

0551
CALDERÓN, C.
2004

El Teorema de Pitágoras en Euclides. Un mínimo comentario.

Carlos Calderón.

Trabajo presentado para la Cátedra "Historia de las Matemáticas" dictada por el Prof. Marco Panza (Universidad Pompeu Fabra), perteneciente al Doctorado Inter-universitario de "Historia de las Ciencias" de la Univ. de Barcelona. Catalunya. España. Febrero 2004.

Los comentarios en torno a la solución que expone Euclides para el Teorema de Pitágoras son innumerables, sin embargo la demostración del propio Euclides no goza de popularidad. Es extraño verla en textos escolares y, por lo general, los libros de historia general de la matemática se refieren a ella, por lo general, cómo algo de belleza y genialidad pero como tan solo un anticipo a propuestas más generales de la geometría euclidiana.

En esta tradición, que viene desde los comentarios de Proclo^[1], la demostración es un intento genial de Euclides por evitar el uso de la teoría de proporciones, lo que lleva a interpretarla como una antesala a la proposición más general del Teorema y que será presentada en el Libro VI. Proposición 31. Se refiere Proclo a que Euclides, y su manera de probar el problema, "...se hará evidente allá en el sexto libro". Esta posición, sin querer pecar de exagerados, no permite disfrutar en plenitud la inteligencia de esta específica demostración euclidiana puesto que, según Proclo y la línea interpretativa que sugerimos, aquella queda relegada a una suerte de prueba "particular" y "parcial" que se ve minimizada ante la soberbia "universalidad" que hará más adelante. Según esta tradición Euclides esquiva la similitud de figuras rectilíneas, la teoría de proporciones y, entre otras cosas, la inconmesurabilidad.^[2] Si bien el mismo Proclo, nos comente que dicha demostración es genuina de Euclides y que su alegría fue tal que lo llevó a sacrificar un buey, en su comentario procede a discurrir sobre los tripletes pitagóricos dejando en mera admiración la propuesta de Euclides. "*No pienso que deba agregar nada superfluo*", dice Proclo y, sin embargo, agrega que aquellos que han hecho adiciones se han visto obligados a asumir pruebas del libro sexto.

Antes de intentar "agregar" algo a esta discusión de siglos, comentemos que junto a esta interpretación, en lo que respecta a admiración estética mas no matemática, la historia del Teorema y su demostración euclidiana ha florecido con las más variadas imágenes. Desde su utilización en lienzos como la "Alegoría de la Geometría", del pintor barroco francés Laurent de la Hyre (Fig.1 y 2) hasta variadas caracterizaciones. En el caso de Boyer, este nos comenta, que Euclides al evitar el uso de las *proporciones* "*utilizó en cambio una bella demostración en la que se usa una figura que se ha descrito a veces como un molino de viento, la cola de un pavo real o como mas bien la 'silla de la novia'*"^[3] (Ver Fig.3.)

El Teorema de Pitágoras en Euclides. Un mínimo comentario.

Carlos Calderón.

Trabajo presentado para la Cátedra “Historia de las Matemáticas” dictada por el Prof. Marco Panza (Universidad Pompeu Fabra), perteneciente al Doctorado Inter-universitario de “Historia de las Ciencias” de la Univ. de Barcelona. Catalunya. España. Febrero 2004.

Los comentarios en torno a la solución que expone Euclides para el Teorema de Pitágoras son innumerables, sin embargo la demostración del propio Euclides no goza de popularidad. Es extraño verla en textos escolares y, por lo general, los libros de historia general de la matemática se refieren a ella, por lo general, cómo algo de belleza y genialidad pero como tan solo un anticipo a propuestas más generales de la geometría euclidiana.

En esta tradición, que viene desde los comentarios de Proclo^[1], la demostración es un intento genial de Euclides por evitar el uso de la teoría de proporciones, lo que lleva a interpretarla como una antesala a la proposición más general del Teorema y que será presentada en el Libro VI. Proposición 31. Se refiere Proclo a que Euclides, y su manera de probar el problema, “...se hará evidente allá en el sexto libro”. Esta posición, sin querer pecar de exagerados, no permite disfrutar en plenitud la inteligencia de esta específica demostración euclidiana puesto que, según Proclo y la línea interpretativa que sugerimos, aquella queda relegada a una suerte de prueba “particular” y “parcial” que se ve minimizada ante la soberbia “universalidad” que hará más adelante. Según esta tradición Euclides esquivaba la similitud de figuras rectilíneas, la teoría de proporciones y, entre otras cosas, la inconmensurabilidad.^[2] Si bien el mismo Proclo, nos comenta que dicha demostración es genuina de Euclides y que su alegría fue tal que lo llevó a sacrificar un buey, en su comentario procede a discurrir sobre los tripletes pitagóricos dejando en mera admiración la propuesta de Euclides. “No pienso que deba agregar nada superfluo”, dice Proclo y, sin embargo, agrega que aquellos que han hecho adiciones se han visto obligados a asumir pruebas del libro sexto.

Antes de intentar “agregar” algo a esta discusión de siglos, comentemos que junto a esta interpretación, en lo que respecta a admiración estética mas no matemática, la historia del Teorema y su demostración euclidiana ha florecido con las más variadas imágenes. Desde su utilización en lienzos como la “Alegoría de la Geometría”, del pintor barroco francés Laurent de la Hyre (Fig.1 y 2) hasta variadas caracterizaciones. En el caso de Boyer, este nos comenta, que Euclides al evitar el uso de las *proporciones* “utilizó en cambio una bella demostración en la que se usa una figura que se ha descrito a veces como un molino de viento, la cola de un pavo real o como mas bien la ‘silla de la novia’^[3] (Ver Fig.3.)



Fig.1 Alegoría de la Geometría. Por Laurent de la Hyre. 1601-1666.

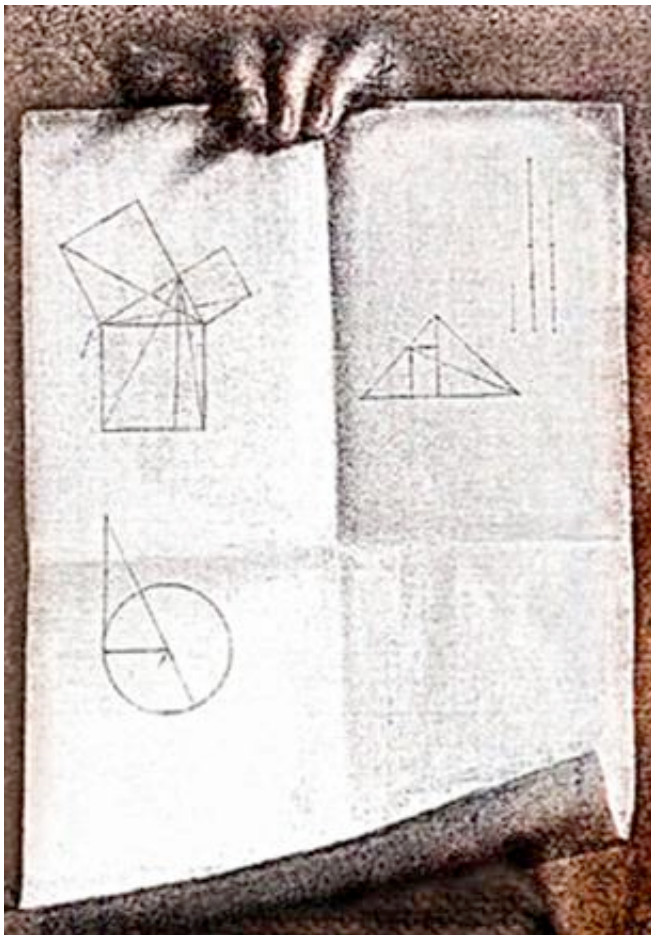


Fig.2 Alegoría de la Geometría. Detalle. Arriba a la izquierda, la demostración euclidiana del Teorema de Pitágoras. A la derecha prueba para la Prop.9 del libro 2, y abajo a la izquierda la prueba para la Prop.36 del libro 3.

Estas imágenes, independiente de la reverencia que profesan por Euclides, no dan espacio a valorar, geométricamente, la calidad de la demostración de Euclides y de ahí esta paradoja de ser muy, por un lado, popular e incluso caricaturizada, y a la vez, por otro lado, relegada y ausente en la mayoría de los libros de geometría: sea porque es un estado previo de algo mas general o sea porque sus valores son ajenos a la estética de la geometría misma, o, en todo caso, porque la demostración en si sea muy compleja. Lo cual no lo creemos.

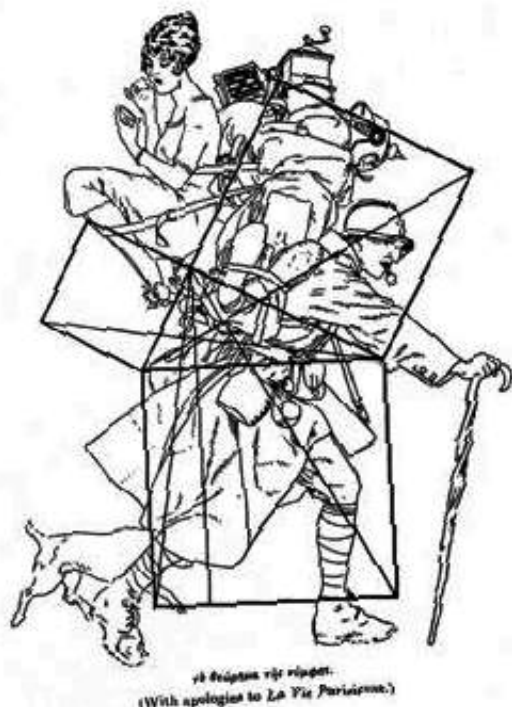
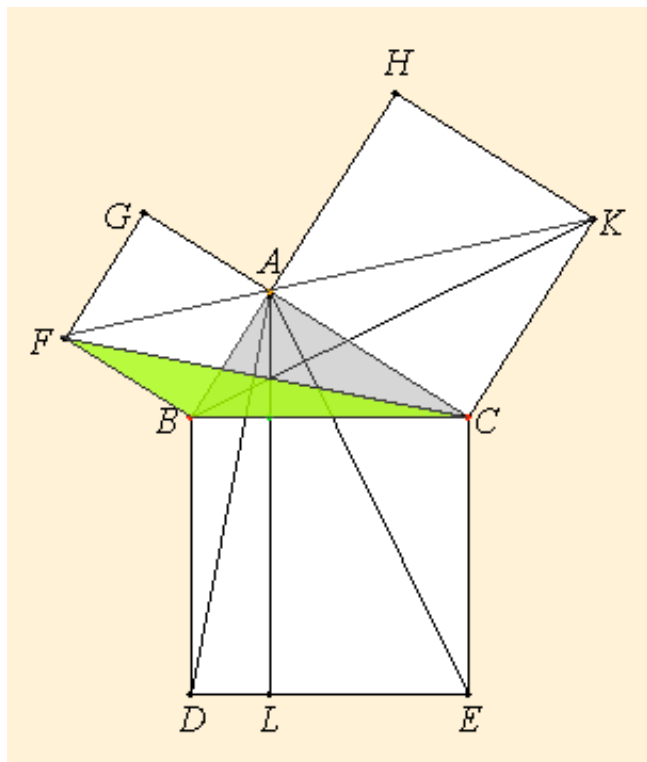


Fig.3. La Silla de la Novia. Tal como aparece en el libro de Carl Boyer, "A History of Mathematics".

En otros casos, la demostración euclidiana es asociada, directamente, con una *solución de áreas*, siendo el caso posible de verse, tan solo, como una equivalencia de triángulos y según lo expuesto en la Proposición 37. Es claro que esta proposición se fundamenta en la equivalencia de "áreas paralelogramáticas" la cual Euclides introduce, por primera vez, en la Proposición 34, pero en ningún caso podemos hablar de "solución por áreas", como sugiere Kline ^[4], pues es en la Proposición 44 donde Euclides introduce una verdadera equivalencia de áreas (área de triángulos con respecto a área de rectángulo). Así entonces la idea de *solución por áreas* podemos considerarla una desviación interpretativa puesto que es posible seguir la construcción de la prueba con las herramientas que nos otorga la Proposición 37 y su idea de equivalencia de triángulos. No vamos a negar que aquí late la idea de *área* (el mismo Euclides ya lo dice en la Prop. 34) pero podemos hacer un intento por mirar el proceso como una continua equivalencia de triángulos y no una solución que utilice esta idea de solución por áreas o según Kline, *transformación de áreas*. ^[5]

Visto así la demostración de Euclides tiene un momento clave en su proceso: "la suma de ángulos". Es esta suma la que intentamos suplantear por la equivalencia de triángulos, lo cual confiere a la solución euclidiana una dinámica interna de interés a la vez que unifica criterios. Visto así, la demostración euclidiana, es cónsona con el desarrollo del Libro I y permite disfrutarla (por lo menos para quien escribe) de una manera más bella, pero afianzada esta belleza en la solidez de los argumentos geométricos.

Colocaremos aquí, junto a este diagrama animado (animated gif), la demostración de Euclides - en la traducción de T. Heath -, y en rojo nuestra propuesta alternativa.



In right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides containing the right angle.

1. Let ABC be a right-angled triangle having the angle BAC right. I say that the square on BC equals the sum of the squares on BA and AC .

2. Describe the square $BDEC$ on BC , and the squares GB and HC on BA and AC . Draw AL through A parallel to either BD or CE , and join AD and FC .

[I.46](#)

[I.31](#)

2. Describe the square $BDEC$ on BC , and the squares GB and HC on BA and AC .

[Post.1](#)

3. Since each of the angles BAC and BAG is right, it follows that with a straight line BA , and at the point A on it, the two straight lines AC and AG not lying on the same side make the adjacent angles equal to two right angles, therefore CA is in a straight line with AG .

[I.Def.22](#)

[I.14](#)

4. For the same reason BA is also in a straight line with AH .

5. Since the angle DBC equals the angle FBA , for each is right, add the angle ABC to each, therefore the whole angle DBA equals the whole angle FBC .

[I.34](#)

[I.37](#)

5. Since the square GB is double the triangle FBA , therefore the triangle FBA is equal to triangle FBC , for they have the same base FB and are in the same parallels FB and the straight line with AG and AC .

[Post.4](#)

[C.N.2](#)

6. Since DB equals BC , and FB equals BA , the two sides AB and BD equal the two sides FB and BC respectively, and the angle ABD equals the angle FBC , therefore the base AD equals the base FC , and the triangle ABD equals the triangle FBC .

[I.Def.22](#)

[I.4](#)

7. Draw AL through A parallel to either BD or CE . Now the parallelogram BL is double the triangle ABD , for they have the same base BD and are in the same parallels BD and AL . And the square GB is double the triangle FBC , for they again have the same base FB and are in the same parallels FB and GC .

[I.41](#)

8. Therefore the parallelogram BL also equals the square GB .

9. Similarly, if AE and BK are joined, the parallelogram CL can also be proved equal to the square HC . Therefore the whole square $BDEC$ equals the sum of the two squares GB and HC .

[C.N.2](#)

10. And the square $BDEC$ is described on BC , and the squares GB and HC on BA and AC . Therefore the square on BC equals the sum of the squares on BA and AC .

Therefore in right-angled triangles the square on the side opposite the right angle equals the sum of the squares on the sides

Q.E.D.

Pagina 5 van 6

a una propuesta más general (Libro VI Prop. 31) pero sin convertir a la Prop. 47 - la demostración que valiera el mítico buey -, en un mero trampolín o tan sólo un abreboca.

Es probable que los textos escolares, una vez sean totalmente multimedia e incorporen animaciones y otras ventajas digitales puedan - y deban - retomar la Proposición de Euclides y su demostración. Así su popularidad residirá no en el misterio de sus imágenes y sobrenombres curiosos, sino en su solidez y lógica propia.

Barcelona. Marzo 2004.

Carlos Calderón.
ccalderon@pd.com.ve

[1] PROCLUS. "A commentary on the first book of Euclid's Elements" Translated with introduction notes by G. Morrow. Princeton University Press. 1970. Princeton . New Jersey. PP 337-341. Ver también. REY PASTOR, J. BABINI, J. "Historia de la Matemática". Vol I. 1ra. Ed. Barcelona. 1984. Editorial Anthropos. Vol. 1. PP 469-470.

[2] BOYER, Carl. "A history of Mathematics" Alianza Editorial. Madrid. 1986. P.149.

[3] Otros autores mencionan "la capucha de un franciscano" o "los pantalones de Euclides". Alexander Bogomolny en su popular site web "Cut the knot" <http://www.maa.org/editorial/knot/BridesChair> hace referencia a este hecho junto a ampliaciones interesantes del Teorema de Pitágoras.

[4] KLINE, Morris. "El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días". Alianza Editorial. 1992. P 96

[5] Ibid. Pag. 97.

[6] Esta demostración la conseguimos en forma de Applet Java en una recopilación de demostraciones del Teorema de Pitágoras realizada por A. Bogolmony <http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml>. Comenta Bogolmony que el ímpetu para realizar dicho site web provino, justamente, de esa demostración (la cual coloca como la primera en la recopilación de un total de cuarenta y tres), realizada por Jim Morey <http://www.math.ubc.ca/~morey/morey.html>. Lamentamos que ambos autores no mencionen a Euclides como el responsable ancestral de dicho applet Java, dejando la reverencia por la mencionada y paradójica (popular-impopular) demostración con tan solo el calificativo de "remarkable".