

DE BLOEIENDE BOOM VAN PYTHAGORAS

6543

LAUWERIER, H.A.

1980

H.A. LAUWERIER

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam

Er wordt beschreven hoe de zogenaamde Pythagorasboom met behulp van een eenvoudig computerprogramma getekend kan worden. Naast de geometrische constructie wordt ook een aanpak via complexe getallen en het tweetallig talstelsel gegeven.

1980 MATHEMATISCH SUBJECT CLASSIFICATION: 51-01, 51-04.

TREFWOORDEN: Pythagorasboom, complexe getallen, zelf-gelijkvormigheid.

Notitie AM-N8403

Centrum voor Wiskunde en Informatica

Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam



Centrum voor Wiskunde en Informatica
Centre for Mathematics and Computer Science

H.A. Lauwerier

De bloeiende boom van Pythagoras

Department of Applied Mathematics

Notitie AM-N8403

Oktober

The blooming tree of Pythagoras

Bibliotheek
Centrum voor Wiskunde en Informatica
Amsterdam

DE BLOEIENDE BOOM VAN PYTHAGORAS

H.A. LAUWERIER

Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam

Er wordt beschreven hoe de zogenaamde Pythagorasboom met behulp van een eenvoudig computerprogramma getekend kan worden. Naast de geometrische constructie wordt ook een aanpak via complexe getallen en het tweetalig talstelsel gegeven.

1980 MATHEMATISCH SUBJECT CLASSIFICATION: 51-01, 51-04.

TREFWOORDEN: Pythagorasboom, complexe getallen, zelf-gelijkvormigheid.

Notitie AM-N8403

Centrum voor Wiskunde en Informatica

Postbus 4079, 1009 AB Amsterdam

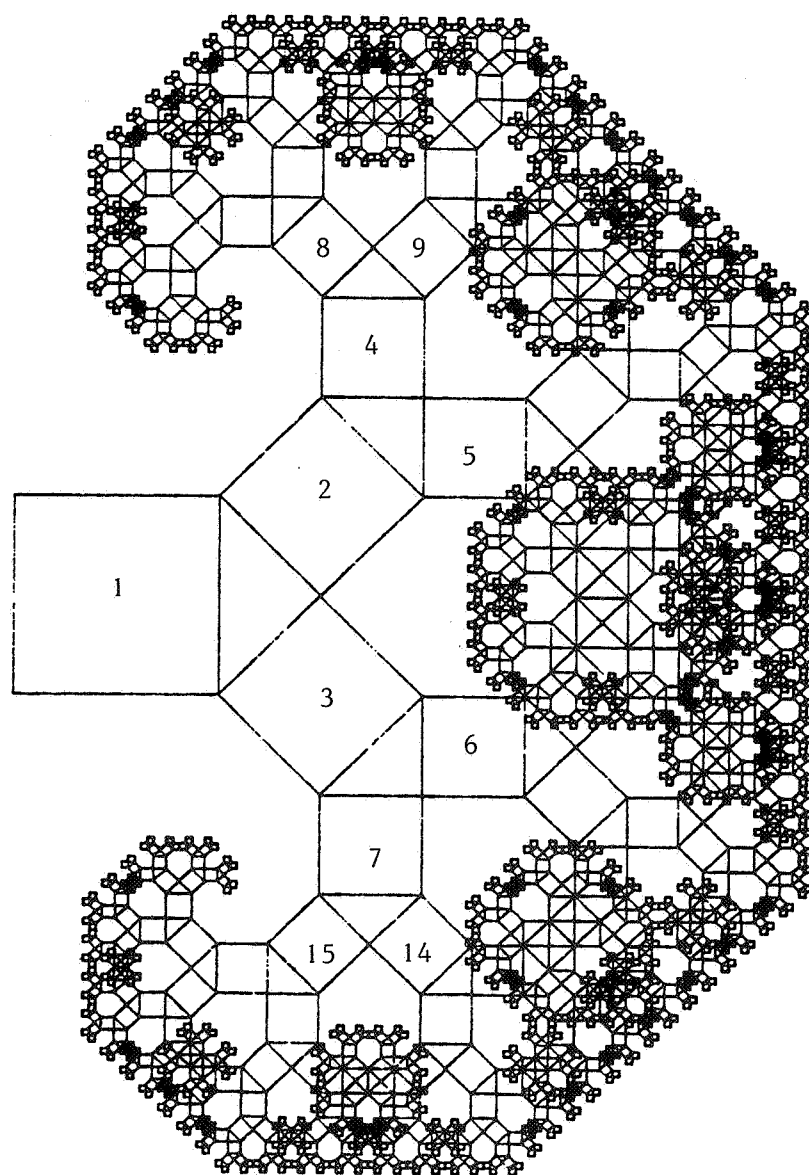
1. Inleiding

Zo een veertig jaar geleden, in de donkere dagen van de tweede wereldoorlog, tekende Ir. A. Bosman voor het eerst de z.g. boom van Pythagoras, een meesterwerk van technisch tekenwerk. Heden ten dage kan ieder die over een personal computer met een plotter beschikt binnen een uur al een fraaie boom tevoorschijn toveren! Wie zich tot taak stelt een computerprogramma in een eenvoudige programmeertaal als Basic te schrijven wordt welhaast gedwongen de Pythagorasboom wat nader te analyseren. De boom is getekend in fig. 1. Het basiskant V_1 is de stam van de volledige, in gedachten oneindig voortgezette, Pythagorasboom. Elk volgend vierkant kan opgevat worden als de stam van een kleinere boom, een kopie van de hele boom op kleinere schaal en in een gedraaide stand. Elk onderdeel van de Pythagorasboom is dus gelijkvormig met het geheel. We noemen dit *zelf-gelijkvormigheid*. Het is als het patroon van behangselpapier dat er altijd eender uitziet ongeacht of wij er op grote afstand naar kijken of het met de ogen van een overheen kruipende vlieg beschouwen.

In fig. 1 zijn de vierkanten V_n zodanig genummerd dat V_n splitst in de twee vierkanten met rangnummers $2n$ en $2n+1$ en wel $2n$ naar links en $2n+1$ naar rechts. V_{2n} volgt uit V_n door op V_n een lineaire verkorting van $1/\sqrt{2}$ en een draaiing van 45° in positieve draaizin toe te passen. V_{2n+1} volgt uit V_n op analoge wijze met een draaiing van 45° in negatieve draaizin. Het tekenen van de boom gaat het beste in series van 1,2,4,8,16,... waarbij alle vierkanten in dezelfde serie even groot zijn. De stelling van Pythagoras zegt dat de som van de oppervlakken van alle vierkanten in dezelfde serie steeds gelijk is aan de oppervlakte van de stam:

$$V_1 = V_2 + V_3 = V_4 + V_5 + V_6 + V_7 = V_8 + V_9 + \dots + V_{15} =$$

Hieruit volgt al dat er op den duur een enorme overlapping moet optreden om de hele boom op een begreind stuk papier te kunnen afbeelden. In de volgende paragraaf gaan we in detail op de (computer) constructie van de Pythagorasboom in. Als een gewetensvol wiskundige vragen we ons vervolgens af hoe het eindigt. De "laatste" serie vierkantjes bestaat uit oneindig veel punten waarvan het totale "oppervlakte" weer gelijk aan dat van de stam is. Dat is moeilijk voorstelbaar, maar deze formulering is dan ook weinig precies. Beter is het om te spreken van een *limietpunt* van de Pythagorasboom. Zo'n limietpunt heeft de eigenschap dat een willekeurig klein cirkelschijfje met het limietpunt als middelpunt altijd een (heel klein) vierkantje van de Pythagorasboom bevat. Sterker nog, elk cirkelschijfje bevat een miniatuurboompje. De verzameling van alle limietpunten duiden we aan met Π , de griekse hoofdletter P. We noemen Π de *bloesem* van de Pythagorasboom en elk limietpunt, d.w.z. elk punt van Π een bloesem. Π is een onvoorstelbaar gecompliceerde kromme met kronkels in kronkels in kronkels in Net als de boom is ook Π zelf-gelijkvormig. Het is uitgesloten dat we Π volledig kunnen tekenen maar wel kunnen we er een indruk van krijgen door er b.v. 1000 punten, op toevallige wijze geselecteerd, van weer te geven. Dat is overigens een vrij eenvoudige zaak welke in § 3 nader besproken zal worden. Het resultaat is weergegeven in fig. 2. Van de Pythagorasboom kunnen allerlei variaties en generalisaties bedacht worden, maar we beperken ons hier tot de "Pythagorasboom in de winter" waarbij in plaats van vierkanten lijnstukjes worden getekend zodanig dat de lijnstukjes weer een boomstructuur vormen. In fig. 3 laten we zien hoe dat er uitziet. In de vierde en laatste paragraaf laten we als een extra zien hoeveel gemakkelijker alles zich laat beschrijven met behulp van complexe getallen, een argument om op school complexe getallen op meetkundige wijze te introduceren in samenhang met vectormeetkunde in het platte vlak. Voorts geeft de Pythagorasboom nog aanleiding tot enkele opmerkingen over meetbare en onmeetbare getallen voorgesteld door al of niet repeterende breuken in het tweetalig talstelsel.



Figuur 1. De Pythagorasboom



Figuur 2. Een deel van de bloesem

2. De Pythagorasboom

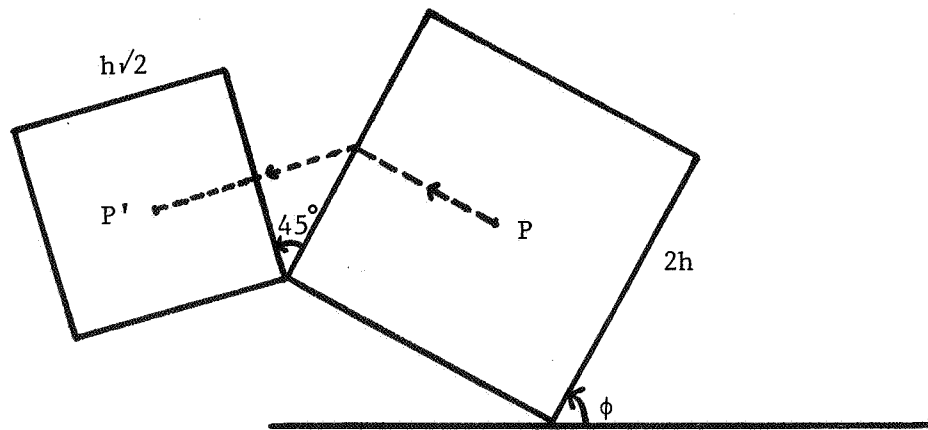
Het tekenen van de boom van Pythagoras met behulp van de computer vereist de bepaling van de positie van V_n voor elk rangnummer. We gebruiken daartoe een Cartesisch coördinaten-stelsel waarbij de oorsprong het middelpunt van V_1 is en waarbij de y-as de symmetrieas van de boom is. De onderste hoekpunten van V_1 zijn daarbij $(-1, -1)$ en $(1, -1)$. Is P_n het middelpunt van V_n en ϕ_n de helling van V_n dan volgt uit de constructie van de boom allereerst dat

$$\phi_{2n} = \phi_n + 45^\circ,$$

en

$$\phi_{2n+1} = \phi_n - 45^\circ.$$

De coördinaten van P_{2n} en van P_{2n+1} kunnen uit die van P_n afgeleid worden aan de hand van fig. 4.



Figuur 4. De afbeelding van P naar P'

In vectornotatie (volg de stippellijn van P naar P') is

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h \cos(\phi + 90^\circ) \\ h \sin(\phi + 90^\circ) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h\sqrt{2} \cos(\phi + 135^\circ) \\ h\sqrt{2} \sin(\phi + 135^\circ) \end{bmatrix},$$

of uitgewerkt

$$\begin{cases} x' = x - 2h \sin\phi - h \cos\phi, \\ y' = y + 2h \cos\phi - h \sin\phi, \end{cases} \quad (2.1a)$$

Tesamen met

$$\phi' = \phi + 45^\circ \quad (2.1b)$$

is dit een transformatie die beschrijft hoe een vierkant V_{2n} uit het vierkant V_n ontstaat. We duiden deze transformatie aan met A . Op overeenkomstige wijze ontstaat vierkant V_{2n+1} uit V_n door de transformatie B welke beschreven wordt door

$$\begin{cases} x' = x - 2h \sin\phi + h \cos\phi, \\ y' = y + 2h \cos\phi + h \sin\phi, \\ \phi' = \phi - 45^\circ. \end{cases} \quad (2.2)$$

We kunnen met deze transformaties A en B de positie van elk vierkant bepalen. We doen het eens voor $n = 27$. De route is

$$1 \xrightarrow{B} 3 \xrightarrow{A} 6 \xrightarrow{B} 13 \xrightarrow{B} 27.$$

Die volgorde heeft alles te maken met de schrijfwijze van 27 in het tweetallig stelsel:

$$27 = 11011 \quad (= 16+8+2+1).$$

Nog een voorbeeld om het goed te zien. Voor $n = 361 = 101101001 (= 256+64+32+8+1)$ is de route

$$1 \xrightarrow{A} 2 \xrightarrow{B} 5 \xrightarrow{B} 11 \xrightarrow{A} 22 \xrightarrow{B} 45 \xrightarrow{A} 90 \xrightarrow{A} 180 \xrightarrow{B} 361.$$

Het algemene patroon is nu wel duidelijk. We schrijven het rangnummer n tweetallig als

$$n = b_m b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_2 b_1 b_0,$$

d.w.z.

$$n = b_0 + 2b_1 + 2^2b_2 + 2^3b_3 + \cdots + 2^m b_m,$$

waarbij elke binaal b_j een nul of een één is. In de rij

$$b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_2 b_1 b_0$$

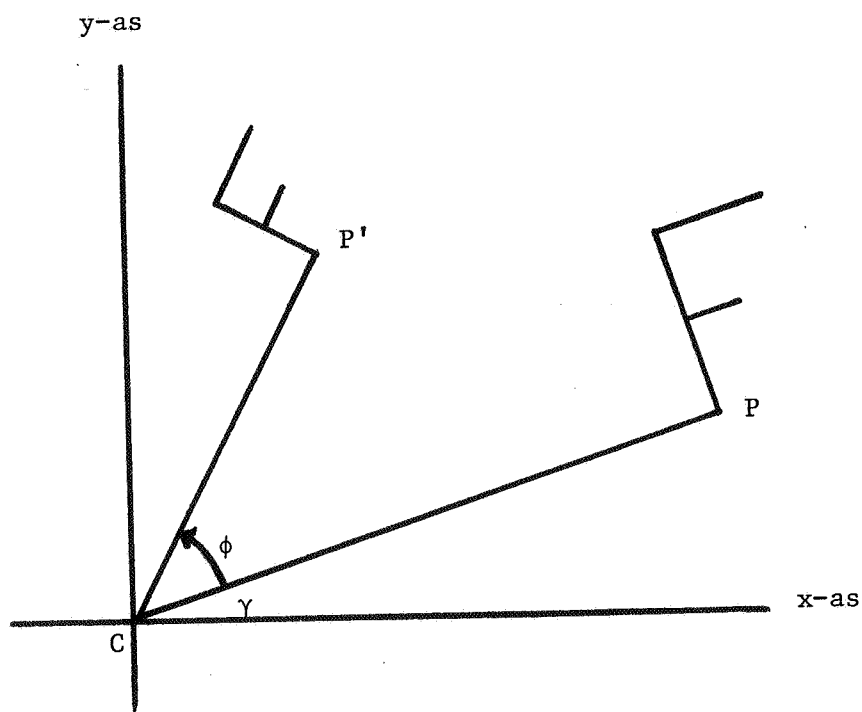
vervangen we elke nul door A en elke één door B en dan verkrijgen we daarmee de rij transformaties die tot V_n voert.

Alle ingrediënten van het computerprogramma "Pythboom" zijn hiermede beschreven. De vierkanten tekenen we in series van 2^m van gelijke grootte volgens oplopend rangnummer n (regels 100, 110). Voor elke n bepalen we de binalen welke we opbergen in de array (a_j) voor $j = 1$ tot m (regels 130-160). Overigens zijn er microcomputers waarop de binalen van een willekeurig getal rechtstreeks verkregen kunnen worden. (Eigenlijk een omweg: de computer rekent intern tweetallig maar uitwendig tientallig terwijl wij weer moeten omrekenen naar tweetallig). In elk geval beschikken we in regel 90 over een rij nul- en eenen welke ons vertellen of we in de route naar V_n een transformatie A of B moeten uitvoeren. De transformatie A is als subroutine beschreven in de regels 380-420. B is gegeven in de regels 330-370. Bij deze transformaties is gemakshalve ook de verkorting van de zijden van de opvolgende vierkanten met $1/\sqrt{2}$ opgenomen. Aan het begin van regel 210 beschikken we dus over de coördinaten x, y van P_n , de helling ϕ van V_n en de grootte h van de halve zijden. Het tekenprogramma om m.b.v. de hoekpunten van V_n het vierkant te tekenen staat in de regels 210, 220 en 270-310.

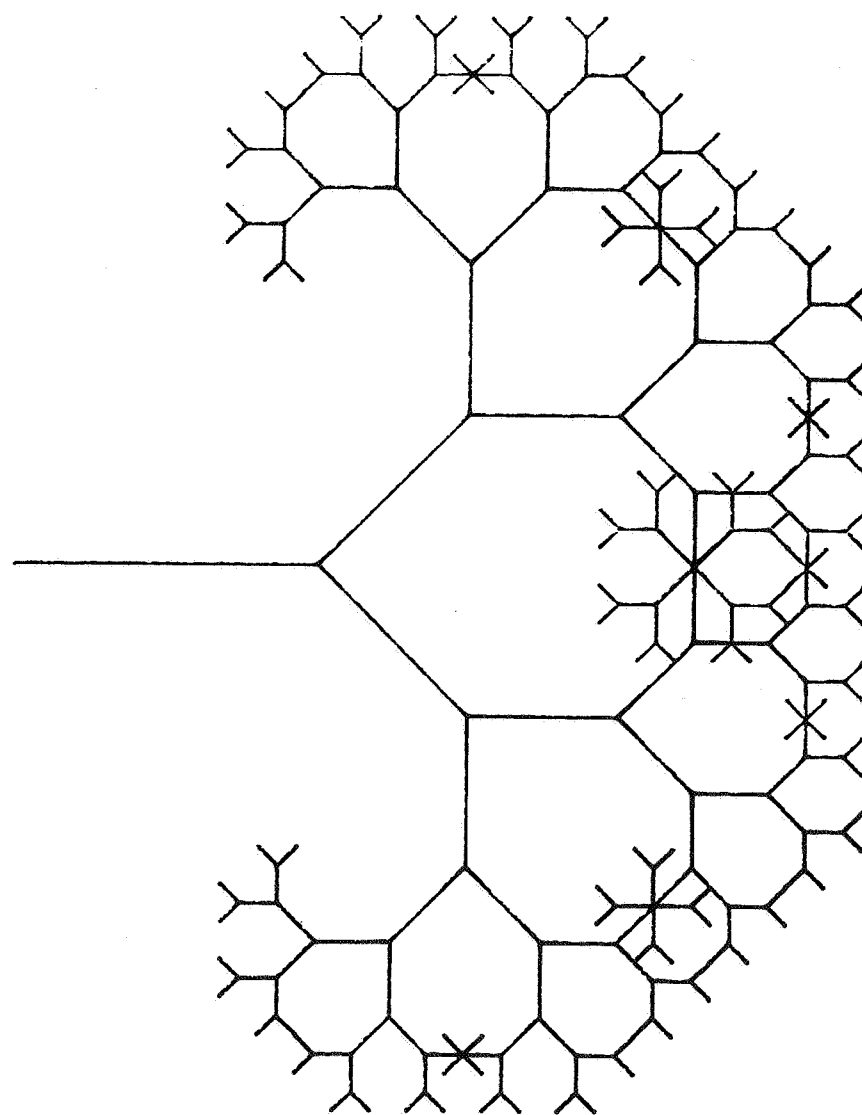
10	REM 'PYTHBOOM'	230	GOSUB 270
20	GCLEAR @ DEG	240	NEXT N
30	SCALE -7,7,-4,10	250	NEXT M
40	DIM A(12)	260	END
50	DISP "ENTER ORDER"	270	MOVE X-V, Y-U
60	INPUT P	280	DRAW X+U, Y-V
70	X = 0 @ Y = 0	290	DRAW X-U, Y+V
80	U = 1 @ V = 1	300	DRAW X-U, Y+V
90	FOR M = 0 TO P	310	DRAW X-V, Y-U
100	FOR N = 2M TO 2(M+1)-1	320	RETURN
110	L = N @ H = 1	330	X = X+H*(COS (F)-2*SIN (F))
120	X = 0 @ Y = 0 @ F = 0	340	Y = Y+H*(2*COS (F)+SIN (F))
130	FOR K = 0 TO M-1	350	F = F+45
140	A(M-K) = L MOD 2	360	H = H/SQR (2)
150	L = L DIV 2	370	RETURN
160	NEXT K	380	X = X-H*(COS (F)+2*SIN (F))
170	X = 0 @ Y = 0	390	Y = Y+H*(2*COS (F)-SIN (F))
180	FOR J = 1 TO M	400	F = F+45
190	IF A(J) = 0 THEN GOSUB 380 ELSE GOSUB 330	410	H = H/SQR (2)
200	NEXT J	420	RETURN
210	U = H*(COS (F)+SIN (F))	430	END
220	V = H*(COS (F)-SIN (F))		

3. De bloesem

De zelfgelijkvormigheid van de Pythagorasboom kan beschreven worden met behulp van twee draaivermenigvuldigingen. Een draaivermenigvuldiging is een gelijkvormigheidstransformatie met een centrum C , een draaihoek ϕ en een schaalfactor r .



Figuur 5. Draaivermenigvuldiging



Figuur 3. Pythagorasboom in de winter

Met zo'n draaivermenigvuldiging (zie fig. 5) gaat het punt P zodanig in P' over dat $\angle P'CP = \phi$ en $CP':CP = r$. In coördinaten kunnen we de transformatie a.v. beschrijven. Kiezen we voorlopig C in de oorsprong, geven we P de coördinaten (x, y) en P' de coördinaten (x', y') dan is (zie fig. 5)

$$x = CP \cos \gamma, \quad y = CP \sin \gamma$$

en verder

$$\begin{aligned} x' &= CP' \cos(\gamma + \phi) = r \cdot CP (\cos \gamma \cos \phi - \sin \gamma \sin \phi) = \\ &= r \cos \phi CP \cos \gamma - r \sin \phi CP \sin \gamma = \\ &= rx \cos \phi - ry \sin \phi. \end{aligned}$$

Schrijven we

$$a = r \cos \phi, \quad b = r \sin \phi \quad (3.1)$$

dan is dus

$$x' = ax - by.$$

Analoog is (projecteer op de verticale y -as)

$$\begin{aligned} y' &= CP' \sin(\gamma + \phi) = r \cdot CP (\sin \gamma \cos \phi + \cos \gamma \sin \phi) = \\ &= r \cos \phi CP \sin \gamma + r \sin \phi CP \cos \gamma = \\ &= ry \cos \phi + rx \sin \phi \end{aligned}$$

ofwel

$$y' = bx + ay.$$

Samenvattend wordt een draaivermenigvuldiging om de oorsprong beschreven door het formulepaar

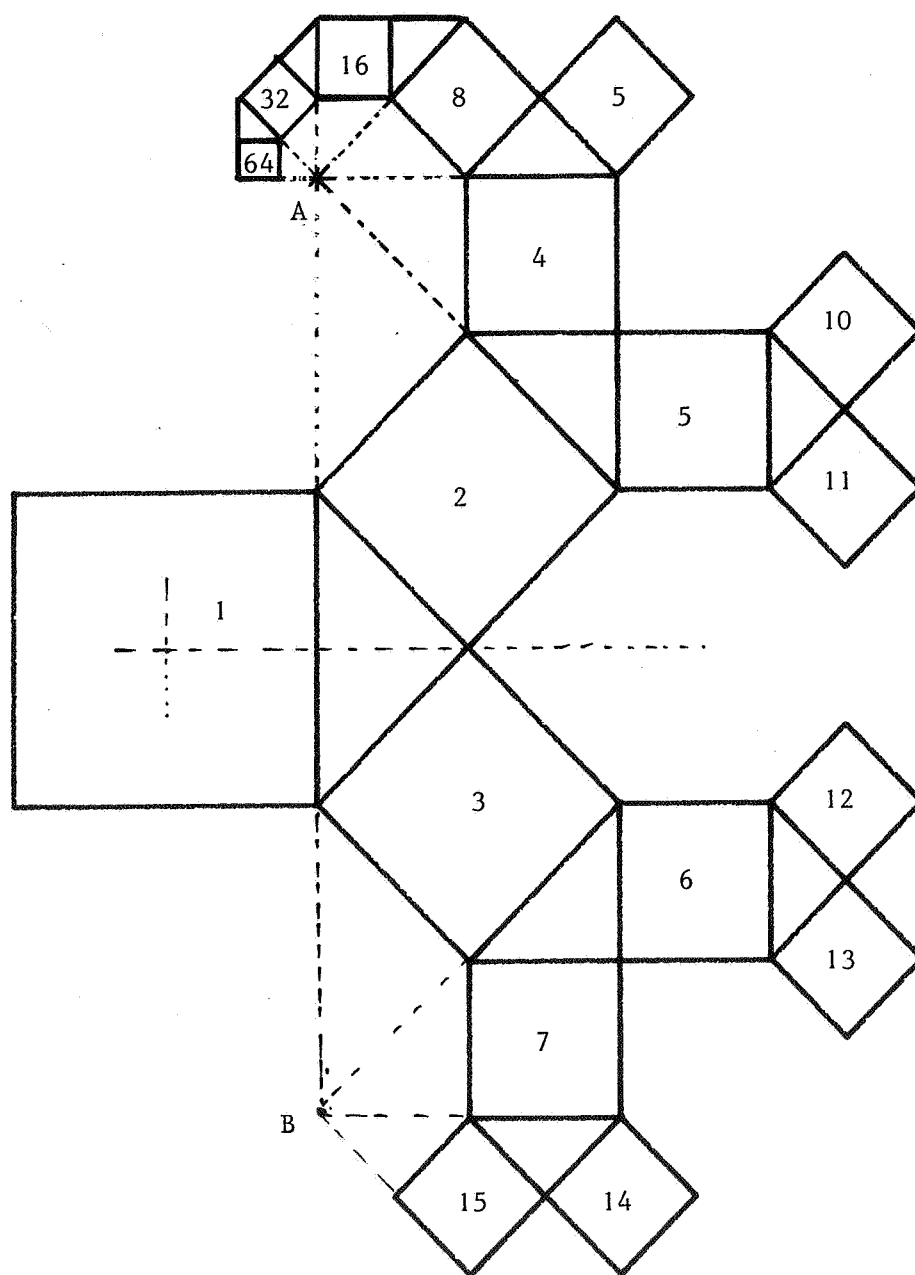
$$\begin{cases} x' = ax - by, \\ y' = bx + ay, \end{cases} \quad (3.2)$$

Om een draaivermenigvuldiging om een willekeurig punt C met coördinaten x_0, y_0 te beschrijven behoeven we in (3.2) slechts x en y te vervangen door $x - x_0$ en $y - y_0$, d.w.z.

$$\begin{cases} x' = a(x - x_0) - b(y - y_0) + x_0, \\ y' = b(x - x_0) + a(y - y_0) + y_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

De juistheid hiervan blijkt nog eens achteraf wanneer we $x = x_0, y = y_0$ invullen. Het resultaat is $x' = x_0, y' = y_0$ wat betekent dat het punt (x_0, y_0) niet van plaats verandert en dus m.a.w. het rotatiecentrum is.

We beschouwen het begin van de Pythagorasboom zoals geschetst in fig. 6 nog eens aandachtig. Is het coördinatenstelsel gekozen als in de vorige paragraaf dan kunnen we constateren dat het punt $A(-3,1)$ het centrum is van een draaivermenigvuldiging met $\phi = 45^\circ$ en $r = 1/\sqrt{2}$. Die draaivermenigvuldiging voert een willekeurig vierkantje van de Pythagorasboom over in een ander vierkantje.



Figuur 6. Centra van draaivermenigvuldigen

Evenzo is $B(3,1)$ centrum van een draaivermenigvuldiging met $\phi = -45^\circ$ en $r = 1/\sqrt{2}$. Duiden we de transformaties symbolisch met de letters α , en β aan dan volgt door substitutie van de gegeven waarden in (3.1) en (3.3):

$$\alpha \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x-y)-1, \\ y' = \frac{1}{2}(x+y)+2, \end{cases} \quad (3.4)$$

en

$$\beta \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x+y)+1, \\ y' = \frac{1}{2}(-x+y)+2. \end{cases} \quad (3.5)$$

Het volgende lijstje laat zien hoe de vierkanten door α en β getrasformeerd worden. Daarbij moeten de rangnummers n weer in series van 2^m gegroepeerd worden volgens

$$2^m \leq n < 2^{m+1}.$$

n	α	β	m
1	2	3	0
2	4	6	1
3	5	7	
4	8	12	2
5	9	13	
6	10	14	
7	11	15	
8	16	24	3
9	17	25	
10	18	26	

De algemene regel is blijkbaar

$$\begin{cases} \alpha n = n + 2^m, \\ \beta n = n + 2^{m+1}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Zowel α als β voert de hele Pythagorasboom in een iets kleinere boom over. Elke combinatie van α en β transformeert de Pythagorasboom in een kleinere deelboom. Het effect van b.v. $\alpha\beta$ (eerst β dan α) op een willekeurig vierkantje kunnen we afleiden uit de bovenstaande tabel en uit formule (3.6), b.v.

$$\alpha\beta 3 = 11.$$

Anderzijds is

$$\beta\alpha 3 = 9.$$

Een willekeurige volgorde van α 's en β 's als b.v.

$$\alpha\beta\beta\alpha\beta\alpha\alpha\beta\alpha\beta$$

definieert ook weer een gelijkvormigheidstransformatie welke de Pythagorasboom in een kleinere boom overvoert.

De limietpunten van vierkanten, de z.g. bloesem van de Pythagorasboom, duiden we zoals eerder afgesproken aan met Π . Uit het bovenstaande volgt dat de verzameling Π in zichzelf overgaat bij toepassing van de transformaties α en β . Π is dus zelf-gelijkvormig zowel t.o.v. α als t.o.v. β . Is P een willekeurig punt van Π dan transformeren zowel α als β het punt P in een ander punt van Π . Daarmede is

een mechanisme verkregen om een willekeurig aantal punten van Π te bepalen wanneer uitgegaan wordt van een bekend punt van Π . De centra A en B behoren in elk geval tot Π . Om een indruk van Π met behulp van de computer te verkrijgen bepalen we een toevallige rij punten $P_1, P_2, P_3, \dots$ waarbij b.v. $P_1 \equiv A$ en elk volgend punt uit het voorafgaande punt verkregen wordt als

$$\begin{cases} P_{k+1} = \alpha P_k \\ \text{of} \\ P_{k+1} = \beta P_k \end{cases} \quad (3.7)$$

waarbij de keuze van α of β bepaald wordt door het toeval, kruis of munt, d.w.z. met de door de computer gegenereerde "random numbers". Is s b.v. zo een door de computer bepaald toevallig getal uit het eenheidsinterval, d.w.z. $0 < s < 1$, dan kunnen we (3.7) vertalen als:

$$\text{if } s < 0.5 \text{ then } P_{k+1} = \alpha P_k \text{ else } P_{k+1} = \beta P_k.$$

Het bijgaande computerprogramma "Bloesem" is daarmee voldoende verklaard. Het is eigenlijk niets anders dan de combinatie van (3.7) met de als subroutine beschreven transformaties (3.4) en (3.5).

```

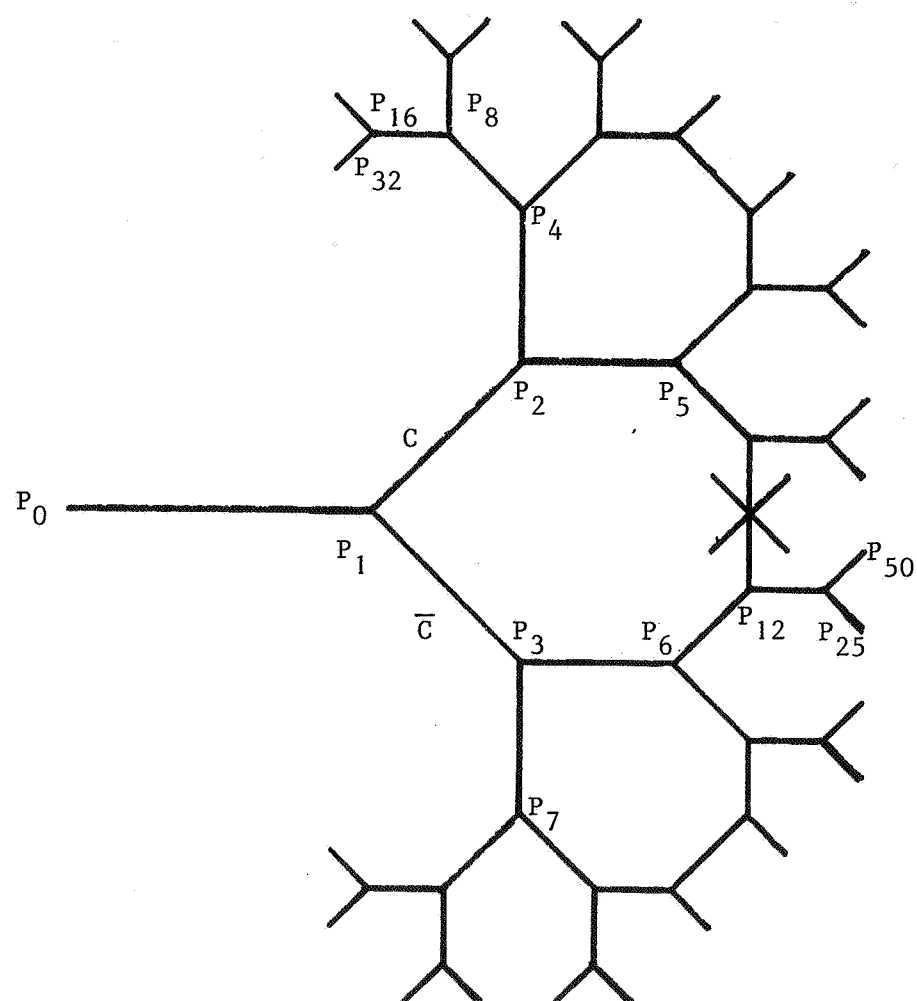
10  REM "BLOESEM"
20  GCLEAR
30  SCALE -7.7,-4,10
40  X=3 @ Y=1
50  FOR K=1 TO 2000
60  IF RND <.5 THEN GOSUB 110 ELSE GOSUB 150
70  MOVE X,Y @ PLOT X,Y
80  MOVE -X,Y @ PLOT -X,Y
90  NEXT K
100 END
110 Z=X
120 X=(X+Y)/2+1
130 Y=(Y-Z)/2+2
140 RETURN
150 Z=X
160 X=(X-Y)/2-1
170 Y=(Z+Y)/2+2
180 RETURN
190 END
```

4. Complexe getallen en het Tweetallig talstelsel

Wanneer we vertrouwd zijn met de complexe getallen kan de constructie en analyse van boom en bloesem veel fraaier beschreven worden. Een complexe getal $c = a + bi$ interpreteren we daarbij als een (vrije) vector met componenten (a, b) , een gericht lijnstuk of een pijl welke we ergens aan kunnen hechten. Optellen van complexe getallen is dus meetkundig het optellen van vectoren aan elkaar gehecht volgens het kop-staart principe. Vermenigvuldigen van twee complexe getallen is equivalent met de in fig. 5 en door form (3.2) beschreven draaivermenigvuldiging. Is $z = x + yi$ het complexe getal dat met $P(x, y)$ correspondeert en is $c = a + bi$ dan kunnen we (3.2) veel beknopter schrijven als

$$z' = cz \quad (4.1)$$

waarbij $P'(x', y')$ het beeldpunt is van $z' = x' + y'i$.



Figuur 7. Systematische nummering van de takken

We beschouwen nu nog eens de Pythagorasboom in de takkenvorm van fig. 7. We duiden de positie van P_n , het eindpunt van een tak, aan met het complexe getal z_n . We zijn nog vrij de oorsprong en de eenheid op willekeurige wijze te kiezen. De volgende keuze blijkt erg handig te zijn. We nemen $z_0 = 0$, $z_1 = 1$. De vectoren P_1P_2 en P_1P_3 duiden we aan met c en $\bar{c}$ waarbij $\bar{c}$ de complex geconjugeerde van c is en

$$c = \frac{1}{2}(1+i). \quad (4.2)$$

We herhalen nog even: complex vermenigvuldigen met c betekent draaien over $+45^\circ$ en verkorten met de factor $1/\sqrt{2}$, met $\bar{c}$ analoog draaien over -45° en dezelfde verkorting. Elk vectorieel lijnstukje in fig. 7 kunnen we gemakkelijk uitdrukken als een product met factoren c en $\bar{c}$. Bijv.

$$\begin{aligned} P_0P_1 &= 1, \quad P_1P_3 = \bar{c}, \quad P_3P_6 = c\bar{c}, \\ P_6P_{12} &= c^2\bar{c}, \quad P_{12}P_{25} = c^2\bar{c}^2, \quad P_{25}P_{50} = c^3\bar{c}^2. \end{aligned}$$

Voor de positie van P_{50} volgt hieruit

$$z_{50} = 1 + \bar{c} + c\bar{c} + c^2\bar{c} + c^2\bar{c}^2 + c^3\bar{c}^2.$$

Voor elk rangnummer is er zo'n rij. De algemene vorm is blijkbaar

$$z_n = 1 + c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + \dots \quad (4.3)$$

waarbij elke term een factor c of $\bar{c}$ meer heeft dan de voorafgaande term. Omdat

$$|c| = |\bar{c}| = 2^{-1/2}$$

is

$$|c_k| = 2^{-k/2}. \quad (4.4)$$

Laten we n naar oneindig gaan dan gaat (4.3) over in een oneindig voortlopende reeks die dankzij (4.4) convergeert op de wijze van een meetkundige reeks. Elke reeks van de vorm (4.3) stelt een limietpunt van de Pythagorasboom, een bloesempje, voor. De twee gelijkvormigheidsformaties α en β zien er in complexe notatie ook veel eenvoudiger uit:

$$\begin{cases} \alpha: z' = 1 + cz, \\ \beta: z' = 1 + \bar{c}z. \end{cases} \quad (4.5)$$

Een bloesempje kunnen we symbolisch voorstellen door een reëel getal tussen 0 en 1 in een tweetallige representatie. We laten het zien aan de hand van het volgende voorbeeld:

$$\begin{aligned} z &= 1 + \bar{c} + \underset{1}{c}\bar{c} + \underset{0}{c}\bar{c}^2 + \underset{1}{c^2}\bar{c}^2 + \underset{0}{c^3}\bar{c}^2 + \underset{0}{c^4}\bar{c}^2 + \underset{1}{c^4}\bar{c}^3 + \dots \\ r &= 0.1010001\dots \end{aligned} \quad (4.6)$$

Het recept is dus een nul voor een factor c en een één voor een factor $\bar{c}$. Die rij van nullen en éenen geeft ook de route aan welke tot het limietpunt leidt. In het gegeven voorbeeld

$$P_0P_1P_3P_6P_{13}P_{26}P_{52}P_{104}P_{209}\dots,$$

d.w.z. een nul voor de linkertak en een één voor de rechtertak van een vork.

Op deze wijze hebben we een toevoeging tot stand gebracht tussen de getallen in het gesloten interval $[0,1]$, d.w.z. de punten van een lijnstuk, en de limietpunten voor de Pythagorasboom. Die toevoeging is wederkerig eenduidig en wat nog veel mooier is, de toevoeging is ook continue. D.w.z. dat reële getallen die vlak bij elkaar liggen corresponderen met bloesempjes die ook vlak bij elkaar liggen. De reden is heel eenvoudig. Zijn b.v. r_1 en r_2 vlak bij elkaar dan zijn in de tweetallige breukontwikkeling zeg de eerste 100 binalen identiek. Dit betekent dat in de corresponderende z -reeksen de eerste 100 termen ook identiek zijn. Omdat alle z -reeksen convergeren als een meetkundige reeks met reductiefactor $1/\sqrt{2}$ zijn de twee limietpunten van de Pythagorasboom ook dicht bij elkaar. De onderlinge afstand zouden we zelfs gemakkelijk kunnen schatten.

De limietpunten van de Pythagorasboom zijn dus een continue afbeelding van een lijnstuk en dit is de zuiver wiskundige definitie van een continue kromme. De bloesem Π van de Pythagorasboom is dus een continue kromme, maar dan wel een onvoorstelbaar gekronkelde kromme en bepaald geen gladde kromme zoals we ons meestal plegen voor te stellen. Π is een continue kromme die nergens een raaklijn meetkundig equivalent van een functie die wel continu maar nergens differentieerbaar is!

We besluiten met een paar suggesties voor generalisaties. Kijken we b.v. naar fig. 7 dan kunnen we de takken P_1P_2 , P_1P_3 van de vork bij P_1 een andere richting en een andere verkortingsverhouding geven. De te tekenen figuur wordt dan gebouwd op twee gelijkvormigheids-transformaties α met centrum A en β met centrum B . Plaatsen we b.v. A in $(-1,0)$ en B in $(0,1)$ dan kunnen we α en β voorstellen door (verg. form. 3.4 en 3.5)

$$\alpha \begin{cases} x' = ax - by + a - 1, \\ y' = bx + ay + b, \end{cases}$$

en

$$\beta \begin{cases} x' = cx + dy - c + 1, \\ y' = -dx + cy + d. \end{cases}$$

Daarbij moet ter wille van de convergentie wel voldaan zijn aan $a^2 + b^2 < 1$, $c^2 + d^2 < 1$, maar overigens zijn a, b, c, d willekeurig. Het bloesemprogramma kan daarmee het gemakkelijkst aangepast worden. Het tekenen van de takkenstructuur als fig. 7 kost iets meer bewerking. Maar alleen wanneer a, b, c, d aan een paar speciale voorwaarden voldoen hoort er ook een echte - scheefgegroeide - Pythagorasboom bij, en dat is een leuke uitdaging.