

6605
CANTOR, M.
1894

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1—16
I. Aegypter	17—72
1. Kapitel. Die Aegypter. Arithmetisches	19
2. Kapitel. Die Aegypter. Geometrisches	52
II. Babylonier	73—104
3. Kapitel. Die Babylonier	76
III. Griechen	105—482
4. Kapitel. Die Griechen. Zahlzeichen. Fingerrechnen. Rechenbrett	107
5. Kapitel. Thales und die älteste griechische Geometrie	124
6. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Arithmetik	137
7. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie	159
8. Kapitel. Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule	175
9. Kapitel. Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule. Hippokrates von Chios	188
10. Kapitel. Platon	201
11. Kapitel. Die Akademie. Aristoteles	222
12. Kapitel. Alexandria. Die Elemente des Euklid	244
13. Kapitel. Die übrigen Schriften des Euklid	263
14. Kapitel. Archimedes und seine geometrischen Leistungen	280
15. Kapitel. Die übrigen Leistungen des Archimedes	295
16. Kapitel. Eratosthenes. Apollonius von Pergä	312
17. Kapitel. Die Epigonen der grossen Mathematiker	333
18. Kapitel. Heron von Alexandria	347
19. Kapitel. Heron von Alexandria (Fortsetzung)	361
20. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie bis zu Ptolemäus	378
21. Kapitel. Neupythagoräische Arithmetiker. Nikomachus. Theon	398
22. Kapitel. Sextus Julius Africanus. Pappus von Alexandria	409
23. Kapitel. Die Neuplatoniker. Diophantus von Alexandria	427
24. Kapitel. Die griechische Mathematik in ihrer Entartung	457
IV. Römer	483—552
25. Kapitel. Älteste Rechenkunst und Feldmessung	485
26. Kapitel. Die Blüthezeit der römischen Geometrie. Die Agri- mensoren	502
27. Kapitel. Die spätere mathematische Literatur der Römer	522
V. Indes	553—618
28. Kapitel. Einleitendes. Elementare Rechenkunst	555
29. Kapitel. Höhere Rechenkunst. Algebra	573
30. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie	595

1868

6605

6606

6607

6608

IN GESCHICHTE DER MATHEMATIK I

$0 + 1 = 1$ nicht beachten will. Aber der Grieche jener alten Zeit konnte diese Ueberlegung nicht anstellen, konnte, wenn sie ihm möglich gewesen wäre, die zweite Gleichung nicht denken. Wir kommen auf den Zahlenbegriff der Griechen noch zurück. Gegenwärtig wissen wir nur, dass die Null, für welche sie kein Zeichen hatten, ihnen auch keine Zahl war. Wir sind darüber auf's Deutlichste durch einen der schon genannten Arithmetiker unterrichtet. Nikomachus sagt uns, jede Zahl sei die halbe Summe der zu beiden Seiten gleich weit von ihr abstehenden Zahlen; nur die Einheit bilde eine Ausnahme, weil sie keine zwei Nachbarzahlen besitze; sie sei darum die Hälfte der einen unmittelbar benachbarten Zahl¹⁾.

So mussten die Zahlen 9, 16, 25 und mit ihnen die Zahlen 3, 4, 5, deren Quadrate sie waren, welche ihre Ordnungszahlen in der Reihe der Quadratzahlen bildeten, der Aufmerksamkeit empfohlen sein, um so dringender empfohlen sein, wenn dieselben Zahlen schon anderweitig als mit merkwürdigen Eigenschaften versehen bekannt waren. Dass dem so war, darüber müssen wir uns jetzt zu vergewissern suchen.

7. Kapitel.

Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie.

Wir sind an dem Punkte angelangt, wo wir die nur im Bilde geometrische Arithmetik der Pythagoräer mit ihrer eigentlichen Geometrie in Verbindung treten sehen. Wir haben demgemäss auch auf diesem Gebiete abzusuchen, was unmittelbare oder mittelbare Ueberlieferung dem Pythagoras und seiner Schule zuweist.

Zunächst können wir eine ganze Gruppe von geometrischen Kenntnissen zusammenfassen unter dem gemeinsamen Namen der Anlegung der Flächen. „Alterthümlich, so sagen die Schüler des Eudemus, und Erfindungen der pythagoräischen Muse sind diese Sätze, die Anlegung der Flächen, ihr Ueberschiessen, ihr Zurückbleiben,“ *ἡ τε περὶ ἀβολὴ τῶν χωρίων καὶ ἡ ὑπερβολὴ καὶ ἡ ἔλλειψις*²⁾. So lautet der erläuternde Bericht des Proklus zu der euklidischen Aufgabe an einer gegebenen Graden unter gegebenem Winkel ein Parallelogramm zu entwerfen, welches einem gegebenen Dreieck gleich sei. Desselben Wortes *ἐλλείπειν* bei Anlegung von Flächen bedient sich Platon in seinem Menon³⁾, und Plutarch lässt an einer Stelle

¹⁾ Nicomachus, *Eisagog. arithm.* I, 8 (ed. Hoche), pag. 14. ²⁾ Proklus (ed. Friedlein) 419. ³⁾ Platon, *Menon* pag. 87.

das Anlegen von Flächen, *παράβαλλεν τοῦ χωρίου*, von Pythagoras selbst herkommen¹⁾, während er an einer anderen Stelle sich folgendermassen ausdrückt: „Eines der geometrischsten Theoreme oder vielmehr Probleme ist das, zu zwei gegebenen Figuren eine dritte anzulegen — *παράβαλλεν* —, die der einen gleich und der anderen ähnlich ist. Pythagoras soll, als er die Lösung gefunden, ein Opfer gebracht haben. Und wirklich ist es auch feiner und wissenschaftlicher als das, dass das Quadrat der Hypotenuse denen der beiden Katheten gleich ist“²⁾. Ueber die genauere Bedeutung der drei Wörter Parabel, Ellipse, Hyperbel bei Flächenanlegungen werden wir bei Besprechung der euklidischen Geometrie im 13. Kapitel zu reden haben. Für's Erste genügt die allgemeine aus den angeführten Stellen leicht zu schöpfende Ueberzeugung, dass es um die Zeichnung von Figuren gegebener Art und gegebener Grösse sich handelt. Solche Zeichnung ist aber unmöglich, wofern man nicht mit den Haupteigenschaften der Parallellinien und ihrer Transversalen, mit den hauptsächlichsten Winkelsätzen der Planimetrie vertraut ist, wofern man nicht die Auffindung von Flächeninhalten, deren Abhängigkeit von den die betreffende Figur bildenden Seiten in richtiger Weise kennt.

In der ersteren Beziehung sind wir wieder in der günstigen Lage, unsere Behauptung bestätigen zu können. Die Pythagoräer verwandten die Parallellinien zum Beweise des Satzes von der Winkelsumme des Dreiecks. Wir sahen (S. 132), dass die thalaitische Zeit, vielleicht Thales selbst, den Satz von der Winkelsumme in dreifacher Abstufung an dem gleichseitigen, an dem gleichschenkeligen, an dem unregelmässigen Dreiecke behandelte. Eudemus lässt durch die Pythagoräer den Satz für jedes beliebige Dreieck so bewiesen werden, dass durch die Spitze des Dreiecks die Parallele zur Grundlinie gezogen und daraus die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie mit ihren an jener Parallelen hervortretenden Wechselwinkeln gefolgert wurde. Einer jener Wechselwinkel wurde sodann mit dem ursprünglichen Dreieckswinkel an der Spitze zu einem einzigen Winkel vereinigt, welcher selbst wieder den anderen Wechselwinkel als Nebenwinkel besass und mit ihm zusammen zwei Rechte ergab³⁾.

Aus dieser Darstellung zeigt sich so recht deutlich an einem besonders merkwürdigen, in der Stufenfolge der Beweisführungen uns glücklich erhaltenen Beispiele, wie die Wissenschaft der Geometrie

¹⁾ Plutarch, *Non posse suaviter vivi secundum Epicur.* cap. 11. ²⁾ Plutarch, *Convivium* VIII, cap. 4. ³⁾ Proklus (ed. Friedlein) 379.

sich entwickelte. Von dem Zerlegen des Satzes in drei Fälle stieg man auf zur Behandlung des allgemeinen Falls, aber in diesem Aufwärtstreben hielt man wieder ein. Man erhob sich noch nicht zu dem Ausspruche, die drei Winkel an der früheren Dreiecksspitze besäßen als Winkel, die je einen Schenkel gemeinsam für zweie haben, und die einfach auftretenden äussersten Schenkel zu einer und derselben Geraden sich verlängern lassen, die Winkelsumme von zwei Rechten. Man musste vielmehr erst zwei Winkel zu einem neuen, diesen alsdann mit dem dritten verbinden. Freilich ist der letzterwähnte Fortschritt, den man noch nicht wagte, nach unserem Gefühle, auch wohl nach dem Gefühle des Proklus, welcher wenigstens von dessen Urheber uns nichts sagt, ein weit geringerer, als der, den man wirklich vollzog, und wir erkennen hier bewundernd den „höheren Gesichtspunkt, von welchem aus Pythagoras, dem Mathematikerverzeichnisse (S. 137) zufolge, die Grundlage unserer Wissenschaft betrachtete“.

Wir haben auch die Nothwendigkeit betont, den Flächeninhalt einer Figur aus den dieselbe bildenden Seiten in richtiger Weise finden zu können. Unseren mathematischen Lesern dürfte diese Betonung überflüssig erscheinen, aber sie ist es nicht so ganz. Bei einem Volke von überwiegend geometrischer Begabung, wie es unstreitig das griechische war, konnte noch um das Jahr 400 v. Chr., also zur Zeit Platons, einer der geistreichsten, tiefsten Geschichtsschreiber aller Jahrhunderte, konnte noch ein Thukydides so wenig Bescheid wissen, dass er Inhalt und Umfang als proportional dachte, dass er in Folge dessen die Fläche der Insel nach der zum Umfahren nöthigen Zeit abschätzte¹⁾. Diese Unkenntniss auch hochgebildeter Laien in einem theoretisch so einfachen, praktisch so wichtigen Kapitel der Planimetrie lässt sich dann weiter und weiter verfolgen. Um 130 v. Chr. erzählt Polybius, dass es Leute gebe, die nicht begreifen könnten, dass Lager bei gleicher Umwallungslänge verschiedenes Fassungsvermögen besitzen²⁾. Quintilian, der römische Schriftsteller über Beredtsamkeit in der zweiten Hälfte des ersten nachchristlichen Jahrhunderts, gibt als dem Laien leicht aufzudrängenden Trugschluss den an, dass gleicher Umfang auch gleichen Inhalt beweise³⁾. Vielleicht hatte Quintilian bei diesem Vorwurfe seinen Zeitgenossen Plinius im Auge, welcher die Grössenverhältnisse der Erdtheile durch Addiren ihrer Länge zu ihrer Breite ver-

¹⁾ Thukydides VI, 1 (ed. Rothe), pag. 95. ²⁾ Polybius IX, 21 (ed. Hultsch), pag. 686. ³⁾ Quintilianus, *Institutio oratoria* I, 10, 39 fgg. (ed. Halm) pag. 62.

glich¹⁾. Proklus erzählt mit offener Beziehung auf Vorkommnisse seiner Zeit, also des V. S., dass Manche schon bei der Theilung von Flächen ihre Gesellschafter über's Ohr gehauen haben, indem sie eine grössere Fläche mit Bezugnahme auf die Gleichheit des Umfangs für sich beanspruchten²⁾. Steuerbeamte in Palästina liessen sich gleichfalls um das V. S. in solcher Weise täuschen, indem sie einem Gemeindevorsteher, welchem als Steuer der Ertrag einer mit Weizen zu besäenden Fläche von 40 Ellen im Quadrat auferlegt war, verwilligten, er könne in zwei Abtheilungen jedesmal eine Fläche von 20 Ellen im Quadrat besäen, in der Meinung, dann sei er seiner Verpflichtung nachgekommen³⁾, und ganz Aehnliches wird von einem Araber des X. S. erzählt⁴⁾. Wir haben diese fehlerhafte Auffassung absichtlich durch einen längeren Zeitraum und durch Völker hindurch verfolgt, welche einer Stetigkeit der Geistesrichtung als Beispiel dienen können, denn das mathematische, in Sonderheit das geometrische Denken der Römer, der späteren Juden, der Araber war nicht anders als griechisch. Wir haben sie verfolgt, um uns über einen allgemeinen geschichtlichen Lehrsatz klar zu werden, dem wir eine nicht geringe Tragweite besonders bei geschichtlich vergleichenden Forschungen beilegen. Die Unwissenheit, so lautet unser Satz, und das noch schlimmere falsche Wissen sind erblich. Was an unrichtigen Ergebnissen einmal gewonnen ist, das wird so leicht nicht zerstört, das wird mit um so grösserer Zähigkeit festgehalten, je mehr es unverstanden ist. Nur die Menge der Unwissenden und Halbwissenden wechselt, und in ihrer Beschränkung liegt das, was man Fortschritt der Durchschnittsbildung nennt.

Der Flächenanlegung nahe verwandt und mit ihr den Pythagoräern eigen ist die Lehre von den regelmässigen Vielflächnern, angedeutet in den Worten des Mathematikerverzeichnisses: „Pythagoras ist es auch, der die Construction der kosmischen Körper erfand.“ Der Name der kosmischen Körper bedarf der Erklärung. Wie Aristoteles uns berichtet, war Empedokles von Agrigent in Sicilien, ein Philosoph, der um 440, jedenfalls später als Pythagoras lebte, der erste, der vier Elemente, Erde, Wasser, Luft und Feuer, annahm, aus denen alles zusammengesetzt sei⁵⁾. Vitruvius und andere Gewährsmänner wollen, Pythagoras habe schon vorher das Gleiche

¹⁾ Detlefsen, Die Maasse der Erdtheile nach Plinius. Programm des Glückstädter Gymnasiums für 1883. S. 6—7 mit Berufung auf Plinius, *Histor. natur.* VI, 208. ²⁾ Proklus (ed Friedlein), pag. 237. ³⁾ Jerusalem. Talmud Sota 20a nach Zuckermann, *das Mathematische im Talmud.* Breslau, 1878, S. 43, Note 58. ⁴⁾ Dieterici, *Die Proprädeutik der Araber im X. Jahrhundert,* S. 35. ⁵⁾ Aristoteles, *Metaphys* I, 4.

ausgesprochen¹⁾. Wir haben eine Wahl zwischen beiden Meinungen hier nicht zu treffen. Jedenfalls übernahm Timäus von Lokri aus der einen oder anderen Quelle die Lehre, wie der nach ihm benannte platonische Dialog erkennen lässt. Timäus erläutert die Entstehung der Welt, setzt das Vorhandensein der vier Grundstoffe auseinander, gibt denselben besondere Gestalten²⁾. Das Feuer trete als Tetraeder auf, die Luft bestehe aus Oktaedern, das Wasser aus Ikosaedern, die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Gestaltung möglich war, so habe Gott diese, das Pentagondodekaeder benutzt, um als Umriss des Weltganzen zu dienen³⁾. Diese fünf Körper heissen dem entsprechend kosmische Körper als zum Kosmos in nothwendiger Beziehung stehend.

Die Geschichte der Mathematik entnimmt den atomistischen Versuchen jener ältesten Lehren dieser Art die wichtige Wahrheit, dass Timäus die fünf regelmässigen Körper kannte. Ob er ahnte, dass es wirklich keinen sechsten regelmässigen Körper gebe, ob er ohne auch nur die Frage nach einem solchen zu erheben sich mit Verwerthung der nun einmal bekannten Körperformen begnügte, wissen wir nicht. Wahrscheinlicher dünkt uns das letztere, und nun gar einen Beweis der Unmöglichkeit eines sechsten regelmässigen Körpers in so früher Zeit anzunehmen, würden wir auf's Entschiedenste ablehnen müssen. Dagegen hat es keine Schwierigkeit diejenigen Kenntnisse, welche wir als Timäus geläufig bezeichneten, d. h. die Gestalt der fünf regelmässigen Körper bis in jene Zeit, auch wohl darüber hinaus zu verfolgen⁴⁾.

Körper wie der Würfel, das Tetraeder, welches nichts anderes als eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, das Octaeder, welches eine Doppelpyramide mit quadratischer Grundfläche ist, müssen noch weit über das Zeitalter des Pythagoras zurück sich als den Aegyptern bekannt vermuthen lassen. Wer bei ihnen Jahre lang verweilte, ja wer nur kurze Zeit die Baudenkmäler ihres Landes in Augenschein nahm, dem ist die Kenntniss auch jener Körper mit Nothwendigkeit zuzusprechen, und dass die Pythagoräer kein Bedenken trugen, was ihr Lehrer wusste, als seine Erfindung zu verehren, wurde schon erwähnt. Auch das Ikosaeder und nicht minder das Dodekaeder muss wohl oder übel den Pythagoräern bekannt gewesen sein. Sonst könnte

¹⁾ Vergl. Chaignet II, 164 fgg. ²⁾ Vergl. Th. H. Martin, *Études sur le Timée de Platon* I, 145 fgg. und II, 234—250. ³⁾ Zeller I, 350, Anmerkung 1 nimmt an, das Dodekaeder sei nicht die Gestalt des Weltganzen, sondern des Aetheratoms, d. h. des kleinsten Theiles der das Weltganze umgebenden äusseren Schichten. ⁴⁾ Das hier Folgende wesentlich nach Bretschneider S. 86 und 88.

nicht Philolaus schon von den fünf Körpern in der Kugel reden¹⁾, sonst würde nicht das alte Mathematikerverzeichniss nebst anderen übereinstimmenden Berichten²⁾ so deutlich sämtliche kosmische oder regelmässige Körper als pythagoräisch bezeichnen. Möglicherweise haben wir den Verlauf der Entdeckung jener Körper so zu denken, dass man zuerst nur von Würfel, Tetraeder, Oktaeder wusste, dass dann das Ikosaeder, zuletzt erst, wenn auch jedenfalls noch vor Timäus, das Dodekaeder hinzutrat. Mit dieser Annahme würde die Schwierigkeit sich lösen, dass die ursprünglich jedenfalls in Vierzahl angenommenen Grundstoffe mit den fünf Körpern nur sehr künstlich in Verbindung zu bringen sind. Es würden nämlich zunächst vier Körper mit vier Elementen durch einen naturgemässen Gedanken sich gepaart haben, und zu dem nachträglich gefundenen fünften Körper würde dann eine kosmische Bedeutung erst gesucht worden sein.

Mit dieser Annahme würde auch die Erzählung des Jamblichus³⁾ sich decken, dass Hippasus, ein Pythagoräer, der das Pentagonododekaeder der Kugel zuerst einschrieb und veröffentlichte, wegen dieser Gottlosigkeit im Meer umgekommen sei. Er habe den Ruhm der Entdeckung davongetragen, „aber es sei das Eigenthum JENES, so bezeichnen sie nämlich den Pythagoras und nennen ihn nicht bei Namen“.

Man würde vielleicht eine grössere Sicherheit in der Beantwortung dieser Fragen erlangen, wenn man Alter und Herkunft eines noch vorhandenen Bronzedodekaeders zu bestimmen im Stande wäre⁴⁾.

Mit den Angaben über die fünf Körper im engsten Zusammenhange stehen die über die Kugel, in welche jene beschrieben gedacht sind, und welche demzufolge nebst einigen ihrer Eigenschaften gleichfalls den Pythagoräern bekannt gewesen sein muss.

In demselben Zusammenhange erscheinen Angaben, welche sich auf die Grenzflächen jener Körper, auf die regelmässigen Vielecke, als Dreiecke, Vierecke, Fünfecke beziehen, und denen wir uns nunmehr zuzuwenden haben. Wir kehren damit zur Flächenanlegung zurück, deren Verwandtschaft zur Lehre von den Vielfächern wir oben zunächst unerwiesen behauptet haben. Platon lässt seinen Timäus über die Entstehung der regelmässigen Dreiecke und Vierecke sich aussprechen. Er sagt, diese Figuren setzten ihre

¹⁾ Boeck, Philolaus fragm. 21, S. 160. Chaignet I, 248. ²⁾ Vergl. Wytttenbach, Ausgabe von Platon's Phädon. Leiden, 1810, pag. 304—307.

³⁾ Jamblichus, *Vita Pythagorica* 88. ⁴⁾ Vergl. verschiedene Notizen von Graf Leopold Hugo in den *Comptes Rendus* der pariser Akademie der Wissenschaften. Bd. LXXVII.

Fläche immer aus rechtwinkligen Dreiecken zusammen, und zwar entweder aus solchen, welche zugleich gleichschenkelig sind, oder aus solchen, deren spitze Winkel, der Eine einem Drittheil, der Andere zwei Drittheilen des rechten Winkels gleich sind. Das hat nun offenbar seine Richtigkeit, indem das Quadrat in zwei oder vier Dreiecke der ersten Art (Figur 23), das gleichseitige Dreieck in

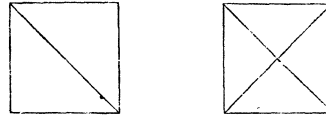


Fig. 23.

zwei oder sechs Dreiecke der zweiten Art (Figur 24) zerlegt werden kann. Uebereinstimmend damit, aber sicherlich einer anderen Quelle als dem platonischen Timäus, über dessen Angaben er hinausgeht, folgend sagt Proklus, es sei ein pythagoräischer Lehrsatz, dass die Ebene um einen Punkt herum durch sechs gleichseitige Dreiecke, vier Quadrate oder drei regelmässige Secksecke vollständig erfüllt werde, so dass nur diese Figurengattungen zur gänzlichen Zerlegung einer Ebene in lauter identische Stücke Benutzung finden¹⁾. Wir wollen daran anknüpfend nur erinnern, dass wir schon (S. 133) die Kenntniss solcher um einen Punkt herumliegenden sechs gleichseitigen Dreiecke wahrscheinlich zu machen suchen musten, und dass folglich rückwärts die Angabe des Proklus unsere dortigen Behauptungen zu stärken im Stande ist.

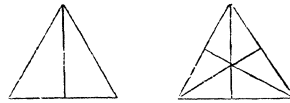


Fig. 24.

Wie verhält es sich aber gegenüber der Zerfällung der Grenzflächen der vier ersten Körper mit der Grenzfläche des fünften und letzten, mit dem regelmässigen Fünfecke? Das Fünfeck ist, wie leicht ersichtlich, mittels der beiden rechtwinkligen Dreieckchen, die wir nach der Vorschrift des Timäus für die Herstellung von Dreieck und Viereck benutzten, nicht zusammenzusetzen, eine Zerlegung in eben solche kann mithin nie gelungen sein. Wohl aber dürfen wir erwarten, Spuren verfehlter Versuche anzutreffen, und diese fehlen nicht. Plutarch hat an zwei Stellen von der Zerlegung der das Dodekaeder begrenzenden Fläche in 30 Elementardreiecke gesprochen, hat das eine Mal hervorgehoben, dass somit alle 12 Flächen 360 Dreieckchen liefern, gleich an Zahl mit den Zeichen des Thierkreises²⁾, hat das andre Mal bemerkt, es solle, wie man sage, das Elementardreieckchen des Dodekaeders von dem des Tetraeders, Oktaeders, Ikosaeders verschieden sein³⁾. Ein anderer Schriftsteller des II. S., Alkinous, hat in seiner Einleitung zum Studium des Platon gleich-

¹⁾ Proklus (ed. Friedlein) 304—305. ²⁾ Plutarchus Quaest. Platon. V. ³⁾ Plutarchus, *De silentio oracul.* cap. 33).

falls von den 360 Elementen gesprochen, welche erzeugt werden, indem jedes Fünfeck in 5 gleichseitige Dreiecke, jedes von diesen in 6 ungleichseitige zerfalle¹⁾. Nimmt man nun diese Zerlegung

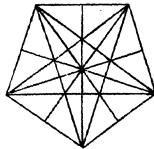


Fig. 25.

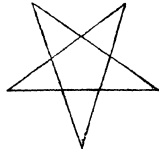


Fig. 26.

wirklich vor (Figur 25), so tritt aus dem Gewirre der Linien am deutlichsten das Sternfünfeck heraus, welches demnach für sich schon ein Zeugniß der versuchten Zerlegung des Fünfecks in Elementardreiecke ablegt. Das Sternfünfeck (Figur 26) soll aber den Pytha-

goräern Erkennungszeichen gewesen sein. Lucian und der Scholiast zu den Wolken des Aristophanes berichten darüber gleichmässig²⁾. Briefe pflegten mit irgend einer ständigen Anfangsformel eingeleitet zu werden. Die Einen schrieben: Freue Dich, *χαίρειν*, die Anderen mit Platon: Sei glücklich in Deinen Handlungen, *εὖ πράττειν*, die Pythagoräer: Sei gesund, *ὕγιαίνειν*. Gesundheit heisst auch bei ihnen das dreifache Dreieck, das durch gegenseitige Verschlingung das Fünfeck erzeugt, das sogenannte Pentagramm, dessen sich die Glieder des Bundes als Erkennungszeichens bedienen.

Unter allen Umständen ist diese seltsame Bedeutung, welche die freilich auch seltsame Figur des Sternfünfecks bei den Pythagoräern besass, eine Unterstützung der kaum mehr bestrittenen Vermuthung, dass das regelmässige Fünfeck von den Pythagoräern selbst entdeckt worden sei. Dass diejenigen, welche dasselbe als Grenzfläche eines Körpers verwertheten, es gekannt haben müssen, bedarf keines Beweises, aber woher sollten sie es entnommen haben? Wir erinnern daran, dass wenigstens unter den Abbildungen aus ägyptischer, wie aus chaldäischer Vorzeit, welche wir vergleichen konnten, ein regelmässiges Fünf- oder Zehneck, eine Zerlegung der Kreisfläche in Ausschnitte nach irgend einer durch fünf theilbaren Anzahl nicht vorkommt (S. 67 und 101). Wir machen ferner darauf aufmerksam³⁾, dass die Einzeichnung des Fünfecks in den Kreis geometrisch genau erst dann erfolgen konnte, als der Satz von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, als zugleich auch der goldne Schnitt bekannt geworden war.

Der goldne Schnitt spielte in der griechischen Baukunst der perikleischen Zeit eine nicht zu verkennende Rolle. Das ästhetisch

¹⁾ Alcinous, *De doctrina Platonis* (ed. Lambinus). Paris, 1567, cap. 11.

²⁾ Beide Stellen sind vielfach abgedruckt, z. B. bei Bretschneider S. 85—86.

³⁾ Bretschneider S. 87 hat diese gewiss richtige Bemerkung muthmasslich zuerst gemacht.

wirksamste Verhältniss, und das ist das stetige, ist in den athenischen Bauten aus den Jahren 450—430 aufs Schönste verwerthet¹⁾. Wir können bei solcher Regelmässigkeit des Auftretens nicht an ein instinktives Zutreffen glauben, am wenigsten, wenn wir des eben berührten geistigen Zusammenhangs zwischen goldnem Schnitte, regelmässigem Fünfecke und pythagoräischem Lehrsatz gedenken.

Bevor wir zu diesem letzteren uns wenden, müssen wir²⁾ noch einem längere Zeit viel verbreiteten Irrthume begegnen. Diogenes Laertius berichtet: „Unter den körperlichen Gebilden, sagen die Pythagoräer, sei die Kugel, unter den ebenen der Kreis am Schönsten“³⁾. Man hat daraus entnehmen wollen, Pythagoras oder doch seine Schule hätten auch die Grundlage zu der Lehre von den isoperimetrischen Raumgebilden gelegt. Man ist dabei gewiss von der richtigen Deutung jenes Satzes abgewichen. Es sollte damit ein eigentlicher geometrischer Lehrsatz überhaupt nicht ausgesprochen werden. Nur die gleichmässige Rundung erhielt in den gemeldeten Worten das gebührende Lob.

Den gemeinsamen, für Arithmetik und Geometrie gleichmässig bedeutsamen Schlussstein unserer Untersuchungen über Pythagoras und seine Schule bildet nunmehr der nach dem Lehrer selbst benannte Satz vom rechtwinkligen Dreiecke. Nicht als ob wir in ihm auch den Schlussstein des von den Pythagoräern aufgeführten mathematischen Gebäudes vermutheten. Keineswegs. Wir haben vielmehr schon gesehen und werden noch weiter sehen, dass unter den schon besprochenen geometrischen Dingen einige nicht gut anders als in Folge des Satzes vom rechtwinkligen Dreieck aufgetreten sein können. Die Beziehung des regelmässigen Fünfecks zu diesem Satze ist erst erwähnt. Die Elementardreieckchen des Timäus dienen als Beweis, dass die Pythagoräer denjenigen sonderbaren rechtwinkligen Dreiecken ihre Aufmerksamkeit zuwandten, welche in dieser physikalisch-geometrischen Eigenschaft Verwerthung fanden. Das war einmal dasjenige Dreieck, dessen beide Katheten je eine Längeneinheit als Maass besitzen, das war zweitens dasjenige, dessen Hypotenuse doppelt so gross ist, als die kleinere Kathete, so dass also 1 und 2 die Maasse dieser beiden Seiten bezeichnen.

Wir haben uns (S. 142) schon darüber ausgesprochen, dass wir für den Satz vom rechtwinkligen Dreieck Pythagoras selbst als den

¹⁾ Vergl. Zeising's verschiedene Schriften, über welche mit für den mathematischen Leser genügender Ausführlichkeit S. Günther in der Zeitschr. Math. Phys. XXI, histor.-literar. Abthlg. S. 157—165 berichtet hat. ²⁾ Auch hier rührt die richtige Ansicht von Bretschneider S. 89—90 her. ³⁾ Diogenes Laertius VIII, 19.

Entdecker betrachten, und uns wesentlich auf den Bericht bezogen, diejenigen, welche Alterthümliches erkunden wollten, führten den Satz auf Pythagoras zurück¹⁾. Der in Euklid's Elementen vorgetragene Beweis dagegen, derselbe Beweis, der auch heute noch der bekannteste ist, bei welchem die Quadrate über die drei Dreiecksseiten nach aussen hin gezeichnet werden und das Quadrat der Hypotenuse durch eine von der Spitze des rechten Dreieckswinkels auf die Hypotenuse gefällte gehörig verlängerte Senkrechte in zwei Rechtecke zerfällt, von denen jedes dem ihm benachbarten Kathetenquadrate flächengleich ist, dieser Beweis rührt nach Proklus' ausdrücklicher Aussage von Euklid selbst her. Dass Plutarch²⁾ den Satz vom rechtwinkligen Dreieck als Satz des Pythagoras kennt, wissen wir (S. 160). Der Rechenmeister Apollodotus oder Apollodorus, wie Diogenes Laertius denselben nennt³⁾, erzählt in Versen von dem Stieropfer, welches Pythagoras gebracht habe, als er den Satz von den Quadraten der Hypotenuse und der Katheten entdeckt hatte. Nicht wenige Schriftsteller sind in ihren Angaben bezüglich des Satzes in einer wesentlichen Beziehung genauer, indem sie den Namen des Pythagoras mit demjenigen rechtwinkligen Dreiecke in Verbindung bringen, dessen Seiten die Maasszahlen 3, 4, 5 besitzen. Am deutlichsten ist in dieser Beziehung Vitruvius, in dessen im Jahre 14 n. Chr. verfasster Architektur ausdrücklich berichtet wird, dass Pythagoras einen rechten Winkel mit Hilfe der drei Längenmaasse 3, 4, 5 zu construiren lehrte, und dass ebenderselbe erkannte, dass die Quadrate von 3 und von 4 dem von 5 gleich seien⁴⁾. Eine Plutarchstelle, in welcher dasselbe Dreieck besprochen wird⁵⁾, ist uns (S. 147) schon vorgekommen. Dasselbe Dreieck spielt in Platons Staate eine Rolle. Und wenn wir auf ganz späte Zeiten zu dem Zwecke herabgehen dürfen, um mindestens zu zeigen, dass die Ueberlieferung der Ueberlieferung sich erhalten hat, so möchten wir als letzten Gewährsmann einen Glossator vom Anfange des XII. S. nennen, der vom pythagoräischen Dreiecke redend das mit den Seiten 3, 4, 5 unter diesem Namen versteht⁶⁾.

Wir glauben nun, dass die Wahrheit, welche jener Ueberlieferung zu Grunde liegt, darin besteht, dass Pythagoras an dem Dreiecke 3, 4, 5 seinen Satz erkannte. „Schwerlich leitete den Pythagoras das nach ihm benannte geometrische Theorem auf seine arithmetischen Sätze,

¹⁾ Proklus (ed. Friedlein) 426. ²⁾ Plutarchus, *Convivium* VIII, 4.

³⁾ Diogenes Laertius VIII, 12. ⁴⁾ Vitruvius IX, 2. ⁵⁾ Plutarchus, *De Iside et Osiride* 56. ⁶⁾ Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Leipzig, 1875, S. 156 und Note 288. Wir verweisen künftig auf dieses Buch unter dem Titel „Agrimensoren“.

sondern umgekehrt mögen ihn die Beispiele zweier Quadratzahlen, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist, auf die Relation zwischen den Quadraten der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks aufmerksam gemacht haben¹⁾. So drückte sich ein deutscher Gelehrter bereits 1833 aus, welcher vermuthlich zuerst diese, wie wir glauben, richtige Anschauung von dem Entwicklungsgange sich aneignete. Pythagoras bemerkte, meinen wir, dass $9 + 16 = 25$ (S. 158). Als er diese unter allen Umständen interessante Bemerkung machte, kannte er bereits, gleichviel aus welcher Quelle, die Erfahrungsthatsache, dass ein rechter Winkel durch Annahme der Maasszahlen 3, 4, 5 für die Längen der beiden Schenkel und für die Entfernung der Endpunkte derselben construirt werde. Wir haben (S. 64) darauf hingewiesen, dass die Aegypter, (S. 102) dass die Babylonier vielleicht die gleiche Kenntniss besaßen, dass die Chinesen ihrer sicherlich theilhaftig waren. Ein chinesischer Schriftsteller hat nämlich gesagt: „Zerlegt man einen rechten Winkel in seine Bestandtheile, so ist eine die Endpunkte seiner Schenkel verbindende Linie 5, wenn die Grundlinie 3 und die Höhe 4 ist“²⁾. Die geometrische und die arithmetische Wahrheit vereinigten sich nun in dem Bewusstsein des Pythagoras zu einem gemeinschaftlichen Satze. Der Wunsch lag nahe zu prüfen, ob auch bei anderen rechtwinkligen Dreiecken die Maasse der Seiten zu Quadratzahlen erhöht das gleiche Verhalten bieten. Die einfachste Voraussetzung war die des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, wo Höhe und Grundlinie gleich der Längeneinheit waren. Die Hypotenuse wurde gemessen. Sie war grösser als eine, kleiner als zwei Längeneinheiten. Die mannigfaltigsten Versuche mögen darauf angestellt, andere und andere Zahlenwerthe für die gleichen Katheten eingesetzt worden sein, um eine Zahl für die Hypotenuse zu erhalten. Vergebens. Man erhielt wahrscheinlich Zahlen, die dem gesuchten Maasse der Hypotenuse nahe kamen, Näherungswerthe von $\sqrt{2}$ würden wir heute sagen, aber es war noch ein Riesenschritt, von der Fruchtlosigkeit der angestellten Versuche auf die aller Versuche überhaupt zu schliessen, und diesen Schritt vollzog Pythagoras.

Er fand, dass die Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks mit messbaren Katheten selbst unmessbar sei, dass sie durch keine Zahl benennbar, durch keine aussprechbar sei³⁾; er ent-

¹⁾ So Jul. Fr. Wurm schon 1833 in Jahns Jahrbüchern IX, 62. Meine denselben Grundgedanken einzeln durchführende Darstellung in den Math. Beitr. Kulturl. ist 1863 entstanden, ohne dass ich Jahns Aufsatz kannte. ²⁾ Vergl. Biernatzki, Die Arithmetik der Chinesen in Crelle's Journal. Bd. 52. ³⁾ $\phi\eta\tau\acute{o}\nu$ und $\acute{\epsilon}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ sind die griechischen Namen für Rationalzahl und Irrationalzahl; $\acute{\epsilon}\lambda\omicron\gamma\omicron\nu$ heisst sowohl ohne Verhältniss als ohne Wort d. h. nicht aussprechbar.

deckte das Irrationale, worauf das alte Mathematikerverzeichniss ein so sehr berechtigtes Gewicht legt. Er entdeckte es grade an der Hypotenuse des gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, wie aus mehr als nur einem Umstande wahrscheinlich gemacht werden kann.

So erzählt uns Platon, der Pythagoräer Theodorus von Kyrene, der ihn selbst in der Mathematik unterrichtet hatte, habe bewiesen, dass die Quadratwurzel aus 3, aus 5 und anderen Zahlen bis zu 17 irrational sei¹⁾. Von der Irrationalität der Quadratwurzel aus 2 ist dabei keine Rede; diese muss also vorher bekannt gewesen sein. Aristoteles weiss dagegen an vielen Stellen von der Irrationalität der Diagonale des Quadrates von der Seite 1 zu reden, und sagt einmal gradezu, der Grund dieser Irrationalität liege darin, weil sonst Grades und Ungrades gleich sein müsste²⁾. Den Sinn dieser Worte erläutert aber Euklid. Er gibt nämlich folgenden Beweis, den wir nur so weit abgeändert haben, dass wir Euklids Worte in moderne Zeichensprache umsetzten³⁾. Es sei AG zu AB (Figur 27) commensurabel

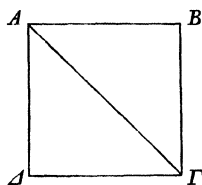


Fig. 27.

und verhalte sich in kleinsten Zahlen wie α zu β ; folglich muss wegen $AG > AB$ auch $\alpha > \beta$ und sicherlich > 1 sein. Weiter folgt $AG^2 : AB^2 = \alpha^2 : \beta^2$ und wegen $AG^2 = 2AB^2$ auch $\alpha^2 = 2\beta^2$, folglich α^2 und mit dieser Zahl zugleich auch α eine grade Zahl. Die zu α theilerfremde β muss daher ungrade sein.

Die grade α sei $= 2\gamma$, so folgt $\alpha^2 = 4\gamma^2$. Es war $\alpha^2 = 2\beta^2$, mithin ist $2\beta^2 = 4\gamma^2$, $\beta^2 = 2\gamma^2$ grad und auch β grad, was mit dem eben bewiesenen Gegentheile einen Widerspruch bildet, der zur Aufhebung der Annahme führt, als könne die Diagonale mit der Quadratseite in einem rationalen Zahlenverhältnisse stehen. Man sieht, das muss der Beweis gewesen sein, an welchen Aristoteles bei seiner Aeusserung dachte. Es ist also ein Beweis, dessen Alterthum über Aristoteles hinaufreicht, und der, nach der kurzen Weise, in welcher dieser ihn andeutet, zu schliessen, den Lesern des Aristoteles zur Genüge bekannt sein musste. Wir gehen deshalb vielleicht nicht zu weit, wenn wir grade diesen Beweis als einen hergebrachten ansehen, als denjenigen, der in der alten pythagoräischen Schule geführt wurde, mag ihn Pythagoras selbst oder einen seiner unmittelbaren Schüler und Nachfolger ersonnen haben.

War in der That die Diagonale des Quadrates als irrational, die Diagonale des Rechteckes mit den um eine Längeneinheit verschiedenen Seiten 3 und 4 als rational, nämlich mit der Länge 5, bekannt, dann war es möglich, dass man auch Quadrat und Hete-

¹⁾ Platon, Theaetet 147, D. ²⁾ Aristoteles, Analytica prot. I, 23, 11.

³⁾ Euklid X, 117.

romekie als diejenigen Gegensätze in die pythagoräische Kategorien-tafel, welche uns durch Aristoteles bekannt geworden ist, aufnahm, die den sonst dort fehlenden Gegensatz des Rationalen und Irrationalen ersetzen sollten¹⁾. Wir haben eine solche von der unsrigen zunächst abweichende Erklärung angekündigt (S. 150) und nicht ganz von der Hand gewiesen. Allein sie vollkommen uns anzueignen, auch in der Verbindung mit unserer eigenen Vermuthung, die wir dort als nothwendig betonten, vermögen wir trotz eines unterstützenden Grundes, auf welchen wir im 11. Kapitel zu reden kommen, doch nicht. Es könnte nämlich grade das Fehlen des Gegensatzes des Rationalen und des Irrationalen in der Kategorientafel als bezeichnend betrachtet werden müssen.

Nach einem alten Scholion zum X. Buche der euklidischen Elemente, welches man in neuerer Zeit dem Proklus zuzuschreiben pflegt²⁾, dürfte diese Annahme eine nicht ungerechtfertigte sein. „Man sagt, dass derjenige, welcher zuerst die Betrachtung des Irrationalen aus dem Verborgenen in die Oeffentlichkeit brachte, durch einen Schiffbruch umgekommen sei, und zwar weil das Unaussprechliche und Bildlose immer verborgen werden sollte, und dass der, welcher von Ungefähr dieses Bild des Lebens berührte und aufdeckte, an den Ort der Entstehung³⁾ versetzt und dort von ewigen Fluthen umspült wurde. Solche Ehrfurcht hatten diese Männer vor der Theorie des Irrationalen.“

Das Mystische dieser Erklärungen stimmt allerdings durchaus zu den übrigen philosophischen Floskeln des Proklus und sie sind offenbar pythagoräischer Ueberlieferung entnommen. Mystisch war, das ist wieder einer der allseitig anerkannten Punkte, der ganze Pythagoräismus, und wir dürfen vielleicht hier als an dem geeignetsten Orte darauf hinweisen, dass Philolaus schon die Winkel von Figuren bestimmten Göttern weihte⁴⁾, dass Platon umgekehrt die Gottheit immer geometrisch zu Werke gehen liess⁵⁾.

¹⁾ So die Meinung Hankels S. 110, Anmerkung. ²⁾ Knoche, Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus Diadochus zu Euklids Elementen. Herford, 1865, S. 17—28, besonders S. 23. ³⁾ Dr. P. Hohlfeld machte uns brieflich aufmerksam, die griechische Stelle heisse *εἰς τὸν τῆς γενέσεως τόπον* = an den Ort der Entstehung, womit die Uebersetzung des Commandinus *in generationis hoc est profundi locum* übereinstimme; wenn Hankel übersetze „in den Ort der Mütter“, so beruhe dieses wahrscheinlich auf unbewusster Erinnerung an eine bekannte Stelle in Göthe's Faust, zweiter Theil. ⁴⁾ Böckh, Philolaus S. 155. Chaignet I, 245—247. ⁵⁾ Plutarchus Convivia VIII, 2 Πῶς Πλάτων ἔλεγε τὸν Θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν. Die Stelle bei Platon selbst ist nicht bekannt. Wenn Vossius in seiner Geschichte der Mathematik dafür auf den Dialog „Philebus“ verweist, so dürfte dieses Citat auf einem Irrthum beruhen.

War einmal die Irrationalität als solche, und zwar an der Diagonale des Quadrates erkannt, war man sich bewusst geworden, dass die Diagonale des Rechtecks von den Seiten 3 und 4 genau in 5 Einheiten sich darstellte, die des Rechteckes von gleichen Seiten aber nicht angebbbar war, welche Länge man auch den beiden Seiten beilegte, so musste man wohl auch andere Rechtecke prüfen, z. B. von der Voraussetzung ausgehen, dass die Diagonale zur einen Seite im einfachsten Zahlenverhältnisse von 2 zu 1 stehe, und nun die andere Rechtecksseite zu messen suchen. Wir sehen hier das zweite Elementardreieckchen vor uns, dessen Benutzung neben dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke zur Flächenbildung wir aus Platons Timäus kennen, und dessen somit nachgewiesener pythagoräischer Ursprung den hier ausgesprochenen Vermuthungen eine immer breitere Grundlage gewähren dürfte.

Wieder weiterschliessend war die Untersuchung an einem Punkte angelangt, wo der Weg sich spaltete. Man konnte, wo die Zahl ihren Dienst versagte, geometrische Beweise für den Satz von den Quadraten über den Seiten rechtwinkliger Dreiecke suchen. Man konnte solche Zahlen suchen, die als Seiten rechtwinkliger Dreiecke auftreten konnten. Man schlug beide Wege ein.

Wir haben oben gesagt, dass der heute gebräuchlichste Beweis des pythagoräischen Lehrsatzes von Euklid herrühre. Der in der pythagoräischen Schule selbst geführte muss von diesem verschieden gewesen sein. Er dürfte seiner Alterthümlichkeit entsprechend viele Unterfälle unterschieden haben und grade vermöge dieser Weitläufigkeit aufs Gründlichste beseitigt worden sein, wie wir daraus schliessen dürfen, dass Proklus auch mit keiner Silbe des Ganges des voreuklidischen Beweises gedenkt. Waren Unterfälle unterschieden, so ist die

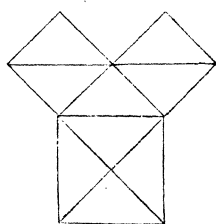


Fig. 28.

Wahrscheinlichkeit vorhanden, die Beweisführung sei von dem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke ausgegangen¹⁾ und habe die Zerlegung des Quadrates durch seine Diagonalen (Figur 28) zur Grundlage gehabt²⁾, wenigstens hat sich in Platons Menon dieser Beweis des Sonderfalles erhalten. Wie der weitere Fortschritt zum Beweise des allgemeinen Satzes vollzogen wurde, darüber ist man

in keiner Art unterrichtet. Die verschiedenen Wiederherstellungsversuche, so geistreich manche derselben sind, schweben alle so ziemlich in der Luft³⁾.

¹⁾ Hankel S. 98. ²⁾ Allman l. c. S. 29. ³⁾ Vergl. Camerer's Euklid-ausgabe I, 444 mit Bretschneider 82.

Die arithmetische Aufgabe Zahlen zu finden, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks gezeichnet werden können, löste Pythagoras gleichfalls, und hier sind wir in der günstigen Lage, dass Proklus uns seine Lösungsmethode aufbewahrt hat¹⁾. Er sei von irgend einer ungraden Zahl $2\alpha + 1$ ausgegangen, welche er als kleinere Kathete betrachtete. Die Hälfte des um 1 verminderten Quadrates derselben gab die grössere Kathete $2\alpha^2 + 2\alpha$, diese wieder um 1 vermehrt die Hypotenuse $2\alpha^2 + 2\alpha + 1$. Wie kam Pythagoras zu dieser Auflösung? Ein möglicher Weg ist folgender, welchen wir nur wenig gegen die Art, wie er zuerst vermuthungsweise geschildert worden ist²⁾, verändert der Prüfung unterbreiten. Ist $a^2 = b^2 + c^2$, so ist $c^2 = a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Die Aufgabe der erstgeschriebenen Gleichung zu genügen lässt sich also erfüllen, wenn nur $a + b$ und $a - b$ beide grad oder beide ungrad und zudem solche Zahlen sind, welche mit einander vervielfacht eine Quadratzahl liefern. Solche Zahlen kannte höchst wahrscheinlich bereits die vorplatonische Zeit, da sie unter dem Namen ähnlicher Zahlen bei Theon von Smyrna erklärt sind³⁾. Die andere von uns hervorgehobene Bedingung beruht darauf, dass a und b ganzzahlig zu erhalten nur dann möglich ist, wenn Summe und Differenz von $a + b$ und $a - b$ beide grad sind. Der einfachste Fall ähnlicher Zahlen ist nun selbstverständlich der der Einheit und einer Quadratzahl c^2 , und weil 1 ungrad ist, muss hier auch c^2 und somit c selbst ungrad sein, etwa $c = 2\alpha + 1$. So kam die Formel des Pythagoras darauf hinaus $(2\alpha + 1)^2 = (2\alpha + 1)^2 \cdot 1$ zu setzen, und darnach aus $(2\alpha + 1)^2 = a + b$ und $1 = a - b$ die Werthe $b = \frac{(2\alpha + 1)^2 - 1}{2}$ und $a = \frac{(2\alpha + 1)^2 + 1}{2}$ zu ermitteln, welche zusammen mit $c = 2\alpha + 1$ die gestellte Aufgabe lösen. Die Formen, in welchen b und a auftreten, entsprechen, wie man sofort erkennt, genau dem Wortlaute der Angabe des Proklus, was immer ein günstiges Vorurtheil für die Richtigkeit eines Wiederherstellungsversuches gewährt, und da überdies in Aegypten, wie wir aus dem Uebungsbuche des Ahmes wissen, Aufgaben von algebraischer Natur zu lösen nicht ungebräuchlich war, so scheitert der Versuch auch nicht an der Frage, ob es für Pythagoras möglich gewesen sei, schon derartige Schlüsse zu ziehen, wie sie hier verlangt wurden.

Fassen wir den Inhalt dieses und des zunächst vorhergehenden Kapitels in Kürze zusammen. Pythagoras hat, so suchten wir zu

¹⁾ Proklus (ed. Friedlein) 428. ²⁾ Röth, Geschichte der abendländischen Philosophie II, 527. ³⁾ Theon Smyrnaeus (ed. Hiller) 36.

erweisen, sicherlich in Aegypten, vielleicht in den Euphratländern mathematisches Wissen sich angeeignet. Ersteres geht wie aus den ausdrücklichen Ueberlieferungen, so auch aus dem ägyptischen Gepräge mancher geometrischer Entwicklungen, letzteres aus den babylonisch anmuthenden Zahlendifteilen der Pythagoräer hervor. Die Summe des geometrischen Wissens, welches von Pythagoras und seiner Schule den Griechen vor dem Jahre 400 zugänglich gemacht wurde, ist eine nicht ganz geringfügige. Sie umfasste die Kenntniss von den Parallel-
linien und den durch dieselben beweisbaren Winkelsätzen, insbesondere den Satz von der Summe der Dreieckswinkel. Sie umfasste Congruenzsätze des Dreiecks und Sätze über Flächengleichheit, deren Anwendung die sogenannte Anlegung von Flächen bildete. Sie liess umgekehrt Figuren als Summe anderer Figuren entstehen, wobei vielleicht das Sternfünfeck entdeckt wurde, wenn wir auch für dieses nicht mit gleicher Sicherheit wie für die anderen Dinge die alten Pythagoräer als Urheber behaupten möchten. Sie umfasste den pythagoräischen Lehrsatz und den goldenen Schnitt. Sie enthielt endlich auch Anfänge einer Stereometrie, insbesondere die Kenntniss der fünf regelmässigen Körper und der Kugel, welche dieselben umfasst. Die Sätze waren mit Beweisen versehen. Allerdings liessen die Beweise vermuthlich nicht gleich die Strenge erkennen, welche man geradezu geometrische Strenge zu nennen pflegt, und legten erst nach und nach den Charakter eines Erfahrungsbeweises ab, nahmen noch später jene allgemeineren Fassungen an, welche in einheitlicher Betrachtung die Nothwendigkeit der Unterscheidung von Sonderfällen verbannt. Noch unvergleichbar mehr leistete die pythagoräische Schule in der Arithmetik, gerade durch die Grösse der Leistungen die Wahrscheinlichkeit fremden Ursprunges auch für diesen Zweig griechischer Mathematik bezeugend. Arithmetische, geometrische, harmonische Verhältnisse und Reihen, unter den arithmetischen Reihen auch solche, welche die Sprache heutiger Wissenschaft arithmetische Reihen höherer Ordnung nennt, sind Dinge, die man am Anfange einer Entwicklung nicht zu finden erwarten darf, noch weniger die freilich auch weniger gut beglaubigten befreundeten und vollkommenen Zahlen. Die Ueberlieferung lässt wirklich einige dieser Gegenstände aus Babylon eingeführt sein. Fremdländisch war vielleicht auch die Methode des mathematischen Experimentes d. h. der Zerlegung von Figuren in andersgestaltete, der Vereinigung von Reihengliedern derselben oder verschiedener Reihen zu Summen, zunächst nur in der unbestimmten Absicht zu versuchen, ob dabei etwas geometrisch, etwas arithmetisch Merkwürdiges sich offenbaren möchte. Für griechisch dagegen hielten wir die eigenthümliche Verquickung von

Geometrie und Arithmetik, die geometrische Versinnlichung der Zahlenlehre, wie sie in der Ebenen- und Körperzahl, in der Dreiecks- und Quadratzahl, in der Vielecks- und Gnomonzahl zu Tage tritt. Pythagoräisch war nach unserer durch mannigfache Ueberlieferung gestützten Darstellung die Erfindung des Satzes von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks als eines arithmetischen ausgehend von dem bestimmten Zahlenbeispiele $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pythagoräisch war endlich eine Regel zur Ermittlung anderer Zahlen als 3, 4, 5, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dienen können, pythagoräisch die Lehre vom Irrationalen. Vom Irrationalen sagen wir und müssen wir sagen, nicht von der Irrationalzahl, denn das Irrationale war den Griechen keine Zahl. War den Pythagoräern doch sogar die Einheit noch keine Zahl, sondern erst eine Vielheit von Einheiten. Brüche mögen dem Rechner vorgekommen sein, sei es als wirkliche Brüche mit Zähler und Nenner, sei es als Unterabtheilungen von Münzen, von Gewichten, von Feldmaassen, jedenfalls immer als concrete Brüche. Der abstrakte Bruch war für den Arithmetiker nicht vorhanden. Er kannte Brüche nur mittelbar als Verhältniss zweier Zahlen. Um so weniger konnte ihm das Irrationale eine Zahl sein, welchem nicht einmal ein aussprechbares Verhältniss den Eintritt in die Zahlenreihe gestattete. Diese wichtige Beschränkung des Begriffes der Zahl erhielt sich über die Zeit der Pythagoräer weit hinaus. Sie blieb, was den Ausschluss des Irrationalen betrifft, so lange, als überhaupt von griechischer Arithmetik die Rede ist.

8. Kapitel.

Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule.

Die Mathematik nahm, wie wir weitläufig gesehen haben, einen mächtigen Aufschwung durch die pythagoräische Schule. Es war wohl eng damit verbunden, sei es als Ursache, sei es als Folge, dass, wie uns berichtet wird, die Mathematik den Pythagoräern als erstes und wichtigstes Lehrelement diente¹⁾. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass auch andere Schriftsteller sich noch verdient machten. Hören wir, wie das alte Mathematikerverzeichniss fortführt:

„Nach ihm (dem Pythagoras) lieferte der Klazomenier Anaxagoras Vieles über Geometrie, ingleichen Oinopides von Chios, der etwas

¹⁾ Porphyrius, *De vita Pythagor.* 47. Jamblichus, *De philosophia Pythagor.* lib. III, abgedruckt bei Anse de Villoison, *Anecdota Graeca*. Venedig, 1781, pag. 216.