

6186 pdf
TANNERY, P.
1882

Mémoires de la ~~recueil~~ des sciences
de Bordeaux 1882
p 161-194

L'ARITHMÉTIQUE DES GRECS

DANS HÉRON D'ALEXANDRIE

PAR M. PAUL TANNERY

En essayant aujourd'hui, sur les divers opuscules géométriques attribués, au moins comme origine, à Héron d'Alexandrie, un travail analogue à celui que nous avons déjà tenté sur la *Collection mathématique* de Pappus ⁽¹⁾, nous ne nous proposons nullement d'épuiser le sujet, c'est-à-dire de tirer des recueils de problèmes numériques dont il s'agit, tous les renseignements qu'ils peuvent fournir sur les connaissances arithmétiques des Grecs; nous nous bornerons à l'étude des questions les plus importantes, telles qu'elles ont déjà été déterminées avec précision par M. Cantor, dans la monographie du géomètre alexandrin à laquelle est consacrée la première partie de son ouvrage : *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig, 1875) ⁽²⁾.

Mais avant d'aborder l'objet principal que nous avons en vue, il nous est difficile de ne pas dire à notre tour quelques mots sur l'authenticité, la provenance et la véritable date des écrits dont nous avons à nous occuper. Nous ne pourrions, à vrai dire, que glaner derrière les illustres érudits qui ont débattu ces questions;

⁽¹⁾ *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, tome III (3^e série), p. 331 et suivantes.

⁽²⁾ C'est à ce livre qu'il faut rapporter les fréquentes citations de Cantor que nous aurons l'occasion de faire plus loin.

L'ARITHMÉTIQUE DES GRECS

DANS HÉRON D'ALEXANDRIE

PAR M. PAUL TANNERY

En essayant aujourd'hui, sur les divers opuscules géométriques attribués, au moins comme origine, à Héron d'Alexandrie, un travail analogue à celui que nous avons déjà tenté sur la *Collection mathématique* de Pappus ⁽¹⁾, nous ne nous proposons nullement d'épuiser le sujet, c'est-à-dire de tirer des recueils de problèmes numériques dont il s'agit, tous les renseignements qu'ils peuvent fournir sur les connaissances arithmétiques des Grecs; nous nous bornerons à l'étude des questions les plus importantes, telles qu'elles ont déjà été déterminées avec précision par M. Cantor, dans la monographie du géomètre alexandrin à laquelle est consacrée la première partie de son ouvrage : *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig, 1875) ⁽²⁾.

Mais avant d'aborder l'objet principal que nous avons en vue, il nous est difficile de ne pas dire à notre tour quelques mots sur l'authenticité, la provenance et la véritable date des écrits dont nous avons à nous occuper. Nous ne pourrions, à vrai dire, que glaner derrière les illustres érudits qui ont débattu ces questions;

⁽¹⁾ *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, tome III (2^e série), p. 331 et suivantes.

⁽²⁾ C'est à ce livre qu'il faut rapporter les fréquentes citations de Cantor que nous aurons l'occasion de faire plus loin.

toutefois, ces glanes n'en auront peut-être pas moins leur valeur, si faible soit-elle.

I

Le premier point que nous aborderons est le suivant : Héron d'Alexandrie, le mécanicien, comme l'appelle Proclus, celui dont l'âge, déterminé par le temps auquel vivait son maître Ktésibios, doit être rapporté environ vers l'an 100 avant J.-C., avait-il spécialement traité de l'arithmétique?

Nous savons, par un passage bien connu d'Eutocius (*Commentaires sur la Mesure du Cercle d'Archimède*), que « Héron avait » dit, dans les *Métriques*, comment il faut calculer, par approximation, la racine carrée d'un nombre donné. » Quoique d'ailleurs précisément cette méthode d'extraction des racines ne nous ait pas été conservée, on ne met plus en doute que sous ce nom de *Métriques*, Eutocius ne désigne un grand ouvrage aujourd'hui perdu, lequel doit avoir servi pour la rédaction ou la compilation des écrits héroniens que nous possédons ⁽¹⁾.

Mais en tête de ces écrits, on classe ordinairement, au moins comme représentant plus exactement le texte d'une œuvre véritable de Héron, un petit traité sur les *Définitions des termes de la Géométrie* (Héron, p. 1-40), traité que son auteur, quel qu'il soit, désigne (p. 1, 1) d'ailleurs sous le titre de *Τὰ πρὸ τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως τεχνολογούμενα* (*Prélude technologique aux Éléments de Géométrie*), tandis qu'il se réfère plus loin (p. 38, 1) à un semblable *Prélude* qu'il aurait composé *aux Éléments d'Arithmétique* (ἐν τοῖς πρὸ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως). Au reste, on ne peut guère douter que sous ce nom d'*Éléments*, il ne faille entendre les livres d'Euclide, considérés à juste titre, les uns comme géométriques, les autres comme arithmétiques.

Notre auteur est-il bien Héron? C'est ce qu'ont pensé les deux

⁽¹⁾ Nous citerons sous la rubrique *Heron* l'excellente édition que M. Hultsch a donnée de ces écrits : *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum reliquia*. Berlin, 1864.

savants les plus autorisés en général sur les questions héroniennes, M. Th.-H. Martin ⁽¹⁾ et M. F. Hultsch ⁽²⁾.

Mais, tandis que le premier a vu dans les deux *Préludes* deux parties du grand ouvrage des *Métriques*, le second, auquel n'ont pas échappé les différences notables qui existent entre la technologie des autres écrits héroniens et celle d'Euclide, a considéré ces *Préludes* comme des ouvrages spéciaux. Enfin, Friedlein s'est nettement prononcé, au contraire, contre l'attribution à Héron ⁽³⁾.

Mais parmi les arguments invoqués à l'appui de cette dernière thèse, que nous adoptons, il ne nous semble pas que l'on ait, jusqu'à présent, mis en avant les plus irréfragables. Nous avons, sur les diverses définitions données, en dehors de celles d'Euclide, par les anciens géomètres, une source précieuse dans Proclus ⁽⁴⁾. Or, si nous comparons les renseignements que fournit ce dernier avec le texte du pseudo-Héron, nous voyons, en premier lieu, que toutes les définitions indiquées par Proclus comme appartenant à des auteurs différents, se retrouvent simplement juxtaposées dans notre *Prélude*, en sorte que ce dernier n'est bien, ainsi qu'on pouvait le soupçonner à son seul examen, qu'un recueil, une compilation assez mal ordonnée, au reste, de ce qui avait été donné, à titre de définitions géométriques, par les maîtres classiques. Un pareil ouvrage ne peut guère être attribué à un écrivain original, et même, si l'on remarque l'absence, dans cette compilation, des définitions qui semblent propres à l'auteur des *Métriques*, et qu'on retrouve éparses dans les autres écrits héroniens, il semble très douteux que le rédacteur des *Préludes* ait appartenu à la même école.

D'un autre côté, si malheureusement Proclus nomme trop peu

⁽¹⁾ *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie, et sur tous les ouvrages mathématiques grecs qui ont été attribués à un auteur nommé Héron.* Paris, 1854.

⁽²⁾ *Metrologicorum scriptorum reliquiae.* 41 vol. Leipzig, 1864.

⁽³⁾ *Bulletino Boncompagni*, année 1871, p. 93-121.

⁽⁴⁾ *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii*, ed. Friedlein. Leipzig, 1873.

les géomètres dont il cite les définitions, il attribue nommément à Posidonius (né en 133, mort en 49 av. J.-C.) celle des parallèles et de même la division des quadrilatères, qui sont adoptées par le pseudo-Héron. Ce dernier était donc incontestablement postérieur à Posidonius, et très probablement au commencement de l'ère chrétienne.

En tout cas, sa compilation, qui semble avoir été assez complète, présente un réel intérêt pour l'histoire des mathématiques. Celui qui aura la patience, en s'aidant de Proclus, de distinguer les définitions réellement différentes qu'on trouve là, et de les soumettre à un classement systématique, pourra jeter un jour précieux sur les divers courants intellectuels auxquels ont dû obéir les mathématiciens de l'antiquité. Nous sommes trop tentés, en thèse générale, de les considérer comme ayant, à très peu près, suivi un sentier unique, une seule direction, celle d'Euclide. Il y a là une illusion produite par ce qui s'est passé seulement à l'époque de la décadence, sous l'empire romain.

Il y aurait donc un certain intérêt à déterminer l'âge véritable du petit traité qui nous occupe, afin de savoir si, comme nous le croyons d'ailleurs, toutes les définitions qui y sont recueillies doivent nécessairement être antérieures à l'ère chrétienne, c'est-à-dire appartenir à la grande époque de la science hellène.

Malheureusement la question ne semble guère pouvoir être nettement tranchée; à la vérité, il est remarquable que le pseudo-Héron n'a fait à Geminus aucun emprunt reconnaissable dans les extraits de Proclus, tandis que diverses idées de ces extraits se trouvaient parfaitement appropriées à son but et auraient figuré avec honneur dans son recueil. Comme Geminus vivait, en somme, à la même époque que Héron d'Alexandrie et que Posidonius, on pourrait supposer que pour ne pas connaître ses écrits, notre compilateur devait en être également très rapproché. Mais peut-être aussi l'a-t-il exclu systématiquement du choix des classiques qu'il dépouillait, et nous ne sommes pas assez éclairés sur le véritable caractère de l'ouvrage perdu de Geminus pour affirmer qu'une telle exclusion eût été illégitime.

II

Nous n'avons, en somme, trouvé aucune preuve sérieuse tendant à faire croire que Héron d'Alexandrie ait jamais spécialement écrit sur l'arithmétique. Il nous reste à examiner, en dehors de l'opuscule que nous lui dénions, les six autres écrits qui entrent dans la collection de M. Hultsch, et que nous désignerons sous les noms latins adoptés par le savant éditeur.

Le premier de ces écrits, la *Geometria* (Héron, p. 41-140), est de beaucoup celui dont la valeur est la plus grande et qui peut, par suite, nous donner la plus fidèle image de ce que devaient être les *Métriques* de Héron.

C'est un recueil systématique et un ensemble complet de problèmes métriques de géométrie plane. Mais il faut remarquer avant tout que, dans les données numériques, l'auteur n'emploie que deux unités de longueur, lesquelles sont d'ailleurs essentiellement des mesures agraires : l'*orgyie* (brasse) ⁽¹⁾, et son décuple le *schœnion* (cordeau). Après le calcul des surfaces en *schœnia* et *orgyies* carrés, notre auteur, d'autre part, les transforme constamment en deux autres unités superficielles, à savoir : le *modius* de 2 *schœnia* ou 200 *orgyies* carrées, et son quarantième, la *λίτρα* (*livre*) de 5 *orgyies* carrées.

Or M. Hultsch a parfaitement établi dans ses travaux métrologiques que le *modius* agraire était la surface de terrain pour laquelle on comptait, comme semences, une mesure de capacité appelée *modius*, nom essentiellement romain, et dont il fallait trois pour le *jugerum* (2,493 mètres carrés). Cette mesure de capacité était d'ailleurs le double du *modius* romain ordinaire (8^{litres} 752) de 16 setiers, et l'on ne peut méconnaître dans les 40 *livres* dont elle se compose le poids approximatif du blé qu'elle contenait, estimé en livres romaines de 327^{gr} 453.

(1) Valant 2^m 041, d'après son rapport légal au pied romain, compté à 0^m 29574.

Qu'on suppose autant qu'on le voudra, sous les Ptolémées ou même sous les Pharaons, l'emploi en Égypte d'unités superficielles plus ou moins analogues, il est clair que le *modius* et la *livre* de la *Geometria* sont postérieures à la conquête romaine. Si donc cet écrit représente une source antérieure, il faut au moins supposer que son auteur aura remanié les calculs du modèle qu'il avait sous les yeux, en se proposant précisément de les adapter aux nouvelles unités en vigueur de son temps.

Mais on peut aller plus loin, car M. Hultsch a également établi d'une façon péremptoire que l'unité de longueur ou *orgyie* égyptienne avait été précisément modifiée par les Romains, de façon notamment que les 100 *orgyies* carrées fissent exactement le sixième de leur *jugerum*. Or cette transformation est loin d'avoir été immédiate; car si, dans le tableau des mesures usuelles qui précède la *Geometria*, se trouve définie la nouvelle *orgyie* avec les règles du calcul des *modii*, l'ancienne se trouve côte à côte avec le *pied romain* et le *jugerum* dans un tableau d'anciennes mesures rejeté à la fin de l'ouvrage.

Ainsi, ce dernier ne peut être au plus qu'une troisième édition refondue du texte primitif, faite sur une seconde déjà mise au courant des besoins de l'Égypte conquise et où notamment les mesures romaines avaient été introduites dans le tableau rédigé par Héron.

L'âge de cette troisième édition est d'ailleurs déterminé par celui des nouvelles mesures. Or, dans celles-ci ont disparu, pour faire place au système romain, l'ancien pied d'Égypte et les unités qui en dérivait; de plus s'est introduite la coudée de deux pieds au lieu d'un pied et demi. Ces modifications sont certainement postérieures au premier siècle de l'ère chrétienne et ne remontent pas probablement au delà du troisième. La révision de la *Geometria* est donc d'environ trois siècles postérieure à Héron.

L'auteur de cette révision semble, en tout cas, avoir possédé une certaine valeur, ce qui est, il faut le dire, une raison de croire qu'il n'a pas dû copier servilement un modèle.

Je ne m'arrêterai pas sur le second opusculé, la *Geodæsia*

(Héron; p. 141-152), qui paraît n'être qu'un abrégé du précédent, et se borne au calcul des rectangles et des triangles.

Viennent ensuite deux recueils de problèmes sur les volumes des solides : *Introductiones slereometricorum* (p. 153-171). — *Stereometricorum collectio altera* (p. 171-187).

L'ordre suivi dans le premier est singulier ; on commence par la sphère, on continue par le cône et le cylindre, on finit par le cube, les prismes et les pyramides ; après sont surajoutés, sans lien méthodique, des problèmes sur des objets réels.

L'auteur du recueil ne paraît guère avoir réellement approfondi les mathématiques ; il a bravement inséré (p. 163, comp. Cantor, p. 61) un problème sur une pyramide tronquée où les données conduisent pour la hauteur à une valeur imaginaire, qu'il calcule comme réelle.

Il note d'ailleurs comme ajouté par lui à l'ensemble antérieur un procédé dû au « très illustre Patricius », byzantin inconnu, en sorte que nous ne pouvons guère considérer le recueil comme clos avant le ^v siècle. Toutefois, sous sa forme immédiatement antérieure, on peut le regarder comme beaucoup plus ancien ; car si le pied y est l'unité ordinaire, on y rencontre la coudée romaine de 1 pied $\frac{1}{2}$ (p. 170) et, semble-t-il, la coudée grecque (p. 168), avec la transformation de leurs cubes en *modii* romains ordinaires. Ces problèmes, évidemment postérieurs à Héron, doivent remonter au contraire avant notre révision de la *Geometria*, tandis qu'il serait difficile de constater, en dehors de celle que nous avons expressément signalée, une addition plus récente que cette révision.

Quant à la seconde collection stéréométrique, elle est absolument sans unité ; les problèmes sur les objets réels y dominent, et plusieurs ne diffèrent de ceux de la précédente que par des détails de rédaction. Le pied est la seule unité de longueur employée. La date de cette collection ne peut dès lors être précisée ; toutefois, l'emploi de mots d'origine latine prouve suffisamment qu'elle a été faite sous la domination romaine ; d'autre part, il est facile de

voir que le compilateur était encore moins mathématicien que celui du recueil précédent.

Le désordre des problèmes et les erreurs augmentent encore dans le cinquième recueil, les *Mensuræ* (p. 188-207); il suffira de dire qu'en général les questions de stéréométrie y sont avant celles de planimétrie; la grécité est d'ailleurs très basse. Toutefois, on y retrouve sous d'autres formes (p. 192-193) les problèmes que nous avons signalés dans la première collection stéréométrique, sur la transformation en *modii* des coudées cubes, grecques et romaines, problèmes qui doivent, comme nous l'avons indiqué, remonter aux premiers temps de la conquête.

Bon nombre de calculs ne sont que de grossières approximations, dont plusieurs doivent être reportées jusqu'au temps des arpenteurs égyptiens; mais à côté se trouvent des formules relativement complexes et parfaitement exactes; entre autres, pour la surface du segment sphérique de hauteur h et de diamètre de base s :

$$\left[\left(\frac{s}{2} \right)^2 + h^2 \right] \pi,$$

et pour le volume,

$$\left[3h \left(\frac{s}{2} \right)^2 + h^3 \right] \frac{\pi}{6},$$

formules que, par une singulière inadvertance, M. Cantor (p. 50) semble ne considérer que comme simplement approximatives.

Enfin, le *Liber Geoponicus* (p. 208-234) paraît être la collection la plus récente; car on a évidemment utilisé pour la former toutes les précédentes, sans compter quelques autres sources analogues. M. Th.-H. Martin n'estime pas qu'elle remonte au delà du x^e siècle.

En résumé, sans même excepter les deux premiers recueils, on voit que l'attribution à Héron des divers problèmes que renferment ces diverses collections, n'a comme ensemble qu'une valeur assez hypothétique, et que, pour chacun en particulier, elle devient très douteuse. L'ouvrage désigné par Eutocius, sous le

nom de *Métriques* et dont nous n'avons pas à rechercher le véritable titre, aura, nous le voulons bien, servi soit de prototype, soit de source plus ou moins importante pour les divers opuscules qui nous sont parvenus; on peut encore, nous l'admettons, retrouver dans ces écrits des passages qui auront été textuellement empruntés. Mais Héron n'a probablement pas été le seul auteur de problèmes numériques; la forme qu'il emploie pour la rédaction, toute différente de celle des problèmes géométriques euclidiens, est identique à celle que l'on a retrouvée dans un *Manuel de Calculateur égyptien*, remontant peut-être jusqu'au xv^e siècle avant l'ère chrétienne ⁽¹⁾. Cette identité de forme suppose, pour la façon de traiter ces problèmes, une tradition écrite non interrompue, tradition qui nous semble d'ailleurs établie par l'existence dans les collections dites héroniennes de solutions antérieures aux déterminations exactes, solutions toutes pareilles à celles du *Manuel égyptien* précité; par exemple, la mesure de la surface d'un triangle isocèle par le produit de la base et de la moitié du côté (*sic*).

Que Héron ait été, grâce peut-être à sa célébrité comme mécanicien, sans doute aussi en raison de la valeur de son œuvre, le plus connu de ces auteurs de problèmes numériques, cela est incontestable, puisqu'il est le seul dont le nom nous soit parvenu, mais il n'a certainement, on l'a vu, pas plus été le dernier qu'il n'a pu être le premier. Seulement, il est arrivé ce fait, parfaitement explicable par la célébrité du géomètre alexandrin, que tous ces problèmes se sont groupés sous son nom. Pour en désigner les auteurs, on a dit d'abord οἱ περὶ Ἡρώνα, les Héroniens, puis simplement Héron. Finalement, les imitations ont fait disparaître le texte primitif qu'il avait composé, sort à peu près inévitable pour un ouvrage qui, devant être adapté aux besoins de la vie pratique, ne pouvait fixer la langue scientifique, comme avaient fait les *Éléments* d'Euclide.

⁽¹⁾ *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1878, p. 139. — Notice de M. L. Rodet. — Il s'agit du papyrus dit de Rhind.

III

Cette introduction était nécessaire, au moins je l'ai cru, pour bien fixer ce que l'on doit entendre par un calcul trouvé dans Héron. Il ne peut y avoir pratiquement de règle d'authenticité autre que celle posée par M. Cantor : tenir pour vraiment héronien tout ce qui est exact et en bon grec ; suspecter tout le reste. Comme il est prouvé d'ailleurs que, depuis l'ère chrétienne, la géométrie des anciens n'a fait aucun pas sérieux, toute formule remarquable doit être antérieure, et comme les *Métriques* devaient être un ouvrage probablement assez complet, il est présumable qu'elle s'y trouvait sous une forme ou sous une autre. Quant aux applications numériques, elles peuvent, en thèse générale, être postérieures ; mais cela n'a pas une grande importance, s'il s'agit du moins de calculs exacts ; car les procédés qui ont servi à les obtenir n'ont pas dû non plus subir de sérieuse amélioration sous la domination romaine. Ceci bien posé pour éviter toute ambiguïté, nous entrons en matière.

La première question que nous étudierons est celle de l'extraction des racines carrées incommensurables.

L'opinion qui prédomine généralement aujourd'hui est qu'il n'y a aucune chance de pouvoir reconstituer les procédés en usage chez les anciens pour cette opération. Par exemple, Nesselmann (*Die Algebra der Griechen*, p. 110) pense que les Grecs n'avaient pas de méthode définie, qu'ils ont trouvé leurs racines par tâtonnement et divination, en employant d'ailleurs des tables de carrés pour déterminer la partie entière. M. Cantor (p. 57) déclare qu'il est impossible de retrouver toutes les valeurs des écrits héroniens par aucune méthode reposant sur le théorème

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

en citant plusieurs de celles qu'il regarde comme réfractaires, il insiste sur ce point qu'une seule exception doit être suffisante pour exclure un procédé de calcul qui n'y conduirait pas. Enfin,

dans deux notes qu'a publiées récemment le *Bulletin de la Société Mathématique de France* ⁽¹⁾, (*Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre. — Sur les méthodes d'approximation des anciens*), M. L. Rodet se range du même côté, alors que précisément la première de ces notes est consacrée à restituer pour la gloire du brahmane Baudhāyana, un procédé très voisin de celui que nous allons montrer remplissant complètement, à notre sens du moins, la condition posée par M. Cantor.

Mais avant d'aborder notre démonstration, il convient d'écarter un double préjugé.

En premier lieu, on croit généralement que le système de numération écrite des Hellènes, système dont ils paraissent les inventeurs et qui ne remonte guère au delà du ^v^e siècle avant notre ère, était d'une très grande incommodité pour les calculs, à tel point que ce serait même, au dire de Hankel ⁽²⁾, la marque d'une incapacité réelle sous ce rapport, dans une race si merveilleusement douée au contraire pour la géométrie.

Il peut plaire à un historien de mettre en relief les diverses aptitudes des différentes nations, d'opposer les Hindous aux Grecs; il peut défendre brillamment une thèse séduisante. Mais il faut se garder de toute exagération; si les Grecs paraissent, en général, n'avoir guère fait de calculs compliqués, c'est sans doute aussi et surtout parce qu'ils n'en avaient guère besoin; ils se sont naturellement bornés, par exemple en astronomie, à ce qui suffisait, eu égard à l'imperfection de leurs procédés d'observation. Quant à leur système de numération écrite, on conviendra que, pour le juger en équité, il faudrait le pratiquer réellement.

J'ai voulu en avoir le cœur net, et je me suis exercé à calculer avec les lettres grecques; si mon expérience personnelle peut être de quelque poids, je dirai que j'ai été surpris, après avoir acquis très peu d'habitude encore, de découvrir dans cette notation des

⁽¹⁾ Année 1879, p. 98 et 159.

⁽²⁾ *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, Teubner, 1874.

avantages pratiques que je ne soupçonnais guère; je dirai que je suis très rapidement arrivé à pouvoir refaire l'ensemble des calculs de la *Mesure du Cercle* d'Archimède, sans différence de temps sensible, soit avec les lettres grecques, soit avec les chiffres modernes. Cet essai m'a paru suffisant et je ne l'ai pas poursuivi.

On croit ordinairement, d'un autre côté, que l'extraction de la racine carrée, en particulier, était pour les anciens une opération des plus difficiles et des moins pratiquées. Il n'est pas niable qu'au VI^e siècle de notre ère, Eutocius, le commentateur d'Archimède et d'Apollonius, se comporte comme s'il l'ignorait. Mais on pourrait tout au plus arguer sérieusement de ce fait pour l'époque de décadence profonde où résonna ce faible écho des antiques doctrines.

Sans doute, même aux siècles les plus brillants de la civilisation hellène, l'instruction mathématique fut toujours infiniment moins répandue que de notre temps, et toute proportion gardée, ce qui peut s'observer chez nous dut évidemment se présenter de même alors; à savoir que la très grande majorité des individus qui ont appris à calculer sont parfaitement incapables d'extraire une racine carrée. Mais il n'en ressort pas moins du texte d'Eutocius lui-même, que le procédé d'extraction était chez les Grecs un objet de l'enseignement classique, et nous pouvons d'ailleurs tirer de l'ensemble des écrits héroniens la conviction que pour les arpenteurs auxquels s'adressaient ces écrits, l'opération devait se pratiquer couramment.

Un seul exemple suffira pour appuyer notre dire. Dans la *Geometria* (p. 125), on trouve pour l'aire A d'un segment de cercle en fonction de la corde s et de la flèche h , la formule approximative :

$$(1) \quad A = \frac{s+h}{2} h + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \frac{1}{14},$$

très remarquable en ce sens que l'erreur commise ne dépasse guère celle de l'évaluation d'alors, $\pi = \frac{22}{7}$. Rien n'était plus facile que de tirer de là pour l'arc L du segment en fonction des mêmes

variables une formule également rationnelle, également satisfaisante comme approximation :

$$(2) \quad L = s + h + \frac{1 - \frac{5}{28} \frac{s^2}{h^2}}{1 + \frac{1}{4} \frac{s^2}{h^2}} h.$$

On ne rencontre, au contraire, dans les écrits héroniens, pour L , de comparables à la formule (1), quoique cependant bien inférieures comme exactitude, que des expressions irrationnelles :

$$L = \sqrt{s^2 + 4h^2} + \frac{h}{4}, \quad (\textit{Geometria}, \text{p. 125})$$

$$L = \sqrt{s^2 + 4h^2} + (\sqrt{s^2 + 4h^2} - s) \frac{h}{s}. \quad (\text{d}^\circ \quad \text{p. 128})$$

Ces dernières formules devaient donc être pour les Grecs, comme elles le sont pour nous, plus rapides à calculer que la formule (2).

Quant au procédé d'extraction, en ce qui concerne la partie entière de la racine, je ne conçois guère que Nesselmann doute si les Grecs en connaissent un semblable au nôtre (*mutatis mutandis*), alors qu'il développe (p. 144 et suiv.), d'après le texte de Théon d'Alexandrie, la méthode pour l'extraction de la racine d'un nombre composé en degrés, minutes et secondes. Inutile de dire que cette méthode est identique à notre procédé élémentaire; il ne pouvait en être autrement.

Que les Grecs aient pu employer des tables de carrés, comme le faisaient déjà les Chaldéens, c'est très possible, probable même si l'on veut; encore aujourd'hui de pareilles tables se trouvent et sont très utiles, dans les *Aide-mémoire d'ingénieurs*. Mais que peut-on en conclure?

A la vérité, la question n'est nullement là; elle porte sur les moyens employés par les Grecs pour la détermination des parties fractionnaires des racines incommensurables que l'on rencontre dans leurs écrits. Or il y a, pour ces racines, deux sources principales, la *Mesure du Cercle* d'Archimède et les écrits héroniens.

Nous consacrerons une étude spéciale à la première qui présente peu d'intérêt en fait pour notre sujet actuel; car les deux valeurs de $\sqrt{3}$ qu'Archimède prend comme point de départ, peuvent avoir été obtenues, comme je l'ai déjà dit dans mon Essai sur Pappus, par la solution en nombres entiers des équations :

$$3x^2 - y^2 = -4, \quad 3x^2 - y^2 = 2.$$

D'autre part, l'approximation des autres racines n'est pas poussée suffisamment loin pour asseoir des conclusions certaines : nous nous contenterons donc de dire pour le moment que leur étude ne peut en aucune manière modifier les résultats déduits des racines héroniennes.

Quant à celles-ci, il convient de les distinguer en deux classes : les unes sont données explicitement; j'ai relevé soigneusement toutes les fractionnaires qui ne sont pas exactes, elles se trouvent au nombre de 25. On les verra ci-après et nous allons les étudier les premières; les autres peuvent se tirer indirectement de formules approchées pour la surface des polygones réguliers, en fonction du côté.

Nous essaierons plus loin de restituer l'invention de ces formules, question que M. Cantor (p. 45) a regardé comme suffisant de poser.

IV

Si la méthode des Grecs, pour l'extraction d'une racine carrée, était la même que la nôtre, lorsqu'il s'agissait d'unités entières ou de fractions sexagésimales, en quoi pouvait-elle en différer pour la détermination d'autres fractions? La réponse est facile; en cela seulement que ces autres fractions formaient un système de numération fractionnaire que nous ne pratiquons pas plus que les anciens n'ont pratiqué le système décimal. Quant à la fraction ordinaire, à numérateur et dénominateurs entiers, mais d'ailleurs quelconques, les Grecs la connaissaient bien, et on la trouve déjà dans Archimède; toutefois elle ne semble dominer qu'à partir du

III^e siècle de notre ère (Diophante). En tout cas, toutes les parties fractionnaires des racines incommensurables dans les écrits héroniens sont exprimées sous une autre forme, *par une suite de fractions dont le numérateur est l'unité et dont les dénominateurs vont en croissant*. Seule des autres fractions que nous employons, $\frac{2}{3}$ jouit du privilège singulier de pouvoir, s'il y a lieu, figurer au premier rang de cette suite.

Ce système de numération, emprunté de toutes pièces aux calculateurs égyptiens, ainsi que le prouve le papyrus de Rhind, a des avantages notables, lorsque, ce qui était l'usage, le dénominateur le plus élevé ne dépasse point 100; avec un peu de pratique, on arrive en effet à opérer très rapidement la multiplication par un tel *quantième*, soit d'un nombre entier, soit d'un autre quantième semblable. Quant à l'addition, pour la réduction de deux quantièmes à dénominateurs égaux et impairs, nous savons, précisément par le document égyptien, qu'elle faisait l'objet d'un exercice particulier. La soustraction exige aussi quelques artifices simples; mais en somme, avec ce système, la pratique des quatre règles est commode et l'approximation satisfaisante pour des besoins ordinaires.

C'est uniquement l'existence de ce système que nous devons avoir en vue, pour l'objet de nos recherches, et nous devons tout d'abord nous demander : un tel mode de numération étant admis, comment ferions-nous *naturellement* pour poursuivre l'extraction d'une racine carrée dont la partie entière est déjà déterminée?

Nous répondrons qu'il faut distinguer et que nous agirions différemment, suivant le degré d'approximation que nous désirons. Or devons-nous espérer que dans tous les exemples des écrits héroniens, les divers auteurs des calculs aient tous cherché le même degré? Évidemment non, et l'examen des racines le prouve surabondamment. Nous devons admettre au moins trois degrés successifs d'approximation.

Supposons d'abord qu'il s'agisse du premier. Ce qu'il y a de plus naturel est évidemment de diviser simplement le reste par le

double de la racine entière et, s'il y a lieu, de décomposer cette fraction en quantités. Nous savons d'ailleurs qu'en agissant de la sorte, nous avons la racine par excès.

Combien sur les vingt-cinq racines héroniennes, en trouvons-nous qui peuvent être obtenues de la sorte? Cinq qui sont :

$$(1) \quad \sqrt{63} = 8 - \frac{1}{16}, \quad (\text{Stereom. (I), p. 163})$$

très remarquable en ce que le complément est négatif;

$$(2) \quad \sqrt{1125} = 33 \frac{1}{2} \frac{1}{22}, \quad (\text{Stereom. (II), p. 182})$$

le complément représente $\frac{36}{66}$;

$$(3) \quad \sqrt{1081} = 32 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{64}, \quad (\text{d° p. 183})$$

le complément représente $\frac{51}{64}$;

$$(4) \quad \sqrt{50} = 7 \frac{1}{14}, \quad (\text{d° p. 184})$$

le complément est immédiatement obtenu.

$$(5) \quad \sqrt{75} = 8 \frac{1}{2} \frac{1}{8} \frac{1}{16}, \quad (\text{d° p. 185})$$

le complément représente $\frac{11}{16}$.

Les quatre dernières de ces racines, qui se suivent dans un des écrits les moins estimables de la collection héronienne, appartiennent évidemment à la même main, et leur comparaison prouve clairement que nous en avons rencontré la véritable explication, alors qu'au premier abord, cette explication, pour une racine isolée comme (3), peut paraître présenter des difficultés insurmontables.

Mais le procédé que nous avons indiqué peut, même pour un premier degré d'approximation, dépasser le but cherché; il conduit en effet le plus souvent à une suite de plusieurs fractions complé-

mentaires, et on peut n'en désirer qu'une seule. Que fera-t-on dans ce cas?

Il s'agit de substituer au quotient du reste par le double de la racine entière, un seul *quantième*; le dénominateur s'en obtiendra naturellement par la division du double de la racine entière par le reste. D'ailleurs, dans cette division, on choisira le nombre entier le plus voisin du quotient exact, et suivant qu'il sera approché par défaut ou par excès, la racine le sera par excès ou par défaut.

Remarquons cependant que si nous employons comme complément la fraction $\frac{2}{3}$, nous devons modifier légèrement cette règle. Si le quotient entier de la division est l'unité, nous aurons à examiner si $1\frac{1}{2}$ ou 2 s'approche davantage du quotient exact. Mais il ne suffira plus, si l'on choisit $1\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le complément $\frac{2}{3}$, que ce quotient soit approché par excès, pour que la racine le soit par défaut.

Nous trouvons dans les écrits héroniens quatre racines au premier degré d'approximation qui sont déterminées de la sorte, à savoir trois par excès :

$$(6) \quad \sqrt{58\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} = 7\frac{2}{3}, \quad (\textit{Geometria}, \text{ p. 112})$$

$$(7) \quad \sqrt{444\frac{1}{3}\frac{1}{9}} = 21\frac{1}{12}, \quad (\text{ d' } \text{ p. 130})$$

$$(8) \quad \sqrt{3400} = 58\frac{1}{3}, \quad (\textit{Geopon.}, \text{ p. 212})$$

et une par défaut :

$$(9) \quad \sqrt{54} = 7\frac{1}{3}. \quad (\textit{Stereom. (II)}, \text{ p. 181})$$

Les deux racines de la *Geometria* appartiennent à des problèmes où l'on répète, sur d'autres données et avec une rigueur moindre, les calculs de questions précédentes; elles semblent donc ne pas provenir de la source originale. Les deux autres ne doivent pas inspirer plus de confiance.

La dernière est remarquable en ce sens qu'on pourrait l'obtenir en divisant le reste par le double de la racine augmenté d'une unité, suivant un procédé signalé par M. L. Rodet chez des auteurs arabes. Mais l'application tentée de ce procédé aux vingt-cinq racines héroniennes ne réussit pour aucune autre; je suis donc conduit à l'écartier en principe des recherches entreprises ici.

Nous pouvons désormais passer au second degré d'approximation. Comment peut-on le supposer obtenu, toujours suivant la marche la plus naturelle?

Il faut évidemment partir du premier degré, avec un seul *quantième*, former le nouveau reste et le diviser par le double de la racine obtenue. D'ailleurs on pourra, soit décomposer intégralement en *quantièmes* le quotient de cette division (approximation par excès), soit s'arrêter dans cette décomposition en négligeant les termes à dénominateur trop considérables, soit enfin substituer à ce quotient un *quantième* unique, par excès ou par défaut, en suivant le même procédé que tout à l'heure. D'autre part, pour éviter les soustractions et les calculs qu'elles entraînent, il conviendra en principe que le premier degré d'approximation soit par défaut.

Or, en premier lieu, nous trouvons cinq racines où le second quotient est complet.

$$(10) \quad \sqrt{135} = 11 \frac{1}{2} \frac{1}{14} \frac{1}{21}, \quad (\text{Geometria, p. 93})$$

où je considère, par exception, la suite comme représentant les deux termes $\frac{2}{3} - \frac{1}{21}$, obtenus successivement, le premier par excès et par conséquent le second négatif.

$$(11) \quad \sqrt{43 \frac{1}{2} \frac{1}{4}} = 6 \frac{1}{2} \frac{1}{13} \frac{1}{26}, \quad (\text{Geometria, p. 94})$$

où le second quotient est $\frac{3}{26} = \frac{1}{13} + \frac{1}{26}$;

$$(12) \quad \sqrt{6300} = 79 \frac{1}{3} \frac{1}{34} \frac{1}{102}, \quad (\text{d° p. 93})$$

où il est $\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$ (transformation identique à celle du papyrus de Rhind pour cette fraction);

$$(13) \quad \sqrt{1575} = 39 \frac{2}{3} \frac{1}{51}, \quad (\text{Geometria, p. 95})$$

$$(14) \quad \sqrt{216} = 14 \frac{2}{3} \frac{1}{33}, \quad (\text{d° p. 110})$$

Tous ces exemples me paraissent pouvoir être attribués à Héron; il n'en est pas de même des deux suivants, où l'on semble s'être arrêté dans le développement du second quotient :

$$(15) \quad \sqrt{356 \frac{1}{18}} = 18 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{9}, \quad (\text{Stereom. (II), p. 185})$$

où il aurait été :

$$\frac{18 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{18}}{37} = \frac{1}{4} \frac{1}{9} \frac{1}{11} \frac{1}{33},$$

et où par suite la racine est prise par défaut :

$$(16) \quad \sqrt{356} = 18 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}, \quad (\text{Geepon., p. 217})$$

où l'on a au contraire forcé le second terme du développement.

$$\frac{18 \frac{1}{2} \frac{1}{4}}{37} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{296},$$

et où par suite la racine est par excès.

Dans quatre racines, au lieu de développer le quotient, on lui a substitué un seul *quantième*, dont le numérateur est régulièrement obtenu en divisant le double de la racine obtenue par le reste, une fois en prenant le plus faible entier contenu dans le quotient :

$$(17) \quad \sqrt{5000} = 70 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \text{ (par excès), } \quad (\text{Geepon., p. 212})$$

trois fois en forçant d'une unité.

$$(18) \quad \sqrt{720} = 26\frac{1}{2}\frac{1}{3} \text{ (par excès), } (Geometria, \text{ p. 110})$$

$$(19) \quad \sqrt{208} = 14\frac{1}{3}\frac{1}{12} \text{ (par défaut), } (d^o \text{ p. 126})$$

$$(20) \quad \sqrt{43\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{9}} = 6\frac{1}{2}\frac{1}{9} \quad d^o \quad (Stereom. (II), \text{ p. 185})$$

De ces quatre dernières, je considère comme seule authentique (18) où, à la différence des autres, on s'est astreint à prendre le nombre entier le plus voisin du quotient exact.

Avant d'aller plus loin, faisons deux remarques :

Il y avait lieu de se demander si les anciens avaient pratiqué la règle, aujourd'hui enseignée dans nos écoles, dans le cas où le nombre dont est extrait la racine est fractionnaire, à savoir de le réduire à un dénominateur carré. Les essais que j'ai faits dans ce sens n'ont guère abouti, sauf pour une seule racine que nous n'avons pas encore vue.

$$(21) \quad \sqrt{8\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} = 2\frac{2}{3}\frac{1}{4} \text{ (par excès), } (Geometria, \text{ p. 92})$$

Elle s'expliquerait très simplement par l'approximation

$$\sqrt{135} = 11\frac{2}{3},$$

en divisant par 4. Mais l'isolement de ce cas me fait préférer l'hypothèse d'une approximation au troisième degré, où, si l'on prend successivement $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ comme premières fractions de la suite complémentaire, 6 est le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{44}{7}$ du double de la racine obtenue par le reste. La suite $\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{6}$ aura ensuite été mise sous une forme plus simple et plus dans les usages de l'école, $\frac{2}{3}\frac{1}{4}$.

J'avoue toutefois que cette déduction compliquée peut laisser

un doute; il n'existe au reste qu'un autre exemple d'une approximation au troisième degré

$$(22) \quad \sqrt{886 - \frac{1}{16}} = 29 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{68}, \quad (\textit{Geometria}, \text{p. 95})$$

où le troisième quotient est complet (approximation par excès).

Reste en second lieu à répondre à une objection possible. Il ne semble pas y avoir une règle précise pour le choix des premières fractions complémentaires; notamment sur les exemples du second et du troisième degré d'approximation, il y en a huit où la plus convenable par défaut est $\frac{2}{3}$; or pour six de ces huit (15) (16) (17) (18) (21) (22), on aurait au contraire choisi $\frac{1}{2}$; de même dans l'exemple (21), la seconde fraction la plus convenable par défaut eût été $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{1}{4}$. Enfin, dans les deux cas où la première fraction complémentaire est $\frac{2}{3}$, (13) et (14), elle peut représenter $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, obtenues successivement.

J'estime qu'il y avait en fait à cet égard une certaine latitude laissée au calculateur qui pouvait en principe préférer $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$ pour éviter une fraction au double de la racine obtenue, et qui semble, dans l'exemple (21), avoir, en second lieu, choisi $\frac{1}{4}$ pour éliminer les fractions du reste. Ce sont là des artifices de calcul très admissibles, même dans une méthode régulière; mais cette latitude n'en était pas moins regrettable pour une approximation rapide, et en particulier l'exemple (21) est très peu satisfaisant; aussi ne puis-je guère le considérer comme authentiquement héronien.

Il semble d'ailleurs que ce n'était que dans le cas de l'emploi de semblables artifices, que l'on sentait la nécessité de recourir à un troisième degré d'approximation; en appliquant rigoureusement les règles, le second devait, en thèse générale, suffire aux besoins de la pratique. Il se calculait très rapidement, *beaucoup*

plus rapidement pour une même approximation que nos racines décimales, d'après notre méthode vulgaire. A ce point de vue, on pourrait même regretter que l'enseignement de cette vieille méthode, si naturelle et si simple, ait disparu de nos éléments.

Il nous reste à examiner trois racines des écrits héroniens qui semblent réfractaires à cette méthode.

$$(23) \quad \sqrt{108} = 10 \frac{1}{3} \frac{1}{15} \quad (\text{Stereom. (II), p. 183})$$

me paraît avoir été obtenu par un artifice particulier. Le calculateur aura remarqué que $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, et il aura substitué à $\sqrt{3}$ une valeur classique $\frac{26}{15}$, que nous allons retrouver tout à l'heure.

Quant aux racines :

$$(24) \quad \sqrt{2460 \frac{15}{16}} = 49 \frac{1}{2} \frac{1}{17} \frac{1}{34} \frac{1}{51}, \quad (\text{Geometria, p. 96})$$

$$(25) \quad \sqrt{615 \frac{15}{64}} = 24 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{51} \frac{1}{51} \frac{1}{68}, \quad d^{\circ} \quad d^{\circ}$$

je n'hésite pas à penser qu'elles n'ont jamais été calculées directement.

Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner la suite des problèmes des pages 94-96. La valeur (11) sert d'abord à calculer l'aire d'un premier parallélogramme $(79 \frac{1}{3} \frac{1}{26} \frac{1}{78})$ et celle d'un second $(29 \frac{2}{3} \frac{1}{13} \frac{1}{39})$ qui avec deux triangles, chacun de $24 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{26} \frac{1}{52}$, recompose le premier. Par les formules (12) (13) (22) (24) (25), on calcule par des extractions de racine : la première de ces aires, sa moitié, la seconde, le double de la dernière, et enfin cette dernière. Puis on établit la concordance ; il est évidemment très improbable qu'elle ait pu être obtenue par aucun procédé d'extraction, alors surtout que l'on ne retombe pas exactement sur les aires déjà calculées autrement. Il faut donc croire que (24) a été en réalité calculé par la différence de (12) et de (22) et (25) en

prenant la moitié de cette différence. J'admets au reste que tous ces calculs sont véritablement héroniens.

Je crois être au bout de la première tâche que j'ai entreprise; peut-être certains points de détail restent-ils contestables; mais je crois avoir suffisamment établi que les Grecs de l'école héronienne employaient pour l'extraction des racines carrées une méthode simple; je crois avoir restitué l'ensemble de cette méthode, sur deux éléments essentiels, l'application du théorème fondamental :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

et l'emploi des *quantèmes*. C'est au reste ce dernier élément seul qui peut lui donner un caractère particulier. Quand il se trouve que le reste se présente lui-même sous la forme d'un *quantème* (à dénominateur carré), cet emploi peut, avec l'usage de termes négatifs, se borner à la détermination facile de *quantèmes* complémentaires successifs, sans que l'on ait à opérer des décompositions de quotient comme nous en avons vu. Alors on retombe identiquement sur le procédé restitué, dans une note citée plus haut, par M. Léon Rodet, sous le nom du brahmane Baudhâyana. Cette coïncidence est évidemment toute naturelle et n'implique aucune communauté d'origine.

Dans ce cas, on obtient une suite indéfinie de solutions d'une équation de Pell, et c'est là, comme je le montrerai dans une autre étude, qu'il faut sans doute pour ces équations chercher l'origine de la méthode hindoue, et non pas dans les déductions essayées par Hankel. Mais tout en admettant l'originalité de cette méthode, la même raison de simplicité réelle du problème et d'identité des points de départ, a pu permettre aux Grecs d'ébaucher indépendamment, de leur côté, une méthode analogue, et nous avons, notamment en ce qui concerne les valeurs approximatives de $\sqrt{3}$ dans la *Mesure du Cercle* d'Archimède, de fortes présomptions pour croire, ainsi que nous l'avons dit, que le géomètre de Syracuse était en possession de procédés plus ou moins complets pour la solution du problème.

Lorsque j'ai commencé à étudier les racines que l'on peut déduire implicitement des formules héroniennes pour le calcul des aires des polygones réguliers en fonction de leurs côtés, — question que je vais aborder maintenant, — je me proposais particulièrement de rechercher s'il n'y avait pas là de nouveaux arguments possibles en faveur de la thèse que je viens d'énoncer. Ces recherches ont eu, je dois le dire, un résultat négatif; c'est-à-dire que la méthode d'extraction restituée plus haut a toujours suffi. La divination, dans ces conditions, de l'origine de ces formules, n'en présentera pas moins, je l'espère, quelque intérêt pour le lecteur.

V

L'approximation dans les coefficients rationnels des formules héroniennes relatives à la surface des polygones réguliers, est très variable (de la première à la troisième décimale). Pour l'étude de ces formules, nous les diviserons en quatre groupes, suivant que les polygones dérivent du triangle équilatéral, du carré, du décagone, ou enfin que leur surface est transcendante.

1^{er} GROUPE*Formules approchées.**Formules exactes.*

$$S_3 = \frac{13}{30} a_3^2 = a_3^2 \times 0,433333,$$

$$S_3 = a_3^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a_3^2 \cdot 0,433013,$$

$$S_6 = \frac{13}{8} a_6^2 = a_6^2 \times 2,6,$$

$$S_6 = a_6^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} = a_6^2 \cdot 2,598176,$$

$$S_{12} = \frac{45}{4} a_{12}^2 = a_{12}^2 \times 11,25,$$

$$S_{12} = a_{12}^2 \cdot 3(2 + \sqrt{3}) = a_{12}^2 \cdot 11,196152.$$

Les deux premières de ces formules approchées supposent que l'on a pris

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15};$$

la troisième, au contraire,

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Ici il n'y a point de difficulté; nous sommes en présence d'approximations régulières au second degré (à quotient complet); seulement pour l'une, la première fraction complémentaire est $\frac{2}{3}$, pour l'autre, $\frac{1}{2}$.

La seule question que l'on pourrait poser serait de savoir si la moins grande approximation, pour la surface du dodécagone, vient bien du choix de la valeur $\frac{7}{4}$ et non de ce que les Grecs, ayant obtenu l'apothème sous une forme plus compliquée, comme $\frac{a}{4} \sqrt{7 + 6\sqrt{3}}$, auraient été incapables de la simplifier.

On peut répondre hardiment par la négative. Qui a étudié en particulier le dixième livre d'Euclide, qui a vu avec quel soin (*Éléments*, XIII, 11) le Maître établit que, lorsque le rayon du cercle circonscrit est rationnel, le côté du pentagone est une *irrationnelle mineure* (ἐλάσσων), ne peut douter que ce ne fût, au moins après lui, un exercice classique que de démontrer que si le côté du dodécagone est rationnel, l'apothème est une *binomiale* (ἐκ δύο ὀνομάτων).

Si donc nous rencontrons deux valeurs différentes pour $\sqrt{3}$, c'est qu'en raison de l'approximation que l'on se contentait d'obtenir (environ $\frac{1}{200}$ d'erreur relative pour le côté égal à l'unité), la première aurait conduit pour le dodécagone à un coefficient $\frac{56}{5}$, jugé trop complexe.

2^e GROUPE

Nous n'avons pas à nous occuper du carré, mais seulement de l'octogone.

Formule approchée.

Formule exacte.

$$S_8 = a_8^2 \frac{29}{6} + a_8^2 \cdot 4,833333, \quad S_8 = a_8^2 \cdot 2(1 + \sqrt{2}) = a_8^2 \cdot 4,828427.$$

L'approximation, assez remarquable, montre bien que le doute élevé au sujet de la surface du dodécagone n'est pas recevable.

On déduit de là :

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

ce qui est de même une approximation régulière au second degré (quotient complet).

3° GROUPE

Formules approchées.

$$S_5 = a_i^2 \cdot \frac{5}{3} = a_i^2 \cdot 1,666666,$$

$$S_7 = a_i^2 \cdot \frac{12}{7} = a_i^2 \cdot 1,714285,$$

$$S_{10} = a_{i_0}^2 \cdot \frac{15}{2} = a_{i_0}^2 \cdot 7,5.$$

Formules exactes.

$$S_5 = a_i^2 \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} = a_i^2 \cdot 1,720477,$$

$$S_{10} = a_{i_0}^2 \cdot \frac{5}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} = a_{i_0}^2 \cdot 7,694208.$$

Il est clair que, pour le décagone, on s'est contenté de prendre pour $\sqrt{5}$ la partie entière 2; aussi l'approximation n'est guère satisfaisante. Sans doute, on avait dû, comme pour le pentagone, calculer une formule moins inexacte; mais la commodité de celle que nous avons donnée l'aura néanmoins fait conserver, et elle nous est seule parvenue.

La même approximation pour $\sqrt{5}$ (savoir $\sqrt{5} = 2$) conduit à la première formule pour la surface du pentagone, car alors on a :

$$S_5 = a_i^2 \cdot \frac{1}{4} \sqrt{45}.$$

En extrayant la racine carrée au second degré d'approximation avec le quotient complet,

$$\sqrt{45} = 6 + \frac{2}{3} + \frac{1}{24},$$

d'où, en divisant par 4 et négligeant $\frac{1}{96}$, le coefficient

$$1 \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Cette approximation, très grossière, peut cependant avoir une autre origine ; car, d'après une formule que nous allons rencontrer tout à l'heure, les anciens prenaient pour le diamètre du cercle circonscrit au pentagone :

$$d_5 = \frac{5}{3} a_5,$$

en sorte que le rayon, l'apothème et la moitié du côté formaient un triangle rectangle dont les côtés étaient regardés comme proportionnels à 5, 4, 3, d'où s'ensuit immédiatement la formule :

$$S_5 = \frac{5}{3} a_5^2.$$

L'autre formule pour la surface du pentagone, où le coefficient est $\frac{12}{7}$, quoique elle-même soit loin d'être satisfaisante, semble témoigner de tentatives plus intelligentes.

Supposons l'extraction de $\sqrt{5}$ régulièrement faite *par défaut*, au premier degré seulement :

$$\sqrt{5} = 2 \frac{1}{5},$$

$$S_5 = a_5^2 \cdot \frac{\sqrt{47}}{4}.$$

Calculons maintenant $\sqrt{47}$ au premier degré par excès avec un quotient complet :

$$\sqrt{47} = 7 - \frac{1}{7},$$

d'où suit immédiatement la formule.

En somme, les valeurs approchées pour ce groupe laissent singulièrement à désirer, et indiquent chez leurs auteurs une réelle inhabileté pour le calcul des irrationnelles de la forme

$$\sqrt{a + \sqrt{b}}.$$

4^e GROUPE.*Formules approchées.**Formules exactes.*

$$S_7 = a_7^2 \cdot \frac{43}{12} = a_7^2 \cdot 3,583333...,$$

$$S_7 = a_7^2 \cdot 3,633910...,$$

$$S_8 = a_8^2 \cdot \frac{51}{8} = a_8^2 \cdot 6,375,$$

$$S_8 = a_8^2 \cdot 6,181824...,$$

$$S_9 = a_9^2 \cdot \frac{38}{6} = a_9^2 \cdot 6,333333,$$

$$S_{11} = a_{11}^2 \cdot \frac{66}{7} = a_{11}^2 \cdot 9,428571,$$

$$S_{11} = a_{11}^2 \cdot 9,365502....$$

L'examen de ces formules conduit à cette remarque inattendue que l'approximation la plus satisfaisante se rencontre là où on pouvait le moins s'attendre, c'est-à-dire pour l'endécagone. Il y a donc lieu de supposer *a priori* que l'origine de cette formule n'est pas la même que celle des deux autres.

Mais quels moyens peut-on supposer employés par les Grecs pour arriver à l'une quelconque de ces trois approximations?

Nous trouvons dans le *Liber Geoponicus* (p. 225 et suiv.), une relation approchée qui présente un caractère d'antiquité assez accusé; elle consiste, a_n étant le côté d'un polygone régulier de n côtés et d_n le diamètre du cercle circonscrit, à prendre :

$$d_n = n \frac{a_n}{3}.$$

Nous considérons cette approximation comme très ancienne, parce qu'il est facile de voir que $\frac{n a_n}{d_n}$ tend vers π lorsque n augmente, et que dès lors la formule doit remonter à une époque où l'on prenait couramment $\pi = 3$, au lieu de $\pi = \frac{22}{7}$. A la vérité, ni l'une ni l'autre de ces valeurs de π , introduites dans la formule

$$d_n = n \frac{a_n}{\pi},$$

ne constituent une certaine approximation qu'à partir du penta-

gone, et jusqu'à l'enneagone, le nombre 3, qui donne l'identité pour $n = 6$, a l'avantage. Mais ceci n'infirmes pas notre remarque sur une relation donnée comme générale et dont, au reste, si on la prend simplement pour ce qu'elle vaut, l'invention ne présente rien d'extraordinaire.

Or on en conclut :

$$S_n = n \frac{a_n}{2} \sqrt{\frac{d_n^2}{4} - \frac{a_n^2}{4}} = \frac{n a_n^2}{12} \sqrt{n^2 - 9}.$$

Faisons $n = 7$

$$S_7 = a_7^2 \cdot \frac{7}{12} \sqrt{40} = a_7^2 \frac{\sqrt{4960}}{12}.$$

D'ailleurs $\sqrt{4960} = 44 \frac{1}{4}$ approximativement.

Comme l'approximation sur le diamètre le donne évidemment trop fort, le calculateur a pu vouloir réduire sur la racine et prendre 43 au lieu de 44. Mais cette réduction était trop forte; $\frac{44}{12} = 3 \frac{2}{3}$ eût été par excès, il est vrai, mais plus approché et plus commode pour le calcul.

Faisons maintenant $n = 9$.

$$\frac{S_9}{a_9^2} = \frac{9}{12} \sqrt{72} = \frac{1}{4} \sqrt{648}.$$

On a approximativement :

$$\sqrt{648} = 25 \frac{1}{2},$$

ce qui donne le coefficient $\frac{51}{8}$ de l'une des deux formules pour l'enneagone.

L'autre $\frac{38}{6}$ correspond au contraire à une racine réduite

$$\sqrt{648} = 25 \frac{1}{3}.$$

mais la réduction est encore insuffisante, puisque même $24\frac{3}{4}$ serait un peu trop élevé.

Quant à la formule S_{11} , elle n'a certainement pas été obtenue de cette façon.

Tandis que les précédentes, S_7 et S_{11} , correspondent à des évaluations irrationnelles pour les diamètres des cercles circonscrits en fonction des côtés, on déduit de la valeur donnée à la surface de l'endécagone :

$$d_{11} = \frac{25}{7} a_{11}.$$

C'est donc bien par un procédé distinct que la formule S_{11} a été établie, et ce procédé est au reste facile à reconnaître.

Si l'on identifie à sa corde l'arc du 22° de la circonférence, soit d'ailleurs f_{11} la flèche pour le côté du polygone régulier de 11 côtés, et soit pris $\pi = \frac{22}{7}$, on a immédiatement

$$\frac{22}{7} \frac{d_{11}}{11} = \sqrt{a_{11}^2 + 4f_{11}^2},$$

et d'autre part :

$$4d_{11}f_{11} = a_{11}^2 + 4f_{11}^2.$$

D'où facilement

$$f_{11} = \frac{a_{11}}{2\sqrt{48}},$$

ou par approximation :

$$f_{11} = \frac{a_{11}}{14},$$

ce qui conduit aux valeurs données plus haut pour d_{11} et S_{11} .

Cette déduction présente un degré de probabilité beaucoup plus marqué que celle que nous avons essayée pour S_7 et S_{11} , sauf peut-être en ce qui concerne la valeur :

$$S_7 = \frac{51}{8},$$

Mais il suffit à nos prétentions de montrer que ces diverses formules ont dû être obtenues par des procédés très simples, et, vu leur imperfection, il n'y a guère lieu de rechercher plus avant quelle marche a été suivie en réalité pour les établir.

En résumé, ces diverses formules pour la surface des polygones réguliers n'indiquent nullement une science déjà sûre d'elle-même; elles ne doivent être en aucune façon attribuées à Héron, qui ne semble avoir employé que l'approximation la plus satisfaisante et la seule vraiment classique :

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15}$$

Elles se rencontrent dans des additions faites à la *Geometria* en dehors du plan nettement défini de cet ouvrage; elles figurent d'ailleurs une fois sous la rubrique *ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ* (*dans un autre livre*), une autre fois sous celle : *Εὐκλείδου εὐθυσμετρικά* (p. 134-137). Nous n'hésitons pas à les regarder comme antérieures à Euclide, en thèse générale.

VI

Nous terminerons cette étude en parlant de deux problèmes d'analyse indéterminée que l'on rencontre au milieu des questions de géométrie pratique qui font l'objet du *Liber geeponicus* (p. 218-219).

Nous avons déjà eu occasion de faire allusion à ces problèmes dans notre étude sur Pappus. Voici la traduction du grec, dans laquelle sont indiqués *en italique* les mots pour lesquels j'ai dû m'écarter du texte de M. Hultsch.

« 78. Trouvez deux rectangles ¹, tels que *le périmètre du second* » *soit triple de celui du premier* ² et l'aire du premier triple de » celle du second. Je fais comme suit : *pour le second rectangle* ³ : » Élevez 3 au cube, il vient 27, qui, doublé, donne 54; mainte- » nant retranchez 1, reste 53; *soit* ⁴ donc pour l'un des côtés » 53 ⁵ pieds, pour l'autre 54 pieds. Pour l'autre *rectangle* ⁶ comme

» suit : ajoutez les nombres 53 et 54, ce qui donne 107 pieds ;
 » multipliez par 3, il vient 321 ; maintenant retranchez 3⁷,
 » reste 318 pieds ; soit⁴ donc pour l'un des côtés du premier
 » rectangle 318 pieds ; pour l'autre côté 3 pieds. Il vient pour
 » l'une des aires 954⁸ pieds, pour l'autre 2862. »

« 79. Trouvez deux rectangles⁶ dont les périmètres soient
 » égaux et dont l'un ait une aire quadruple de celle de l'autre.
 » Élevez 4 au cube, il vient 64 ; retranchez 1, il reste 63 pieds
 » pour le demi⁹ périmètre de chacun des deux rectangles¹⁰. Pour
 » distinguer les côtés, je fais comme suit : Prenez 4, retranchez 1,
 » reste 3 ; soit donc 3 pieds pour l'un des côtés. Pour l'autre côté,
 » comme suit : de 63 retranchez 3, reste 60 pieds. Quant à
 » l'autre rectangle⁶, faites comme suit : multipliez 4 par lui-
 » même, il vient 16 pieds ; retranchez-en 1, reste 15 pieds ; que⁵
 » ce soit⁴ là le premier côté. Pour l'autre, comme suit : retran-
 » chez 15 de 63, reste 48 ; soit⁴ pour l'autre côté 48 pieds. Une
 » des aires est de 720 pieds, l'autre de 180 pieds. »

1. χωρία τετράγωνα, litt. « espaces carrés ». — 2. Lacune du texte à combler. —
 3. N'est pas dans le texte. — 4. Le manuscrit donne l'impératif, M. Hultsch met le
 futur. — 5. Au lieu de $\nu\epsilon'$ (56), il faut lire $\nu\gamma'$. — 6. χωρίον. — 7. Lacune du texte.
 — 8. Au lieu de $\tau\mu\delta'$ (844), il faut lire $\tau\delta\ \nu\delta'$. — 9. N'est pas dans le texte. —
 10. παραλλήλων πλευρών pour « parallélogrammes ».

Ces deux problèmes peuvent se représenter par un seul système d'équations :

$$a(x + y) = u + v,$$

$$xy = buv.$$

Si a et b sont deux nombres entiers donnés, la solution générale s'obtient en posant entre nombres entiers les relations suivantes, α et β étant d'ailleurs arbitraires :

$$a = pq, \quad a^2b - 1 = rs, \quad \beta b = mn,$$

$$u = \alpha\beta q, \quad x = abu + \alpha^2q^2nr,$$

$$v = a(x + y) - u; \quad y = abu + \beta ms.$$

Les solutions héroniennes sont les suivantes :

Pour $a = b$, premier problème :

$$\begin{aligned} x &= 2a^2, & u &= a, \\ y &= 2a^2 - 1, & v &= 2a(a^2 - 1). \end{aligned}$$

Pour $a = 1$, second problème :

$$\begin{aligned} x &= b^2 - 1, & u &= b - 1, \\ y &= b^2(b - 1), & v &= b(b^2 - 1). \end{aligned}$$

La solution du second problème, où $b - 1$ entre comme facteur dans les différentes valeurs des inconnues, est loin d'être aussi élégante que celle de la première.

En substituant à ce facteur un autre quelconque β , on trouve la généralisation :

$$\begin{aligned} x &= \beta(b + 1), & u &= \beta, \\ y &= \beta b^2, & v &= \beta b(b + 1), \end{aligned}$$

que M. Cantor (p. 62) a signalée dans le *Livre de Calcul* de Maxime Planude (éd. Gerhardt, Halle, 1865) écrit au xiv^e siècle. Il élève à ce sujet des doutes sur la véritable origine des problèmes dont il s'agit, et ne considère pas comme impossible qu'ils viennent de l'Inde.

Je ferai remarquer qu'au fond ces problèmes sont absolument du genre de ceux auxquels s'appliquent les procédés de Diophante, et que la solution en nombres *entiers et non simplement rationnels* doit être considérée comme un pur accident. Quant à la forme de l'énoncé, elle est très voisine de celle des *Paradoxes* d'Erycinus, au iii^e livre de Pappus, et paraît donc bien appartenir à la première époque de la science grecque. Il est à peine utile de dire que l'attribution de ces problèmes à Héron ne peut être qu'une simple hypothèse.

La forme de la rédaction est particulièrement intéressante; car si l'habitude antique était de présenter ainsi, suivant une marche synthétique, la solution des problèmes d'analyse indéterminée, un ouvrage, comme celui de Diophante, où l'on procède en sens

inverse, était d'une nécessité bien évidente. On aurait ainsi une explication toute naturelle du succès de cet ouvrage et de la disparition subséquente des autres recueils antérieurs dont l'existence est à supposer.
