

6198
TANNERY, P.
1885
P. 311-324

mais cela revient, comme il est facile de le voir, à l'expression

$$V_n(b) = -\frac{1}{2}[(b+n-1)V_{n-1}(b)].$$

On trouve sans difficulté :

$$V_0(b) = +\frac{1}{2},$$

$$V_1(b) = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{4},$$

$$V_2(b) = +\frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{4}b + \frac{1}{8},$$

$$V_3(b) = -\frac{1}{16}b^3 + \frac{3}{8}b^2 - \frac{1}{4}b + \frac{1}{16},$$

$$V_4(b) = +\frac{1}{32}b^4 - \frac{1}{8}b^3 + \frac{11}{128}b^2 - \frac{7}{256}b + \frac{13}{128},$$

$$V_5(b) = -\frac{1}{64}b^5 + \frac{1}{16}b^4 - \frac{21}{256}b^3 + \frac{1}{128}b^2 + \frac{109}{1024}b - \frac{143}{1024},$$

$$V_6(b) = +\frac{1}{128}b^6 + \frac{31}{1024}b^5 - \frac{339}{2048}b^4 - \frac{73}{1024}b^3 + \frac{6}{64}b^2 - \frac{887}{1024}b + \frac{1997}{8192}.$$

.....

Notre premier calcul se trouve vérifié ainsi; nous avons obtenu de plus le reste de la série sous forme finie.

Paris, juin 1885.



LES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ANTIQUITÉ;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Nous avons vu ⁽¹⁾ Anatolius et Proclus énumérer l'un et l'autre, d'après Geminus, quatre sciences empruntant à des degrés différents les théories de la Géométrie, à savoir : la Géodésie, l'Optique, la Mécanique et l'Astrologie.

Le terme de γεωδαισία, proprement *division des terres*, date de l'époque d'Aristote. Lorsque le mot de *géométrie*, appliqué tout d'abord, ainsi que son étymologie l'indique, aux opérations de l'arpentage, fut employé couramment pour désigner la science théorique créée par Pythagore, il fallut bien adopter un autre terme pour le remplacer dans sa première signification. Naturellement aussi, ce nouveau terme ne fut pas borné exclusivement à l'arpentage; on y comprit en général tout ce qui concernait les

⁽¹⁾ Voir l'article *Le classement des Mathématiques dans l'antiquité*, dans le numéro précédent.

IN: BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES

mais cela revient, comme il est facile de le voir, à l'expression

$$V_n(b) = -\frac{1}{2}[(b+n-1)V_{n-1}(b)].$$

On trouve sans difficulté :

$$V_0(b) = +\frac{1}{2},$$

$$V_1(b) = -\frac{1}{4}b + \frac{1}{8},$$

$$V_2(b) = +\frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{16}b - \frac{1}{32},$$

$$V_3(b) = -\frac{1}{16}b^3 + \frac{5}{64}b - \frac{1}{128},$$

$$V_4(b) = +\frac{1}{32}b^4 - \frac{1}{32}b^3 - \frac{11}{128}b^2 - \frac{7}{256}b + \frac{13}{512},$$

$$V_5(b) = -\frac{1}{64}b^5 - \frac{1}{128}b^4 + \frac{31}{256}b^3 + \frac{1}{256}b^2 + \frac{39}{1024}b - \frac{143}{2048},$$

$$V_6(b) = +\frac{1}{128}b^6 + \frac{31}{1024}b^5 - \frac{239}{2048}b^4 - \frac{73}{1024}b^3 + \frac{5}{64}b^2 - \frac{567}{4096}b + \frac{1997}{8192}.$$

Notre premier calcul se trouve vérifié ainsi; nous avons obtenu de plus le reste de la série sous forme finie.

Paris, juin 1885.

LES APPLICATIONS DE LA GÉOMÉTRIE DANS L'ANTIQUITÉ;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Nous avons vu (*) Anatolius et Proclus énumérer l'un et l'autre, d'après Geminus, quatre sciences empruntant à des degrés différents les théories de la Géométrie, à savoir : la Géodésie, l'Optique, la Mécanique et l'Astrologie.

Le terme de *γῶδαία*, proprement *division des terres*, date de l'époque d'Aristote. Lorsque le mot de *géométrie*, appliqué tout d'abord, ainsi que son étymologie l'indique, aux opérations de l'arpentage, fut employé couramment pour désigner la science théorique créée par Pythagore, il fallut bien adopter un autre terme pour le remplacer dans sa première signification. Naturellement aussi, ce nouveau terme ne fut pas borné exclusivement à l'arpentage; on y comprit en général tout ce qui concernait les

(*) Voir l'article *Le classement des Mathématiques dans l'antiquité*, dans le numéro précédent.

mesures pratiques de surfaces et de volumes, comme le témoigne le texte de Geminus.

Il nous reste, pour représenter cette branche de la Géométrie appliquée dans l'antiquité, un ensemble de documents suffisamment complet; c'est celui que forment les six à sept recueils de problèmes métriques qui portent le nom de Héron et dont F. Hultsch a publié le texte grec ⁽¹⁾. Il est bien constant, d'ailleurs, que leur rédaction date de différentes époques postérieures à l'ère chrétienne, mais que, comme fond, ils sont empruntés à un grand Ouvrage réellement dû à Héron d'Alexandrie, dont les extraits ont été mis au courant des nouveaux besoins et des nouvelles mesures, ce qui est le sort général des Ouvrages destinés aux applications pratiques.

Comme Traité un peu plus relevé, nous avons celui *Sur la dioptré* ⁽²⁾ également attribué à Héron et dont l'authenticité ne paraît pas douteuse. A côté de la description d'un appareil très perfectionné, mais beaucoup trop compliqué pour avoir jamais été réellement mis en pratique ⁽³⁾, à côté de la solution de la plupart des problèmes qui se présentent sur le terrain, on y trouve la plus ancienne démonstration connue pour la règle qui donne l'aire d'un triangle dont on connaît les trois côtés, suivant notre formule

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

A un niveau inférieur, au contraire, nous avons encore la collection des *Gromatici Veteres* (Berlin, 1848-1852) ou arpenteurs romains, qui, en dehors de leurs procédés traditionnels, ont fait de nombreux emprunts à des sources grecques dont quelques-unes sont perdues pour nous.

Je ne m'arrête pas à ces divers écrits, qui ont été l'objet d'analyses et de discussions approfondies, notamment de la part de M. Cantor, et auxquels j'ai d'ailleurs déjà consacré des études spéciales. Je remarque seulement que Héron n'avait pas adopté le

⁽¹⁾ En y joignant les *Mesures des marbres et des divers bois* de Didyme d'Alexandrie.

⁽²⁾ Publié par Vincent dans les *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque nationale*, XIX, 2, 1858.

⁽³⁾ Il comporte à la fois, de fait, un théodolite et un niveau d'eau.

terme technique de Géodésie. Son Ouvrage semble avoir été intitulé *Μετρίξ* (c'est le titre, du moins, que lui donna Eutocius, et il est, certainement, très bien choisi), et ses deux parties principales paraissent avoir été désignées comme *Γεωμετρούμενα* et *Στερεομετρούμενα* (Géométrie et Stéréométrie).

Héron aurait donc au moins tenté de relever sa matière au rang de la Science théorique. Mais l'usage du mot de Géodésie était déjà trop consacré, par suite sans doute de l'existence d'Ouvrages antérieurs assez nombreux, pour que Héron réussît à cet égard ailleurs que chez les Romains. A vrai dire, ceux-ci, sous le nom de géométrie, n'ont jamais fait que de l'arpentage; le terme de *Géodésie* resta, au contraire, classique chez les Grecs, pour reparaître dans les temps modernes, à son tour élevé en dignité, et désignant désormais des opérations dont les anciens n'ont jamais eu la moindre idée ⁽¹⁾.

2. Le *Traité De la Dioptre* donne lieu à une observation spéciale au point de vue de la classification des sciences. D'après un abrégé latin des *Catoptriques* de Héron, opusculé dont l'original grec est perdu et qui a été faussement attribué à Ptolémée ⁽²⁾, l'ingénieur alexandrin divisait l'Optique en Optique proprement dite, en Catoptrique et en Dioptrique. Ce dernier mot n'a, au reste, jamais eu dans l'antiquité le sens qu'il a chez les modernes; il désignait ce qui concerne la visée des objets, et cela particulièrement au moyen de la *dioptre* qui consistait, à proprement parler, en une règle munie de deux pinnules percées de trous ou de fentes. Il est donc clair que Héron devait considérer comme faisant partie de l'Optique, sinon tout son *Traité De la Dioptre*, au moins la description de son instrument.

Nous voyons, au contraire, Geminus classer la Dioptrique comme subdivision de l'Astrologie; il est clair que l'instrument de Héron pouvait servir pour observer les astres; non seulement

⁽¹⁾ Je remarque que, d'après l'usage de la langue grecque, on doit dire *géodète* et non *géodésien* pour désigner l'ingénieur qui effectue ces opérations.

⁽²⁾ Voir à ce sujet TH.-H. MARTIN, *Recherches sur la vie et les Ouvrages de Héron d'Alexandrie*, Mémoire présenté à l'Académie des Inscriptions et Belles-Lettres, IV, 1854.

il en indique l'emploi dans ce but, mais encore c'est seulement alors que lui servent les graduations de ses cercles, puisque les anciens ne faisaient pas de Trigonométrie rectiligne. D'autre part, Geminus, dans son *Introduction aux phénomènes* (éd. Petau, 42 B), nous parle, pour vérifier le mouvement circulaire des étoiles, de dioptres qui doivent avoir été semblables à celle de Héron, c'est-à-dire avoir consisté en un théodolite dont l'axe fût susceptible de prendre une inclinaison.

Il n'en est pas moins vrai que le classement empirique de Geminus suppose, pour son temps, l'existence de Traités qualifiés de *dioptriques*, et spécialement consacrés à l'Astronomie. Plutarque (1) attribue de fait à Euclide un tel Ouvrage; mais, même si l'on regarde comme valable ce témoignage unique, ou si seulement on admet l'existence de traités de *Dioptrique* correspondant dans une certaine mesure à des éléments d'Astronomie pratique, une grave question s'élève.

Il est clair que l'instrument très compliqué de Héron a dû être précédé d'essais plus simples; en supposant une *dioptre* réduite seulement à la règle de visée montée sur un cercle divisé, à quelle époque cet instrument élémentaire a-t-il été connu des Grecs?

On ne fait souvent aucune difficulté pour le regarder comme connu d'Hipparque et même comme lui étant bien antérieur. Il convient d'opposer à ce préjugé les considérations suivantes :

Toutes les positions d'étoiles antérieures à Euclide (comme celles d'Eudoxe) sont tellement erronées que l'on ne peut supposer qu'elles aient été observées directement.

Ptolémée attribue à Hipparque une *dioptre* toute spéciale; c'est une règle graduée avec une pinnule fixe et une pinnule mobile, les fentes des pinnules étant à différentes hauteurs. C'est le principe du *bâton de Jacob*, où l'angle est connu par sa tangente, ou estimé d'après des triangles semblables.

Si Ptolémée ne témoigne pas qu'Hipparque se soit servi de cet instrument pour des mesures effectives, mais seulement pour la comparaison des diamètres du Soleil et de la Lune à l'apogée et au périée, l'emploi de cette *dioptre* semble lié à celui des mesures

(1) *Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, éd. Didot, M, 1338,3.

chaldéennes de *coudée* et de *doigt* pour les petites distances angulaires des étoiles, mesures dont Hipparque se servait et qui ont passé des Grecs aux Arabes. D'autre part, on peut bien voir un instrument analogue dans la *dioptre* dont s'est servi un disciple d'Aristote, Dicéarque de Messine ⁽¹⁾, pour mesurer les hauteurs des montagnes de la Grèce.

L'instrument principal d'observation d'Hipparque et de Ptolémée a été une sphère armillaire, sans ligne de visée; un anneau mobile (le cercle astrolabe) pouvait être placé de façon que son plan passât par l'astre observé; ce cercle, perpendiculaire à celui qui représentait l'écliptique ⁽²⁾ et qui était gradué, donnait immédiatement la position en longitude. Or c'est là le problème ⁽³⁾ que le texte de Geminus donne comme étant l'objet spécial de la *Dioptrique*, et l'on doit observer que, quoiqu'il n'y eût nullement de *dioptre*, Ptolémée se sert du mot *διωπτρεύειν* pour désigner l'opération qui amène le plan du cercle astrolabe à passer par l'étoile.

On ne peut donc s'empêcher de penser que, pour Geminus, la *Dioptrique* devait être surtout représentée par des écrits sur des instruments autres que celui de Héron, quoiqu'il dût, sans aucun doute, connaître ce dernier.

3. Les remarques que je viens de faire, et celles que je vais ajouter sur les autres branches de l'Astronomie ancienne, n'ont pas pour but de trancher des questions historiques qui demanderaient une discussion proportionnée à leur importance; elles tendent seulement à les préciser et à montrer que l'histoire des observations pratiques est à refaire pour les origines. De quels procédés se servaient Hipparque et ses précurseurs? pourquoi prenaient-ils directement telle mesure plutôt que telle autre? Il y a là une série de nombreuses questions qui attendent une solution raisonnée; malheureusement, les documents que nous fournissent les ouvrages d'Astronomie ancienne sont totalement insuffisants, et il faudrait essayer de les compléter, soit par l'étude des écrits astrologiques,

(1) Théon de Smyrne (*Astronomie*, 3).

(2) Ce dernier cercle, également mobile, a d'abord été amené à coïncider avec l'écliptique par une observation semblable faite sur un astre de longitude connue.

(3) Il convient de remarquer que la détermination de la longitude des planètes était le point de départ des prédictions astrologiques.

jusqu'à présent trop négligés, soit par les résultats des déchiffrements des écritures cunéiformes qui peuvent nous fournir quelques données sur les procédés d'observation des Chaldéens; car c'est de ces procédés que sont partis les Grecs.

Sous ces réserves, il me semble que la *Météoroscopie* de Geminus concerne spécialement l'observation des hauteurs lors des passages au méridien, observations dont se déduisaient les latitudes. J'observe que l'instrument des hauteurs de Ptolémée, celui qui correspondait à notre mural, s'appelait précisément *météroscope* ⁽¹⁾.

C'était donc principalement à cette partie de l'Astronomie que devait se rattacher l'emploi des tables des cordes de cercle qui remonte à Hipparque. Mais jusqu'à quel point la Trigonométrie sphérique était-elle déjà développée, il est difficile de le savoir, puisque le théorème fondamental qui sert de base à tous les calculs de Ptolémée ne se rencontre pas avant les *Sphériques* de Ménélaos, à la fin du premier siècle de l'ère chrétienne. Quoique je le considère comme étant connu et pratiqué déjà par Hipparque, je dois remarquer que l'on ne possède à cet égard qu'une simple présomption, et que c'est une pure invention de Delambre ⁽²⁾ que son affirmation qu'Hipparque aurait dit avoir déterminé par la Trigonométrie sphérique les levers et couchers vrais des étoiles. Le texte du *Commentaire sur Aratus* ne dit rien de semblable, et quant aux déterminations qu'il donne, elles ne sont pas assez précises pour qu'Hipparque n'ait pu les obtenir par de tout autres procédés.

Au reste, Geminus semble avoir voulu, contrairement à la tradition, faire rentrer la Sphérique dans la Géométrie; il ne parle pas non plus d'une découverte géométrique très importante pour l'Astronomie, celle des projections stéréographiques. On la suppose connue d'Hipparque d'après la lettre de Synésius sur le don

(1) Il était formé de deux anneaux concentriques, l'un fixe gradué, l'autre mobile, portant deux pinnules, diamétralement opposées. Là encore, on ne trouve pas la véritable *dioptré*, c'est-à-dire la règle portant les pinnules. Les anciens astronomes ne semblent l'avoir adoptée que pour la face de l'astrolabe planisphère qui leur servait à prendre les hauteurs pour déterminer l'heure.

(2) *Astr. anc.*, I, p. 142-143.

d'un astrolabe ⁽¹⁾; mais ce témoignage n'est guère suffisant pour trancher cette question, qui se trouve liée à celle de l'invention de l'astrolabe planisphère.

Quant à la troisième branche de l'Astrologie énumérée par Geminus, la *Gnomonique*, nous n'avons absolument aucun Ouvrage grec. Cependant, il y avait déjà, de son temps, une littérature très nombreuse, et toutes les inventions possibles semblent avoir été déjà faites, si l'on en juge par le passage où Vitruve (IX, 9) les énumère sous des noms où, malheureusement, il est bien difficile de les reconnaître. Quelques cadrans solaires anciens, notamment sphériques, coniques et celui en forme de *jambon* ⁽²⁾, sont, en revanche, parvenus jusqu'à nous; mais c'est seulement en étudiant la Gnomonique des Arabes que l'on peut arriver à se former une idée précise de celle des Grecs.

4. Je reviens à l'Optique, que Geminus divise en Optique proprement dite, Catoptrique et Scénographique.

Je ne reproduis pas le très long fragment (13, 14) des *Varia Collectiones* (Héron, éd. Hultsch, p. 249-252), que je crois avoir été emprunté à Geminus par l'intermédiaire d'Anatolius ⁽³⁾, et qui se retrouve aussi dans l'*Optique* de Damianus; j'y relève seulement que, comme dans l'hypothèse admise par les mathématiciens traitant de l'Optique, les rayons visuels sont supposés partir des yeux pour aller à l'objet vu; il y avait, au reste, en dehors des trois branches énumérées, un ensemble de théories, distinctes au fond de l'Optique proprement dite, c'est-à-dire des lois de la vision, mais y rentrant en raison de la similitude de leur objet et de leurs hypothèses ⁽⁴⁾, et traitant de l'illumination et des ombres,

⁽¹⁾ Cet astrolabe de Synésius n'est appelé ainsi que par un étrange abus de mots; c'est simplement une représentation de la sphère céleste, ou du moins de la partie visible, sur un cône, soit par projection, le sommet du cône étant au pôle boréal, soit par perspective, le sommet du cône et le point de vue étant sur l'axe du monde. La description de Synésius ne permet pas de décider; c'est par une inadvertance singulière que Victor Prou a admis une projection cylindrique.

⁽²⁾ Cadran portatif. Voir Montucla, 2^e édition, t. I, p. 724.

⁽³⁾ Il a déjà été traduit par Th.-H. Martin dans les notes de ses *Recherches sur la vie et les écrits de Héron d'Alexandrie*.

⁽⁴⁾ Geminus paraît d'ailleurs les rattacher à la Catoptrique, en tant que la vision est indirecte pour ces phénomènes.

des miroirs ardents et même des lentilles ardentes, très nettement décrites. Les anciens s'occupaient aussi des points brillants ($\alpha\chi\upsilon\lambda\alpha\iota\varsigma$) et de la réfraction. Mais cette dernière théorie était à peine constituée et se bornait à peu près à des discussions physiques; l'explication de l'arc-en-ciel (c'est-à-dire des essais impuissants comme celui des *Météorologiques* d'Aristote) rentrait de même dans la Catoptrique.

Si, de toutes ces théories accessoires, il ne nous reste aucun Traité, pour l'*Optique* proprement dite et pour la *Catoptrique*, nous possédons les Ouvrages attribués à Euclide; le second ne semble pas authentique, mais Geminus connaissait certainement une Catoptrique sous le nom d'Euclide, et ce Traité ne devait guère être supérieur à celui qui nous reste, car les hypothèses des anciens étaient trop insuffisantes pour leur éviter des erreurs même grossières. La Catoptrique de Héron n'en est pas exempte, quoiqu'elle soit, d'ailleurs, bien au-dessus de celle du Pseudo-Euclide. On doit y signaler la proposition géométrique citée par Damianus, que la ligne suivie de l'œil à l'objet par un rayon réfléchi sur un miroir est un minimum ⁽¹⁾.

En somme pour l'*Optique*, les anciens n'ont bien connu que les lois de la perspective et la théorie des miroirs plans; à cet égard, aucun progrès n'a été réalisé depuis Héron, par exemple dans les *Optiques* de Ptolémée ⁽²⁾ et de Damianus.

La perspective appliquée était appelée *scénographique*. D'après Vitruve (VII), le premier écrit sur la matière aurait été composé par un Agatharque, vivant du temps d'Eschyle, c'est-à-dire dans la première moitié du v^e siècle avant J.-C. Anaxagore et Démocrite l'auraient ensuite traitée méthodiquement. Vitruve n'indique pas d'Ouvrages plus récents ⁽³⁾; il ne devait cependant pas en manquer; en tout cas, nous n'avons aucun document sur le développement réel de cette application de la Géométrie.

(1) Le principe de l'égalité des angles pour la réflexion semble n'avoir été connu que peu de temps avant Euclide; Aristote dit que ces questions n'ont été élucidées que récemment, mais lui-même ne paraît guère avoir d'idées nettes, et ne parle nullement du principe d'égalité.

(2) La reconnaissance de la réfraction atmosphérique, dans les termes où la fait Ptolémée, n'a d'intérêt qu'au point de vue physique.

(3) Peut-être faut-il conclure de ce qu'il dit que la Perspective était surtout traitée par les architectes, comme elle le fut aussi à la Renaissance.

Des autres parties accessoires de l'Optique, il nous reste encore des fragments d'Ouvrages relatifs aux miroirs ardents, question que la tradition fait remonter à Archimède, et qui a été, chez les anciens, l'objet de sérieux travaux ⁽¹⁾. Dioclès, antérieur à Geminus, avait écrit un Traité *Περὶ πυρρίων* dont Eutocius a extrait la solution de deux problèmes (duplication du cube; partage d'une sphère en deux segments de rapport donné), dont on ne voit guère la liaison avec le sujet. Au ^{vi}^e siècle de l'ère chrétienne, Anthémius composa un Ouvrage *Sur des machines étonnantes*, dont il nous reste quelques débris précisément relatifs à cette question des miroirs ardents, et où l'on trouve, pour la première fois, la proposition sur l'égalité des angles de la tangente à la parabole avec le rayon vecteur et la parallèle à l'axe. Il y a donc, pour la date de la découverte de cette proposition, une question intéressante sur laquelle je me propose de revenir.

Pour le moment, je me contente de remarquer que, si la *Catoptrique* du Pseudo-Euclide se termine par un théorème où l'on essaye de prouver que, dans un miroir sphérique convexe exposé au soleil, le foyer sera au centre, une erreur aussi grossière ne peut être attribuée aux géomètres antérieurs à l'ère chrétienne. A la vérité, leur hypothèse sur la marche des rayons visuels était pour eux une cause d'erreur inévitable dans la détermination de l'image sur les miroirs sphériques, mais pour le foyer des miroirs ardents cette cause d'erreur n'existait pas: D'autre part, il y a certainement eu des expériences faites, et la situation du foyer a dû être mieux reconnue.

5. Il ne me reste plus qu'à passer rapidement en revue les branches de la Mécanique, au point de vue des applications de la Géométrie.

En premier lieu, Geminus parle des engins de guerre. Si Archimède n'avait pas décrit ses célèbres inventions, la littérature, sur ce sujet, n'en était pas moins riche; elle remontait même avant lui, puisque Vitruve (X), qui donne d'ailleurs d'assez précieux

(1) Si la légende d'Archimède brûlant la flotte romaine est insoutenable, il est très possible que le Syracusain ait construit des miroirs ardents et même écrit sur ce sujet.

détails, en général, sur la Mécanique grecque, cite deux ingénieurs d'Alexandre le Grand, Diadès et Charias.

Les écrits grecs de cette nature qui nous restent ont été réunis dans les *Mathematici veteres* de Thévenot (Paris, 1693); on pourrait croire qu'une bonne partie est du temps de l'empire romain; mais, si l'on écarte deux compilations sans importance réelle ⁽¹⁾, tous les auteurs, sauf un, sont antérieurs à l'ère chrétienne ⁽²⁾.

Nous avons ainsi : d'un Biton, qui avait aussi écrit sur l'Optique, un Traité de la construction des engins de guerre et des catapultes, dédié à un des rois de Pergame (un Attale); de Philon de Byzance, contemporain de Ctésibios, deux Livres analogues, seul reste d'un Ouvrage beaucoup plus étendu; de Héron d'Alexandrie, les *Βελοποιικά* (*Sur les armes de jet*) et un Traité sur la *Chiroballiste* ⁽³⁾; enfin d'un Athénée, un Livre sur les machines de guerre.

Il est à remarquer que la solution du problème des deux moyennes proportionnelles d'après Philon, qu'Eutocius nous a conservée, figurait dans le premier Livre, aujourd'hui perdu, de son Ouvrage; celle de Héron se retrouve dans les *Βελοποιικά* que nous avons, mais il devait l'avoir insérée également dans ses *Introductions mécaniques*.

La seconde branche de la Mécanique, indiquée par Geminus, est caractérisée par les noms de Ctésibios et de son disciple Héron, et par son but qui est bien celui de deux des Ouvrages de ce dernier, aussi édités dans les *Mathematici veteres*, à savoir les *Pneumatiques* et les *Automates*. L'ingénieur mécanicien s'y propose bien moins de décrire des applications utiles que des objets d'amusement, de véritables jouets ou encore des artifices propres à entretenir la superstition. Ces deux Livres répondent exactement à deux des subdivisions de la *Thaumatopectique* de Geminus; la troisième devait être représentée par un Livre de Héron, aujourd'hui perdu, *Περὶ ζυγίων*.

(1) Les fragments des *Cestes* de Julius Africanus, et le Traité anonyme sur la défense des places fortes.

(2) Le seul postérieur est Apollodore, qui vivait au II^e siècle, sous l'empereur Adrien. Il a traité des machines pour l'attaque des places fortes.

(3) Sorte d'arbalète restituée par Victor Prou (Not. et extr. des Mss. de la Bibl. nat.).

Geminus fait aussi allusion, d'une part, à la théorie de l'équilibre et des centres de gravité, créée par Archimède dans ses Ouvrages qui nous restent sur l'équilibre des plans et dans son Traité perdu *Sur les balances* ⁽¹⁾; à un autre Traité, également perdu, du grand Syracusain, à sa célèbre *Sphéropée*, qui décrivait un appareil, mû par l'eau, où les mouvements célestes étaient représentés dans une sphère de verre; enfin à divers autres Ouvrages qui traitaient des mouvements.

6. En dehors des Traités que nous avons énumérés, c'est d'après le Livre VIII de la *Collection mathématique* de Pappus qu'on peut se faire l'idée la plus précise de la Mécanique des anciens et se rendre compte du rôle capital qu'y jouaient les recherches purement géométriques.

Pappus reconnaît d'ailleurs pour la Mécanique une division à peu près analogue à celle de Geminus; s'il place en première ligne l'art des *manganariens*, c'est-à-dire des constructeurs de machines servant à l'élévation des fardeaux (des mouffles en particulier), il se réfère à cet égard aux anciens, et c'est bien là ce qu'au temps de Geminus, d'après Philon et Héron, on entendait proprement sous le nom de *mécaniques*. Pappus parle ensuite, comme branches suivantes, de la fabrication des engins de guerre et des machines proprement dites ⁽²⁾, de celle des θαύματα, enfin de la sphéropée. C'est bien la même série d'applications que donne Geminus, et pour les θαύματα Pappus fait aussi une subdivision analogue, en indiquant les Ouvrages précités de Héron; seulement, il cite aussi le Traité d'Archimède *Περὶ ὀχουμένων* (dont le texte grec est perdu) et celui de Héron sur les horloges à eau. Si ce dernier, que nous n'avons plus, pouvait avoir en réalité un but pratique ⁽³⁾, il est bien à remarquer que l'objet des admirables

⁽¹⁾ Περὶ ζυγῶν, Pappus, 1068.

⁽²⁾ P. 1024, 22. Il faut, je crois, entendre les machines de guerre, d'après l'usage de la langue. La parenthèse qui suit dans le texte, et d'après laquelle il s'agirait de machines pour l'épuisement de l'eau, me semble une interpolation malencontreuse, quoiqu'il y eût certainement des traités sur la matière. Mais Vitruve (X), qui essaye précisément de distinguer les machines et les engins (*organa*), appelle *engins* les machines d'épuisement.

⁽³⁾ Mais il semble bien qu'au lieu de chercher à assurer une marche bien réglée

recherches d'Archimède sur les centres de gravité et les méta-centres des segments de paraboloïdes flottant sur l'eau est de faire la théorie de petits jouets donnant des effets paradoxaux d'équilibre ou d'instabilité; à cet égard, ce Traité peut tout à fait être comparé aux *Zήγν* ou aux Ouvrages analogues de Héron.

Le Livre VIII de Pappus, au reste, paraît à peu près en totalité emprunté à des sources antérieures à l'ère chrétienne ⁽¹⁾, surtout à Héron d'Alexandrie, et les manuscrits se terminent par des extraits des *Mécaniques* de ce dernier; c'est là que se trouvent décrites les cinq puissances simples des anciens : le treuil, le levier, la moufle, le coin et la vis sans fin ⁽²⁾, tandis que plus haut Pappus avait donné la théorie d'une machine passablement complexe d'après le Βαροῦλχος ⁽³⁾ de Héron. C'est dans ces Ouvrages perdus de l'ingénieur alexandrin comme dans ceux analogues de Philon que se trouvaient réunies les connaissances de mécanique pratique des anciens, et, après eux, ces connaissances ne semblent guère avoir réellement progressé.

7. L'histoire de la Mécanique pratique dans l'antiquité ⁽⁴⁾ offre au reste une double obscurité. Un premier point ne sera probablement jamais éclairci d'une façon suffisante, car les documents manquent pour déterminer la date réelle des inventions fondamentales; il semble, toutefois, qu'elles doivent, en thèse générale, être regardées comme très antérieures à Archimède, sauf toutefois celle de la vis. Mais une autre question, non moins grave, est susceptible d'être élucidée, au moins dans une très large mesure, par l'étude approfondie des documents qui nous restent. Comment

des horloges les anciens se soient surtout préoccupés d'obtenir des effets curieux, comme l'apparition de figures indiquant les heures, etc.

⁽¹⁾ C'est dans son VII^e Livre que Pappus énonce, comme étant de son invention, le théorème ordinairement connu sous le nom de *Guldin*.

⁽²⁾ Ces extraits ne semblent pas l'œuvre de Pappus.

⁽³⁾ Tireur de fardeaux. Cette machine se compose d'un treuil, actionné par un équipage de cinq roues dentées, dont la dernière est commandée par une vis sans fin nue par une manivelle. Héron a inséré partie de son Traité sur cette machine dans son Ouvrage *Sur la Dioptré*. Le Βαροῦλχος existe encore en arabe.

⁽⁴⁾ Je me borne à signaler sur cette matière les intéressants travaux de M. Rochas d'Aiglun.

les anciens pouvaient-ils suppléer, dans la pratique, à l'insuffisance de leurs connaissances théoriques?

Pour ces dernières, leur histoire est suffisamment claire; les combinaisons de mouvements, au point de vue cinématique, ont été connues de très bonne heure ⁽¹⁾, et les Grecs y ont déployé une grande ingéniosité; mais ils n'ont jamais précisé le concept de vitesse.

Le génie d'Archimède créa la théorie de la composition des forces parallèles, des centres de gravité et celle de l'équilibre des corps flottants. Mais l'antiquité n'alla pas plus loin; non seulement les premiers principes de la Dynamique ne furent pas soupçonnés, mais la composition statique des forces concourantes fut toujours ignorée, et l'explication des machines se borna à l'extension du principe d'équilibre du levier, qui est le point de départ des travaux d'Archimède, mais peut cependant avoir été reconnu avant lui, au moins empiriquement ⁽²⁾.

Il y a donc une singulière exagération à attribuer aux anciens un pressentiment effectif d'un principe comme celui des vitesses virtuelles. Il suffit de remarquer qu'ils étaient incapables de faire la théorie si simple du plan incliné.

Voici comment Pappus (p. 1057) traite cette question. Un corps de poids P est traîné sur un plan horizontal par une force Pf . Pour connaître quelle force sera nécessaire pour lui faire gravir un plan incliné sur l'horizon d'un angle α , il suppose que ce corps est une sphère, et, menant une verticale par le point de contact de cette sphère, et du plan, il détermine, d'après le principe du levier, le poids qui, appliqué à l'extrémité du rayon que rencontre cette verticale, empêcherait la sphère de descendre. Ce poids est $P \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$. La force cherchée serait dès lors, d'après

(1) Le plus ancien exemple est la distinction du mouvement propre des planètes et de leur mouvement diurne par l'école pythagoricienne; le système des sphères concentriques d'Eudoxe, pour représenter les mouvements célestes, offre des combinaisons déjà très savantes, et un passage de Platon (*Lois*, X, 893, d) prouve également que, dès son temps, la théorie examinait les cas les plus compliqués.

(2) Il se trouve énoncé dans les *Mécaniques* d'Aristote, et l'explication du coin s'y trouve ramenée d'une façon d'ailleurs inexacte.

Pappus,

$$\left(P + P \frac{\sin \alpha}{1 - \sin \alpha}\right) f = \frac{Pf}{1 - \sin \alpha}.$$

Un résultat aussi manifestement erroné, déduit de raisonnements en apparence géométriques, nous montre bien tout ce qui restait à faire avant Stevin et Galilée sur la question la plus capitale de la Statique. Si Archimède avait su ramener à des problèmes géométriques la recherche de l'équilibre dans le cas de forces parallèles, les essais faits après lui dans le même sens ont été des plus malheureux ; on n'en doit qu'admirer d'autant plus la puissance de son génie.