

6184 p. 48
TANNERY, M. P.
1876

Mémoires de la société des sciences
de Bordeaux 1876 p 441-449

NOTE

SUR LE

SYSTÈME ASTRONOMIQUE D'EUDOXE

PAR M. TANNERY

Dans un mémoire sur « *Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele* » (Ulrico Hœpli, Milan, 1875), M. G.-V. Schiaparelli a restitué avec un rare bonheur le système astronomique conçu par Eudoxe de Cnide au commencement du IV^e siècle avant J.-C. Ce système ayant été généralement méconnu par tous les historiens de l'astronomie, nous essaierons d'en donner une idée succincte d'après le travail de M. Schiaparelli, en employant toutefois le calcul trigonométrique, dont il devait s'abstenir dans la « divination » des connaissances à attribuer à Eudoxe, et en cherchant à faire juger par là de la valeur réelle du système et du degré d'accord qu'il pouvait donner entre les théories et les observations.

Chaque planète (y compris le Soleil et la Lune) est supposée fixée sur l'équateur d'une sphère particulière concentrique à la Terre et animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à elle-même. Les pôles de cet axe sont fixés à leur tour sur la surface d'une seconde sphère concentrique, animée d'un autre mouvement de rotation autour d'un autre axe, et ainsi de suite. Voilà l'idée générale du système.

Pour chacun des sept groupes de sphères ainsi imaginés, celle qui enveloppe toutes les autres a son axe dirigé suivant celui du monde. La durée de sa révolution est le jour sidéral; elle produit l'apparence du mouvement diurne.

La seconde sphère est inclinée suivant l'axe du zodiaque moyen (écliptique). Pour la Lune, la durée de la révolution est celle de la rétrogradation des nœuds, phénomène qu'elle représente.

NOTE

SUR LE

SYSTÈME ASTRONOMIQUE D'EUDOXE

PAR M. TANNERY

Dans un mémoire sur « *Le sfere omocentriche di Eudosso, di Calippo e di Aristotele* » (Ulrico Hœpli, Milan, 1875), M. G.-V. Schiaparelli a restitué avec un rare bonheur le système astronomique conçu par Eudoxe de Cnide au commencement du iv^e siècle avant J.-C. Ce système ayant été généralement méconnu par tous les historiens de l'astronomie, nous essaierons d'en donner une idée succincte d'après le travail de M. Schiaparelli, en employant toutefois le calcul trigonométrique, dont il devait s'abstenir dans la « divination » des connaissances à attribuer à Eudoxe, et en cherchant à faire juger par là de la valeur réelle du système et du degré d'accord qu'il pouvait donner entre les théories et les observations.

Chaque planète (y compris le Soleil et la Lune) est supposée fixée sur l'équateur d'une sphère particulière concentrique à la Terre et animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe par rapport à elle-même. Les pôles de cet axe sont fixés à leur tour sur la surface d'une seconde sphère concentrique, animée d'un autre mouvement de rotation autour d'un autre axe, et ainsi de suite. Voilà l'idée générale du système.

Pour chacun des sept groupes de sphères ainsi imaginés, celle qui enveloppe toutes les autres a son axe dirigé suivant celui du monde. La durée de sa révolution est le jour sidéral; elle produit l'apparence du mouvement diurne.

La seconde sphère est inclinée suivant l'axe du zodiaque moyen (écliptique). Pour la Lune, la durée de la révolution est celle de la rétrogradation des nœuds, phénomène qu'elle représente.

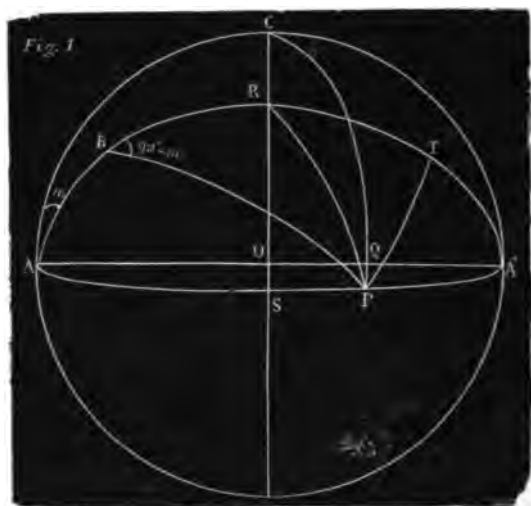
La troisième sphère de la Lune est inclinée suivant l'axe de l'orbite lunaire et tourne en un mois sidéral.

Calippe ajouta plus tard, pour représenter les inégalités de mouvement sur l'orbite, une quatrième et une cinquième sphère, qui sont les troisième et quatrième des planètes d'après Eudoxe.

Pour le Soleil, les sphères sont analogues à celles de la Lune, c'est-à-dire qu'Eudoxe supposait une nutation, par analogie avec les phénomènes lunaires, comme elle existe d'ailleurs réellement; mais, par suite de l'inexactitude des observations, il l'exagérait, sans aucun doute, et lui supposait une période très longue.

Les cinq planètes n'ont pas ce mouvement de nutation ou de rétrogradation des nœuds; la seconde sphère d'Eudoxe accomplit sa rotation pendant la durée de la révolution sidérale. C'est le mouvement moyen en longitude.

La troisième sphère a ses pôles sur l'équateur de la seconde (écliptique), à 90° de la position moyenne en longitude. La durée de sa rotation est celle de la révolution synodique. La quatrième



sphère a ses pôles distants de ceux de la troisième d'un arc spécial à chaque planète, et tourne en sens contraire avec une vitesse égale.

Nous pouvons faire abstraction des deux premières sphères. Soit AA' les pôles de la troisième sur l'écliptique AOA' (*fig. 1*); soit l'arc de grand cercle $AB = i$, faisant l'angle variable m avec le plan ACA' passant par les pôles de l'écliptique. Menons le quadrant BP faisant le même angle m avec l'arc de cercle perpendiculaire en B au précédent; P sera le lieu de la planète correspondant à l'angle m . Joignons P au pôle de l'écliptique par l'arc de grand cercle CQP , PQ sera la latitude (australe) $-\lambda$, OQ l'équation de longitude δ .

Prolongeons l'arc AB jusqu'en A' et menons PT perpendiculaire; l'arc $PT = \frac{\pi}{2} - m$ et $TA' = \frac{\pi}{2} - i$. Comparons l'hypoténuse des deux triangles rectangles PQA' , PTA' . Nous avons immédiatement

$$(1) \quad \sin \delta \cos \lambda = \sin i \sin m.$$

Menons AP , qui coupe en S le grand cercle COC' perpendiculaire au plan de la figure. Dans le triangle CSP , rectangle en S ,

$$\begin{aligned} -\sin \lambda &= \cos CS \cos SP, \quad \text{or} \quad CS = RS + m, \\ \sin \lambda &= \cos SP \sin RS \sin m - \cos SP \cos RS \cos m. \end{aligned}$$

Mais dans le triangle ABP , où $RS = \widehat{BAP}$ et $BP = \frac{\pi}{2}$,

$$\cos SP \sin RS = \cos m,$$

et dans les triangles rectangles RSP , RPT ,

$$\cos SP \cos RS = \cos RP = \cos i \sin m.$$

Ainsi

$$\sin \lambda = \cos m \sin m - \cos i \sin m \cos m$$

ou

$$(2) \quad \sin \lambda = -\sin^2 \frac{i}{2} \sin 2m.$$

La courbe définie par les équations (1) et (2) a la forme d'un 8 très allongé couché suivant l'écliptique; le point double est en O , lieu de la longitude moyenne, δ varie entre $+i$ et $-i$, λ entre $\pm \arcsin \left(\sin^2 \frac{i}{2} \right)$.

Si nous cherchons à représenter par ce procédé le mouvement du Soleil, nous n'avons qu'à supposer m compté à partir du périhélie et $\sin^2 \frac{i}{2}$ négligeable,

$$\delta = \sin i \sin m, \quad \lambda = 0.$$

Or nous avons, si e est l'excentricité de l'orbite

$$\delta = 2e \sin m + \frac{\delta}{n} e^2 \sin 2m + \dots$$

Si nous négligeons les termes en e^2 , les deux formules s'identifient en posant $\sin i = 2e$, soit $e = \frac{1}{60}$, ou 1° ; i est d'environ 2° .

Le mouvement maximum en latitude $\sin^2 \frac{i}{2}$ n'atteint pas une minute; il était complètement négligeable.

Pour la Lune, en supposant les arcs comptés sur l'orbite lunaire et la durée de la révolution des sphères égale à celle du mois anomalistique, on se trouvera dans des conditions analogues; e étant environ $\frac{1}{48}$, i sera d'environ 6° , et le mouvement en latitude, à partir de l'orbite lunaire, n'atteindra pas $9'$.

En résumé, le système d'Eudoxe permet de représenter les inégalités propres des mouvements planétaires avec autant d'exactitude que celui des épicycles.

Il n'en est pas tout à fait de même pour les inégalités des mouvements héliocentriques.

Pour une première approximation, nous négligerons l'inégalité propre de la planète et celle du Soleil, et par conséquent l'excentricité des orbites ainsi que le carré de l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique.

Si, pour une planète supérieure, nous comptons les longitudes à partir de la conjonction, soit L la longitude moyenne de la planète, Ω celle du nœud, θ l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, a le rapport des distances du Soleil à la Terre et à la planète, enfin m la différence des longitudes moyennes du Soleil et de la

planète (mouvement synodique), nous pouvons poser, dans ces hypothèses,

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{a \sin m}{1 + a \cos m}, \quad \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\sin \delta} = \frac{\theta}{a} \frac{\sin (L - \Omega)}{\sin m}.$$

Pour une planète inférieure, nous désignerons par L la longitude moyenne du Soleil, identique à celle de la planète, comptée toujours à partir de la conjonction supérieure; par a le rapport des distances du Soleil à la planète et à la Terre, et par m la différence de la longitude héliocentrique moyenne de la planète à la longitude moyenne géocentrique. Nous aurons alors

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{a \sin m}{1 + a \cos m}, \quad \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\sin (m - \delta)} = a \theta \cdot \frac{\sin (L + m - \Omega)}{\sin m}.$$

Nous remarquons tout d'abord que le système d'Eudoxe ne peut nullement représenter les mouvements en latitude, qui sont soumis à une double période, celle de L et celle de m , tandis que les mouvements en longitude n'ont qu'une seule période, comme les expressions qui représentent son système. Sous le rapport des mouvements en latitude, il faudra donc le considérer comme satisfait, s'il n'y a pas de désaccord marqué entre les digressions maxima en théorie et en observation.

Pour les mouvements en longitude, il y aura également désaccord, les maxima réels de δ n'ayant pas lieu pour $\cos m = 0$, mais pour $\cos m = -a$; toutefois si a est suffisamment petit, le désaccord est négligeable.

En négligeant a^2 , on a $\delta = a \sin m$.

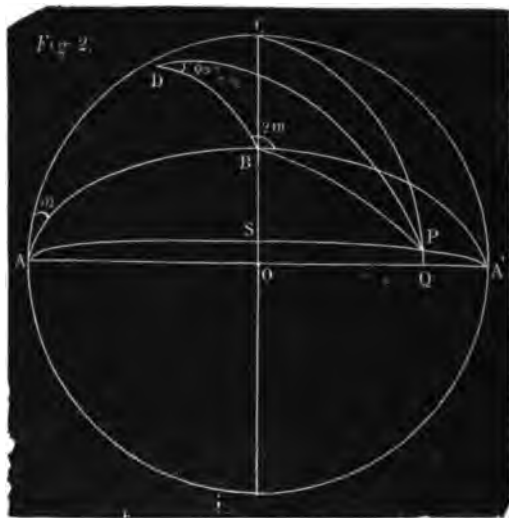
On pourra poser $a = \sin i$ et identifier les formules; pour Saturne $a = \frac{1}{9.5}$, i sera d'environ 6° , le mouvement en latitude négligeable, il peut atteindre en réalité 3° ; pour Jupiter $a = \frac{1}{5.2}$, i est d'environ 13° , le mouvement en latitude ne dépassera pas $44'$; il peut atteindre en réalité près de $1^\circ 1/2$.

Pour Mercure, on peut encore représenter le mouvement dans une certaine mesure, qui pouvait suffire pour les anciens, pour

lesquels cette planète n'était observable que dans une petite partie de son cours; pour Mars et Vénus, il n'en était pas de même, le système devait être corrigé.

Il le fut par Calippe; nous avons vu sa correction pour la Lune et le Soleil; il considéra le mouvement de Saturne et de Jupiter comme suffisamment représentés, mais ajouta une troisième sphère pour Mars, Vénus et Mercure; en l'absence d'indications historiques, le système de Calippe ne peut être restitué. M. Schiaparelli a donné une élégante solution pour Mars et Vénus; elle ne s'applique pas à Mercure.

Voici cette solution : Soit AA' les pôles de la troisième sphère sur l'écliptique AOA' . Menons le quadrant AB faisant l'angle



variable m avec le plan ACA' passant par les pôles de l'écliptique. B sera le pôle de la quatrième sphère. Menons par B , l'arc $BD = i$ faisant l'angle $A'BD = 2m$ avec le grand cercle précédent, D sera le pôle d'une cinquième sphère. Menons par D le quadrant DP faisant l'angle m avec le grand cercle perpendiculaire en D à l'arc BD , P est le lieu de la planète; PQ la latitude λ , OQ l'équation de longitude δ .

Menons le demi grand cercle $ASPA'$, coupant OC en S à angle

droit, et comparons $\cos A'P$ dans les triangles $A'PQ$ et $A'BP$,

$$\begin{aligned}\cos A'P &= \sin SP = \sin \delta \cos \lambda = \sin BP \cos PBA' \\ &= \sin BP \cos 2m \cos DBP + \sin BP \sin 2m \sin DBP.\end{aligned}$$

Mais dans le triangle DBP

$$\cos i \cos BP + \sin i \sin BP \cos DBP = 0.$$

Or,

$$\cos BP = \sin i \sin m;$$

donc

$$\sin BP \cos DBP = -\cos i \sin m,$$

et d'autre part

$$\sin BP \sin DBP = \cos m,$$

d'où

$$(3) \quad \begin{cases} \sin \delta \cos \lambda = -\cos i \sin m \cos 2m + \cos m \sin 2m \\ = \sin m \left(1 + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos 2m \right). \end{cases}$$

De même, dans le triangle CSP , rectangle en S ,

$$\sin \lambda = \cos CS \cos SP = \cos m \cos BS \cos SP - \sin m \sin BS \cos SP.$$

Or

$$\cos BS \cos SP = \cos BP = \sin i \sin m,$$

$$\sin BS \cos SP = \sin BP \cos PBS = \sin BP \sin PBA'$$

$$= \sin BP \sin DBP \cos 2m - \sin BP \cos DBP \sin 2m.$$

Substituant les valeurs précédemment trouvées,

$$\sin \lambda = \sin i \sin m \cos m - \sin m (\cos m \cos 2m + \cos i \sin m \sin 2m),$$

$$(4) \quad \begin{cases} \sin \lambda = \sin m \cos m \left(\sin i - \cos i - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos 2m \right) \\ = -\frac{\sin 2m}{2} \left(\frac{\sin \left(\frac{\pi}{4} - i \right)}{\sqrt{2}} + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos 2m \right). \end{cases}$$

Les équations (3) et (4) définissent le lieu du point P ; pour la discussion de la courbe, il convient de prendre pour coordonnées λ et SP ($\sin SP = \sin \delta \cos \lambda$) plutôt que λ et δ .

Si $i = 0$, la courbe est identique avec celle d'Eudoxe, lorsqu'on suppose, au contraire, pour celle-ci, $i = \frac{\pi}{2}$, c'est la courbe de la voûte quarrable de Viviani; elle embrasse la moitié de l'écliptique avec des digressions en latitude de 30° de part et d'autre.

Si i augmente jusqu'à la valeur $\text{arc tg } \frac{1}{3} = 19^\circ 28' 16''$, elle conserve la même forme, l'arc embrassé de chaque côté du point double O sur l'écliptique étant $\frac{\pi}{2} - i$. Les digressions en latitude diminuent jusqu'à $7^\circ 27' 50''$.

Au delà de la valeur $i = \text{arc tg } \frac{1}{3}$, la courbe, quand m varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, au lieu de rester constamment au-dessous de l'écliptique, le coupe en un point dont l'abscisse est toujours $\frac{\pi}{2} - i$ pour la valeur de m correspondant à

$$\sin m = \frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} - \frac{i}{2}\right)}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{i}{2}},$$

et revient à ce point en décrivant une boucle. Quand m varie dans les autres quadrants, la courbe décrite est symétrique par rapport à l'écliptique, au point double O ou au plan perpendiculaire à l'écliptique.

L'importance de la boucle grandit à mesure que i augmente; la digression maximum de latitude correspondante devient égale en valeur absolue à celle de l'autre partie quand $i = \frac{\pi}{4}$, la dépasse au delà; ce maximum n'est d'ailleurs que de $4^\circ 11' 57''$ quand $i = \frac{\pi}{4}$, mais il augmente au delà jusqu'à $12^\circ 30' 14''$ pour $i = \frac{\pi}{2}$, $m = 60$; pour cette valeur extrême de i , la courbe se réduit à quatre boucles aboutissant au point multiple O.

Le maximum de distance x au grand cercle perpendiculaire en O à l'écliptique ($\sin x = \sin \delta \cos \lambda$) ne descend jamais au-dessous de $\frac{\pi}{4}$ qui est sa valeur constante pour $m = \frac{\pi}{4}$; ce qui rend

la courbe inapplicable à la représentation du mouvement de Mercure, pour lequel l'élongation maximum n'atteint jamais 29°. Elle est 23° environ en moyenne.

Cette distance x descend à son minimum $\frac{\pi}{4}$ quand $i = 60^\circ$:
pour $i = \frac{\pi}{4}$ elle est de 47° 40' 30", pour $i = \frac{\pi}{2}$ de 50° 20' 10".

Il est clair qu'avec une courbe de cette nature, les mouvements en longitude de Mars et de Vénus ne peuvent être exactement représentés; elle offre, en effet, pendant la révolution synodique quatre maxima pour δ , tandis qu'il n'y en a que deux en réalité.

Si l'on cherche à obtenir l'égalité aux quadratures, on pourra y arriver en posant cot $i = a$. On trouvera alors :

pour Mars,

$$i = 56^\circ 43' 17'', \quad \frac{\pi}{2} - i = 33^\circ 16' 43'';$$

pour Vénus,

$$i = 54^\circ 7' 41'', \quad \frac{\pi}{2} - i = 35^\circ 52' 19''.$$

Le maximum de δ d'après les formules se trouve alors compris entre 45° et 46°. Les digressions maxima vont à près de 9°; ces nombres assez convenables pour Vénus sont un peu forts pour Mars.

En résumé, comme théorie planétaire, le système d'Eudoxe et de Calippe a surtout comme valeur d'être le premier qui ait essayé de soumettre à une loi mathématique les inégalités de mouvement et surtout les stations et rétrogradations des planètes, qui étaient le phénomène le plus saillant pour les anciens.

La solution, simplement graphique, du problème d'Eudoxe, la découverte de cette courbe (hippopède) sinueuse et de ses propriétés suffiraient, d'ailleurs, amplement à justifier la réputation qu'Eudoxe avait acquise parmi ses contemporains, et que les modernes ont, pour la plupart, attaquée avec la légèreté de l'ignorance.