

83/309

ΠΡΑΚΤΙΚΑ ΤΗΣ ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ ΑΘΗΝΩΝ (43)

6182

SZABO, A.

1968

ΣΥΝΕΔΡΙΑ ΤΗΣ 16^{ΗΣ} ΜΑΪΟΥ 1968

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ ΜΗ ΜΕΛΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.— **Wie kamen die Pythagoreer zu dem Satz Eucl.,**

Elem. II 5?*, *ὕπὸ Árpád Szabó***.
Ἀνεκοινώθη ὑπὸ τοῦ Ἀκαδημαϊκοῦ κ. Φύλ. Βασιλείου.

- I. Der bisherige Stand der Forschung
- II. Meine These: II 5 ist ein Hilfssatz zu dem Beweis des hochwichtigen Satzes II 14
- III. Elemente einer pythagoreischen Theorie über die Flächenbestandteile der Parallelelogramme
- IV. Wie findet man zu einem gegebenen Rechteck das flächengleiche Quadrat?
- V. Zusammenfassung

I.

Man hält den Satz «Elem.» II 5 — nach den Ergebnissen jener historischen Forschung, die heute gewissermassen als *consensus doctorum* gilt — für einen Bestandteil der *altpythagoreischen Mathematik*, genauer: für einen Satz der sog. *«geometrischen Algebra der Pythagoreer»*. Gewöhnlich wird nämlich dieser Satz zusammen mit dem unmittelbar nach ihm folgenden, dem Satz II 6 behandelt. Diese beiden besagen:

II 5: «Teilt man eine Strecke sowohl in gleiche als auch in un-

* ÁRPÁD SZABÓ, Πώς οι Πυθαγόρειοι ἔφθασαν εἰς τὴν πρότασιν II 5 τῶν «Στοιχείων» τοῦ Εὐκλείδους;

** Mathematisches Forschungsinstitut der Ungarischen Akademie der Wissenschaften - Budapest.

gleiche Abschnitte, so ist das Rechteck aus den ungleichen Abschnitten der ganzen Strecke zusammen mit dem Quadrat über der Strecke zwischen den Teilpunkten dem Quadrat über der Hälfte gleich.»

und II 6: «Halbiert man eine Strecke und setzt man ihr irgendeine Strecke gerade an, so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung, zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte, dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke gleich.»

Man liest in der heute massgeblichen historischen Darstellung der griechischen Mathematik über den Satz II 5 die Feststellung, dass dieser sich als ein geometrisches Äquivalent für unsere algebraische Formel

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$

bzw. für

$$a^2 = (a - b) \cdot (a + b) + b^2$$

auffassen lässt¹. Aber eigentlich besagt dasselbe auch der Satz II 6. Wozu diese «*seltsame doppelte Form*»? — Es wurde versucht, dieses Rätsel folgendermassen zu erklären²: im Grunde wären II 5 und II 6 nicht Sätze, sondern *Lösungen von Aufgaben*: es handelte sich in II 5 um die Konstruktion von zwei Strecken x und y , deren *Summe und Produkt* gegeben sind, während in II 6 die *Differenz und das Produkt* gegeben sind. Unter «Aufgaben» — um deren Lösung es sich hier handeln soll — verstand man eigentlich «*algebraische Aufgaben*», die man erst nachträglich in geometrisches Gewand gekleidet hätte³. Ursprünglich hätten nämlich noch die Babylonier sich diese algebraischen Aufgaben gestellt und gelöst; ⁴ und die Pythagoreer hätten — wie es uns versichert wird — offensichtlich die babylonischen Regeln zur Lösung der algebraischen Systeme geometrisch formuliert und bewiesen⁵.

Ablehnen muss ich diese historische Interpretation aus den folgenden Gründen:

1. Selbst wenn wir glauben, dass es eine «babylonische Algebra» wirklich gegeben hatte — wie O. NEUGEBAUERS Forschungen uns davon überzeugen möchten —, auch dann hat man bisher noch *mit gar keiner konkreten Angabe* wahrscheinlich machen können, dass die Griechen in voreuklidischer Zeit eine solche Algebra wirklich gekannt hatten, geschweige denn, dass sie dieselbe übernommen und geometrisiert hätten.

(Die Griechen haben nicht einmal die positionelle Bezeichnungsart der Zahlen von den Babyloniern übernommen!)

2. Jene Sätze bei EUKLID, die man gewohnt ist — seit einer Arbeit von P. TANNERY⁶ — als «algebraische Sätze in geometrischem Gewand» anzusehen, haben mit der Algebra in der Wirklichkeit nur soviel zu tun, dass wir in der Tat sehr leicht unsere algebraischen Äquivalente für diese Sätze angeben können. Aber es kann gar keine Rede davon sein, dass diese Theoreme ursprünglich «*algebraische Sätze*», oder Lösungen für «*algebraische Aufgaben*» gewesen wären. Nein, diese sind alle — sowohl die Sätze, wie auch die Aufgaben — *rein geometrischen Ursprungs*. Auch II 5 ist ein rein geometrischer Satz. Wohl kann man diesen Satz in der modernen Interpretation mit einer «algebraischen Aufgabenlösung» *vergleichen*. Aber man nehme sich in acht, damit ein solcher Vergleich den ursprünglichen und echt geometrischen Sinn des Satzes nicht verdunkle!

II.

Nach meiner historischen Interpretation ist II 5 — wie man es im folgenden sehen wird — ein rein geometrischer Hilfssatz zu der Lösung bzw. zu dem Lösungsbeweis jener ebenfalls rein geometrischen Aufgabe, die in dem Satz II 14 folgendermassen gestellt wird:

«Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten».

Dass der Satz II 5 in der Tat ein Hilfssatz zu dem eben genannten II 14 ist, das ersieht man zunächst nicht bloss aus den modernen Ausgaben und Übersetzungen, in denen anlässlich des Satzes II 14 auf II 5 meistens zurückverwiesen wird, sondern noch mehr aus dem *Wortlaut des Urtextes*. Denn in dem Beweisteil des Satzes II 14 wird ja der Wortlaut von II 5 weitgehend wiederholt — zum Zeichen dessen, dass auch der antike Verfasser auf II 5 zurückverweisen wollte.

Ja, denkt man an die komplizierte, schwerfällige sprachliche Form des II 5, so muss man sich unwillkürlich fragen: ist dieser Satz nicht sozusagen ein «Fertigbauteil» zu dem anderen (II 14)? Musste der antike Verfasser den II 5 nicht eben deswegen so kompliziert und schwerfällig formulieren, weil er im voraus wusste, dass er das betreffende Theorem *eben in dieser, scheinbar schwerfälligen sprachlichen Form* wird in dem Beweis des II 14 am bequemsten gebrauchen können? — Ich werde in dem fol-

genden zeigen, dass zwischen den beiden Sätzen — II 5 und II 14 — in der Tat eben dieser Zusammenhang besteht.

Aber ich möchte hier nebenbei auch darauf hinweisen, dass offenbar eine ebensolche Erklärung auch noch für andere Sätze bei EUKLID gültig sein muss, die man bisher ähnlicherweise als Bestandteile einer «geometrischen Algebra» erklären wollte. Der oben zitierte Satz II 6 ist z. B. ein ebenso *rein geometrischer Hilfssatz* (ebenfalls ein «Fertigbauteil») zu dem Beweis des Satzes II 11, wie II 5 zu dem Beweis des Satzes II 14. Der Satz II 6 sieht nur darum als ein «Spezialfall» des II 5 aus, weil auch sein Hauptsatz, der hochinteressante II 11 (zu dessen Beweis II 6 benutzt wird) im Grunde nur ein Spezialfall des II 14 ist. Kein Wunder, dass eben deswegen auch die Hilfssätze — II 5 und 6 — zu den beiden hochwichtigen Sätzen II 14 und II 11 als Spezialfälle voneinander aussehen.

Ja, genau auf dieselbe Weise ein *rein geometrischer Hilfssatz*, ein «Fertigbauteil» ist auch der Satz II 10, den man ebenfalls zu der «geometrischen Algebra» hinzurechnen wollte⁷. Dass in der Wirklichkeit derselbe Satz (II 10) ein Hilfssatz ist, wird durch PROKLOS bezeugt⁸. Wohl wurde in diesem Fall das betreffende altpythagoreische Theorem, zu dessen Beweis man II 10 benutzt hatte, in EUKLIDS «Elemente» *nicht* aufgenommen, aber die moderne Forschung vermochte dasselbe Theorem — eben aufgrund der erwähnten PROKLOS-Stelle — über jeden Zweifel zu rekonstruieren⁹.

Ich möchte jedoch in diesem Zusammenhang einstweilen nur die Genesis des Satzes II 5 näher beleuchten. Darum muss ich in dem nächsten Kapitel vor allem an einige Elemente einer interessanten pythagoreischen Theorie über die Flächebestandteile der Parallelogramme erinnern.

III.

Wir wollen zunächst von jener Szene in PLATONS Dialog «Mennon» (82 B - 85 E) ausgehen, wonach dem ungelernten Sklaven durch SOKRATES die Frage gestellt wird: wie verdoppelt man die Fläche jenes Quadrats (in Quadratform), dessen Seite 2 *Fuss lang* ist. Mit anderen Worten: wie lang wird die Seite jenes anderen Quadrats — *als eine Zahl ausgedrückt* —, dessen Fläche das Doppelte der Fläche des gegebenen mit 2 *Fuss langer Seite* darstellt? — Der Sklave glaubt zunächst, dass man, um

die Fläche des Quadrats zu verdoppeln, seine Seite verdoppeln müsste. Er möchte also das gesuchte Längenmass als die *Zahl 4* angeben. Aber SOKRATES zeigt ihm, sogleich nach dieser ersten Antwort, dass durch die Verdoppelung der Seite die Fläche des Quadrats nicht verdoppelt sondern vervierfacht wird. (Die Fläche des Quadrats mit 4 Fuss langer Seite besteht aus 16 kleinen Quadraten, wobei das Ausgangsquadrat aus 4 solchen bestand; siehe *Abb. 1*). Der nächste Versuch des Sklaven — das Längenmass der gesuchten Quadratseite *als eine Zahl* zu bestimmen — geht darauf hinaus, dass vielleicht das Quadrat mit 3 Fuss langer Seite die doppelte Fläche des Quadrats mit 2 Fuss langer Seite haben könnte. Aber SOKRATES zeigt —wieder vermittelt einer Zeichnung (siehe *Abb. 2*) —, dass die Fläche des Quadrats mit 3 Fuss langer Seite aus 9 kleinen Quadraten besteht, also keineswegs das Doppelte der ursprünglichen Quadratfläche ist. — Es wird also in diesen beiden ersten Versuchen wohl angedeutet, dass die Seite des Quadrats, dessen Fläche das Doppelte eines anderen (kleineren) Quadrats mit zahlenmässig bestimmter Seite darstellt, *sich nicht als eine Zahl angeben lässt*. In der Tat ist die gesuchte Quadratseite — zu der Seite des gegebenen Quadrats — eine *der Länge nach inkommensurable Grösse*. Merkwürdigerweise wird jedoch das Problem der Inkommensurabilität in unserer PLATON-Szene ausdrücklich *nicht* erwähnt. Anstatt dessen zeigt SOKRATES — vermittelt einer neuen Zeichnung (*Abb. 3*) —, dass die *Diagonale* die Fläche des Quadrats in zwei untereinander gleiche gleichschenklige auflöst, und dass man eben deswegen mit der Diagonale als Seite ein solches grösseres Quadrat konstruieren kann, dessen Fläche — wie die Zeichnung zeigt — gerade das Doppelte der ursprünglichen Quadratfläche ausmacht.

Ich glaube, wir dürfen aufgrund dieser 'Menon'-Szene zu rekonstruieren versuchen, wie einst die griechischen Mathematiker die lineare Inkommensurabilität entdeckt haben mögen. — Es tauchte zunächst in der *Geometrie* ein *arithmetisches* Problem auf. Man ging von einem Quadrat aus, dessen Seite als eine *Zahl* gegeben war, und man wollte die Seite des dazugehörigen anderen Quadrats mit gerade doppeltem Flächeninhalt ebenfalls als eine *Zahl* angeben. Aber diese Aufgabe erwies sich innerhalb der *Arithmetik* — unter Beachtung der grundlegenden Euklidischen Definition für die « Zahl » (VII def. 2) als *unlösbar*. Interessant war jedoch dasselbe Problem auch von der *Geometrie* her betrachtet.

Nachdem man nämlich eingesehen hatte, dass die Fläche eines beliebigen Quadrats mit der *Diagonale* desselben als mit Seite eines grösseren Quadrats, sich verdoppeln lässt, und nachdem die Länge dieser Diagonale — im Verhältnis zu der Seite — *sich zahlenmässig nicht bestimmen liess*, musste man wohl bald dahinterkommen dass die Diagonale des Quadrats zu der Seite *linear inkommensurabel ist*. Die Entdeckung der linearen Inkommensurabilität ging jedoch Hand in Hand mit der Erkenntnis der quadratischen *Kommensurabilität*. Die Diagonale des Quadrats ist im Verhältnis zu der Seite nur der Länge nach unmmessbar; nachdem sie jedoch als Seite eines neuen Quadrats gerade die doppelte Fläche des ursprünglichen ergibt, ist sie *quadratisch messbar*. — Die Schwierigkeit der *linearen Inkommensurabilität* kann also auf dem Wege der *quadratischen Kommensurabilität* umgegangen werden.

Noch interessanter wird dieselbe 'Menon'-Szene von historischem Gesichtspunkt aus, wenn man bedenkt, dass das *arithmetische Problem der Quadratverdoppelung* mit dem Problem der *Mittleren Proportionale zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten* äquivalent ist¹⁰. Es muss in der Tat den pythagoreischen Arithmetikern der folgende Satz bekannt gewesen sein:

«Zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten gibt es keine mittlere Proportionalzahl».

Ich erschliesse die Kenntnis dieses Satzes aus dem noch stärkeren Satz *Sectio canonis 3*, der besagt:

«Zwischen zwei Zahlen in überteiligem Verhältnis — also: $(n+1):n$ — gibt es keine mittlere Proportionalzahl».

Nun glaube ich — unter Berücksichtigung des eben angeführten arithmetischen Satzes, sowie der vorhin erwähnten 'Menon'-Szene — drei interessante Schritte in der Entwicklung der voreuklidischen Mathematik folgendermassen rekonstruieren zu dürfen:

a.) Es tauchten zunächst in der Arithmetik Probleme auf, die man *nicht* lösen konnte. Man ist dann, auf dem Wege der genaueren Untersuchung, bald dahintergekommen, dass diese Probleme in der Arithmetik entweder *völlig unlösbar*, oder *nur unter gewissen Bedingungen lösbar* sind. — Ein solches unlösbares Problem der Arithmetik war z. B. die mittlere Proportionalzahl (x) zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten (also zwischen a und $2a$). Es war natürlich eine grosse Errungenschaft, wenn man schon aussagen, und

auch begründen konnte: warum es eine solche Zahl *nicht* geben kann.

b.) Man hat wohl erst verhältnismässig *später* entdeckt, dass man dieselben *unlösbaren* (oder auch *nur unter gewissen Bedingungen lösba-*
ren) arithmetischen Probleme auf geometrischem Wege leicht lösen kann. Ist z. B. *a* *nicht* eine Zahl sondern eine beliebige gerade Strecke, so findet man die Mittlere Proportionale (*x*) zwischen *a* und *2a* auf dem Wege, dass man mit *a* als Seite ein Quadrat konstruiert; die Diagonale (*d*) dieses Quadrats wird die gesuchte Mittlere Proportionale ($d = x$), nachdem $a:d = d:2a$ ist. Man beweist die letztere Proportionalität mit Hilfe von ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken (siehe z. B. meine Abb. 3) — *gesetzt, dass die Verhältnissgleichheit (= Proportionalität) auch für inkommensurable Grössen definiert ist, wie z. B. in der sog. eudoxischen Definition bei EUKLID, «Elem.» V def. 5.* — Man sieht also, dass auf dieser Entwicklungsstufe die geometrische Lösung derselben Aufgabe, die auf Stufe a.) *arithmetisch unlösbar* erschien, auf das engste verbunden ist — nicht nur mit der Kenntnis der *Inkommensurabilität*, sondern auch mit derjenigen der *eudoxischen Definition der Proportionalität*.

c.) Es gibt jedoch auch eine «mittlere Entwicklungsstufe»¹¹ zwischen a.) und b.) Man kann nämlich die arithmetisch unlösbaren Probleme der Stufe a.) geometrisch auch so lösen, dass dabei weder das Problem der Kommensurabilität (bzw. Inkommensurabilität) noch die Frage der Proportionen berücksichtigt werden. Allerdings muss man dazu die ursprüngliche Aufgabe *transformieren*. Man fragt z. B. in dem vorhin behandelten Fall *nicht* nach der Mittleren Proportionale zwischen einer Zahl (oder Grösse) und ihrem Doppelten, sondern man fragt *nach jener Strecke, mit deren Hilfe ein Quadrat mit gegebener Seite (a) sich verdoppeln lässt*. Diese letztere Frage ist der vorigen (nach der Mittleren Proportionale) völlig gleichwertig; doch braucht man nach der Transformation sich gar nicht mehr um die Proportionen und um die Frage der Inkommensurabilität zu kümmern. Die grosse Bedeutung dieser mittleren Entwicklungsstufe besteht eben darin, dass die Transformation der Aufgabe die Probleme der Proportionen und der Inkommensurabilität sozusagen *ausschaltet*. Vermutlich eben die Entdeckung dessen, dass die ange-

deutete Transformation möglich ist, hat den Ausbau jener interessanten pythagoreischen 'Flächengeometrie' veranlasst, die ich in dem folgenden behandeln werde, und die man früher als «geometrische Algebra» interpretieren wollte.

★

Nun möchte ich hier vor allem darauf hinweisen, dass jene historische Entwicklung in drei Stufen, die ich (in den Punkten *a.*, *b.* und *c.*) zu konstruieren versuchte, sich in der Tat mit zahlreichen Beispielen aus EUKLID'S «Elementen» illustrieren lässt. Es seien hier darum zunächst drei Beispiele dafür eingefügt.

Erstes Beispiel

Stufe a.) Man denke an die folgenden arithmetischen Sätze in den «Elementen»:

IX. 16: «Sind zwei Zahlen gegeneinander prim, so ist nicht möglich, dass, wie die erste zur zweiten, sich die zweite zu einer weiteren verhielte.» (Sind also a und b relativ prim, so gibt es keine x , worauf $a:b = b:x$ wäre).

IX. 18: «Bei zwei gegebenen Zahlen zu prüfen, ob es möglich ist, zu ihnen eine Dritte Proportionale zu finden». (Also wie sollen die Zahlen a und b beschaffen sein, damit man eine x finden könne, worauf $a:b = b:x$ ist?)

IX. 19: «Bei drei gegebenen Zahlen zu prüfen, ob es möglich ist, zu ihnen eine Vierte Proportionale zu finden.» (Wie sollen die Zahlen a , b und c beschaffen sein, damit man eine x finden könne, worauf $a:b = c:x$ ist?)

Man ersieht aus diesen Sätzen, dass es zu jener Zeit, als diese abgefasst wurden, den Arithmetikern schon bekannt war: die Aufgabe, eine Dritte Proportionale zu zwei gegebenen Zahlen, a und b — oder eine Vierte Proportionale zu drei gegebenen Zahlen, a , b und c — zu finden, ist *nur unter gewissen Bedingungen lösbar*.

Stufe b.) Natürlich kann man dieselben in der Geometrie — wenn a , b und c keine Zahlen, sondern beliebige gerade Strecken sind — *immer lösen*. Eben dies wird bei EUKLID in den Sätzen VII 11 und 12 gezeigt. Doch werden die Konstruktionen der letzteren Sätze *nur*

aufgrund der *eudoxischen Definition der Proportionalität* gültig. Denn die gefundene Dritte bzw. Vierte Proportionale wird ja häufig eine *inkommensurable Grösse*.

Stufe c.) Man kann jedoch dieselben Aufgaben — auf einer vermutlich mittleren Entwicklungsstufe — auch *ohne Rücksicht auf Proportionen und Inkommensurabilität* allgemeingültig lösen, wenn man die folgende Transformation vollzieht. Die Frage nach der Dritten Proportionale zu zwei gegebenen Zahlen oder Grössen ($a:b = b:x$) lässt sich auch so auffassen: gegeben ist das Quadrat b^2 , und man sucht das flächengleiche Rechteck ax , dessen eine Seite (a) ebenfalls gegeben ist. Ähnlicherweise transformiert man die Frage nach der Vierten Proportionale ($a:b = c:x$): gegeben ist das Rechteck bc , und man sucht das andere flächengleiche Rechteck mit der einen gegebenen Seite a . — Für beide Aufgaben gilt der Euklidische Satz:

I 44: «*An eine gegebene Strecke in einem gegebenen Dreieck gleiches Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel anzulegen.*»

(Nur zuliebe einer grösseren Allgemeingültigkeit ist in dem Wortlaut dieses Satzes die gegebene Fläche, anstatt eines *Rechtecks*, ein «Dreieck»; und eben darum redet auch EUKLID anstatt des anderen *Rechtecks* von einem «Parallelogramm in einem gegebenen geradlinigen Winkel».) Das ist die bekannte *parabolische Flächenanlegung* der Pythagoreer, bei der die Inkommensurabilität und die Proportionen *nicht* berücksichtigt werden.

Zweites Beispiel

Stufe a.) Man beachte die beiden Sätze bei EUKLID:¹²

VIII 18: «*Zwischen zwei ähnlichen ebenen Zahlen gibt es eine Mittlere Proportionalzahl.*»

und VIII 20: «*Lässt sich zwischen zwei Zahlen eine Mittlere Proportionalzahl einschalten, so müssen die Zahlen ähnliche ebene Zahlen sein.*»

(Zugrundeliegen beiden Sätzen die Definitionen: VII def. 16 und def. 21.) Im Sinne dieser beiden Sätze gibt es also zwischen zwei Zahlen, a und b , nur dann eine Mittlere Proportionalzahl, wenn eine solche Faktorenzersetzung möglich ist: $a = cd$ und $b = ef$, wobei $c:e = d:f$ ist. Wird diese Bedingung nicht erfüllt, so findet man

keine Mittlere Proportionalzahl zwischen den beiden gegebenen Zahlen, d. h. die betreffende Aufgabe ist *arithmetisch unlösbar*.

Stufe b.) Sind jedoch a und b keine Zahlen sondern beliebige gerade Strecken, so findet man zu ihnen *immer* die Mittlere Proportionale nach dem Euklidischen Satz VI 13. Doch ist die Konstruktion des letzteren Satzes wieder nur aufgrund der *eudoxischen Definition der Proportionalität* gültig. Denn die gefundene Mittlere Proportionale wird ja häufig eine *inkommensurable Grösse*.

Stufe c.) Man kann dasselbe Problem auf einer «mittleren Entwicklungsstufe» mit der folgenden Transformation lösen. Die Frage nach der Mittleren Proportionale zwischen zwei gegebenen Zahlen oder Grössen ($a : x = x : b$) ist gleichwertig mit dem Problem: gegeben ist das Rechteck ab , und man sucht dazu das flächengleiche Quadrat (x^2). — Gerade diese Aufgabe wird bei EUKLID — *ohne Proportionen und ohne Rücksicht auf die Inkommensurabilität* — in dem Satz II 14 gelöst.

Drittes Beispiel

Stufe a.) Als drittes Beispiel möchte ich den sog. 'pythagoreischen Lehrsatz' selbst anführen. Wie bekannt, lässt sich dieser Satz *arithmetisch* nur dann verifizieren, wenn die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sog. 'pythagoreische Zahltripel' (also etwa 3, 4, 5; oder 7, 24, 25 etc.) sind. Es scheint, dass die Bahnbrecher der griechischen Mathematik in der Tat an dieser arithmetischen Verifikation interessiert waren. (Wohl darum hat man auch Regeln dafür ausgearbeitet, wie man solche Tripel in unbeschränkter Anzahl herstellen kann¹³.) Nun ist also die Verifikation des 'pythagoreischen Lehrsatzes' wohl auch eine solche Aufgabe, die *in der Arithmetik nur unter sehr beschränkten Bedingungen lösbar ist*.

Stufe b.) Allgemeingültig beweist man den 'pythagoreischen Lehrsatz' meistens mit Hilfe von *Proportionen*, indem man von dem rechten Winkel auf die Hypotenuse das Lot fällt, und dadurch das gegebene rechtwinklige Dreieck in zwei kleinere, sowohl untereinander wie auch zu dem ursprünglichen Dreieck ähnliche rechtwinklige Dreiecke auflöst. Nachdem die Seiten der ähnlichen Dreiecke unter-

einander proportionell sind, kann man aus den entsprechenden Proportionen die bekannte Formel $a^2 + b^2 = c^2$ leicht ableiten. — Wohl ist ein solcher Beweis bei EUKLID *nicht* überliefert worden. Da jedoch eine allgemeinere Form des 'pythagoreischen Lehrsatzes' auch bei EUKLID (VI 31) mit *Proportionen* bewiesen wird, kann man mit Recht vermuten, dass der Beweis mit Proportionen für die gewöhnliche Form desselben Satzes auch schon in voreuklidischer Zeit wohl benutzt wurde. — Doch wird ein solcher Beweis mit Proportionen *nur* dann zwingend, wenn die Proportionalität auch für inkommensurable Grössen irgendwie schon definiert ist. (Diese Aufgabe erfüllt bei EUKLID die eudoxische Definition: V def. 5).

Stufe c.) Bei EUKLID wird der 'pythagoreische Lehrsatz' (I 47) nicht mit Proportionen, sondern mit einer Art 'Flächengeometrie' bewiesen, für welche dasselbe charakteristisch ist, was auch in den beiden anderen Beispielen die *Stufe c.* kennzeichnet, dass sie nämlich *die Proportionen und das Problem der Inkommensurabilität gar nicht berücksichtigt*. (Zu dem folgenden siehe *Abb. 4*) Verlängert man nämlich das Lot (CD) von dem rechten Winkel eines allgemeinen rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse, so wird dadurch — also durch DE — das Quadrat auf der Hypotenuse in die beiden Rechtecke «R₁» und «R₂» geteilt. Dass nun «R₁» = «Q₁» und «R₂» = «Q₂» ist, wird folgendermassen gezeigt. Die beiden schraffierten Dreiecke CAF und HAB (*Abb. 5*) sind offenbar kongruent; je zwei Seiten und ihr Winkel sind nämlich auf alle Fälle gleich. Das eine Dreieck (HAB) macht dabei die halbe Fläche von «Q₁», während das andere (CAF) die halbe Fläche von «R₁» aus (vgl. den Satz I 41 bei EUKLID). Darum müssen also auch die ganzen Flächen «Q₁» und «R₁» untereinander gleich sein. — Mit ebensolchen «Hilfsdreiecken» beweist man auch die Gleichheit von «Q₂» und «R₂»; und addiert man dann die beiden Teilergebnisse für «R₁» und «R₂», so hat man damit den pythagoreischen Lehrsatz 'flächengeometrisch' bewiesen.

Nun hoffe ich, sowohl mit dem 'Menon'-Beispiel wie auch mit den danach angeführten anderen drei Beispielen im voraus wahrscheinlich gemacht zu haben, dass jene 'Flächengeometrie', deren elementare Bestandteile in dem folgenden zusammengestellt werden — also die

Stufen c.—die Anwendung von Proportionen und das Problem der Inkommensurabilität zu beseitigen bestrebt war.

★

Wir werden die elementarsten Bestandteile jener 'Flächengeometrie', die bisher, nach einem Vergleich von P. TANNERY,¹¹ als «geometrische Algebra» ausgelegt wurde, in *drei Punkten* überblicken.

1. Es wird sich lohnen, wieder von der Sklavenszene in PLATONS Dialog 'Menon' auszugehen.—SOKRATES zeigt dem Sklaven zunächst ein Quadrat mit 2 Fuss langer Seite. Das gezeichnete Quadrat besteht also aus vier kleineren, nachdem die Seite *zweigeteilt* ist. Später wird durch SOKRATES auch darauf hingewiesen, dass die *Diagonale* die Quadratfläche *halbiert*. (Siehe Abb. 6 sowohl für die Auflösung der Quadratfläche in vier kleinere Quadrate, wie auch für die Halbierung mittels der Diagonale. Schon hier muss ich auch die triviale Tatsache hervorheben, dass die Strecken, die die Seiten halbieren, und die Diagonale sich *in einem Punkt* schneiden. Dieser Schnittpunkt der Diagonale wird in dem folgenden eine wichtige Rolle spielen.) Nun sind die beiden Arten, die Quadratfläche in kleinere Bestandteile aufzulösen — also das Teilen mittels der Diagonale einerseits, und das Halbieren der Seiten andererseits—, *in je einer allgemeineren Form*, auch als Euklidische Sätze überliefert worden. Denn bei EUKLID wird ja in dem Satz I 34 gerade dasselbe, was SOKRATES über die Quadratdiagonale ausspricht, auf Parallelogramme verallgemeinert: «*das Parallelogramm wird durch seine Diagonale halbiert*».— Noch interessanter ist die Euklidische Verallgemeinerung dessen, wie man das Quadrat durch *Teilen der Seite* in kleinere Flächenbestandteile auflöst. SOKRATES ging von jenem einfachsten Fall aus, dass die Seite des Quadrats *halbiert* wird; dies führt zu vier kleineren kongruenten Quadraten. Aber wie wird die Quadratfläche aufgelöst, wenn man die Seite in zwei *beliebige Segmente* teilt? Gerade dies wird bei Euklid in dem Satz II 4 behandelt:

«*Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten zusammen gleich*».

Durch das Teilen der Quadratseite in zwei beliebige Segmente wird also die Quadratfläche selbst in die Summe von zwei verschiedenen Qua-

draten und von zwei kongruenten Rechtecken aufgelöst (siehe *Abb. 7*).— Wohl ist dieser Euklidische Satz das geometrische Äquivalent für unsere algebraische Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, aber ich glaube nicht, dass man diese Tatsache in dem Sinne auslegen dürfte, als ob hier die «nachträgliche Geometrisierung eines ursprünglich algebraischen Gedankenganges» vorläge. Denn erstens kann man aus der griechischen Überlieferung der voreuklidischen und Euklidischen Zeit die Spuren von irgendwelchen echt algebraischen Gedankengängen gar nicht nachweisen. Und zweitens würde man durch die eben angedeutete historische Auslegung auch den *grundlegenden Unterschied* zwischen der angeführten algebraischen Formel und dem vorhin zitierten Euklidischen Satz unerlaubterweise verwischen. Schliesslich ist ja der Ausdruck $(a+b)^2$ in der Algebra viel allgemeingültiger als der entsprechende bloss-geometrische Satz bei EUKLID. (Der geometrische Satz ist nur *eine mögliche* Auslegung für die algebraische Formel, die jedoch keineswegs nur «Quadrate» und «Rechtecke» bedeuten kann!)

2. Es lässt sich zeigen, dass die Pythagoreer den eben zitierten Satz II 4 — über die Auflösung der Quadratfläche durch das Teilen der Seite in zwei beliebige Segmente — auch auf *Parallelelogramme* verallgemeinert hatten. Ihr alter Satz hiess etwa folgendermassen (siehe *Abb. 8*):

«Zieht man durch einen beliebigen Punkt der Diagonale zwei Parallelen zu den beiden Seiten eines Parallelogramms, so wird dadurch die Fläche des Parallelogramms in insgesamt *vier* Flächenstücke zerlegt. Von diesen vier Flächenstücken sind zwei — die beiden 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme' (die leergelassenen Flächenstücke in *Abb. 8*) — sowohl untereinander wie auch zu dem ursprünglichen Parallelogramm *ähnlich*, während die beiden anderen Flächenstücke — die sog. *παραπληρώματα* (schraffiert in *Abb. 8*) — untereinander *gleich* sind».

Wohl ist dieser Satz zunächst nur meine eigene Rekonstruktion. Man findet ihn bei EUKLID nirgends in dieser wiederhergestellten Form. Denn EUKLID musste ihn — offenbar aus kompositorischen Gründen — in *zwei Sätze* zerlegen, von denen den *eine* erst im Buch VI. der «Elemente» untergebracht werden konnte. In der Tat behandelt der Satz VI 24 die

ΗΑΑ 1968

Ähnlichkeit der 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme'; zu dem vollständigen Beweis dieses Satzes ist ja die *eudoxische Definition der Proportionalität* im V. Buch (V def. 5) unerlässlich nötig. — Dagegen konnte die andere Hälfte des rekonstruierten Satzes — über die *Gleichheit der 'Ergänzungen' (parapleromata)* — auch schon im I. Buch behandelt werden (I 43), nachdem in diesem Fall die Proportionalität und die Inkommensurabilität gar nicht berücksichtigt werden mussten. Der Beweis für diesen letzteren Satz wird einfach auf dem Wege von Subtraktion der überflüssigen Flächenstücke geführt.

Num muss ich hier nachdrücklich betonen, dass der von mir eben rekonstruierte Satz eine sehr wichtige Rolle in jener 'pythagoreischen Flächengeometrie' gespielt hatte, die nach P. TANNERY den unglücklichen und irreführenden Namen «geometrische Algebra» erhielt. Der Satz über die Gleichheit der 'parapleromata' hat z. B. jene *parabolische Flächenanlegung* der Pythagoreer¹⁵ ermöglicht, auf die ich hier nochmals hinweisen möchte. — Es wurde oben, anlässlich meines «ersten Beispiels», schon erwähnt, dass man die Suche nach der Vierten Proportionale zu drei gegebenen *Zahlen oder Grössen* ($a : b = c : x$) auch so auffassen kann: gegeben ist das Rechteck bc , und man sucht dazu das andere flächengleiche Rechteck, dessen eine Seite (a) ebenfalls gegeben ist. Nun wird diese Aufgabe bei EUKLID in dem Satz I 44 aufgrund der folgenden Überlegung gelöst (siehe *Abb. 9 und 10*): man fasst das gegebene Rechteck bc als ein 'parapleroma' auf. Eine beliebige Seite des gegebenen Rechtecks (c oder b) und die Strecke a ergeben im ersten Schritt das eine 'um die Diagonale liegende Parallelogramm' (ac oder ab). Die Verlängerung der Diagonale selbst und die Verlängerung der Rechteckseite (c oder b) ergeben im zweiten Schritt auch das andere 'um die Diagonale liegende Parallelogramm' (bx oder cx). Nachdem man nun das eine 'parapleroma' und die beiden 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme' gewonnen hat, muss man nur noch das andere 'parapleroma' bzw. seine gesuchte Seite x hinzufügen. (*Parabolisch* heisst diese Art Flächenanlegung deswegen, weil die gegebene Fläche bc an die gegebene Strecke a *angelegt* wird; vgl. das Wort παραβάλλειν).

Aber es gibt auch einen anderen, wie mir scheint, noch wesentlicheren Beleg dafür, dass der vorhin rekonstruierte Satz eine sehr bedeu-

tende Rolle in der Geometrie der Pythagoreer gespielt haben muss. Fasse man nur noch einmal denselben Satz ins Auge. Man zieht durch einen beliebigen Punkt der Diagonale zwei Parallelen zu den beiden Seiten eines Parallelogramms; es wird dadurch die gegebene Fläche in zwei solche Flächenstücke zerlegt, die untereinander *gleich*, und in zwei andere, die untereinander (und zu dem ursprünglichen Parallelogramm) *ähnlich* sind. — Hat nicht eben diese, an und für sich einfache und doch schöne Entdeckung auch zu jener berühmten *altpythagoreischen Aufgabe* geführt, über die PLUTARCH bei einer Gelegenheit (Symp. VIII 2,4) folgendermassen berichtet:

«Es gibt unter den schönsten geometrischen Theoremen, oder eher Problemen, die folgende: gegeben sind zwei Figuren, und man soll eine dritte konstruieren, die der einen von den gegebenen *gleich* und der anderen von den gegebenen *ähnlich* ist. Man sagt auch, dass PYTHAGORAS in seiner Freude über diese Entdeckung sein berühmtes Opfer dargebracht hätte. Kein Zweifel, dieses Theorem ist in der Tat viel raffinierter und der Wissenschaft viel würdiger, als jenes andere, wonach das Quadrat auf der Hypotenuse der Summe der Quadrate auf den beiden Katheten *gleich* ist»¹⁶.

3. Zum Schluss muss ich unter den elementaren Bestandteilen der behandelten pythagoreischen 'Flächengeometrie' noch die Euklidische Definition für den geometrischen Begriff '*Gnomon*' anführen:

II def. 2: «In jedem Parallelogramm soll ein beliebiges der um seine Diagonale liegenden Parallelogramme zusammen mit den beiden Ergänzungen (*parapleromata*) ein *Gnomon* heissen».

Wie man sieht, hat auch zu diesem Begriff die vorhin behandelte *Vierteilung* des Parallelogramms geführt. Man zieht nämlich durch einen beliebigen Punkt der Diagonale zwei Parallelen zu den beiden Seiten des Parallelogramms. Aber diesmal werden von den insgesamt *vier* Flächenstücken, die auf diese Weise entstehen, *drei* — ein beliebiges der 'um die Diagonale liegenden Parallelogramme' und die beiden '*parapleromata*' — als «*Gnomon*» zusammengefasst. Zur Illustrierung zeige ich als *Abb. 11* den *Gnomon* eines Quadrats. Die drei Bestandteile des Gnomons wurden durch verschiedene Schraffierungen kenntlich gemacht. Ausserdem zeigt

diese Abbildung auch noch, dass das ursprüngliche Quadrat (x^2) diesmal in die Summe des kleineren Quadrats (y^2) und des *Gnomons* aufgelöst wurde. (Mit anderen Worten: subtrahiert man das kleinere Quadrat y^2 von dem grösseren x^2 , so bleibt ein *Gnomon* übrig).

Wichtig ist nun die eben angedeutete Auflösung des Quadrats (x^2) in die Summe eines kleineren Quadrats (y^2) und des *Gnomons* deswegen, weil man dabei den *Gnomon* selbst sehr leicht in ein *Rechteck* verwandeln kann. Ja, es gibt sogar zwei verschiedene Möglichkeiten für diese Verwandlung des *Gnomons* in flächengleiches Rechteck. Man kann nämlich entweder so verfahren, wie es unsere *Abb. 12*, oder so wie es die *Abb. 13* zeigt. In dem einen Fall (*Abb. 12*) bleibt bloss das eine 'parapleroma' an seiner ursprünglichen Stelle; dagegen wird die Fläche, die aus dem 'Parallelogramm um die Diagonale' (dem kleinsten Quadrat, auf unserer Abbildung) und dem anderen 'parapleroma' besteht, dem an seiner Stelle belassenen 'parapleroma' als eine Art 'Fortsetzung nach links zu' hinzugefügt.—In dem anderen Fall (*Abb. 13*) bleiben dagegen das eine 'parapleroma' und das 'kleinste Quadrat' an ihren ursprünglichen Stellen, und bloss das andere 'parapleroma' wird ihnen als 'Fortsetzung nach links zu' hinzugefügt.—In beiden Fällen wird die eine Seite des konstruierten Rechtecks, das dem *Gnomon* flächengleich ist (schraffiert in den *Abb. 12* und *13*): $x + y$, und die andere Seite: $x - y$. (Zu den Buchstaben x und y siehe auch *Abb. 11*). Ein Unterschied besteht zwischen den beiden Fällen bloss insofern: was mit dem 'kleinsten Quadrat', dem Bestandteil des ursprünglichen *Gnomons* wird? — In dem ersten Fall (*Abb. 12*) scheint dieses kleinste Quadrat dem konstruierten Rechteck zu fehlen (ἐλλείπειν). Darum ist dies ein sog. *elliptischer Fall der Flächenanlegung*. — In dem anderen Fall (*Abb. 13*) shiesst dasselbe kleinste Quadrat über das Quadrat y^2 hinaus («Überschuss» = ὑπερβολή). Darum ist dies ein *hyperbolischer Fall der Flächenanlegung*. — Nun kann ich mich in diesem Zusammenhang mit der 'Elleipsis' und mit der 'Hyperbole' nicht eingehender beschäftigen¹⁷. Es sei hier nur darauf hingewiesen, dass bei EUKLID in der Konstruktion des Satzes II 5 eben die angedeutete *elliptische Flächenanlegung*, während in der Konstruktion des Satzes II 6 der *hyperbolische Fall* zur Anwendung kommt.

IV.

Nun können wir zu dem Satz II 5, dessen Genesis hier erklärt werden soll, zurückkommen.

Es wurde oben im Kapitel II. schon angedeutet, dass dieser ein Hilfssatz zu dem Beweis des anderen wichtigen Satzes, II 14 ist; er wird auch in dem Beweisteil des letzteren wörtlich zitiert. Darum fassen wir vor allem den Satz II 14 näher ins Auge. Die in ihm behandelte Aufgabe heisst:

«Ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Quadrat zu errichten».

EUKLID erstrebt immer die grösstmögliche Allgemeingültigkeit. Darum geht er nicht sogleich von einem *Rechteck*, sondern im allgemeinen von einer *«geradlinigen Figur»* aus. Zuerst wird — unter Hinweis auf den früheren Satz I 45 — die gegebene *«geradlinige Figur»* in Rechteck verwandelt, und erst dann kommt der wesentliche Inhalt des II 14, der sog. *‘tetragonismos’* = «das Verwandeln des Rechtecks in flächengleiches Quadrat».

Ich habe oben, in meinem «zweiten Beispiel» schon darauf hingewiesen, dass das Verwandeln eines Rechtecks in flächengleiches Quadrat der Aufgabe *die Mittlere Proportionale zwischen zwei Zahlen oder Grössen zu finden*, gleichwertig ist. Die Konstruktion der Mittleren Proportionale zu zwei geraden Strecken wird bei EUKLID in dem Satz VI 13 behandelt. Die beiden Sätze, VI 13 und II 14, führen also zu demselben Ergebnis¹⁸. Uns interessiert jedoch diesmal eben der *Unterschied* der beiden Sätze.

Das Überraschende an den Konstruktionen in VI 13 und II 14 ist nämlich, dass die wichtigsten Schritte in beiden Fällen auf den ersten Anblick als *völlig identisch* aussehen (siehe *Abb. 14*). In beiden Fällen werden zunächst die Seiten des betreffenden Rechtecks — bzw. die Strecken *a* und *b*, zu denen man die Mittlere Proportionale sucht — einer geraden Linie entlang *addiert*. Dann *halbiert* man die Summe der beiden Strecken und man schlägt mit der halben Strecke den *Halbkreis* um den Halbierungspunkt. Und schliesslich errichtet man die *Senkrechte* in dem Berührungspunkt der beiden Strecken *a* und *b* bis zur Peripherie des Halbkreises; die so gewonnene Strecke *d* wird die gesuchte Mittlere Proportionale zwischen *a* und *b*, bzw. die Seite des dem *ab* flächengleichen Quadrats.

Beachtet man bloss die eben zusammengefassten Schritte, so wäre

man zunächst geneigt, die beiden Konstruktionen VI 13 und II 14 für identisch zu halten. Und doch unterscheidet sich der *Sinn* derselben Schritte in den beiden Fällen so vollkommen wie nur möglich! Die Gedankengänge der beiden Sätze, die sich hinter den «identischen Schritten» stecken, sind völlig verschieden. Man überlege sich nämlich zunächst, welchen Sinn die eben angedeuteten Schritte — von dem Gesichtspunkt des Satzes VI 13 aus — haben müssen.

Man *addiert* die beiden Segmente a und b — zu denen die Mittlere Proportionale gesucht wird —, weil man die *Hypotenuse* eines rechtwinkligen Dreiecks (AC, Abb. 14) bekommen will. (Man weiss dabei im voraus, dass a und b je für sich *längere Kathete* bzw. *kürzere Kathete* von zwei anderen rechtwinkligen Dreiecken werden!) Man *halbiert* das Segment AC, und man schlägt mit der halben Strecke den Halbkreis, weil man — im Sinne des thaletischen Satzes — zunächst die geometrischen Stellen aller jener rechtwinkligen Dreiecke sucht, deren Hypotenuse AC ist. Und schliesslich wird d die gesuchte Mittlere Proportionale zwischen a und b , weil sie *kürzere Kathete* des rechtwinkligen Dreiecks ABD, und zu gleicher Zeit *längere Kathete* des rechtwinkligen Dreiecks BCD ist, wobei die Dreiecke ABD und BCD untereinander ähnlich sind. — Zweifellos bildeten eben diese Gedanken die Grundlage zu der Konstruktion in dem Satz VI 13. Aber man findet nichts von denselben Gedanken in der *nur scheinbar* identischen Konstruktion des Satzes II 14. — Versuchen wir in dem folgenden jene Gedankengänge zu reproduzieren, die zu der Konstruktion in dem Satz II 14 geführt hatten¹⁹.

Soll man ein gegebenes Rechteck ab — ohne Anwendung von Proportionen — in flächengleiches Quadrat verwandeln, so denkt man etwa folgendermassen. Wir haben sozusagen einen Weg hinter uns zu legen. Gegeben ist unser «Ausgangspunkt», das Rechteck ab . Das «Ziel», zu dem wir gelangen müssen, ist das dem Rechteck ab flächengleiche Quadrat, d^2 . — Man hat das Gefühl, dass «Ausgangspunkt» und «Ziel» ziemlich weit voneinander entfernt sind; es gibt sozusagen einen *Niveau-Unterschied* zwischen den beiden. Könnten «Ausgangspunkt» und «Ziel» nicht irgendwie einander nähergebracht werden? Es wäre z. B. sogleich etwas gemeinsames in dem «Ausgangspunkt» und in dem «Ziel», wenn man sie beide als *Ergebnisse je einer geometrischen Operation* auffassen könnte. Wie wird nun sowohl das gegebene Rechteck ab , wie auch das

gesuchte Quadrat d^2 zum «Ergebnis je einer Operation»? — Wir wollen es zunächst mit dem Rechteck versuchen.

Man denke an die Subtraktion in den obigen Abbildungen 11 und 12. Subtrahiert man von einem grösseren Quadrat x^2 ein kleineres y^2 , so bleibt ein 'Gnomon' übrig, der jedoch sehr leicht in das Rechteck $(x+y) \cdot (x-y)$ verwandelt werden kann. — Unser Rechteck (ab) unterscheidet sich von dem letzteren bloss darin, dass hier anstatt der Quadrate, die man auseinander subtrahieren soll — x^2 und y^2 —, unmittelbar die Seiten des Rechtecks a und b gegeben sind. Aber selbstverständlich kann man aus den beiden Seiten des Rechtecks auch die Quadrate x^2 und y^2 bekommen :

$$x^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{und} \quad y^2 = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \quad (\text{Siehe die Abb. 12}).$$

Wir fassen also unseren «Ausgangspunkt», das Rechteck ab als die Differenz der beiden Quadrate $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ auf. So wird der «Ausgangspunkt» zu dem «Ergebnis einer geometrischen Operation». (Eigentlich wird eben diese Transformation des «Ausgangspunktes» durch den Hilfssatz II 5 im voraus zustandegebracht!)

Ähnlich kann man auch das «Ziel», zu dem wir gelangen wollen, d^2 , als «Ergebnis einer anderen geometrischen Operation» auffassen. Ja, auch diese andere Operation kann eine *Subtraktion* sein. Denn für das rechtwinklige Dreieck in unserer Abb. 15 gilt ja der 'pythagoreische Lehrsatz': $x^2 = y^2 + d^2$. Subtrahiert man darum aus dem Quadrat der Hypotenuse das Quadrat der einen Kathete, so bekommt man das Quadrat der anderen Kathete: $x^2 - y^2 = d^2$. — Hat man dies erkannt, so hat man die Lösung unserer Aufgabe — das Verwandeln des Rechtecks ab in flächengleiches Quadrat — sozusagen schon in der Hand.

Denn vorhin führte die Subtraktion der beiden Quadrate auseinander zu einem *Rechteck*, und jetzt führte dieselbe Subtraktion³⁰ zu einem *Quadrat*. Will man also ein Rechteck ab in flächengleiches Quadrat verwandeln, so besteht die Lösung daraus, dass man die beiden Ergebnisse miteinander verbindet. Das grössere Quadrat $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, von dem man

das kleinere subtrahiert, wird das Quadrat auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Dagegen wird das kleinere, das subtrahierte Quadrat $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ das Quadrat auf der einen Kathete. Aus den beiden Angaben: $\text{Hypotenuse} = \frac{a+b}{2}$ und eine Kathete $\frac{a-b}{2}$ soll man die andere Kathete des rechtwinkligen Dreiecks bekommen (siehe *Abb. 16*). Das Quadrat auf dieser anderen Kathete (d) ist flächengleich dem gegebenen Rechteck ab . Das ist der Sinn der Konstruktion im Satz II 14.

Man sieht also, dass das *Addieren* der beiden Seiten des Rechtecks $(a+b)$ in dieser Konstruktion (s. *Abb. 16*) in der Tat einem anderen Sinn hat, als in dem Satz VI 13 (siehe zu dem letzteren die *Abb. 14*). Dort addierte man die beiden Strecken, weil die Summe $a+b$ Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks wurde. Diese Hypotenuse musste in VI 13 *halbiert* werden, um den thaletischen Satz anwenden zu können.— Dagegen haben *dieselbe Addition und dieselbe Halbierung* in II 14 den Sinn, dass die halbe Summe der beiden Seiten des Rechtecks: $\frac{a+b}{2}$ selber Hypotenuse eines anderen rechtwinkligen Dreiecks wird (*Abb. 16*).

Es sei hier als eine interessante Tatsache noch hervorgehoben, dass in der Konstruktion des Satzes II 14 die Seite jenes kleineren Quadrats $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$, das von dem Quadrat der Hypotenuse $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ subtrahiert wird, gar nicht besonders konstruiert werden soll. Denn die *Strecke zwischen dem Halbierungspunkt von $a+b$ und dem Berührungspunkt von a und b* ist eben: $\frac{a-b}{2} = y$.

★

Zum Schluss muss ich noch meine frühere Behauptung — dass nämlich der Satz II 5 nur einen Hilfssatz, sozusagen einen «Fertigbauteil» zu dem Beweis des Satzes II 14 darstellt — etwas näher begründen.

Es sei vor allem darauf hingewiesen dass EUKLID den II 5 (den Wortlaut siehe oben am Anfang des I. Kapitels) an einer Zeichnung erklärt und beweist, die in allem wesentlichen meiner *Abb. 12* entspricht. Mit dieser Abbildung habe ich veranschaulicht, wie die Pythagoreer eine beliebige Quadratfläche in die Summe eines *kleineren Quadrats* und eines

Gnomons, bzw. in diejenige eines *Quadrats* und eines *Rechtecks* auflösen. Es handelt sich im Grunde eben um dasselbe auch in dem Satz II 5. Allerdings geht EUKLID nicht von einem Quadrat, sondern von einer Strecke aus, die *halbiert und in ungleiche Abschnitte geteilt wird*. — Das Teilen in ungleiche Abschnitte ist offenbar nur die Umkehrung dessen, dass in II 14 die beiden Seiten des Rechtecks *addiert* werden. In II 14 macht man aus den beiden Seiten des Rechtecks eine Strecke, während in II 5 aus der gegebenen Strecke — durch beliebiges Teilen — ein Rechteck gemacht wird. — Die «Halbierungen» haben in beiden Sätzen — II 5 und II 14 — denselben Sinn: auf die halbe Strecke wird jenes grössere Quadrat errichtet, von dem ein kleineres subtrahiert werden soll.

Aber noch interessanter ist das folgende. Ich habe schon hervorgehoben, dass zu der Anwendung des 'pythagoreischen Lehrsatzes' in II 14 auch die *halbe Differenz der beiden Rechteckseiten* $\left(\frac{a-b}{2}\right)$ nötig ist.

(Das Quadrat auf dieser Strecke wird von dem Quadrat der Hypotenuse $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ subtrahiert.) Man braucht jedoch diese Strecke gar nicht besonders zu konstruieren; sie ist die «Strecke zwischen dem Halbierungspunkt von $a+b$ und dem Berührungspunkt von a und b ». Dasselbe Segment wird bei EUKLID in II 5 als die «Strecke zwischen den Teilpunkten» bezeichnet. — Auch diese sprachlich schwerfällige, beinahe unbeholfene Bezeichnungsart ist für mich ein schlagender Beweis dafür, dass der alte Geometer den Satz II 5 im Hinblick auf II 14 im voraus aufgestellt und bewiesen hatte.

V.

Man könnte jene Ergebnisse der vorangestellten Untersuchung, die mir auch von dem Gesichtspunkt der weiteren Forschung aus als wichtig vorkommen, etwa in den folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Der Satz II 5 ist ein rein geometrischer Hilfssatz zu dem Beweis des Satzes II 14. Es wäre irreführend, diesen Satz als «Lösung einer algebraischen Gleichung» aufzufassen. Die algebraische Auslegung — auch wenn sie dem Satz EUKLIDS äquivalent ist — verdunkelt den wahren geometrischen Sinn dieses Satzes, und historisch erweckt sie den fal-

schen Schein, als hätten die Griechen in voreuklidischer Zeit in der Tat mit «algebraischen Gleichungen» operiert.

2. Es wurde oben im Kapitel II. auch darauf hingewiesen, dass auch die übrigen Sätze der sog. «geometrischen Algebra der Pythagoreer» sich als rein geometrische Sätze erklären lassen. Dagegen hat man Spuren von echt algebraischen Gedankengängen²¹ aus der voreuklidischen und Euklidischen Überlieferung bisher *nicht* nachweisen können.

3. In einem Punkt werden jedoch die Gedanken von P. TANNERY, mit denen er die späteren Spekulationen über die angebliche «geometrische Algebra der Griechen» angeregt hatte²², beibehalten. P. TANNERY war nämlich der Ansicht, dass diese Art Geometrie ihr Entstehen der Entdeckung der Inkommensurabilität zu verdanken hat. Es wurde in der Tat auch in meiner Arbeit darauf hingewiesen, dass die behandelte 'Flächengeometrie der Pythagoreer' das Problem der Inkommensurabilität *ausschaltet* und die Benutzung von Proportionen konsequent *vermeidet*.

4. Jene Vermutungen, die die «geometrische Algebra der Pythagoreer» als Übernahme bzw. griechische Weiterentwicklung von ursprünglich babylonischen Gedankengängen auffassen wollten, waren voreilig. Der Zusammenhang dieser Art Kenntnisse mit der «babylonischen Wissenschaft» ist in der Wirklichkeit *nirgends erwiesen*. Im Gegenteil! Man hat eher den Eindruck, dass die hier behandelte 'Flächengeometrie der Pythagoreer' eine *rein griechische Errungenschaft* war.

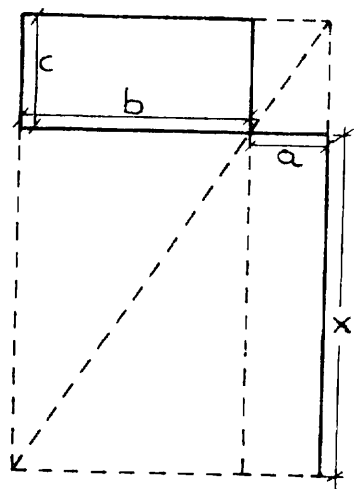


Abb. 9.

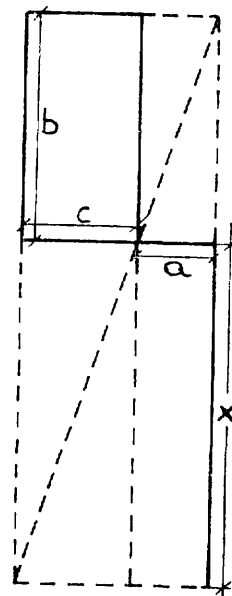


Abb. 10.

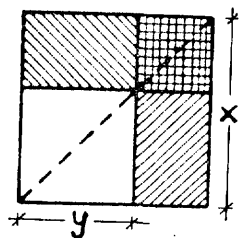


Abb. 11.

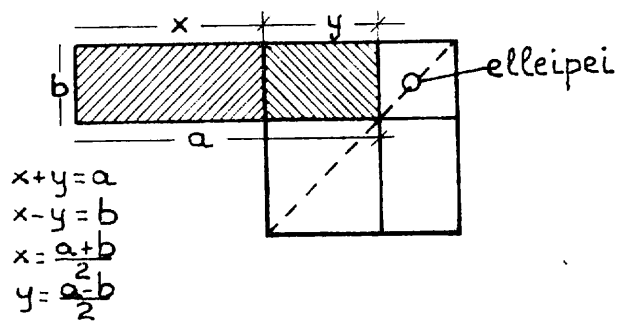


Abb. 12.

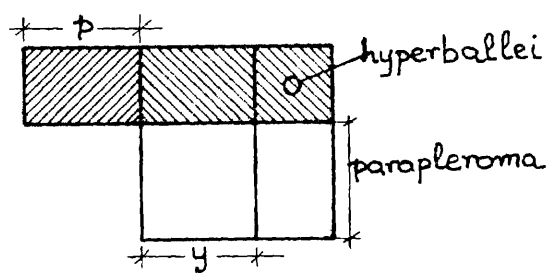


Abb. 13.

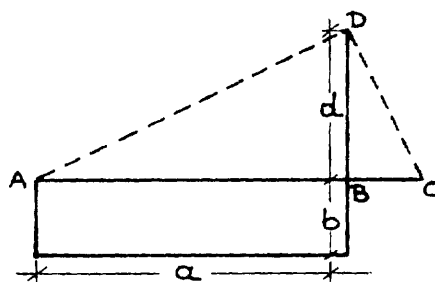


Abb. 14.

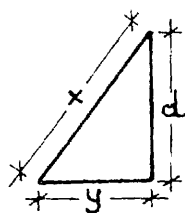


Abb. 15.

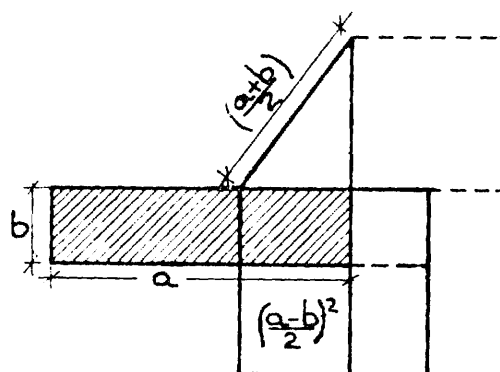


Abb. 16.

A n m e r k u n g e n

1. B. L. v. d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft*, Basel-Stuttgart 1956/196.
2. Ebd. 198. — Natürlich geht diese Erklärung auf H. G. ZEUTHEN, bzw. noch auf P. TANNERY zurück; siehe unten meine Anm. 6.
3. In diesem Sinne wird II 5 natürlich auch bei TH. L. HEATH, *Euclid's Elements* vol. I 382 ff. (Dover Publication) behandelt. Darum redet HEATH über eine «Geometrical solution of a quadratic equation». Der Unterschied gegen B. L. v. d. WAERDEN besteht bloss darin, dass HEATH «Babylon» noch nicht erwähnt. Er hat ja seine Kompilation noch vor O. NEUGEBAUER zusammengestellt. Siehe die nächste Anm.
4. Hingewiesen wird dabei gewöhnlich auf den Entdecker der sog. babylonischen Algebra: O. NEUGEBAUER, «Zur geometrischen Algebra. Studien zur Geschichte der antiken Algebra III.», *Quellen und Studien zur Gesch. d. Math.* etc. B 3 1936 245-259.
5. Das letztere nach B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 203.
6. P. TANNERY, «De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide», 1882 = *Mémoires Scientifiques* I. Paris 1912. 254-280. — H. G. ZEUTHEN, dessen «Verdienste» um die Entdeckung der sog. «geometrischen Algebra der Griechen» durch O. NEUGEBAUER (siehe oben meine Anm. 4) so übertrieben hervorgehoben wurden, hat in der Wirklichkeit in seinen beiden Werken («Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum, Kopenhagen 1886» und «Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter, Kopenhagen 1896»; ein Auszug aus dem letzteren Werk auch bei O. BECKER, «Zur Gesch. d. griech. Mathematik, Darmstadt, 1965» 18 ff.) — was die «geometrische Algebra» betrifft — nur den irreführenden *Vergleich* von P. TANNERY weitergebaut. (Man hätte sich nämlich erst einmal fragen müssen: inwiefern überhaupt erlaubt ist, im Zusammenhang mit EUKLIDS *geometrischen Konstruktionen* über Lösungen von *algebraischen Gleichungen* zu reden!).
7. Vgl. B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 202.
8. Kommentar zu PLATONS Staat II. Kapitel 23 und 27.
9. B. L. v. d. WAERDEN, op. cit. 206 ff.
10. Wie bekannt, hat HIPPOKRATES von Chios vorgeschlagen: man soll zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten *zwei* Mittlere Proportionale einfügen, und damit wird das Problem der *Würfelverdoppelung* gelöst; vgl. O. BECKER, *Das mathematische Denken der Antike*, Göttingen 1957, 75. — Aber wie kam HIPPOKRATES auf diesen glücklichen Einfall? — Offenbar auf dem Wege, dass er wusste: die *planimetrische Aufgabe* der Quadratverdoppelung wird dadurch gelöst, dass man zwischen einer Zahl und ihrem Doppelten *eine* Mittlere Proportionale einfügt; das verwandte *stereometrische Problem* der Würfelverdoppelung löst sich also wohl dadurch — so mag HIPPOKRATES *richtig* geschlossen haben —, dass man anstatt einer einzigen *zwei* Mittlere Proportionale

zwischen den fraglichen Grössen (d. h. genauer: zwischen einer Grösse und ihrem Doppelten) einfügt.

11. Ich will natürlich keineswegs behaupten, dass die *Stufe c.)* auch zeitlich der *Stufe b.)* unbedingt vorangehen muss. Die Stufen *b.)* und *c.)* könnten sehr wohl auch gleichaltrig sein. Wichtiger als die Frage der Chronologie — die sich hier nicht entscheiden lässt (denn schliesslich ist ja auch das nicht unbedingt sicher, dass die sog. «eudoxische Definition der Proportionalität» wirklich *erst* von EUDOXOS stammt!) — scheint mir die Tatsache selbst, dass die *Stufe c.)* den Versuch zeigt, das betreffende Problem ohne Rücksicht auf Proportionen und auf Inkommensurabilität zu lösen.
12. Ich zitiere den Satz VIII 18 — Einfachheit halber — in verkürzter Form.
13. Vgl. O. BECKER, Das mathematische Denken der Antike, 52 ff.
14. Siehe oben Anm. 6.
15. Proclus in Eucl. (F) 419, 15-420, 23; aus der modernen Literatur siehe dazu TH. L. HEATH, Euclid's Elements vol. 1, 343 f.
16. Ich kann mich mit dieser Aufgabe in dem vorliegenden Zusammenhang nicht eingehender beschäftigen. Man vergleiche jedoch dazu, wie diese in der historischen Forschung bisher behandelt wurde, einstweilen TH. L. HEATH, Euclid's Elements vol. 1, 343 ff.
17. Siehe wieder die vorige Anmerkung!
18. Wie bekannt, hat J. L. HEIBERG («Mathematisches bei Aristoteles», Abhandlungen zur Gesch. d. math. Wissenschaften, 18. Heft, Leipzig 1904) unter Hinweis auf die beiden wichtigen ARISTOTELES-Stellen, *De anima* II 2.413a 13-20, und *Metaph.* B 2.996b 18-21, den Satz VI 13 für den älteren und ursprünglicheren gehalten; demgegenüber könnte—seiner Ansicht nach—II 14 eine *jüngere Variante* sein. Derselben Ansicht hat sich auch TH. L. HEATH («Mathematics in Aristotle», Oxford 1949 191-193) angeschlossen. — Ich muss in diesem Zusammenhang zwei Tatsachen festlegen: 1. der Satz II 14 ist aller Wahrscheinlichkeit nach *altpythagoreisch*; 2. die relative Chronologie der beiden Sätze VI 13 und II 14 lässt sich *nicht* mit Bestimmtheit entscheiden. (Siehe auch oben meine Anmerkung 11.) Auch VI 13 kann altpythagoreisch sein, obwohl zu seinem Beweis bei EUKLID allerdings die eudoxische Definition der Proportionalität nötig ist.
19. Ich möchte hier dankbar betonen, dass mein Leitfaden in der folgenden Rekonstruktion — wie auch sonst in der Rekonstruktion antiker mathematischer Gedankengänge sehr oft — das schöne Büchlein von G. PÓLYA, «How to solve it? war. Ich bin überhaupt der Ansicht, dass nicht nur die mathematische Heuristik in den Dienst der historischen Forschung gestellt werden kann, sondern auch umgekehrt: die historische Forschung die keimende Wissenschaft der Heuristik fördern soll.
20. Meine Buchstabierung in *Atb. 15'* wollte im voraus den Gedankengang für den Leser erleichtern.

21. Echt algebraisch ist z. B. die Interpretation von B. L. v. d. WAERDEN für den Beweis des Satzes II 14 (Erwachende Wissenschaft 1956, 193; oder Science awakening 1963, 118). Anstatt von *Flächen* arbeitet hier der moderne Verfasser mit *Produkten aus zwei Faktoren*, bzw. mit *Größen zweiten Grades*, wobei man die Gefahr läuft, dass in dem Leser der grundlegende Unterschied der Geometrie und der Algebra gar nicht bewusst wird. Natürlich ist auch der moderne Beweis von B. L. v. d. WAERDEN *tadellos*. Aber mit dem antiken Gedankengang hat er in der Wirklichkeit *gar nichts zu tun*.
22. Vgl. oben meine Anmerkung 6.

Π Ε Ρ Ι Λ Η Ψ Ι Σ

Τὸ περιεχόμενον τῆς παρούσης ἀνακοινώσεως δύναται νὰ συνοψισθῇ εἰς τὰ ἑξῆς σημεῖα : Ὅτι 1ον, ἡ εἰς τὰ «στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου πρότασις II 5, καθ' ἣν «ἂν εὐθύγραμμον τμήμα τμηθῇ εἰς ἴσα ὅσον καὶ ἄνισα μέρη, τότε τὸ ἐκ τῶν ἀνίσων μερῶν τοῦ ὅλου τμήματος ὀρθογώνιον, ὁμοῦ μετὰ τοῦ τετραγώνου τοῦ ἔχοντος πλευρὰν τὸ μεταξὺ τῶν διαιρετικῶν σημείων τμήμα, ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τὸ ἔχον πλευρὰν τὸ ἥμισυ τοῦ ὅλου τμήματος», ἀποτελεῖ γεωμετρικὸν λήμμα πρὸς ἀπόδειξιν τῆς περαιτέρω εἰς τὰ «στοιχεῖα» τοῦ Εὐκλείδου φερομένης προτάσεως II 14, καθ' ἣν ζητεῖται ὅπως εἰς «δοθὲν εὐθύγραμμον σχῆμα εὐρεθῇ ἴσον τετράγωνον».

Κατὰ τὸν συγγραφέα, εἶναι πλάνη ὅπως ἡ πρότασις II 14 ἐκλαμβάνηται, πρῶγμα τὸ ὁποῖον καὶ συμβαίνει, ὥς ἡ «ἐπίλυσις ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως». Ἡ ἀλγεβρική αὐτὴ ἐκδοχή, ἂν καὶ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πρότασιν τοῦ Εὐκλείδου, συσκοτίζει τὴν ἀληθινὴν γεωμετρικὴν ἔννοιαν τῆς προτάσεως ταύτης, ἱστορικῶς δὲ προκαλεῖ τὴν ἐσφαλμένην ἐντύπωσιν, ὥς ἂν οἱ Ἕλληνες, εἰς τὴν προεὐκλείδειον ἐποχὴν, ἐλογάζον προάγματι μὲ «ἀλγεβρικὰς ἐξισώσεις».

Ὅτι 2ον, καὶ αἱ λοιπαὶ προτάσεις τῆς οὕτω καλουμένης «γεωμετρικῆς Ἀλγέβρας τῶν Πυθαγορείων» δέον ὅπως ἐρμηνευθῶν ὥς καθαρῶς *γεωμετρικαὶ* προτάσεις. Ὅτι, ἀντιθέτως, μέχρι σήμερον ἔχνη καθαρὰ ἀλγεβρικῆς σκέψεως ἐκ τῆς προεὐκλείδειου καὶ Εὐκλείδειου παραδόσεως δὲν κατέστη δυνατόν νὰ διαπιστωθῶν.

Ὅτι, παρὰ ταῦτα, 3ον, πρέπει νὰ θεωρηθῶν εὐσταθοῦσαι αἱ ἀπόψεις τοῦ P. TANNERY, αἵτινες ὑπεκίνησαν τὴν μετέπειτα θεωρίαν περὶ δηθὲν ὑπάρξεως «γεωμετρικῆς Ἀλγέβρας τῶν Ἑλλήνων». Ὁ P. TANNERY ἐπρόσβευεν, ὅτι τὴν γένεσιν τῆς ἡ τοιαύτης Γεωμετρίας ὤφειλεν εἰς τὴν *ἀνακάλυψιν τῶν ἀσυμμέτρων*. Καὶ εἰς τὴν παροῦσαν ἀνακοίνωσιν ὑποδεικνύεται, προάγματι, ὅτι ἡ χρησιμοποιηθεῖσα

«Γεωμετρία (εὐρέσεως) ἐπιφανειῶν τῶν Πυθαγορείων» ἀποκλείει τὸ πρόβλημα τῶν ἀσυμμέτρων, ἀποφεύγουσα συστηματικῶς τὴν χρῆσιν τῶν ἀναλογιῶν.

Ὅτι, τέλος, 4ον, αἱ γενόμεναι ὑποθέσεις, καθ' ὅς ἡ «γεωμετρικὴ Ἀλγεβρα τῶν Πυθαγορείων» ἔπρεπε νὰ θεωρηθῇ ὡς παραληφθεῖσα ὑπὸ τῶν Ἑλλήνων ἐξ ἀρχικῶς ὑπὸ τῶν Βαβυλωνίων γενομένων σκέψεων, ἢ τοῦλάχιστον ὡς περαιτέρω ὑπ' αὐτῶν ἀναπτυχθεῖσα, εἶναι τελείως ἀβάσιμοι. Εἰς τὴν πραγματικότητα, σχέσεις παρομοίων γνώσεων μὲ τὰ «Μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων» οὐδαμοῦ κατεδείχθη. Ἀντιθέτως, ἔχει τις σαφῆ τὴν ἐντύπωσιν ὅτι ἡ ἐδῶ χρησιμοποιουμένη «Γεωμετρία (εὐρέσεως) ἐπιφανειῶν τῶν Πυθαγορείων» εἶναι καθαρὰ ἐπίτευγμα ἑλληνικόν.

★

Ὁ Ἀκαδημαϊκὸς κ. **Φ. Βασιλείου** παρουσιάζων τὴν ὡς ἄνω ἀνακοίνωσιν εἶπε τὰ ἑξῆς :

Ἡ παροῦσα ἐργασία τοῦ καθηγητοῦ Α'. SZABÓ, πρέπει νὰ ἐνταχθῇ εἰς τὸ πλαίσιον γενικωτέρας αὐτοῦ ἐπιτυχοῦς προσπάθειας, ὅπως ἀνασκευάσῃ νεωτέρας τινὰς θεωρίας, κατὰ τὰς ὁποίας ἡ συστηματικὴ ἀπχγωγικὴ ἢ παραγωγικὴ Μαθηματικὴ Ἐπιστήμη τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων θὰ ἔπρεπε νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓν εἶδος συνεχίσεως ἢ περαιτέρω ἀναπτύξεως προὑπαρχούσης ἐπιστημονικῆς παραδόσεως ὀφειλομένης εἰς τοὺς Βαβυλωνίους, ἢ μὴ εἰς αὐτοὺς τοὺς Αἰγυπτίους.

Τὸ πρόβλημα τῆς συστηματικῆς ἀπαγωγικῆς ἐπιστήμης τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων εὐρίσκεται, πράγματι, κατὰ τοὺς τελευταίους χρόνους, εἰς τὸ προσκίνητον τῆς ἐπιστημονικῆς ἐρεῦνης.

Εἶναι ἀληθές, ὅτι αἱ ἀνακαλύψεις καὶ αἱ ἔρευναι τῶν τελευταίων δεκαετιῶν κατέδειξαν ὅτι τὰ Μαθηματικὰ τῶν Βαβυλωνίων ἦσαν πολὺ περισσότερον ἀνεπτυγμένα παρ' ὅσον ἀρχικῶς ἐπιστεῦετο, ὅτι δὲ οἱ Βαβυλώνιοι, ὁλόκληρον χιλιετηρίδα πρὸ τῆς ἐμφανίσεως τῆς Ἑλληνικῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ἦσαν εἰς θέσιν νὰ ἐπιλύουν πρακτικῶς, σχετικῶς πολὺπλοκα προβλήματα μὲ ἀρκετὰ πρᾶγματι ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν.

Μὲ ἰδιαιτέραν ὁμῶς ἔμφασιν πρέπει νὰ τονισθῇ τὸ γεγονός, ὅτι οὐδαμοῦ εὐρέθη στοιχεῖόν τι ἀποδεικνύον ὅτι οἱ Βαβυλώνιοι, ἢ αὐτοὶ οἱ Αἰγύπτιοι, ἀπεπειράθησαν καὶ ποτὲ ὅπως συναγάγουν διὰ τῆς καθαρᾶς Λογικῆς τὰς Μαθηματικὰς προτάσεις τῶν ἐκ πρώτων αὐτῶν ἀρχῶν.

Τὴν ἔλλειψιν τοιαύτης ἀποδεικτικῆς ἐπιχειρηματολογίας ἐρευνηταὶ τινες ἠθέλησαν νὰ θεωρήσουν ὡς ζήτημα ἀπλῶς τύχης, ἰσχυριζόμενοι, ὅτι μελλοντικαὶ ἀρχαιολογικαὶ ἀνακαλύψεις ἴσως φέρουν εἰς φῶς πειστήρια, ὅτι τὰ πρῶτα ἔχνη

παραγωγικῆς σκέψεως ὡφείλοντο εἰς παλαιότερους τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων ἀσιατικούς λαούς.

Εἰς σαφῇ ἀντίθεσιν πρὸς τὴν ἀβάσιμον καὶ ὅλως ἀνεδαφικὴν αὐτὴν θέσιν, ὁ καθηγητὴς Α΄. SZABÓ ἀποδεικνύει διὰ σειρᾶς ἐργασιῶν του, εἰς τὰς ὁποίας πρέπει νὰ περιληφθῇ καὶ ἡ παροῦσα, ὅτι πρὸ τῶν Ἑλλήνων ἐπιστημονικὴ σκέψις οὔτε ὑπῆρξεν οὔτε ἡδύνατο ἐκ τῶν πραγμάτων νὰ ὑπάρξῃ, ὅτι δὲ ἡ συστηματικὴ παραγωγικὴ Μαθηματικὴ Ἐπιστήμη εἶναι ἀποκλειστικῶς δημιούργημα τῆς ἀρχαίας Ἑλληνικῆς σκέψεως.