER WAERDEN

IN: ARCHIVE FOR HISTORY OF EXACT SCIENCES
VOL. 11, 2/3

In der vorliegenden Abhandlung sollen zwei Probleme der frühen griechischen Geometrie behandelt werden, deren Lösung, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, zusammenhängt. Das erste ist die Frage, wie die Griechen ohne Benutzung der Parallelogrammtheorie die Umwandlung einer geradlinigen Figur in ein ihr flächengleiches Rechteck vollzogen haben könnten. Das zweite, wie die PYTHAGOREER auf den durch EUDEMOS überlieferten Beweis für die Winkelsumme im Dreieck gestoßen sind.

1. Die Verwandlung einer geradlinigen Figur in ein ihr flächengleiches Rechteck ist eine grundlegende Konstruktionsaufgabe der griechischen Geometrie. Sie findet sich in verallgemeinerter Form ebenfalls in den Elementen EUKLIDS. In Proposition I,45 wird die Aufgabe gestellt, ein einer geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten. Die in Elem. I,45 aufgezeigte Lösung erfolgt in drei Schritten:

1. Zerlegung der geradlinigen Figur in Dreiecke.
2. Verwandlung dieser Dreiecke in ihnen flächengleiche Parallelogramme mit vorgegebenem Winkel (nach Elem. I,42).
3. Aneinanderreihen dieser Parallelogramme zu einem einzigen (nach Elem. I,43, I,44).

Das ganze Verfahren wird in den Elementen im Rahmen der Parallelogrammtheorie (Prop. I,33 - 45) entwickelt; kann also in der uns dort überlieferten Form erst etwa zur Zeit des EUDOXOS entstanden sein¹.

Der Spezialfall der Verwandlung in ein flächengleiches Rechteck muß jedoch viel früher bekannt gewesen sein. Eine unerläßliche Voraussetzung für die Versuche zur Kreisquadratur, wie sie von HIPPOKRATES und ANTIPHON ausgeführt wurden, ist nämlich die Quadratur der geradlinigen Figuren²: Die Mönchchen des

¹ Wie ich in meinem Artikel „Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids“, Archive for History of Exact Sciences 9 (1973), S. 325ff. zeigte, waren die Sätze der Parallelogrammtheorie (Elem. I,33 - I,45) zur Zeit der PYTHAGOREER erst teilweise und bloß für Rechtecke bekannt.

² Sie wird in den Berichten über die beiden Quadraturen auch stets explizite erwähnt. Vgl. für ANTIPHON Rudio, Simpliciusbericht, S. 28,14 und S. 106,15; für HIPPOKRATES S. 74,3. Zur Kreisquadratur siehe B. L. VAN DER WAERDEN, Erwachende Wissenschaft I (Birkhäuser, 1956), S. 214 - 224; T. HEATH, Mathematics in Aristotle (Oxford 1949), S. 17, 33 et passim; sowie speziell F. RUDIO, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates (Leipzig 1907).

Beiträge zur Frühgeschichte der griechischen Geometrie I

Author(s): E. Neuenschwander

Source: *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 11, No. 2/3 (31.XII.1973), pp. 127-133

Published by: [Springer](#)

Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/41133374>

Accessed: 18/09/2013 10:36

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at
<http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp>

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.



Springer is collaborating with JSTOR to digitize, preserve and extend access to *Archive for History of Exact Sciences*.

<http://www.jstor.org>

Beiträge zur Frühgeschichte der griechischen Geometrie I

E. NEUENSCHWANDER

Communicated by B. L. VAN DER WAERDEN

In der vorliegenden Abhandlung sollen zwei Probleme der frühen griechischen Geometrie behandelt werden, deren Lösung, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, zusammenhängt. Das erste ist die Frage, wie die Griechen ohne Benutzung der Parallelogrammtheorie die Umwandlung einer geradlinigen Figur in ein ihr flächengleiches Rechteck vollzogen haben könnten. Das zweite, wie die PYTHAGOREER auf den durch EUDEMOS überlieferten Beweis für die Winkelsumme im Dreieck gestoßen sind.

1. Die Verwandlung einer geradlinigen Figur in ein ihr flächengleiches Rechteck ist eine grundlegende Konstruktionsaufgabe der griechischen Geometrie. Sie findet sich in verallgemeinerter Form ebenfalls in den Elementen EUKLIDS. In Proposition I,45 wird die Aufgabe gestellt, ein einer geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel zu errichten. Die in Elem. I,45 aufgezeigte Lösung erfolgt in drei Schritten:

1. Zerlegung der geradlinigen Figur in Dreiecke.
2. Verwandlung dieser Dreiecke in ihnen flächengleiche Parallelogramme mit vorgegebenem Winkel (nach Elem. I,42).
3. Aneinanderreihen dieser Parallelogramme zu einem einzigen (nach Elem. I,43, I,44).

Das ganze Verfahren wird in den Elementen im Rahmen der Parallelogrammtheorie (Prop. I,33—45) entwickelt; kann also in der uns dort überlieferten Form erst etwa zur Zeit des EUDOXOS entstanden sein¹.

Der Spezialfall der Verwandlung in ein flächengleiches Rechteck muß jedoch viel früher bekannt gewesen sein. Eine unerläßliche Voraussetzung für die Versuche zur Kreisquadratur, wie sie von HIPPOKRATES und ANTIPHON ausgeführt wurden, ist nämlich die Quadratur der geradlinigen Figuren²: Die Möndchen des

¹ Wie ich in meinem Artikel „Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids“, *Archive for History of Exact Sciences* 9 (1973), S. 325 ff. zeigte, waren die Sätze der Parallelogrammtheorie (Elem. I,33—I,45) zur Zeit der PYTHAGOREER erst teilweise und bloß für Rechtecke bekannt.

² Sie wird in den Berichten über die beiden Quadraturen auch stets explizite erwähnt. Vgl. für ANTIPHON Rudio, *Simpliciusbericht*, S. 28,14 und S. 106,15; für HIPPOKRATES S. 74,3. Zur Kreisquadratur siehe B. L. VAN DER WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft I* (Birkhäuser, 1956), S. 214—224; T. HEATH, *Mathematics in Aristotle* (Oxford 1949), S. 17, 33 et passim; sowie speziell F. RUDIO, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates* (Leipzig 1907).

HIPPOKRATES sind nur dann quadrierbar, wenn es die ihnen flächengleich konstruierten, geradlinigen Figuren sind. Ebenso hat der Versuch des ANTIPHON, den Kreis durch Einschreibung von regulären Polygonen mit ständig zunehmender Eckenzahl schließlich selbst quadrieren zu können, nur dann einen Sinn, wenn man weiß, daß die geradlinigen Figuren selbst quadrierbar sind. Wir müssen deshalb annehmen, daß auch die Umwandlung einer geradlinigen Figur in ein Rechteck zur Zeit des Hippokrates und des Antiphon bereits bekannt war, und es stellt sich die Frage, wie sie mit den damaligen Mitteln, d.h. ohne Benutzung der Parallelogrammtheorie, gelöst werden konnte.

Zur Abklärung dieser Frage ist es naheliegend, zunächst einmal das in den Elementen EUKLIDS verwendete Verfahren auf Rechtecke zu beschränken:

1. Zerlegung der geradlinigen Figur in Dreiecke.
2. Verwandlung dieser Dreiecke in ihnen flächengleiche Rechtecke.
3. Aneinanderreihen dieser Rechtecke zu einem einzigen.

Die dadurch entstandene Lösung benützt zwar noch immer die Parallelogrammtheorie (Schritt 2) und kann daher nicht mit der von uns gesuchten übereinstimmen. Stellt man ihr jedoch die in den heutigen Schulbüchern übliche gegenüber, bei der, unter weit essentiellerer Verwendung der Parallelogrammtheorie, sukzessive alle Ecken bis auf die drei letzten eliminiert werden¹, so ist trotz allem zu vermuten, daß die in den Elementen anzutreffende, umständlichere Lösung gerade auf das ursprüngliche Nichtvorhandensein der Parallelogrammtheorie hinweisen könnte. Es ist deshalb zu prüfen, ob die in den Elementen benutzte Lösungsmethode in ihren Grundzügen alt sein könnte und ob sie unabhängig von der Parallelogrammtheorie durchgeführt werden kann. Die Lösung wäre dann erst später, wie es auch bei vielen andern Problemen der Fall ist, auf Parallelogramme verallgemeinert worden².

Schritt 1, die Zerlegung der geradlinigen Figur in Dreiecke, war zweifellos ein bereits bei den PYTHAGOREERN übliches Verfahren³. Die Methode wird in PLATONS Timaios angewendet⁴ und bei EUKLID wegen ihrer grundlegenden Bedeutung gleich zweimal behandelt⁵. Schritt 3 verlangt die Konstruktion von Rechtecken mit vorgegebener Fläche, die sich einer gegebenen geraden Linie entlang erstrecken. Er fällt demnach mit der von EUDEMOS⁶ auch den PYTHAGOREERN zugeschriebenen einfachen Flächenanlegung zusammen. Einzig der zweite Schritt paßt in seiner heutigen Form nicht in einen pythagoreischen Gedankengang

¹ Unter Benutzung der Flächengleichheit der Dreiecke, die dieselbe Grundlinie besitzen und zwischen denselben Parallelen liegen, wird die Ecke eines Teildreieckes so weit verschoben bis zwei Seiten des Polygons in eine zusammenfallen.

² Vgl. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 367f.

³ Vgl. dazu NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 372.

⁴ Dort werden die Seitenflächen der regulären Polyeder in Dreiecke zerlegt. Dabei (53c) wird sogar der Satz zitiert, daß jede geradlinige Grundfläche aus Dreiecken besteht.

⁵ Nämlich in Data 47 „Der Gestalt nach gegebene geradlinige Figuren lassen sich in der Gestalt nach gegebene Dreiecke zerlegen“ und in Elem. VI,20: „Ähnliche Vielecke lassen sich in ähnliche Dreiecke zerlegen, und zwar in gleich viele und den Ganzen entsprechende ...“.

⁶ PROKLOS, Euklidkommentar, ed. SCHÖNBERGER/STECK (Halle 1945), S. 458, 15—24.

hinein. Wenn unsere Vermutung richtig ist, dann müßten die PYTHAGOREER eine andere, von der Parallelogrammtheorie und I,42 unabhängige Methode zur Umwandlung eines Dreiecks in ein flächengleiches Rechteck besessen haben. Bei der Überlegung, wie diese wohl ausgesehen haben könnte, wollen wir das Problem unvoreingenommen unter Berücksichtigung der damaligen Kenntnisse betrachten.

Um die gewünschte Flächenumwandlung zu erhalten, ist es naheliegend, das gegebene Dreieck durch die Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zu zerlegen. (Dadurch erhält man in jedem Teil je einen rechten Winkel.) Darauf wird man versuchen, durch gleichzeitiges Abtrennen und Hinzufügen gleicher Teildreiecke die rechtwinkligen Dreiecke in Rechtecke zu verwandeln. Dies gelingt z. B. durch das Ziehen der Parallelen zur Grundlinie in halber Höhe, womit auch der zweite Schritt ohne Benutzung der Parallelogrammtheorie durchgeführt ist.

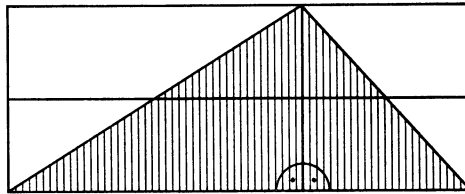


Fig. 1

Zur Verifikation der so entwickelten Lösung braucht man nur den von EUDEMOS¹ bereits THALES zugeschriebenen Satz, daß Dreiecke, die in einer Seite und zwei Winkeln übereinstimmen, deckungsgleich sind. Zudem liegt diese Lösung auf der Hand und drängt sich auf, sobald man die grundlegende Tatsache kennt, daß jedes Dreieck gleich der Hälfte des Rechtecks mit gleicher Grundlinie und Höhe ist. Es ist damit höchstwahrscheinlich, daß die PYTHAGOREER zur Umwandlung einer geradlinigen Figur in ein Rechteck die in den Elementen überlieferte Methode (Schritte 1—3) verwendeten und dabei den zweiten Schritt so ausführten, wie eben beschrieben wurde. Diese Vermutung wird beinahe zur Gewißheit, wenn wir im zweiten Teil erkennen, daß die PYTHAGOREER ihren Beweis für die Winkelsumme an derselben Figur fanden.

2. Über die voreuklidischen Beweise des Dreieckswinkelsummensatzes sind uns zwei wesentliche Mitteilungen überliefert. Die erste steht im Apollonioskommentar des EUTOKIOS². Sie stammt von GEMINOS und besagt, daß die Griechen den Satz von der Winkelsumme zuerst im gleichseitigen, dann im gleichschenkligen, nachher im ungleichseitigen Dreieck erkannt hätten und daß erst Spätere den Satz allgemein bewiesen.

... was Geminos sagt, ist richtig: Daß die Alten (welche den Kegel als Drehung des rechtwinkligen Dreiecks um eine dem rechten Winkel anliegende Seite definierten) angenommen haben, es gäbe nur gerade Kegel. Auch gäbe es nur einen Schnitt zu jedem einzelnen, zum rechtwinkligen die (wie wir sie heute nennen) Parabel, zum stumpfwinkligen die Hyperbel, zum spitzwinkligen die Ellipse. Dieser Auffassung

¹ PROKLOS, Euklidkommentar, S. 409,31.

² Apollonii Pergaei quae graece exstant cum commentariis antiquis, ed. I. L. HEIBERG (Leipzig 1891—93), Bd. 2, S. 168,17—170,27.

entsprechende Benennungen könne man bei ihnen finden. In gleicher Weise nun, wie die Alten die [Summe von] zwei rechten Winkeln in jeder Art von Dreiecken — nämlich zuerst im gleichseitigen, dann im gleichschenkligen, zuletzt im ungleichseitigen — erkannt hätten, und erst von den spätern der folgende allgemeine Satz bewiesen worden sei: „In jedem beliebigen Dreieck sind die drei Innenwinkel zwei Rechten gleich“, so sei es auch mit den Kegelschnitten gegangen. Den sogenannten „Schnitt des rechtwinkligen Kegels“ [= Parabel] hätten sie nur am rechtwinkligen Kegel betrachtet, mittels einer Ebene, welche diesen normal zu einer Geraden des Kegel[mantels] schnitt; die Entstehung des „Schnittes des stumpfwinkligen Kegels“ [Hyperbel] am stumpfwinkligen Kegel gezeigt, und den „des spitzwinkligen“ [Ellipse] am spitzwinkligen. An allen Kegeln hätten sie in gleicher Art die Ebene normal zu einer Geraden des Kegels gelegt, das möchten auch die alten Namen der Schnittlinien veranschaulichen. Zuletzt habe Apollonios von Perge etwas Allgemeines erkannt: Daß an jedem Kegel, am rechtwinkligen und am beliebigen, alle Schnitte bestehen, entsprechend der unterschiedlichen Lage der Ebene zum Kegel. Ihn hätten seine Anhänger, staunend über das Wunderbare an den von ihm gezeigten Sätzen über die Kegel, einen großen Geometer genannt. Das also sagt Geminos im 6. Buch über die mathematische Wissenschaft.

(nach FÜGLISTER)

Die zweite Mitteilung steht im Euklidkommentar des PROKLOS¹ und gibt den von EUDEMOS überlieferten allgemeinen Beweis der PYTHAGOREER.

Der ... Peripatetiker Eudemos führt die Entdeckung dieses Theorems, daß in jedem Dreieck die Innenwinkel 2 Rechte ausmachen auf die Pythagoreer zurück. Er sagt, sie hätten den Beweis folgendermaßen erbracht. Es sei SAB das Dreieck, und man ziehe durch S die Parallele ER zu AB . Da nun AB und ER parallel, und die Wechselwinkel gleich sind, so ist also Winkel $ESA =$ Winkel SAB , und Winkel $RSB =$ Winkel SBA . Dazu füge man den gemeinsamen Winkel ASB . Die Winkel ESA , ASB und BSR , das sind die Winkel $ESA + ASR$, das sind die 2 Rechten, sind also gleich den drei Winkeln des Dreiecks SAB . Die drei Winkel des Dreiecks sind folglich zusammen gleich 2 Rechten. Das ist der Beweis der Pythagoreer.

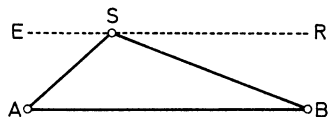


Fig. 2

HEATH² meinte, daß die obige Mitteilung des Geminos aus einer von GEMINOS falsch verstandenen ARISTOTELES-Stelle entsprungen sein könnte und deshalb wertlos sei. ARISTOTELES sagt in Anal. Post. I.5 74^a25—32:

Wenn man deshalb auch von jedem Dreieck, sei es durch dieselbe, oder sei es jedesmal durch eine andere Demonstration beweist, daß jedes zwei rechte Winkel enthält: das gleichseitige für sich, das ungleichseitige und das gleichschenklige, so weiß man noch nicht von dem Dreieck, daß seine Winkel zwei Rechten gleich sind, außer in sophistischer Weise, noch vom Dreieck überhaupt, auch wenn es sonst kein Dreieck gibt. Denn man weiß es nicht von dem Dreieck, sofern es ein Dreieck ist, und nicht von jedem Dreieck, außer der Zahl nach, nicht aber von jedem der Art nach, wenn es auch keines gibt, das man nicht kennt.

(nach ROLFES)

¹ PROKLOS, Euklidkommentar, ed. SCHÖNBERGER/STECK, S. 430,25—39.

² Siehe T. L. HEATH, A History of Greek Mathematics (Oxford 1921), Bd. 1, S. 136; sowie Mathematics in Aristotle (Oxford 1949), S. 41 ff. Zur Diskussion jener ARISTOTELES-Stelle vgl. auch K. VON FRITZ, Platon, Theaetet und die antike Mathematik (Darmstadt 1969), S. 15—18.

Eine vernünftige Rekonstruktion eines Beweises in drei Stufen ist nach HEATH nur schwer zu leisten. Zudem ist vorderhand unverständlich, daß der Satz, nachdem sein Beweis auch im ungleichseitigen Dreieck gefunden war, noch nicht allgemein bewiesen sein sollte, wie dies GEMINOS behauptet. HEATH nimmt deshalb an, ARISTOTELES habe hier ein rein hypothetisches Beispiel gegeben, das GEMINOS bei der Abfassung seiner Mitteilung fälschlicherweise als historisches Faktum betrachtet hätte.

Dem ist folgendes entgegenzuhalten: GEMINOS hat eine wahrscheinlich ausführliche Enzyklopädie über die mathematischen Wissenschaften geschrieben¹, und dabei erwiesenermaßen auch die Geschichtswerke des EUDEMOS benutzt². Ist es in diesem Fall nicht viel naheliegender anzunehmen, die betreffende Mitteilung stamme aus der Geschichte der Geometrie des EUDEMOS, in der sie GEMINOS sofort auffinden konnte, als daß er eine Bemerkung des ARISTOTELES falsch und entgegen des ihm verfügbaren EUDEMOS interpretiert hätte? Des weitern ist darauf hinzuweisen, daß GEMINOS bei der Aufzählung der drei Fälle das Verbum *θεωγέω* (erkennen, betrachten) benutzt und erst zur Charakterisierung des später erfolgten allgemeinen Beweises den Terminus *ἀποδεικνύειν* (beweisen). Es ist aber durchaus sinnvoll zu sagen, daß man den Satz zuerst am gleichseitigen, gleichschenkligen und ungleichseitigen Dreieck *erkannt* und erst später *bewiesen* habe. Damit wäre auch der Einwand entkräftet, ein derart mehrstufiges Vorgehen sei nur schwer vorstellbar. Der Mitteilung des GEMINOS muß somit bei einer allfälligen Rekonstruktion der Geschichte des Dreieckswinkelsummensatzes Rechnung getragen werden. Daß dies möglich ist und daß sich dabei ein Beweis ergibt, der auch mit den übrigen Angaben in Einklang steht, soll durch die folgende Rekonstruktion gezeigt werden.

Die erste Kenntnis des Dreieckswinkelsummensatzes könnte der Beobachtung entsprungen sein, daß sich um einen gegebenen Punkt sechs gleichseitige Dreiecke legen lassen, die sich zu einem regulären Sechseck zusammenschließen. Auf alle Fälle findet man die Sechserteilung des Kreises schon auf frühgriechischen Bronze fibeln des 8. Jahrhunderts vor Christus³, und die PYTHAGOREER kannten bereits das allgemeinere Theorem, daß es nur drei reguläre Polygone gibt, die mit ihren Ecken den Raum um einen Punkt in der Ebene ganz ausfüllen können, nämlich das Dreieck, das Viereck und das Sechseck⁴. Auch für das gleichschenklige Dreieck ist der Dreieckswinkelsummensatz leicht einzusehen. Man konnte ihn entweder, wie dies BECKER⁵ annimmt, aus einem geometrischen Zickzackmuster auf frühgriechischen Vasen entnehmen (vgl. Fig. 3), oder man erhält ihn, indem man nach CANTOR⁶ das Rechteck durch die Diagonale halbiert und die dadurch ent-

¹ Siehe den letzten Satz der obigen EUTOKIOS-Stelle; vgl. auch T. L. HEATH, *Greek Mathematics*, Bd. 2, S. 222ff.

² Siehe P. TANNERY, *La géométrie grecque* (Paris 1887), S. 24 und 71ff.

³ Siehe O. BECKER, *Grundlagen der Mathematik* (Freiburg 1954), S. 27ff. sowie *Das mathematische Denken der Antike* (Göttingen 1957), S. 39.

⁴ Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii, ex recognitione G. Friedlein (Leipzig 1873), S. 304, 11ff.

⁵ Siehe Fußnote 3.

⁶ Vgl. M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1907), Bd. 1, S. 143f.

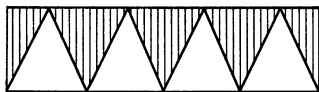


Fig. 3



Fig. 4

stehenden rechtwinkligen Teildreiecke zu einem gleichschenkligen Dreieck zusammenfügt (vgl. Fig. 4).

Die von CANTOR angegebene Methode legt nahe, beim ungleichseitigen Dreieck wie folgt zu verfahren: Man teilt das Dreieck durch die Höhe in zwei rechtwinklige auf, die man anschließend zu Rechtecken ergänzt. Nimmt man hierauf die Deckungsgleichheit der zwei Dreiecke, in die ein Rechteck durch die Diagonale geteilt wird, als anschaulich evident an, so kann man den Satz über die Winkelsumme aus der Figur ablesen. Das so entwickelte Verfahren verwendet nur die Deckungsgleichheit, mit der auch THALES in seinen Beweisen immer wieder operierte¹. Es läßt sich selbstverständlich auch auf das gleichseitige und das gleichschenklige Dreieck anwenden, dürfte aber die Spättern, welche die Geometrie deduktiv aufbauten, dennoch nicht befriedigt haben. Für sie war der Satz noch nicht bewiesen, sondern erst erkannt.

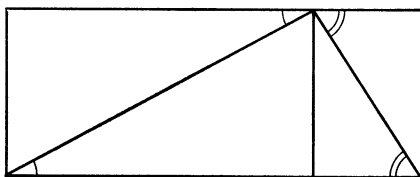


Fig. 5

Der erste allgemeine Beweis für die Winkelsumme im Dreieck ist der von EUDEMOS überlieferte, pythagoreische. Er benützt den Satz über die Wechselwinkel an Parallelen (Elem. I, 29) und unterscheidet sich von dem in den Elementen EUKLIDS² erbrachten dadurch, daß in ihm die Parallele durch die Spitze und nicht durch den einen der beiden Eckpunkte der Basis gezogen wird. Wie könnten die PYTHAGOREER diesen Beweis gefunden haben? Wohl am ehesten durch die Betrachtung der obigen Figur (vgl. Fig. 5). Der im Beweis zitierte Satz über die Wechselwinkel ist aus ihr ersichtlich, und die Parallele darin ist durch die Spitze des Dreieckes gezogen, wie es sein muß. Schon im ersten Teil sind wir auf diese Figur (vgl. Fig. 1) gestoßen, als wir die von den PYTHAGOREERN benutzte Methode zur Umwandlung eines Dreieckes in ein flächengleiches Rechteck untersuchten. Unsere beiden Rekonstruktionen stützen sich somit gegenseitig, und es ist anzunehmen, daß die obige Figur beim Aufbau der deduktiven Geometrie der PYTHAGOREER eine bedeutende Rolle spielte.

Zum Schluß möchte ich noch darauf hinweisen, daß durch die oben gegebene Rekonstruktion der Entwicklung des Dreieckswinkelsummensatzes sämtliche

¹ Vgl. E. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 361.

² Vgl. Elem. I, 32.

Zeugnisse ihren Wert behalten. Es wird verständlich, weshalb GEMINOS sagen konnte, daß der Satz zuerst am gleichseitigen, gleichschenkligen und ungleichseitigen Dreieck erkannt worden war und erst später allgemein bewiesen wurde. Es zeigt sich, warum im pythagoreischen Beweis die Parallele durch die Spitze gezogen war. Ja es ergibt sich sogar eine mögliche Erklärung für jene etwas seltsame ARISTOTELES-Stelle: Wäre es nicht denkbar, daß ARISTOTELES und EUDEMOS auch hier¹ aus derselben Quelle schöpften, die eine der obigen Rekonstruktion ähnliche Aussage machte? EUDEMOS hat diesen Bericht in seiner Geschichte der Geometrie sinngemäß und ausführlich wiedergegeben (Auszüge davon sind die bei EUTOKIOS und PROKLOS überlieferten Stellen). ARISTOTELES dagegen wollte ihn zur Erläuterung einer erkenntnistheoretischen These benützen. Er hat ihn dabei bewußt oder unbewußt leicht verändert. Bei ihm sind die nach dem Vorschlag von BECKER (verschiedene Beweise) und CANTOR (gleicher Beweis) für die drei Arten von Dreiecken geführten Beweise nicht mehr deshalb ungenügend, weil sie auf der Anschauung beruhen, sondern weil der Beweis nur für jede Art von Dreieck, aber nicht für das Dreieck an sich, erbracht wurde. ARISTOTELES hat übrigens auch an einigen anderen Stellen mathematische Berichte ungenau wiedergegeben².

¹ Vgl. E. NEUENSCHWANDER, Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids, S. 359f.

² Die bekannteste Stelle ist diejenige über die Kreisquadratur des Hippokrates. Vgl. T. L. HEATH, Mathematics in Aristotle, S. 33, 47 et passim.

Meientalstraße 71
8048 Zürich

(Eingegangen am 15. April 1973)