

6605
CANTOR, M.
1894

Inhaltsverzeichniss.

	Seite
Einleitung	1—16
I. Aegypter	17—72
1. Kapitel. Die Aegypter. Arithmetisches	19
2. Kapitel. Die Aegypter. Geometrisches	52
II. Babylonier	73—104
3. Kapitel. Die Babylonier	76
III. Griechen	105—482
4. Kapitel. Die Griechen. Zahlzeichen. Fingerrechnen. Rechenbrett	107
5. Kapitel. Thales und die älteste griechische Geometrie	124
6. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Arithmetik	137
7. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie	159
8. Kapitel. Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule	175
9. Kapitel. Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule. Hippokrates von Chios	188
10. Kapitel. Platon	201
11. Kapitel. Die Akademie. Aristoteles	222
12. Kapitel. Alexandria. Die Elemente des Euklid	244
13. Kapitel. Die übrigen Schriften des Euklid	263
14. Kapitel. Archimedes und seine geometrischen Leistungen	280
15. Kapitel. Die übrigen Leistungen des Archimedes	295
16. Kapitel. Eratosthenes. Apollonius von Pergä	312
17. Kapitel. Die Epigonen der grossen Mathematiker	333
18. Kapitel. Heron von Alexandria	347
19. Kapitel. Heron von Alexandria (Fortsetzung)	361
20. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie bis zu Ptolemäus	378
21. Kapitel. Neupythagoräische Arithmetiker. Nikomachus. Theon	398
22. Kapitel. Sextus Julius Africanus. Pappus von Alexandria	409
23. Kapitel. Die Neuplatoniker. Diophantus von Alexandria	427
24. Kapitel. Die griechische Mathematik in ihrer Entartung	457
IV. Römer	483—552
25. Kapitel. Älteste Rechenkunst und Feldmessung	485
26. Kapitel. Die Blüthezeit der römischen Geometrie. Die Agri- mensoren	502
27. Kapitel. Die spätere mathematische Literatur der Römer	522
V. Indes	553—618
28. Kapitel. Einleitendes. Elementare Rechenkunst	555
29. Kapitel. Höhere Rechenkunst. Algebra	573
30. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie	595

1868

6605

6606

6607

6608

IN GESCHICHTE DER MATHEMATIK I

Geometrie und Arithmetik, die geometrische Versinnlichung der Zahlenlehre, wie sie in der Ebenen- und Körperzahl, in der Dreiecks- und Quadratzahl, in der Vielecks- und Gnomonzahl zu Tage tritt. Pythagoräisch war nach unserer durch mannigfache Ueberlieferung gestützten Darstellung die Erfindung des Satzes von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks als eines arithmetischen ausgehend von dem bestimmten Zahlenbeispiele $3^2 + 4^2 = 5^2$. Pythagoräisch war endlich eine Regel zur Ermittlung anderer Zahlen als 3, 4, 5, welche als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dienen können, pythagoräisch die Lehre vom Irrationalen. Vom Irrationalen sagen wir und müssen wir sagen, nicht von der Irrationalzahl, denn das Irrationale war den Griechen keine Zahl. War den Pythagoräern doch sogar die Einheit noch keine Zahl, sondern erst eine Vielheit von Einheiten. Brüche mögen dem Rechner vorgekommen sein, sei es als wirkliche Brüche mit Zähler und Nenner, sei es als Unterabtheilungen von Münzen, von Gewichten, von Feldmaassen, jedenfalls immer als concrete Brüche. Der abstrakte Bruch war für den Arithmetiker nicht vorhanden. Er kannte Brüche nur mittelbar als Verhältniss zweier Zahlen. Um so weniger konnte ihm das Irrationale eine Zahl sein, welchem nicht einmal ein aussprechbares Verhältniss den Eintritt in die Zahlenreihe gestattete. Diese wichtige Beschränkung des Begriffes der Zahl erhielt sich über die Zeit der Pythagoräer weit hinaus. Sie blieb, was den Ausschluss des Irrationalen betrifft, so lange, als überhaupt von griechischer Arithmetik die Rede ist.

8. Kapitel.

Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule.

Die Mathematik nahm, wie wir weitläufig gesehen haben, einen mächtigen Aufschwung durch die pythagoräische Schule. Es war wohl eng damit verbunden, sei es als Ursache, sei es als Folge, dass, wie uns berichtet wird, die Mathematik den Pythagoräern als erstes und wichtigstes Lehrelement diente¹⁾. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass auch andere Schriftsteller sich noch verdient machten. Hören wir, wie das alte Mathematikerverzeichniss fortführt:

„Nach ihm (dem Pythagoras) lieferte der Klazomenier Anaxagoras Vieles über Geometrie, ingleichen Oinopides von Chios, der etwas

¹⁾ Porphyrius, *De vita Pythagor.* 47. Jamblichus, *De philosophia Pythagor.* lib. III, abgedruckt bei Anse de Villoison, *Anecdota Graeca*. Venedig, 1781, pag. 216.

jünger ist als Anaxagoras. Beider gedenkt Platon in den Nebensätzen als berühmter Geometer.“

Anaxagoras von Klazomene¹⁾ wurde vermuthlich 500 geboren und starb 72 Jahre alt 428. Er gehörte einem vornehmen und reichen Hause an, achtete aber aus Liebe zur Wissenschaft weder auf die Verwaltung seines Vermögens, noch auf eine ihm leicht erringbare politische Stellung. Seinen verwahrlosten Besitz soll er schliesslich seinen Angehörigen überlassen, die Nichteinmischung in staatliche Verhältnisse aber damit erklärt haben, dass ihm der Himmel Vaterland und die Beobachtung der Gestirne seine Bestimmung sei. Um 464 etwa dürfte er nach Athen gekommen sein, wenn anders der Bericht der Wahrheit entspricht, dass sein dortiger Aufenthalt 30 Jahre gedauert habe. Er verliess nämlich diese Stadt um 434, wenige Jahre vor dem Beginne des peloponnesischen Krieges. Anaxagoras lehrte in Athen als einer der Ersten Philosophie, und unter seinen Schülern waren zwei Männer von verschieden begründetem, aber gleich hohem Ruhme: Euripides und Perikles. Perikles insbesondere blieb zu seinem Lehrer in fortwährend freundschaftlichem Verhältnisse, und als in der angegebenen Epoche, wenige Jahre vor 431, die Gegner des grossen athenischen Staatsmannes ihrer Feindschaft gegen ihn in Gestalt von Verfolgung seiner Freunde Luft zu machen begannen, war grade Anaxagoras eine zur Eröffnung des Angriffes geeignete Persönlichkeit. Lehren eines Philosophen zu verächtlichen, eines Denkers, welchen nicht Jeder aus dem grossen Haufen versteht, ist bei einigem guten Willen niemals unmöglich, und das musste Anaxagoras erfahren. Er wurde ins Gefängniss gebracht und entkam diesem, sowie der Stadt Athen, man weiss nicht genau wie. Die Einen berichten von Flucht aus dem Gefängnisse, die Anderen von Verbannung, die Dritten von Freisprechung und darauf folgendem nichterzwungenem Verlassen der ihm zuwider gewordenen Stadt. Sicher ist, dass Anaxagoras die letzte Zeit seines Lebens in Lampsakus zubrachte. Wir haben über den eigenen Bildungsgang des Anaxagoras nichts gesagt. Die Nachrichten aus dem Alterthume schweigen entweder über einen Lehrer, dem er gefolgt wäre, oder sie nennen ihn Schüler des Anaximenes. Wieder Andere wissen von einer Studienreise nach Aegypten zu erzählen. Die erstere Angabe lässt sich mit dem gemeiniglich auf 499 angesetzten Todesjahr des Anaximenes nicht vereinigen. Die zweite ist an sich nicht unwahrscheinlich, da, wie wir bei Thales und Pythagoras gezeigt

¹⁾ Schaubach, *Fragmenta Anaxagorae*. Leipzig, 1827. Zeller I, 788—791.

haben, ein Handelsverkehr zwischen den ionischen Städten und Aegypten stattfand und selbst Studienreisen wohl beglaubigt sind.

Von dem, was Anaxagoras als Mathematiker leistete, sind wir so ziemlich, davon, wie er es leistete, gar nicht unterrichtet. Dass es etwas Hervorragendes gewesen sein muss, lässt sich zum Voraus erwarten. Da in den Nebenbulern, einem Gespräche in Platons Art, wenn auch nach heutiger Annahme nicht von Platon verfasst, ein Streit über astronomische und mathematische Dinge kurzweg als Streit über Anaxagoras oder über Oinopides bezeichnet wird¹⁾, so geht schon aus dieser Redeweise hervor, dass zur Zeit, als jenes Gespräch entstand, beide hochberühmt in ihrem Fache waren.

Plutarch erzählt, Anaxagoras habe im Gefängnisse, das wäre also um 434, die Quadratur des Kreises gezeichnet²⁾. So fraglich dieser Bericht früher erscheinen mochte, jetzt ist er sehr glaubwürdig geworden, nachdem wir wissen, dass die Aegypter mehr als ein Jahrtausend vor Anaxagoras die Quadratur des Kreises zeichneten, d. h. eine Figur construirten, welche als Quadrat die Fläche des Kreises mehr oder weniger genau darstellte. Dass Anaxagoras der mangelnden Genauigkeit sich voll bewusst gewesen sein sollte, ist nicht anzunehmen. Er wird wohl, wie Viele nach ihm, die volle Quadratur zu erreichen gesucht haben. Aber auch darin liegt ein Verdienst, eine Aufgabe an die Tagesordnung gebracht zu haben, welche später als fruchtbringend sich erwies.

Ein anderes Verdienst schreibt Vitruvius dem Anaxagoras zu. Als Aeschylus in Athen Dramen aufführen liess, also um etwa 470, habe ein gewisser Agatharchus die Schaubühne hergerichtet und eine Abhandlung darüber geschrieben. Daraus haben sodann Anaxagoras und Demokrit Veranlassung genommen den gleichen Gegenstand zu erörtern, wie man die gezogenen Linien den aus den Augen kommenden Sehstrahlen bei Annahme eines bestimmten Mittelpunktes entsprechend ziehe, so dass z. B. Gebäude auf Dekorationen dargestellt werden konnten, und was in einer Ebene gezeichnet war bald zurückzutreten, bald vorzurücken schien³⁾. Das ist wenn auch in ungenügender so doch in nicht misszuverstehender Weise beschrieben eine Perspektive. Deren Erfindung oder Ausbildung ist sicherlich nicht ohne Bedeutung, namentlich wenn die Reise des Anaxagoras nach Aegypten als wahr gelten darf, da er dort sein Auge nur an unperspektivisch entworfene Gemälde zu gewöhnen im Stande war,

1) Platon, Rivalet 132 A. 2) Plutarchus, *De exilio* cap. 17 ἀλλ' Ἀναξαγόρας μὲν ἐν τῷ δεσμωτηρίῳ τὸν τοῦ κύκλου τετραγωνισμὸν ἔγραψε. 3) Vitruvius VII, praefat. 11.

und die gewohnte Darstellung ihn eben so wenig gehindert haben wird als Tausende, die vor ihm, die nach ihm bewundernd die bemalten Tempelwände anstauten.

Der andere durch die erwähnte Stelle in den Nebensbuln als allbekannt erwiesene Geometer war Oinopides von Chios. Er sei etwas jünger als Anaxagoras, meldet das uns in jeder Beziehung glaubwürdige Mathematikerverzeichniss. Eine annähernde Gleichaltrigkeit beider bestätigt Diogenes Laertius¹⁾. Oinopides soll gleichfalls in Aegypten gewesen sein. Gekommen sei zu ihnen ingleichen Demokritos von Abdera und Oinopides von Chios²⁾, meldet Diodor an einer früher (S. 140) von uns angeführten Stelle. Geometrisches wissen wir von Oinopides nur, was Proklus in seinem Commentare zum ersten Buche der euklidischen Elemente ihm zuschreibt³⁾, dass er nämlich die beiden Aufgaben gelöst habe⁴⁾, von einem Punkte ausserhalb einer unbegrenzten Geraden ein Loth auf letztere zu fällen und an einem in einer Geraden gegebenen Punkte einen Winkel anzulegen, der einem gegebenen Winkel gleich sei. Bei ersterer Aufgabe bedient sich Oinopides des „alterthümlichen“ Wortes (S. 150) einer nach dem Gnomon gerichteten Linie. Aus dem ungemein elementaren Gegenstande der ihm zugeschriebenen Aufgaben einen Schluss auf die Verdienste des Oinopides ziehen zu wollen, hiesse seinen griechischen Verehrern jede Urtheilsfähigkeit absprechen. Er muss noch Anderes und Bedeutenderes geleistet haben, was wir aber nicht kennen. Seine Beziehung zu den beiden Aufgaben des Lothes und der Winkelanlage ist gewiss dahin richtig gedeutet worden⁵⁾, Proklus wolle nur sagen, die bei Euklid gelehrten Auflösungen rührten von Oinopides her, während andere Auflösungen derselben dem Praktiker auf Weg und Steg vorkommenden Aufgaben längst vorher in Aegypten wie in Griechenland bekannt gewesen sein müssen.

Im Zusammenhang mit beiden Geometern, mit Anaxagoras wie mit Oinopides, haben wir einen dritten genannt: Demokritos. Abdera, jenes thrakische Krähwinkel des Alterthums, von dessen Bewohnern die schnurrigsten Geschichten erzählt werden, war die Heimath des Demokritos, dessen Ruhm, so bedeutend er war, nicht hinreichte, das Abderitentum in Schutz zu nehmen. Nach eigener Aussage 40 Jahre jünger als Anaxagoras⁶⁾ muss er um 460 geboren sein. Nach Diodor sei er dagegen im 1. Jahre der 94. Olympiade,

¹⁾ Diogenes Laertius IX, 37 und 41. ²⁾ Diodor I, 96. ³⁾ Proklus (ed. Friedlein) 283 und 333. ⁴⁾ Euklid I, 12 und 23. ⁵⁾ Bretschneider S. 65. ⁶⁾ Diogenes Laertius IX, 41.

das ist 404 auf 403, im Alter von 90 Jahren gestorben¹⁾), was einen unlösbaren Widerspruch herstellt. Beglaubigt ist, dass Demokritus ein hohes Alter von mindestens 90 Jahren erreichte; manche Berichte lassen ihn sein Leben sogar auf 100, auf mehr als 100, auf 109 Jahre bringen²⁾). Vereinigen wir seine Geburtsangabe als muthmasslich glaubwürdigste mit dieser Lebensdauer, so wird der Irrthum keinesfalls sehr gross sein, wenn man sein Leben etwa von 460 bis 370 ansetzt, den Mittelpunkt seiner Thätigkeit in die Jahre 420 bis 400 verlegt. Demokritus gehörte, wie aus der Diodorstelle hervorgeht, zu den Fremden, deren Namen in den Matrikellisten der ägyptischen Priester aufgeführt wurden. Nach einem weiteren Berichte des Diodor verweilte er fünf Jahre in Aegypten³⁾), und wenn in einem bei Clemens von Alexandria erhaltenen Bruchstücke des Demokrit selbst von 80jährigem Aufenthalte die Rede ist⁴⁾), so dürfte die Erklärung stichhaltig sein, hier habe einfach eine Verwechslung der älteren Zahlbezeichnung $\Pi = 5$ mit der jüngeren $\pi' = 80$ stattgefunden. Auch Vorderasien und Persien bereiste Demokrit, wie allgemein berichtet und geglaubt wird⁵⁾). Wir glauben diesen Umstand betonen zu sollen, da er je nach den persönlichen Ansichten des Einen oder des Andern entweder dazu führen kann ähnlichen Reisen, welche Pythagoras etwa 100 Jahre früher unternommen haben soll, einen gewissen Wahrscheinlichkeitshalt zu gewähren, oder eine Erklärung uns darbietet, auf welche Weise ungefähr durch andere Reisende schon im V. S. vorchristlicher Zeitrechnung babylonische Lehren in das fast vollendete Gebäude pythagoräischer Schulweisheit Eingang finden konnten.

In Erinnerung an seinen ägyptischen Aufenthalt gebrauchte Demokrit das stolze Wort: „Im Construiren von Linien nach Maassgabe der aus den Voraussetzungen zu ziehenden Schlüsse hat mich Keiner je übertroffen, selbst nicht die sogenannten Harpedonapten der Aegypter“, dessen wir (S. 62) gedachten, als von jenen Seilspannern die Rede war. Auch Cicero rühmt Demokrit als gelehrten, in der Geometrie vollkommenen Mann⁶⁾). Mathematische Schriften des Demokrit nennt uns Diogenes Laertius⁷⁾), doch ist es leider nicht möglich, aus diesen Büchertiteln mehr als nur allgemeinste Kenntniss ihres Inhalts, und das nicht immer, zu gewinnen. Ueber Geometrie; Zahlen, das sind Titel allgemeinsten Art, und ob wir unter der Geometrie etwa Feldmessung in unmittelbarer Beziehung zur Thätig-

¹⁾ Diodor XIV, 11. ²⁾ Vergl. Zeller I, 686. ³⁾ Diodor I, 98. ⁴⁾ Clemens Alexandr. Stromata I, 304 A. ⁵⁾ Zeller I, 688. ⁶⁾ Cicero, *De finibus bonorum et malorum* I, 6, 20. ⁷⁾ Diogenes Laertius IX, 47.

keit jener Harpedonapten zu verstehen haben, wagen wir kaum in Gestalt einer Frage zu äussern. Was mag aber der Titel *περὶ διαφορῆς γνώμονος ἢ περὶ ψαύσιος κύκλου καὶ σφαίρης* (wörtlich: über den Unterschied des Gnomon oder über die Berührung des Kreises und der Kugel) bedeuten? Als mögliche Erklärung ist vorgeschlagen worden¹⁾, Demokrit habe einen rechten Winkel so mit dem Kreise beziehungsweise der Kugel in Verbindung gesetzt, dass der eine Schenkel durch den Mittelpunkt ging, die Spitze des Winkels auf die Kreislinie (Kugeloberfläche) fiel, weil alsdann der andere Schenkel zur Berührungslinie wurde. Ein weiterer durch Diogenes Laertius überlieferter Titel ist: *περὶ ἀλόγων γραμμῶν καὶ ναστῶν β'* (zwei Bücher von irrationalen Linien und den dichten Dingen)²⁾. Auch dafür ist eine Erklärung versucht worden³⁾. Der Titel sei nämlich verderbt aus *περὶ ἀλόγων γραμμῶν κλαστῶν* d. h. über irrationale gebrochene Linien, und unter dieser Ueberschrift habe die Untersuchung sich theils mit solchen Irrationalitäten beschäftigen können, welche Summen von rationalen und irrationalen Theilen waren, theils mit Zerbrechung, d. h. Theilung von irrationalen Linien nach gegebenen Verhältnissen. Jedenfalls können wir, mag das letzte Wort des Titels geheissen haben, wie es will, seinen ersten Worten die nicht unwichtige That- sache entnehmen, dass Name und vermuthlich auch Begriff des Irrationalen trotz der mystischen Scheu der Pythagoräer verhältniss- mässig frühzeitig ausserhalb der Schule in Anwendung kam. Wichtig wäre uns vielleicht noch ganz besonders eine Stelle bei Plutarch, Demokrit habe den Kegel parallel zur Grundfläche geschnitten⁴⁾, wenn über Art und Zweck der Schnittführung nur irgend Genaues gesagt wäre. Wir würden Einzelangaben etwa im Mathematiker- verzeichnisse oder bei Proklus mit Freuden begrüßen. Da wie dort kommt der Name des Demokrit nicht einmal vor!

Das Schweigen des Proklus lässt allerdings als absichtliches sich auffassen. Proklus gehörte zu den begeistertsten Spätplatonikern. Platon war Gegner des Demokritus, dessen Werke er vernichtet wissen wollte, dessen Namen er in seinen zahlreichen Schriften niemals nennt⁵⁾. Proklus mochte nach Platons Beispiel handeln. Aber das Mathe- matikerverzeichniss? Aristoteles, Theophrastus, Eudemos schätzten Demokritus und beschäftigten sich eingehend mit ihm. Dass das

¹⁾ Allmann, *Greek geometry from Thales to Euclid*, pag. 80. ²⁾ Dass *γραμμαι ἀλογαι* nicht Asymptoten bedeuten kann, wie in einer sonst brauch- baren Programmabhandlung gesagt ist, versteht sich von selbst. ³⁾ Hultsch in den *Neuen Jahrbüchern f. Philol. u. Pädagog.* (1881) Bd. 123. S. 578—579. ⁴⁾ Plutarchus, *De communibus notitiis adversus Stoicos* cap. 39, § 3. ⁵⁾ Dio- genes Laertius IX, 40.

Mathematikerverzeichniss ihn, den vielgerühmten Geometer, nicht nennt, kann nur in doppelter Weise erklärt werden. Entweder liess Proklus aus dem Verzeichnisse den ihm missliebigen Namen weg, oder der Verfasser des Verzeichnisses hat ihn mit Unrecht vergessen, eine Vergesslichkeit, welche uns einen der zahlreichen Belege für den Satz liefert, dass aus dem zufälligen Schweigen eines Schriftstellers Schlüsse nicht gezogen werden dürfen¹⁾.

Der Vollständigkeit entbehrt das Mathematikerverzeichniss auch in einer anderen Beziehung, indem es über die Sophisten, welche der Mathematik sich beileisigten, insbesondere über Hippias von Elis in halbes Schweigen sich hüllt. Wir nennen es ein halbes Schweigen, weil der Name dieses Mannes, wie wir uns erinnern (S. 136), einmal bereits vorkam. Es handelte sich um den geometrischen Ruhm des Mamerkus, für welchen Hippias von Elis als Gewährsmann angerufen wurde, und diese Anrufung selbst genügt zum Nachweise, dass Hippias nach der Meinung des Verfassers des Verzeichnisses wohl fähig war über geometrische Tüchtigkeit ein Urtheil zu fällen. Allein der eigentliche Ort, des Hippias von Elis und seiner Verdienste um die Mathematik zu gedenken, würde doch erst neben oder nach Anaxagoras und Oinopides gewesen sein, und hier vermissen wir seine Erwähnung.

Proklus spricht dafür von ihm an zwei anderen Stellen²⁾. Man hat freilich mehrfach Zweifel dagegen erhoben, dass der bei Proklus genannte Hippias wirklich Hippias von Elis sei³⁾, aber sicherlich mit Unrecht. Proklus besitzt nämlich in seinem Commentare eine Gewohnheit, von der er nie abgeht. Er schildert einen Schriftsteller, welchen er anführt, sofern Missverständnisse möglich wären, mit deutlicher Benennung, lässt aber später die Beinamen weg, wenn er es unbeschadet der Deutlichkeit thun darf. So nennt er einen Zenon von Sidon später nur Zenon den früher erwähnten oder kurzweg Zenon; Leodamas heisst beim ersten Vorkommen von Thasos, später nur Leodamas; Oinopides von Chios wird später zum einfachen Oinopides, Theätet von Athen zum Theätet u. s. w. Hippokrates der Arzt wird an einer Stelle, Hippokrates von Chios an einer späteren genannt, und wo noch später der Letztere wieder auftritt, heisst er wieder Hippokrates von Chios, weil eben vorher zwei des Namens genannt waren, und damit zum Missverständnisse Gelegenheit geboten

¹⁾ Vergl. Zeller, I, 690. ²⁾ Proklus (ed. Friedlein) 272 und 356.

³⁾ F. Blass in den Neuen Jahrbüchern für Philologie und Pädagogik Bd. 105 in einem Referate über Bretschneiders Geometrie und Geometer vor Euklid. Hankel S. 151; aber auch schon im *Bulletino Boncompagni* 1872, pag. 297. Friedlein, Beiträge III, S. 8 (Programm für 1873).

war. Wenn also Proklus uns einen Hippias schlechtweg nennt, so muss das Hippias von Elis sein, der schon vorher einmal in demselben Commentare deutlich bezeichnet war. Aber sehen wir sogar von dieser Gewohnheit des Proklus ab. Bei jedem Schriftsteller, insbesondere bei jedem, der den Werken Platons ein eingehendes Studium gewidmet hatte, konnte Hippias ohne jedwede andere Bezeichnung nur Hippias von Elis sein, eine viele Jahrhunderte lang theils um seiner Persönlichkeit willen, theils um seines mit zwei Dialogen verknüpften Namens wegen weit und breit bekannte Figur. Hippias von Elis war ein wegen seiner Eitelkeit, die selbst für einen Sophisten etwas hochgradig gewesen zu sein scheint, berühmter älterer Zeitgenosse des Sokrates. Seine Geburt dürfte auf 460 etwa anzusetzen sein¹⁾. Die Geistesrichtung und die Thätigkeit des Sophisten ist bekannt. Den eignen Vortheil über alles stellend lehrten sie auch Andere gegen mitunter recht hohe Bezahlung ihres Vortheils wahrnehmen und durch Künste der Beredsamkeit, durch Schlüsse, welche Trugschlüsse sein durften, wenn sie nur wirksam sich erwiesen, im Staatswesen und vor Gericht Einfluss und Geltung sich erwerben. Sittlichkeit kann die berufsmässigen Rechthaber nicht ausgezeichnet haben, aber Scharfsinn, Schlagfertigkeit, umfassendes Wissen den Sophisten im Allgemeinen und dem Hippias als einem ihrer Hauptvertreter insbesondere abzusprechen ist man in keiner Weise befugt. So darf es gewiss nicht als Ironie aufgefasst werden, wenn der Verfasser eines gleichviel ob mit Recht oder Unrecht Platon zugeschriebenen Gespräches sich zu den Worten veranlasst sieht: Was du am besten verstehst, was die Sterne betrifft und was am Himmel sich zuträgt? . . . Aber Etwas über Geometrie hören sie gern²⁾. Ironisch klingt es auch nicht, wenn gesagt wird: Hippias sei des Rechnens und der Rechenkunst kundig vor allen Anderen und kundig auch der Messkunst³⁾. Am allerwenigsten vollends kann ein solcher Beischnack in der Rede gefunden werden, welche Platon dem Protagoras in den Mund legt: Die anderen Sophisten beeinträchtigen die Jünglinge. Sie führen dieselben, die von den Künsten sich abwendeten, den Künsten wider deren Willen zu, indem sie Rechenkunst und Sternkunde und Messkunst und Musik sie lehren — und dabei warf er einen Blick auf Hippias — kommt er aber zu mir, wird er über nichts anderes Etwas lernen, als weshalb er zu mir kam⁴⁾. Nach allen diesen Aeusserungen glauben wir uns berechtigt anzunehmen, dass Hippias von Elis als Lehrer der Mathematik mindestens in

¹⁾ Zeller, I, 875. ²⁾ Platon, Hippias major 285. ³⁾ Hippias minor 367—368. ⁴⁾ Platon, Protagoras 318.

gleichem Range wie als eigentlicher Sophist gestanden haben muss, dass er in naturwissenschaftlichem, mathematischem und astronomischem Wissen auf der Höhe der Bildung seiner Zeit sich befand¹⁾.

Damit stimmt nun vollkommen überein, was von Hippias als Mathematiker uns mitgetheilt wird. Proklus spricht, wie erwähnt, zweimal von ihm. Die erste Stelle heisst: Nikomedes hat jeden gradlinigen Winkel gedrittheilt mittels der conchoidischen Linien, deren eigenthümlicher Natur Entdecker er ist, und von denen er Entstehung, Construction und Eigenschaften auseinandergesetzt hat. Andere haben dieselbe Aufgabe mittels der Quadratricen des Hippias und Nikomedes gelöst, indem sie sich der gemischten Curven bedienten, die eben den Namen Quadratrix (*τετραγωνίζουσα*) führten; wieder Andere theilten einen Winkel nach gegebenem Verhältnisse, indem sie von den Archimedischen Spirallinien ausgingen²⁾. Die zweite Stelle lautet: Ganz auf die nämliche Weise pflegen auch die übrigen Mathematiker die Curven zu behandeln, indem sie das jeder Eigenthümliche auseinandersetzen. So zeigt Apollonius das Eigenthümliche jedes Kegelschnittes, Nikomedes dasselbe für die Conchoiden, Hippias für die Quadratrix, Perseus für die Spiren³⁾. Eine dritte Stelle eines anderen mathematischen Gewährsmannes allerersten Ranges, des Pappus von Alexandria, sagt uns dagegen: Zur Quadratur des Kreises wurde von Dinostratus, Nikomedes und einigen anderen Neueren eine Linie benutzt, welche eben von dieser Eigenschaft den Namen erhielt. Sie wird nämlich von ihnen Quadratrix genannt⁴⁾.

Aus der Zusammenfassung dieser drei Stellen⁵⁾ dürfte kaum ein anderer Sinn zu entnehmen sein, als der folgende. Hippias, und zwar Hippias von Elis, hat um 420 etwa eine Curve erfunden, welche zu doppeltem Zwecke dienen konnte, zur Dreitheilung eines Winkels und Quadratur des Kreises. Von letzterer Anwendung erhielt sie ihren Namen, Quadratrix, wie er in lateinischer Uebersetzung zu lauten pflegt, aber dieser Name scheint nicht über Dinostratus hinaufzureichen, dessen Zeitalter als Bruder des Menächmus, eines Schülers des Eudoxus von Knidos etwa in die zweite Hälfte des IV. S. gesetzt werden muss. Ob die Curve früher einen anderen Namen führte, ob sie überhaupt mit Namen genannt wurde, wissen wir nicht. Der erste ganz gesicherte Name einer von der Kreislinie verschiedenen krummen Linie wird uns am Anfang des zweiten Drittels des IV. S., annähernd

¹⁾ So Karl Steinhart in seiner Einleitung zum grösseren Hippias.

²⁾ Proklus (ed. Friedlein) 272. ³⁾ Proklus (ed. Friedlein) 356. ⁴⁾ Pappus, *Collectio Lib. IV*, cap. XXX (ed. Hultsch). Berlin, 1876—1878, pag. 250. ⁵⁾ Vergl. Bretschneider 96 und 153—154.

20 bis 30 Jahre vor Dinostratus begegnen, wo Eudoxus seine Hippopede erfand. Ist aber der Name Quadratrix erst nachträglich der Curve des Hippias beigelegt worden, so schwindet die Nothwendigkeit anzunehmen, sie sei zum Zwecke der Kreisquadratur erfunden worden, und man darf ihren ursprünglichen Zweck in dem suchen, was nach Proklus durch sie zu verwirklichen war, in der Dreitheilung des Winkels.

Dass diese Aufgabe selbst auftauchte, kann uns nicht in Verwunderung setzen. Wir haben im vorigen Kapitel gesehen, dass die Construction regelmässiger Vielecke eines der geometrischen Lieblingsgebiete der Pythagoräer bildete. Die Theilung des ganzen Kreisumfanges in sechs, in vier, in fünf gleiche Theile wurde gelehrt, und namentlich letztere als bedeutend schwieriger erkannt als die anderen längst bekannten Theilungen. Eine überwundene Schwierigkeit reizt zur Besiegung anderer, und so mag das Verlangen wach geworden sein nicht mehr den ganzen Kreis, sondern einen beliebigen Kreisbogen in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen. Schon bei der Dreitheilung traten unbesiegbare Schwierigkeiten auf. Versuche diese Aufgaben mit Hilfe des Zirkels und des Lineals zu lösen mögen angestellt worden sein. Es ist uns nichts von ihnen bekannt geworden. Sie mussten erfolglos bleiben. Aber das zweite grosse Problem der Geometrie des Alterthums neben der Quadratur des Kreises, deren wir bei Anaxagoras gedenken mussten, war gestellt, und wie in der Geschichte der Mathematik fast regelmässig zunächst unlösbaren Aufgaben zu Liebe neue Methoden sich entwickelten und kräftigten, so führte die Dreitheilung des Winkels, *τριχοτόμια γωνίας*, die Trisektion, wie man gewöhnlich sagt, zur Erfindung der ersten von der Kreislinie verschiedenen, durch bestimmte Eigenschaften gekennzeichneten und in ihrer Entstehung verfolgbaren krummen Linie.

Die Linie des Hippias entsteht durch Verbindung zweier Bewegungen, einer drehenden und einer fortschreitenden. „In ein Quadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ (Figur 29) ist um α als Mittelpunkt und mit der Seite des Quadrats $\alpha\beta$ als Halbmesser ein Kreisquadrant $\beta\epsilon\delta$ beschrieben. Die Gerade $\alpha\beta$ bewegt sich dabei so, dass ihr einer Endpunkt α fest bleibt, der andere β längs des Bogens $\beta\epsilon\delta$ fortschreitet. Andererseits soll die $\beta\gamma$ immer der $\alpha\delta$ parallel bleibend mit dem Endpunkte β auf der $\beta\alpha$ fortrücken, und zwar sollen die beiden selbst gleichmässigen Bewegungen der Zeit nach so erfolgen,

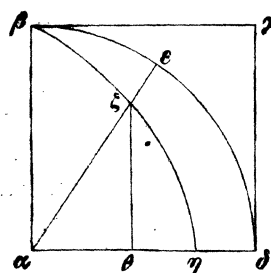


Fig. 29.

dass sie zugleich beginnen und zugleich endigen, dass also $\alpha\beta$ in seiner Drehung, $\beta\gamma$ in seinem Fortgleiten im selben Moment in die Lage $\alpha\delta$ eintreffen. Die beiden bewegten Geraden werden in jedem Augenblicke einen Durchschnittspunkt gemein haben, der selbst im Fortrücken begriffen eine gegen $\beta\epsilon\delta$ hin gewölbte krumme Linie $\beta\xi\eta$ erzeugt, welche geeignet erscheint ein der gegebenen Kreisfläche gleiches Quadrat finden zu lassen. Ihre beherrschende Eigenschaft besteht jedoch darin, dass eine beliebige Gerade $\alpha\xi\epsilon$ bis zum Kreisquadranten gezogen das Verhältniss dieses Quadranten zum Bogen $\epsilon\delta$ gleich dem Verhältnisse der beiden Geraden $\beta\alpha$ und $\xi\theta$ zu einander macht. Das ist nämlich klar aus der Entstehung der krummen Linie.“ So Pappus, der hier getreuer Berichterstatter über die alte Erfindung zu sein scheint, Die Kreisquadratur mit Hülfe der Quadratrix schliesst sich bei Pappus unmittelbar an. Wir werden diese Anwendung erst in Verbindung mit dem Namen Dinostratus zur Rede bringen¹⁾.

Noch von einer anderen Persönlichkeit müssen wir hier einschaltend Einiges sagen, von Zenon von Elea. Dieser Erfinder²⁾ der eigentlichen Dialektik dürfte noch um 20 Jahre älter als Demokritus, um 30 bis 40 Jahre älter als Hippias gewesen sein und seine geistige Blüthe in der Zeit gefeiert haben, als Letzterer kaum geboren war. Würde Zenon als Mathematiker eine Bedeutung haben, so könnte man uns mit Recht den Vorwurf machen, seiner hier an unrichtiger Stelle zu gedenken, der weiter oben behandelt werden musste. Aber Zenon war nicht Mathematiker. Man wäre fast versucht, ihn das Gegentheil eines solchen zu nennen. Wenigstens versuchte er mit philosophischem Scharfsinne die mathematischen Meinungen zu stürzen statt sie zu stützen. Die Zeit brachte das so mit sich. Die Atomistiker hatten die Theilbarkeit der Körperwelt in Frage gestellt, indem sie untheilbar kleine Urtheilchen annahmen. Noch ungeheurerlicher war der Bruch mit dem Gewohnten, als die Pythagoräer den Begriff des Irrationalen unter die Denker warfen. Beabsichtigt oder nicht, dieser Begriff drang, wie wir bei Demokritus (S. 180) gesehen haben, in weitere und weitere Kreise. Das Unausprechliche war ausgesprochen, das Undenkbare in Worte gekleidet, das Unenthüllbare den Augen preisgegeben. Und wer nüchternerer Auffassung diese pythagoräische Scheu nicht theilte, dem war wenigstens eine ganz neue Schwierigkeit unterbreitet, welche strengen

¹⁾ Diese ganze Stelle schliesst sich eng an Bretschneider l. c. an.

²⁾ Diogenes Laertius XI, 25 *φησὶ δ' Ἀριστοτέλης ἐν τῷ Σοφιστῇ εἶναι αὐτὸν γενέσθαι διαλεκτικῆς*. Ebenso derselbe VIII, 57.

Schlüssen nicht Stand hielt. Zahl und Raumgrösse, bisher als zur gegenseitigen Messung oder Versinnlichung als unbedingt tauglich erachtet, zeigten plötzlich einen Widerspruch. Jeder Zahl entsprach noch immer eine Länge, aber nicht jeder Länge entsprach eine Zahl. Stetigkeit und Unstetigkeit waren damit entdeckt und den Philosophen als neues Denkobject vorgelegt. Kann man sich wundern, wenn letztere, um des Widerspruches, der in jenem Gegensatze enthalten ist, sich zu erwehren, zu weit gingen, wenn sie dabei zur Leugnung der Vielheit, zur Leugnung der Bewegung gelangten?

Man kennt ja die eigenthümlichen Schlüsse Zenons¹⁾. Jede Vielheit ist eine Anzahl von Einheiten, eine wirkliche Einheit aber nur das Untheilbare. Jedes von den Vielen muss also selbst eine untheilbare Einheit sein, oder aus solchen Einheiten bestehen. Was aber untheilbar ist, das kann keine Grösse haben, denn Alles, was eine Grösse hat, ist ins Unendliche theilbar. Die einzelnen Theile, aus denen das Viele besteht, haben mithin keine Grösse. Es wird also auch nichts dadurch grösser werden, dass sie zu ihm hinzutreten, und nichts dadurch kleiner, dass sie von ihm hinweggenommen werden. Was aber zu Anderem hinzukommend dieses nicht vergrössert, und von ihm weggenommen es nicht verkleinert, das ist nichts. Das Viele ist mithin unendlich klein, denn jeder seiner Bestandtheile ist so klein, dass er nichts ist. Andererseits aber müssen diese Theile auch unendlich gross sein. Denn da dasjenige, was keine Grösse hat, nicht ist, so müssen die Vielen, um zu sein, eine Grösse haben, ihre Theile müssen mithin von einander entfernt sein, d. h. es müssen andere Theile zwischen ihnen liegen. Von diesen gilt aber das Gleiche: auch sie müssen eine Grösse haben und durch weitere von den anderen getrennt sein, und so fort ins Unendliche, so dass wir demnach unendlich viele Grössen, oder eine unendliche Grösse erhalten. Man kennt den Ausspruch des Zenon gegen Protagoras, ein Scheffel Frucht könne beim Ausschütten ein Geräusch nicht hervorbringen, wenn nicht jedes einzelne Korn und jeder kleinste Theil eines Kornes ein Geräusch hervorbrächte. Man kennt seine Beweise für die Unmöglichkeit einer Bewegung. Ehe der bewegte Körper am Ziele ankommen kann, muss er erst in der Mitte des Weges angekommen sein, ehe er an dieser ankommt in der Mitte seiner ersten Hälfte, ehe er dahin kommt in der Mitte des ersten Viertels, und so

¹⁾ Vergl. Zeller I, 497–507, woher wir unsere Auszüge meistens wörtlich entnehmen. Ferner Gerling, Ueber Zeno des Eleaten Paradoxen über die Bewegung (Marburg, 1846). E. Raab, Die Zenonischen Beweise (Schweinfurt, 1880) und P. Tannery, Le concept scientifique du continu: Zénon d'Élée et G. Cantor, im Octoberheft 1885 der Revue philosophique pag. 385–410.

fort ins Unendliche. Jeder Körper müsste daher, um von einem Punkte zum anderen zu gelangen, unendlich viele Räume durchlaufen. Es ist mithin unmöglich von einem Punkte zu einem anderen zu gelangen, die Bewegung ist unmöglich. Ebenso folgt die Unmöglichkeit, dass die Schildkröte, wenn sie nur einen Vorsprung hat, durch den schnellen Achilleus eingeholt werden könne, weil während Achilleus den ersten Vorsprung durchläuft, die Schildkröte bereits einen zweiten Vorsprung gewonnen hat, und so fort ins Unendliche.

Der mathematisch sein sollenden Form wegen ist ein letzter Einwurf Zenons gegen die Bewegungslehre erwähnenswerth. Eine Reihe von Gegenständen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ist räumlich mit zwei anderen Reihen von Gegenständen $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ und $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ in Beziehung gesetzt, so dass sie nachfolgende gegenseitige Lage besitzen:

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_4 & \beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{array}$$

Die α sind in Ruhe, die β und die γ sind in entgegengesetzter Bewegung, jene von links nach rechts, diese von rechts nach links. Wenn β_1 bei α_4 angelangt ist, ist γ_1 bei α_1 angelangt, und zu derselben Zeit β_4 bei α_1 , γ_4 bei α_4 . Demgemäss ist β_1 sowohl an α_3 und α_4 als an $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ vorbeigekommen, hat in einer und derselben Zeit an zwei und an vier Gegenständen von genau gleicher Entfernung sich vorbeibewegen können und folglich zugleich eine einfache und eine doppelte Geschwindigkeit besessen, was unmöglich ist.

Wir haben dem Zenon weiter oben die Eigenschaft als Mathematiker abgesprochen. Gerade dieser letzte Trugschluss rechtfertigt uns, denn hier sind irriger Weise absolute und relative Bewegungsgrössen einander gleichgesetzt, was einem Mathematiker kaum begegnet wäre. Anders dagegen verhält es sich mit den vorher hervorgehobenen Schlüssen und ihren sich widersprechenden Ergebnissen. Zenon suchte darzuthun, dass ein Körper nicht eine Summe von Punkten, ein Zeitraum nicht eine Summe von Augenblicken, eine Bewegung nicht eine Summe einfacher Uebergänge von einem Punkte des Raumes zum anderen sei. Dieser ganze in geistreich erfundenen Widersprüchen geführte Streit richtete sich gegen die Pythagoräer¹⁾, welchen der Punkt eine *μονὰς ἔχουσα δέσιν*, eine Einheit an bestimmtem Platze hiess. War diese Erklärung richtig, dann war der Körper als Vielheit eine Summe von Einheiten, d. h. von Punkten.

¹⁾ Die Gegnerschaft Zenons gegen die Pythagoräer ist von Tannery l. c. hervorgehoben worden.

und dagegen erhob Zenon seine Stimme. Er sah hier, was vor ihm vielleicht noch nicht gesehen, jedenfalls nicht in gleich scharfer Betonung bemerklich gemacht worden war: Schwierigkeiten, denen in der That weder der Philosoph noch der Mathematiker in aller Strenge gerecht werden kann, wenn auch der Mathematiker dazu gelangte durch Einführung bestimmter Zeichen die Stetigkeit zu einer definirbaren Eigenschaft zu machen, und mit den Grenzen zugleich den Uebergang zu den Grenzen der Untersuchung zu unterwerfen. Zwei Jahrtausende und mehr haben an dieser zähen Speise gekaut, und es wäre unbillig von den Griechen des fünften vorchristlichen Jahrhunderts zu verlangen, dass sie in Klarheit gewesen seien über Dinge, welche, freilich anders ausgesprochen, noch Streitfragen unserer Gegenwart bilden.

9. Kapitel.

Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule.

Hippokrates von Chios.

Den Mathematikern scheint nächst dem Irrationalen bei Gelegenheit der Kreisquadratur der erste Anlass geboten worden zu sein, Fragen des stetigen Ueberganges zu behandeln, und dieses führt uns zurück zu dem Mathematikerverzeichnisse, welches mit den Worten fortfährt:

„Nach diesen wurde Hippokrates von Chios, der die Quadratur des Mondes fand, und Theodorus von Kyrene in der Geometrie berühmt. Unter den hier Genannten hat zuerst Hippokrates Elemente — *στοιχεῖα* — geschrieben.“

Von dem Leben des Hippokrates von Chios sind uns nur wenige Züge bekannt¹⁾. Ursprünglich Kaufmann kam er durch einen unglücklichen Zufall um sein Vermögen. Die Einen erzählen, die Zolleinnehmer von Byzanz, gegen welche er sich leichtgläubig erwies, hätten ihn darum geprellt, die Anderen lassen ihn durch Seeräuber geplündert worden sein. Man hat beide Angaben so zu vereinigen gesucht, dass man muthmasste, athenische Seeräuber hätten aus Veranlassung eines Krieges gegen Byzanz das Schiff des Hippokrates weggenommen. Jener Krieg sei der sogenannte Samische

¹⁾ Die betreffenden Stellen des Aristoteles (*Ethic. ad Eudem.* VII, 14) und des Johannes Philoponus (*Comment. in Aristotel. phys. auscult.* f. 18) sind abgedruckt bei Bretschneider 97, wo die im Texte dargestellte Vereinigung der beiden Angaben versucht ist.