

6406

ZEUTHEN, H.G.

1896

6407

ZEUTHEN, H.G.

1896

Inhaltsübersicht

	Seite
Einleitung.	
1. Vorgeschichte der Mathematik	1
2. Ägypter und Babylonier	8
Die griechische Mathematik.	
1. Historischer Überblick	14
2. Die pythagoreische Mathematik	32
3. Die geometrische Arithmetik	40
4. Die geometrische Algebra	44
5. Numerische quadratische Gleichungen; Ausziehen der Quadratwurzel	54
6. Das Unendliche	64
7. Die Quadratur des Kreises	70
8. Dreiteilung des Winkels; Einschiebungen	79
9. Verdoppelung des Würfels	82
10. Probleme und Theoreme; Bedeutung der geometrischen Konstruktion	88
11. Die analytische Methode; die analytisch-synthetische Dar- stellungsform	92
12. «Elemente»; analytische Hilfsmittel	105
13. Überblick über Euklids Elemente; synthetisches Lehr- gebäude	108
14. Euklids geometrische Voraussetzungen	115
15. Anmerkung über die Voraussetzungen der Geometrie	132
16. Die allgemeine Lehre von den Proportionen; Euklids 5tes und 6tes Buch	139
17. Kommensurable Grössen und ihre Behandlung durch Zahlen; Euklids 7.—9. Buch	155

IN. GESCHICHTE DER MATHEMATIK
IM ALTERTUM UND MITTELALTER

- Proportionen, geometrische, 35.
 — harmonische, 35.
 Protase, 98, 99, 101.
 Ptolemäer 24, 31.
 Ptolemäus 29, 62, 229—235, 261,
 287, 288, 295, 312—315, 321,
 328—330.
 Ptolemäus Lagi 23.
 Pyramidalzahl 44, 243, 244.
 Pyramide 163, 169—171, 173.
 Pythagoras 16, 34, 36, 39, 41, 64.
 Pythagoreer, 17, 18, 32—39, 42,
 51, 64, 65, 242, 244, 311.
 Pythagoreischer Lehrsatz, 35, 37,
 47—53, 59, 109, 113, 153.

 Quadratur des Kreises 69—78, 91,
 228.
 — der Mündchen 72, 74.
 — der Parabel 26—178.
 Quadratrix 76—79, 91, 226, 237.
 Quadrattafeln 13, 62, 274.
 Quadratwurzel 51, 54—64, 110,
 227—230, 275, 280, 305—307,
 314, 316, 317.
 Quadratzahlen 13, 40—43, 71, 182,
 249—255, 286, 287, 312, 318,
 319.
 Quadrivium 322.
 Quotientenreihe, s. Reihen, geo-
 metrische.

 Raumkurve 85, 86.
 Rechenbrett 58, 265, 293.
 Rechenbuch 10, 315.
 Rechenkunst, arabische, 298.
 — griechische 29, 57,
 58, 294.
 — indische, 259—261,
 272—274, 290—303,
 316, 317.
 Rechenmaschinen 265.
 Rechenpfennige 265—267.
 Rechentafeln 273.
 Regel des falschen Ansatzes 11,
 247, 275, 277, 317.
 Regel der zwei falschen Ansätze
 275, 307, 317, 318, 320, 326.
 Regel der Umkehrung 276, 277,
 317.
 Regiomontanus (J. Müller) 328,
 329, 330.
 Regula de tri 222, 275, 277, 278,
 302.
 Reihen, arithmetische 10, 36, 42—
 44, 182, 276, 317.
 — geometrische, 10, 67, 146,
 147, 158, 317.
 — unendliche 171—175, 181.
 Reihen von Quadratzahlen 182,
 287, 312.
 Reihen von Kubikzahlen, 244, 287,
 312.
 Reihen von Biquadraten 312.
 Resolution 99, 100, 101, 102, 107.
 Römer 31, 244, 265—269, 292,
 295, 315, 316.

 Sammlungen, mathem. d. Pappus
 31.
 Sandrechnung d. Archimedes 26,
 58, 264, 270.
 Sanskrit 259.
 Satz des Ptolemäus 230, 231.
 Schnitt, bestimmter 27, 215.
 Schnitte am Kegel 196.
 Schnittpunkte zw. zwei Kegel-
 schnitten 211.
 — zw. Kreis und Ge-

Eine Pyramidalzahl ist die Summe einer Reihe von n -Eckszahlen, anfangend mit 1. Die Vielecke denkt man sich übereinander gelegt, so dass sie eine Pyramide (einen Kugelhaufen) bilden.

4. Die geometrische Algebra.

Eine allgemeine, rationale oder irrationale Grösse lässt sich erstens durch die Länge einer (geradlinigen) Strecke darstellen. Addition und Subtraktion der in die Weise dargestellten Grössen findet statt durch Abtragen der einen Strecke auf der anderen oder auf ihrer Verlängerung. Ein Beispiel für die wirkliche Benutzung der Darstellung haben wir soeben gehabt in der Summation arithmetischer Reihen, die wir bei Archimedes kennen lernten. Sie lässt sich überhaupt benutzen zur Veranschaulichung von Gleichungen ersten Grades mit ganzen Koeffizienten — oder nur mit rationalen, da sich diese zu ganzen machen lassen.

Multiplikation von zwei allgemeinen Grössen ist nach ihrer unmittelbaren Bedeutung keinen Sinn. Man half sich indessen dadurch, dass man die geometrische Darstellung eines Produktes von zwei ganzen Zahlen, die wir bereits kennen gelernt haben, auf allgemeine Grössen übertrug. Jedoch erweiterte man nicht, wie in der modernen Mathematik, die arithmetischen Begriffe Multiplikation und Produkt, sondern statt von einem Produkte der allgemeinen Grössen sprach man von dem Rechteck aus den beiden Strecken, die die Faktoren darstellen, und mit diesem Rechteck nahm man die Operationen vor. Als Anleitung für die Behandlung konnte man indessen, wegen der hiermit gleichartigen Darstellung von wirklichen Produkten ganzer Zahlen, beständig

arithmetische Behandlung dieser benutzen. Es kann deshalb nicht irreführend sein, wenn ich im Folgenden mit ab und a^2 das Rechteck aus a und b und das Quadrat über a bezeichne.

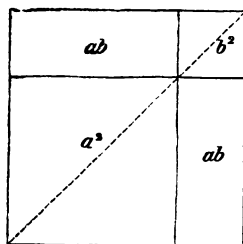
Auf diese Weise hat man eine zweite geometrische Darstellung von Grössen erhalten, nämlich als Flächen, vorläufig von Rechtecken und Quadraten. Um sie addieren und subtrahieren zu können, musste man ihnen eine gemeinschaftliche Seite verschaffen, und zwar musste dies ohne Benutzung der Lehre von den Proportionen geschehen, denn diejenige, die man im 5ten Jahrhundert besass, war auf den ausschliesslichen Gebrauch von kommensurablen Grössen gegründet. Die Einführung einer neuen Seite in ein Rechteck wurde mit Hülfe des folgenden Satzes vorgenommen. Ein Rechteck wird durch Parallelen zu den Seiten, die durch einen Punkt derselben Diagonale gehen, in vier Rechtecke geteilt, von denen die beiden, durch welche die Diagonale nicht geht, gleich sind (vergl. im Folgenden die Figuren auf S. 46—48, wo man sich dann im gegenwärtigen Zusammenhange die Quadrate mit Rechtecken vertauscht denken muss). Ist das eine von diesen das gegebene, so ist es leicht, dem anderen eine gegebene Seite zu geben. Diese Konstruktion, welche der Division entspricht, ebenso wie die Konstruktion eines Rechtecks aus gegebenen Seiten der Multiplikation, hat den besonderen Namen Flächenanlegung (*παράβολή*) erhalten, oder einfache Flächenanlegung im Gegensatze zu der später folgenden elliptischen und hyperbolischen Flächenanlegung. Die hierfür benutzte Figur findet, wie wir bald sehen werden, auch andere wichtige Anwendungen. Derjenige Teil der Figur, der aus den beiden gleich grossen Rechtecken und einem der beiden anderen besteht (z. B. $CBE M$ in der Figur auf S. 47) heisst hier wie in der geometrischen Arithmetik Gnomon.

Der hier angeführte Satz findet sich, und zwar auf die angegebene Weise angewandt, bei Euklid I, 43—44, wo er jedoch in einer etwas allgemeineren Form auftritt, insofern die Rechtecke mit Parallelogrammen von gleich grossen Winkeln vertauscht sind. In Euklids 2tem Buche wird dagegen mit Rechtecken operiert. Eine Aufklärung über den Gebrauch, den man, gemäss den Mitteilungen über die Bekanntschaft der Pythagoreer mit Flächenanlegung, von den Sätzen dieses Buches lange vor Euklid gemacht haben muss, müssen wir indessen in seinem 6ten Buche suchen, wo die Anwendungen jedoch in einer verallgemeinerten Form vorkommen, die erst von Euklid oder seinen nächsten Vorgängern herührt¹.

Ein Rechteck, dessen Seiten selbst Summen sind, wird die Summe aller der Rechtecke, die ein Glied in jeder der gegebenen Summen zu Seiten haben. An Stelle der modernen Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

trat die nebenstehende Figur (Euklid II, 4):



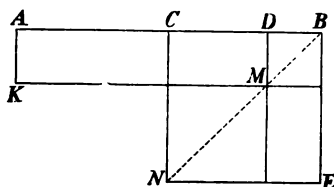
¹ Die Bedeutung der Verallgemeinerung wird in unserem 16ten erklärt werden.

Die Aufgabe, die man jetzt durch die Gleichung

$$ax - x^2 = b^2 \quad (1)$$

darstellen würde, drückten die Alten folgendermassen aus: An eine gegebene Strecke AB ($= a$) ein Rechteck AM gleich einem gegebenen Quadrat (b^2) so anzulegen, dass das (am Rechteck ax über AB) fehlende Flächenstück ein Quadrat ($BM = x^2$) wird.

Diese Konstruktion, welche die elliptische Flächenanlegung (von *ἑλλειψις*, der Mangel, das Auslassen) genannt wird, ergibt sich,



wenn man die Figur, durch welche die Aufgabe gelöst wird, auf die vorhergehende zurückführt. Ist nämlich C die Mitte von AB , und legt man das Rechteck CK an die Seite DB (als DE), so sieht man, dass das Rechteck AM gleich einem Gnomon wird, nämlich gleich der Differenz der Quadrate über BC und CD , oder in der Sprache unserer Algebra, dass

$$b^2 = ax - x^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2.$$

Da nun b und $CB = \frac{a}{2}$ bekannt sind, so kann man

$CD = \frac{a}{2} - x$ durch den pythagoreischen Lehrsatz finden,

und dadurch x .

Dass man die Aufgabe etwa in dieser Weise gelöst hat, lässt sich aus Euklid VI, 28 schliessen, wo doch in einer allgemeineren Form vorkommt benutzte Umformung ist aber schon bew

II, 5, wo gesagt wird, dass, wenn C die Mitte und D einen anderen Punkt von AB bedeutet,

$$AD \cdot DB + CD^2 = CB^2$$

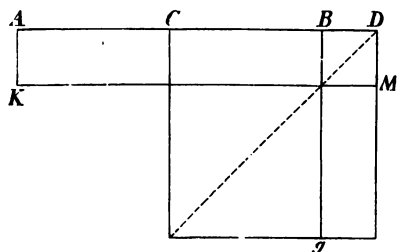
ist.

Dieser Satz gibt unmittelbar die Lösung derselben, aber in anderer Form ausgedrückten, Aufgabe, nämlich: Teile eine gegebene Strecke AB in zwei Abschnitte, die ein Rechteck von gegebenem Inhalt bilden (diesen Inhalt müssen wir uns jedoch vorläufig, um den pythagoreischen Lehrsatz anwenden zu können, in Form eines Quadrates b^2 gegeben denken). Aus Euklids Data 85 können wir sehen, dass die Alten die Aufgabe auch in dieser Gestalt gekannt haben, in der sie die geometrische Form für die Aufgabe ist, zwei Grössen zu bestimmen, deren Summe und Produkt gegeben ist. Der Übelstand, der mit der zuerst angeführten Darstellung der Aufgabe in Form einer elliptischen Flächenanlegung verbunden war, dass nämlich die Alten gewöhnlich nur die eine Lösung der Gleichung (1) mitteilen, fiel hierbei von selbst fort.

Auf ganz dieselbe Weise giebt Euklid in II, 6 eine (in VI, 29 einbegriffene) Lösung der Gleichung

$$ax + x^2 = b^2, \quad (2)$$

die die Alten folgendermassen ausdrücken: An eine



gegebene Strecke $AB(=a)$ ein Rechteck AM gleich einem gegebenen Quadrat(b^2)so anzulegen, dass das (über das Rechteck ax über AB) überschiesende Flächen-

stück BM ein Quadrat (b^2) wird. Diese Konstruktion

heisst die hyperbolische Flächenanlegung (von *ὑπερβολή*, Überschuss). Ist die Aufgabe gelöst, und bedeutet C die Mitte von AB , so wird das Rechteck AM dadurch in einen Gnomon verwandelt, dass das Rechteck über AC in die Lage GM gebracht wird. Man findet hier, wo D ein Punkt der Verlängerung von AB ist, dass

$$AD \cdot BD = CD^2 - CB^2.$$

Diese geometrische Umformung stimmt überein mit der algebraischen, durch die man jetzt die Gleichung (2) löst, nämlich

$$b^2 = ax + x^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

$CD \left(= \frac{a}{2} + x\right)$ lässt sich dann mit Hülfe des pythagoreischen Lehrsatzes bestimmen.

Euklids Satz II, 6 enthält unmittelbar die Lösung derselben Aufgabe in einer anderen Form, nämlich derjenigen, zwei Strecken (AD und BD) zu bestimmen, deren Differenz und deren Rechteck (gleich dem Quadrat b^2) gegeben sind, und diese ist wieder die geometrische Form für folgende: zwei Grössen zu bestimmen, deren Differenz und Produkt gegeben ist. Da die Aufgabe auch in dieser zweiten Form bei den Alten vorkam (vergl. Euklids Data 84), so ist es ohne Bedeutung, dass sich bei ihnen keine Form findet, deren Wortlaut ebenso unmittelbar die Gleichung

$$x^2 - ax = b^2 \quad (3)$$

wiedergibt, wie die Flächenanlegungen die Gleichungen (1) und (2). Ob wir in unserer algebraischen Sprache die Gleichung (2) oder (3) erhalten, beruht nämlich nur

darauf, ob wir in unserer modernen Umschreibung von Euklid II, 6

$$BD = x \text{ oder } AD = x$$

setzen.

Wir sehen also, dass die Alten alle Formen der Gleichung zweiten Grades behandelt haben, die positive Wurzeln ergeben, und von anderen konnte nicht die Rede sein, da negative Grössen ein unbekannter Begriff waren (sonst hätten sich II, 5 und II, 6 zu einem Satze vereinigen lassen). Wegen der hier mitgeteilten geometrischen Lösung setzten wir jedoch voraus, dass das gegebene Glied, das der Homogenität wegen in jedem Falle eine Fläche sein musste, in Form eines Quadrates gegeben wäre, und die Lösung wurde dann durch den sogenannten pythagoreischen Lehrsatz bewerkstelligt. Dieser, von welchem wenigstens spezielle Fälle den Ägyptern bereits bekannt waren, wird dem Pythagoras zugeschrieben, ohne dass man jedoch etwas darüber weiss, wie er ihn bewiesen hat. Der Beweis kann möglicherweise durch Benutzung ähnlicher Dreiecke geführt worden sein, kann also mit der damals bekannten Lehre von den Proportionen nur exakt gewesen sein, wenn die Seiten kommensurabel waren; denn die Einführung der allgemein gültigen geometrischen Begründungen hatte damals soeben begonnen, und der allgemein gültige Beweis bei Euklid (I, 47) soll, wie ausdrücklich bemerkt wird, von ihm selbst herrühren. Da Euklid beweist, dass das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus ihrer Projektion auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse ist, so liegt es nicht fern anzunehmen, dass für den älteren Beweis, den er ersetzen will, die ihm entsprechenden Sätze über mittlere Proportionalen benutzt worden sind.

Was dennächst die Verwandlung einer Figur in ein Quadrat betrifft, die entweder benutzt worden sein muss,

um den Gleichungen die hier angenommene Form zu geben, oder um ohne Benutzung des pythagoreischen Lehrsatzes die Grösse zu konstruieren, die bei der modernen Lösung durch eine Quadratwurzel dargestellt wird, so wird den Pythagoreern ausdrücklich die Kenntnis der Aufgabe zugeschrieben: eine Figur zu konstruieren, die einer gegebenen gleich und einer zweiten ähnlich ist. Jedenfalls kann hierbei nur von geradlinigen Figuren die Rede gewesen sein, und in dem speciellen Falle, mit dem wir hier zu thun haben, ist die zweite Figur ein Quadrat. Die allgemeinere Form der Aufgabe ist diejenige, welche bei Euklid VI, 25 vorkommt, wo sie für Euklids verallgemeinerte Flächenanlegung benutzt werden soll. Wenn nun ein späterer Berichtstatter den Pythagoreern die Lösung der Aufgabe in dieser Form zugeschrieben hat, so hat er damit zu erkennen geben wollen, dass sie im Besitze der für Flächenanlegung notwendigen Voraussetzungen waren; für die einfache Flächenanlegung ist aber nur die Verwandlung in ein Quadrat erforderlich.

Die Verwandlung einer geradlinigen Figur in ein Rechteck hat keine besonderen Beschwerden verursacht. Wie man demnächst ein Rechteck in ein Quadrat verwandeln können ohne sich durch Benutzung des Begriffes mittlere Proportionale auf die vor Eudoxus unvollständige Lehre von den Proportionen zu stützen, das ersieht man aus Euklid, der sich in II, 14 nur auf die geometrische Algebra stützt. Die Konstruktion beruht nämlich auf dem eben erwähnten Satze II, 5 (oder 6), nach dem ein Rechteck dargestellt wird als Differenz zwischen zwei Quadraten; danach lässt sich die Seite des dem Rechteck gleichen Quadrates mit Hülfe des pythagoreischen Lehrsatzes konstruieren. Die Umformung entspricht der Gleichung

$$x^2 = ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Diese Umformung enthält die Lösung der rein quadratischen Gleichung.

Eine bestimmte geometrische Anwendung der Flächenanlegung wird den Pythagoreern zugeschrieben, nämlich die Konstruktion der Seite des regelmässigen Fünfecks (und Zehnecks). Diese hängt bekanntlich ab von der Gleichung

$$x^2 = a(a - x),$$

die sich umformen lässt in

$$a^2 = x^2 + ax;$$

diese Gleichung wird durch hyperbolische Flächenanlegung gelöst. In II, 11 benutzt Euklid genau dieselbe Umformung der Gleichung in geometrischer Form für die Lösung der genannten Aufgabe.

Die Sätze II, 5 und 6 werden nicht ausschliesslich für die Auflösung von Gleichungen zweiten Grades benutzt. Wir haben bereits (S. 41) eine arithmetische Anwendung erwähnt, die Euklid davon im 10ten Buche macht, und soeben haben wir besprochen, wie sich die Benutzung der mittleren Proportionale auf diesem Wege vermeiden lässt. Ein anderes Beispiel dafür, dass die geometrische Algebra die Benutzung von Proportionen überflüssig macht, findet sich in Euklids Beweisen in III, 35—37 für die Sätze über die Potenz eines Punktes mit Bezug auf einen Kreis. Die Sätze II, 5 und 6 sagten aus (vergl. die Figuren S. 47, 48), unter der Voraussetzung dass C die Mitte von AB und D ein Punkt auf AB oder ihrer Verlängerung ist, dass

$$AD \cdot DB = \pm (CB^2 - CD^2).$$

Sind nun A und B die Schnittpunkte mit einem Kreise, dessen Mittelpunkt O , so erhält man durch den pythagoreischen Lehrsatz, dass

$$CB^2 - CD^2 = OB^2 - OD^2,$$

und damit sind die Potenzsätze bewiesen.

Die Elemente der geometrischen Algebra, die hier dargestellt sind, umfassen indessen namentlich die Behandlung der Gleichungen zweiten Grades, also gerade das Gebiet, auf dem sich wegen des Auftretens der irrationalen Grössen die Notwendigkeit einer anderen Darstellung als durch Zahlen fühlbar gemacht hatte. Bei dieser Behandlung konnte man sich mit der Benutzung von Rechtecken und Quadraten begnügen, sofern nicht bereits eine schon gegebene Grösse durch die Fläche einer anderen Figur dargestellt war. Während der weiteren Entwicklung der geometrischen Algebra und ihrer Anwendung — namentlich auf die Lehre von den Kegelschnitten — wurde sie jedoch so erweitert, dass auch andere Figuren zur Darstellung derjenigen Grössen dienten, mit denen operiert wurde. Es ist indessen klar, dass die geometrische Algebra ausschliesslich in ihrer Anwendung auf Rechtecke und — da man in der geometrischen Algebra niemals bestimmte Einheiten einführt, also mit homogenen Gleichungen operiert — Parallelogramme die geometrische Arithmetik mit einbegreift; denn nur dann können die Punkte, die in der Arithmetik die Einer darstellen, mit Quadraten von gleicher Grösse oder mit kongruenten Parallelogrammen vertauscht werden. Die Dreieckszahlen z. B. haben nichts mit dem Flächeninhalt des Dreiecks zu thun, ein Missverständnis, das später die römischen Landmesser dahin gebracht hat, die Formel $\frac{a(a+1)}{2}$ zur Berechnung des Inhaltes eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a zu benutzen.