

6605
CANTOR, M.
1894

Inhaltsverzeichniss.

	Seite
Einleitung	1—16
I. Aegypter	17—72
1. Kapitel. Die Aegypter. Arithmetisches	19
2. Kapitel. Die Aegypter. Geometrisches	52
II. Babylonier	73—104
3. Kapitel. Die Babylonier	76
III. Griechen	105—482
4. Kapitel. Die Griechen. Zahlzeichen. Fingerrechnen. Rechenbrett	107
5. Kapitel. Thales und die älteste griechische Geometrie	124
6. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Arithmetik	137
7. Kapitel. Pythagoras und die Pythagoräer. Geometrie	159
8. Kapitel. Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule	175
9. Kapitel. Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule. Hippokrates von Chios	188
10. Kapitel. Platon	201
11. Kapitel. Die Akademie. Aristoteles	222
12. Kapitel. Alexandria. Die Elemente des Euklid	244
13. Kapitel. Die übrigen Schriften des Euklid	263
14. Kapitel. Archimedes und seine geometrischen Leistungen	280
15. Kapitel. Die übrigen Leistungen des Archimedes	295
16. Kapitel. Eratosthenes. Apollonius von Pergä	312
17. Kapitel. Die Epigonen der grossen Mathematiker	333
18. Kapitel. Heron von Alexandria	347
19. Kapitel. Heron von Alexandria (Fortsetzung)	361
20. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie bis zu Ptolemäus	378
21. Kapitel. Neupythagoräische Arithmetiker. Nikomachus. Theon	398
22. Kapitel. Sextus Julius Africanus. Pappus von Alexandria	409
23. Kapitel. Die Neuplatoniker. Diophantus von Alexandria	427
24. Kapitel. Die griechische Mathematik in ihrer Entartung	457
IV. Römer	483—552
25. Kapitel. Älteste Rechenkunst und Feldmessung	485
26. Kapitel. Die Blüthezeit der römischen Geometrie. Die Agri- mensoren	502
27. Kapitel. Die spätere mathematische Literatur der Römer	522
V. Inder	553—618
28. Kapitel. Einleitendes. Elementare Rechenkunst	555
29. Kapitel. Höhere Rechenkunst. Algebra	573
30. Kapitel. Geometrie und Trigonometrie	595

1868

6605

6606

6607

6608

IN GESCHICHTE DER MATHEMATIK I

und dagegen erhob Zenon seine Stimme. Er sah hier, was vor ihm vielleicht noch nicht gesehen, jedenfalls nicht in gleich scharfer Betonung bemerklich gemacht worden war: Schwierigkeiten, denen in der That weder der Philosoph noch der Mathematiker in aller Strenge gerecht werden kann, wenn auch der Mathematiker dazu gelangte durch Einführung bestimmter Zeichen die Stetigkeit zu einer definirbaren Eigenschaft zu machen, und mit den Grenzen zugleich den Uebergang zu den Grenzen der Untersuchung zu unterwerfen. Zwei Jahrtausende und mehr haben an dieser zähen Speise gekaut, und es wäre unbillig von den Griechen des fünften vorchristlichen Jahrhunderts zu verlangen, dass sie in Klarheit gewesen seien über Dinge, welche, freilich anders ausgesprochen, noch Streitfragen unserer Gegenwart bilden.

9. Kapitel.

Mathematiker ausserhalb der pythagoräischen Schule.

Hippokrates von Chios.

Den Mathematikern scheint nächst dem Irrationalen bei Gelegenheit der Kreisquadratur der erste Anlass geboten worden zu sein, Fragen des stetigen Ueberganges zu behandeln, und dieses führt uns zurück zu dem Mathematikerverzeichnisse, welches mit den Worten fortfährt:

„Nach diesen wurde Hippokrates von Chios, der die Quadratur des Mondes fand, und Theodorus von Kyrene in der Geometrie berühmt. Unter den hier Genannten hat zuerst Hippokrates Elemente — *στοιχεῖα* — geschrieben.“

Von dem Leben des Hippokrates von Chios sind uns nur wenige Züge bekannt¹⁾. Ursprünglich Kaufmann kam er durch einen unglücklichen Zufall um sein Vermögen. Die Einen erzählen, die Zolleinnehmer von Byzanz, gegen welche er sich leichtgläubig erwies, hätten ihn darum geprellt, die Anderen lassen ihn durch Seeräuber geplündert worden sein. Man hat beide Angaben so zu vereinigen gesucht, dass man muthmasste, athenische Seeräuber hätten aus Veranlassung eines Krieges gegen Byzanz das Schiff des Hippokrates weggenommen. Jener Krieg sei der sogenannte Samische

¹⁾ Die betreffenden Stellen des Aristoteles (*Ethic. ad Eudem.* VII, 14) und des Johannes Philoponus (*Comment. in Aristotel. phys. auscult.* f. 18) sind abgedruckt bei Bretschneider 97, wo die im Texte dargestellte Vereinigung der beiden Angaben versucht ist.

Krieg um das Jahr 440 gewesen, an welchem thatsächlich die Byzantiner gegen die Athener theilnahmen, und um diese Zeit sei also Hippokrates nach Athen gekommen. Ohne die Möglichkeit in Abrede zu stellen, dass es sich so verhalten haben könne, bedürfen wir jedoch dieser Vermuthung nicht, um die wichtigste Folgerung zu ziehen, welche sie für uns enthält, nämlich den Aufenthalt des Hippokrates in Athen zu begründen und zeitlich zu bestimmen. Die ungefähre Lebenszeit des Hippokrates geht schon aus seiner Stellung innerhalb des Mathematikerzeichnisses hervor, sein Aufenthalt in Athen, der Stadt, welche grade damals mit Recht begann als erste Stadt Griechenlands zu gelten, hat eine besondere Veranlassung nicht nothwendig gehabt. Jedenfalls war Hippokrates von Chios in der zweiten Hälfte des V. S. in Athen und kam dort mit Pythagoräern, d. h. offenbar mit versprengten Mitgliedern der italischen Schule zusammen, in deren Gesellschaft er geometrisches Wissen sich aneignete. Es wird sogar erzählt, er habe es sehr bald dahin gebracht, selbst Unterricht in der Mathematik ertheilen zu können und habe dafür Bezahlung angenommen. Von da an hätten die Pythagoräer ihn gemieden¹⁾.

Diese Geschichte erscheint, insbesondere was den durch Hippokrates gewohnheitsmässig ertheilten mathematischen Unterricht betrifft, sehr glaubwürdig. Damit stimmt nämlich vortrefflich überein, was das Mathematikerverzeichniss uns meldet, dass Hippokrates das erste Elementarlehrbuch der Mathematik verfasst habe. Weit hervorragender aber sind die eigentlichen geometrischen Erfindungen des Hippokrates, welche auf zwei Probleme sich beziehen: auf die Quadratur des Kreises und auf die Verdoppelung des Würfels.

Die Quadratur des Kreises, von Anaxagoras zuerst versucht, hat auch unter den Sophisten wenige Jahrzehnte vor Hippokrates wenn nicht bis zu seiner Zeit herab Bearbeiter gefunden. Mit wahrer Wortklauberei suchten die Einen nach einer Quadratzahl, die zugleich cyklisch sei²⁾, d. h. mit derselben Endziffer schliesse wie ihre Wurzel z. B. $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, aber das müssen jedenfalls die mathematisch Unwissenden gewesen sein, gegen welche die Versuche eines Antiphon und eines Bryson wohlthätig abstecken.

Antiphon, ein Zeitgenosse des Sokrates, mit welchem er über verschiedene Dinge in Hader lag³⁾, schlug, wie es scheint, zwei Wege ein, welche als verschiedene Versuche von ähnlichem Gedankengange

¹⁾ Jamblichus, *De philosoph. Pythagor.* lib. III, bei Anse de Villouison, *Anecdota Graeca*, pag. 216. ²⁾ So berichtet Simplicius in einer unter Anderen bei Bretschneider 106—107 abgedruckten Stelle. ³⁾ Diogenes Laertius II, 46.

betrachtet werden müssen. Einmal schrieb er in den Kreis ein Quadrat ein¹⁾, ging von diesem zum Achteck, Sechzehneck u. s. w. über. Man solle so fortschreiten bis dem Kreise ein Vieleck werde eingeschrieben werden, dessen Seiten ihrer Kleinheit halber mit dem Kreise zusammenfallen würden. Nun könne man, wie man in den Elementen gelernt habe, zu jedem Vielecke ein gleichflächiges Quadrat zeichnen, folglich auch zu dem Kreise mittels des Vielecks, welches an seine Stelle getreten sei. So der Bericht des Simplicius, eines Erklärers des Aristoteles aus dem VI. S., in seinem Commentare zur Physik des Stagiriten als Einleitung in den selbst aus Eudemos geschöpften Bericht über den Quadrirungsversuch des Hippokrates, der uns nachher zu beschäftigen hat. Ein anderer Commentator des Aristoteles, Themistius, weiss dagegen die Sache anders²⁾. Antiphon habe ein gleichseitiges Dreieck in den Kreis eingeschrieben und über jede Seite desselben ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Spitze auf dem Kreisumfang lag und so fort. So glaubte er, dass die gradlinige Seite des letzten Dreiecks mit dem Bogen zusammenfallen werde. Uns erscheinen diese beiden Versuche als gleich gut beglaubigt und einander in so weit ergänzend, als wir ihnen entnehmen, dass Antiphon mit dem Zusammenfallen des Kreises mit dem Vielecke von sehr vielen und sehr kleinen Seiten sich doch nicht so rasch und gänzlich befriedigt fühlte, und jedenfalls in zweierlei Annäherungen zu einer solchen aus graden Strecken zusammengesetzten Figur zu gelangen strebte, welche an die Stelle des Kreises treten sollte.

Ein anderer Geometer der gleichen Zeit etwa wie Antiphon war der Sophist Bryson aus Heraklää, der Sohn des Herodorus. Er wird auch wohl als Pythagoräer bezeichnet. Er ging in seinem Versuche die Quadratur des Kreises zu finden, von welchem wir wieder durch einen anderen Erklärer des Aristoteles, durch Johannes Philoponus unterrichtet sind³⁾, um einen sehr bedeutsamen Schritt über Antiphon hinaus. Er begnügte sich nicht damit ein Kleineres als den Kreis zu finden, welches sich nur wenig von ihm unterschied, er verschaffte sich auch ein der gleichen Forderung genügendes Grösseres. Er zeichnete neben den eingeschriebenen Vielecken auch umschriebene. Vielecke von immer grösserer Seitenzahl und beging bei Ausführung dieses vollständig richtigen Gedankens nur einen damals freilich verzeihlichen Fehler, indem er meinte, die Kreisfläche sei das arithmetische Mittel zwischen einem eingeschriebenen und einem umschriebenen

¹⁾ Der Bericht des Simplicius abgedruckt bei Bretschneider, der das grosse Verdienst sich erworben hat, diese sämtlichen Untersuchungen zuerst für die Geschichte der Mathematik nutzbringend gemacht zu haben. ²⁾ Bretschneider 125. ³⁾ Bretschneider 126.

Vielecke. Es ist nicht wahr, sagte später Proklus diesen Versuch vornehm zurückweisend, dass die Stücke, um welche jene Vielecke grösser und kleiner als der Kreis sind, sich gleichen. Aber auch welche Entwicklung der Geometrie zwischen Bryson und Proklus! Wir glauben über das Irrige an Brysons Folgerung hinweggehen zu dürfen, den Tadel irgend einen Mittelwerth mit dem arithmetischen Mittel verwechselt zu haben, ersticken zu müssen unter dem Lobe in der Erkenntniss des Grenzbegriffes weiter gekommen zu sein als alle Vorgänger.

So weit freilich wie Aristoteles, wenn wir dieses vorgreifend hier erwähnen dürfen, ist auch Bryson nicht gegangen. Aristoteles wusste und sagte¹⁾ in Worten, deren wir heute uns noch vielfach bedienen, ohne das Bewusstsein zu haben seine Schüler zu sein: „Stetig — *συνεχές* — sei ein Ding, wenn die Grenze eines jeden zweier nächstfolgender Theile, mit der dieselben sich berühren, eine und die nämliche wird und, wie es auch das Wort bezeichnet, zusammengehalten wird.“ Aristoteles wusste, dass es ein Anderes ist unendlich Vieles zu zählen, oder durch unendlich viele nicht von einander zu scheidende Punkte sich bewegen. Er löste das Paradoxon der Durchlaufung dieser unendlich vielen Raumpunkte in endlicher Zeit durch das neue Paradoxon, dass innerhalb der endlichen Zeit unendlich viele Zeittheile von unendlich kleiner Dauer anzunehmen seien. Es gibt für ihn kein reales Unendliches in zusammenhangloser Unbeschränktheit des Begriffes, so dass Grösseres oder Kleineres nicht möglich ist, sondern nur Endliches von beliebiger Grösse, von beliebiger Kleinheit. Aber man vergesse nicht, dass Aristoteles schon um ein weiteres Jahrhundert nach der Zeit lebte, welche uns in diesem Augenblicke beschäftigt, und dass er Aristoteles war, einer jener Geister, die für alle Zeiten lebend der eigenen Zeit meist unverstanden bleiben.

Bis zu einem gewissen Grade darf man letzteres vielleicht auch für Antiphon und Bryson behaupten. Die Mitte des V. S. konnte sich mit Schlussfolgerungen, wie diese beiden Männer sie zogen, nicht befreunden. Sie konnte nicht über den Widerspruch hinaus, noch um den Widerspruch herum kommen, der darin liegt, die krumme Kreisfläche durch eine gradlinig begrenzte Vielecksfläche erschöpfen zu lassen. Eine mathematische Begründung irgend welcher Art, am naturgemässesten ein selbst auf einen Widerspruch gebauter Beweis

¹⁾ Aristoteles, *Physic.* III, 4. Die Zusammenstellung der auf den Grenzbegriff und auf das Unendliche bezüglichen Stellen des Aristoteles u. s. w. bildet eines der schönsten Kapitel bei Hankel 115—127.

der Unmöglichkeit der entgegengesetzten Annahme, musste vorausgehen und das bilden, was man die geometrische Exhaustion nennt.

Aller Wahrscheinlichkeit nach versuchte Hippokrates von Chios zuerst oder als einer der Ersten eine solche Schlussfolgerung um zu dem Satze zu gelangen, dass Kreisflächen den Quadraten ihrer Durchmesser proportional seien, ein Satz, den er, wie Eudemos ausdrücklich sagt¹⁾, bewiesen hat.

Wir bemerken rückblickend auf die Quadraturversuche des Antiphon und des Bryson, dass dieselben nur solche geometrische Thatsachen voraussetzten, welche jedem Geometer pythagoräischer Schulung bekannt sein mussten: Einschreibung und Umschreibung regelmässiger Vielecke in und um einen Kreis und Verwandlung beliebig gestalteter gradlinig begrenzter Figuren in einander, beziehungsweise in ein

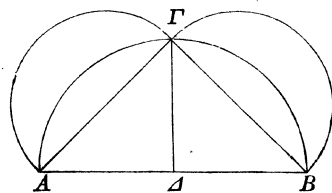


Fig. 30.

Quadrat, und gehen nun zu dem Verfahren über, mittels dessen Hippokrates zur Quadratur des Kreises zu gelangen trachtete. Er beschrieb (Figur 30) über einer Geraden AB einen Halbkreis, zeichnete in denselben das gleichschenklige Dreieck $AB\Gamma$ und beschrieb über dessen Katheten als Durchmesser neue Halbkreise.

Nun ist $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ und wegen der Proportionalität von Kreisen, beziehungsweise von Halbkreisen mit den Quadraten ihrer Durchmesser wird auch der Halbkreis über AB der Summe der Halbkreise über $A\Gamma$ und ΓB gleich sein, oder dem Doppelten eines dieser kleineren Halbkreise. Der Halbkreis über AB ist selbst auch das Doppelte des Viertelkreises, welcher durch $A\Gamma A$ zu bezeichnen ist, mithin dieser Viertelkreis gleich dem Halbkreise über $A\Gamma$. Nimmt man von beiden den Kreisabschnitt weg, welchen die Sehne $A\Gamma$ mit dem Bogen $A\Gamma$ des zuerst gezeichneten Halbkreises bildet, so bleibt das gradlinige rechtwinklige in ein Quadrat verwandelbare Dreieck $A\Gamma A$ gleich der durch zwei Bögen zwischen A und Γ eingeschlossenen halbmondförmigen Fläche, und diese Figur, welche bei Hippokrates *μηνίσκος* Mondchen (lateinisch *lunula*) heisst, ist somit thatsächlich quadrirt. Hippokrates geht nun weiter, und zwar auf dem Wege, dass er die Quadratur eines Kreises in Abhängigkeit von der einer halbmondartigen Figur bringt. Er zeichnet (Figur 31) in einen Halbkreis ein Paralleltrapez ein, dessen grössere Seite der Durchmesser selbst ist, während jede der drei anderen Seiten eine

¹⁾ *Eudemi fragmenta* (ed. Spengel) pag. 128, lin. 29.

Seite des dem ganzen Kreise einschreibbaren regelmässigen Sechsecks, dem Halbmesser folglich gleich ist. Wird über jeder der kleineren Trapezseiten ein Halbkreis gezeichnet, so muss er ein Viertel des ursprünglichen Halbkreises sein, oder die drei Halbkreise zusammen von dem ursprünglichen Halbkreise abgezogen lassen als Differenz einen kleinen Halbkreis von der Grösse der eben erhaltenen, d. h. einen solchen, dem der

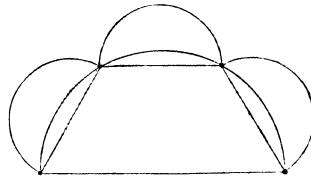


Fig. 31.

Halbmesser des ursprünglichen Halbkreises als Durchmesser dient. Dieselbe Differenz lässt nun, indem vom Subtrahenden und Minuenden gleiche Kreisabschnittchen weggelassen werden, sich in die Form einer Differenz zwischen dem gezeichneten Trapeze und dem Dreifachen eines von Kreisbögen gebildeten Mondes bringen. Wäre daher letzterer, der freilich von dem vorher untersuchten Mondchen wesentlich verschieden ist, quadrirbar, so wäre der kleine Halbkreis selbst quadrit. Aber diese Eigenschaft findet nicht statt. Das eben benutzte Mondchen ist, wie Hippokrates einsieht, nicht unmittelbar quadrirbar, und nun geht sein Bestreben dahin, andere quadrirbare Mondchen zu entdecken, um durch Zurückführung der Kreisquadratur auf diese neuen Mondchen die Aufgabe, die er sich gestellt hat, zu lösen. Wir können nicht ausführlich bei den Versuchen verweilen, die Hippokrates in dieser Richtung noch anstellt. Nur so viel sei bemerkt, dass er dabei wieder von dem Kreise eingezeichneten Paralleltrapezen ausgeht, und zwar von solchen, welche je drei unter einander gleiche Seiten besitzen, die das einmal grösser, das andere mal kleiner als der Halbmesser ausfallen, so dass also über der vierten Trapezseite nach der Richtung hin, wo das Trapez gezeichnet ist, ein Kreisabschnitt sich ergibt, der im ersten Falle grösser, in dem zweiten kleiner als ein Halbkreis ausfällt. Der erstere Fall entspricht bei Hippokrates überdies der Bedingung, dass die grössere Trapezseite im Quadrate genommen den drei identischen Quadraten der anderen Seiten zusammen gleich komme, dass also sämtliche Seiten sich wie $1:1:1:\sqrt{3}$ verhalten¹⁾. Noch verwickelter sind die Bedingungen für den zweiten Fall, welcher überdies in dem uns erhaltenen Texte als einigermaßen verstümmelt betrachtet werden muss. Jedenfalls gelangt Hippokrates wiederholt zu Mondchen, welche sowohl quadrirbar sind als auch in ihrer Entstehung von den ersten

¹⁾ Das tritt ein, wenn die kleine Seite $a = r\sqrt{3 - \sqrt{3}}$. Vergl. über die Mondchen des Hippokrates einen Aufsatz von Clausen (Crelle's Journal XXI, 375) und Hankel 127.

quadrirbaren Mondchen sich unterscheiden. Aber damit glaubt er keineswegs seine Aufgabe erfüllt zu haben. Er stellt noch weitere Versuche an und zeigt dadurch, dass er sein Ziel, das Mondchen auf der Sechsecksseite zu quadriren, auf welches er die Ausmessung des Kreises schon zurückgeführt hat, nicht aus den Augen verliert, dass er dieses Ziel auf allerlei Umwegen noch immer zu erreichen strebt, wenn es ihm auch nicht gelingt hinzugelangen.

Wir haben oben (S. 189) Simplicius als Gewährsmann für die Quadraturversuche des Hippokrates von Chios genannt, haben erwähnt, dass dieser Berichterstatter selbst aus Eudemus geschöpft hat, den er theilweise wörtlich *κατὰ λέξιν* zu benutzen ausdrücklich erklärt. Einige alterthümlich klingende Umschreibungen in diesem Berichte lassen aber vermuthen¹⁾, dass man berechtigt sei, ihn noch weiter aufwärts zu verfolgen, dass man theilweise wenigstens den Wortlaut des Hippokrates selbst vor sich habe. Ist diese Annahme richtig, so folgt aus ihr als wichtige Thatsache, dass Hippokrates mit aller Bestimmtheit bereits die Gewohnheit besass, die geometrischen Figuren mit zur Bezeichnung dienenden Buchstaben zu versehen. Er spricht von einer Linie „an welcher *AB* (steht)“, von einem Punkte „an welchem *K* (steht)“. Wir haben früher gesehen, dass die Aegypter ihren Figuren theilweise die Längenmaasse beischrieben, welche den Linien derselben zukamen. Wir haben darin vielleicht die Anregung gefunden, in Folge deren Zahlengrössen durch Linien zur Versinnlichung gebracht wurden (S. 152). Die Aegypter gingen über diese messende Bezeichnung hinaus. Eine gewisse Allgemeinheit gab sich kund, wenn die Scheitellinie mit *merit*, die Grundlinie der Pyramide mit *uchatebt* u. s. w. bezeichnet wurde, indem hierdurch die von Figur zu Figur unveränderliche Lage gegen die jedesmal wechselnde Länge als das Wichtigere in den Vordergrund trat. Aber Punkte nun gar durch Buchstaben zu benennen, welche nicht Zahlenwerthe, nicht Abkürzungen von Wörtern, welche etwa so anfangen, sein sollten, sondern nur Buchstaben als solche, damit die Möglichkeit zu geben eine Figur auch ziemlich verwickelter Art nur zu denken und doch mit dem Texte in verständlichen Einklang zu bringen; das ist eine Art von allgemeiner Symbolik, ist die bei Geometern erkennbare Vorläuferin der algebraischen Bezeichnung der Unbekannten durch einen Buchstaben, oder wenigstens durch ein Wort.

Ob Hippokrates freilich der erste war, welcher Buchstaben an die Figuren setzte, das wissen wir nicht. Wahrscheinlich ist es uns

¹⁾ Bretschneider S. 114, Note 2.

nicht, weil Eudemus sonst vermuthlich in seinem Berichte auf diese Neuerung hingewiesen haben würde. Wir vermuthen weit eher, dass Hippokrates die geometrische Anwendung der Buchstaben bei den Pythagoräern gelernt haben wird, denen er ja auch sein mathematisches Wissen überhaupt verdanken soll. Dafür spricht, dass das Sternfünfeck, welches die Pythagoräer als Erkennungszeichen, auch wohl als Briefüberschrift benutzten (S. 166), an seinen Ecken die Buchstaben geführt haben soll, welche das Wort Gesundheit bildeten. So wird wenigstens allgemein die Stelle aufgefasst, dass jene Figur Gesundheit genannt worden sei.

Bei Hippokrates bestand dagegen eine Sitte noch nicht, welche bei Euklid mit der Regelmässigkeit eines Gesetzes herrschend geworden ist: die Sitte nämlich unter die zur Bezeichnung von Figuren benutzten Buchstaben niemals das *I* zu begreifen, sondern nach *@* sofort zu *K* überzugehen. Offenbar wollte man dadurch der leicht möglichen Verwechslung des Buchstaben *I* mit einem einfachen Vertikalstriche vorbeugen¹⁾. Hippokrates übersprang das *I* noch nicht²⁾, und auch bei der eben erwähnten Bezeichnung der Ecken des Pentalpha spielt *I* eine Rolle.

Nicht ohne Interesse ist es ferner, dass einmal (Fig. 32) ein Fünfeck mit einspringendem Winkel erscheint, aber nicht anders genannt wird als „die geradlinige Figur, welche aus den drei Dreiecken *ZBH*, *ZBK*, *ZKE* besteht“³⁾.

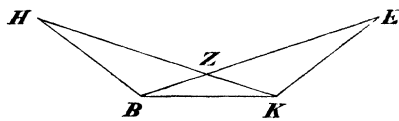


Fig. 32.

Wir lassen es dahingestellt, ob man

daraus entnehmen will, dass jene Figur als Fünfeck nicht angesehen zu werden pflegte, jedenfalls ist doch die Vereinigung der drei Dreiecke zu einem einheitlichen Gebilde ausgesprochen und damit das erste bekannte Vorkommen eines Vielecks mit einspringendem Winkel in einer geometrischen Abhandlung gewonnen.

Bemerkenswerth ist ferner, was Eudemus ausdrücklich hervorhebt⁴⁾, dass Hippokrates am Anfange seiner Abhandlung bewies, dass Halbkreise rechte Winkel umfassen, Segmente dagegen, welche grösser (kleiner) als Halbkreise sind, spitze (stumpfe) Winkel; dass Kreisflächen sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Durchmesser und ähnliche Kreissegmente, d. h. solche, welche gleichvierte Theile ihrer

¹⁾ Nach Professor Studemund. Vergl. Zeitschr. Math. Phys. XXI. Historisch-literarische Abtheilung S. 183. ²⁾ *Eudemi fragm.* (ed. Spengel) pag. 134, lin. 23 flgg. ³⁾ *Eudemi fragm.* pag. 133, lin. 8 flgg. ⁴⁾ *Eudemi fragm.* pag. 128, lin. 26 bis pag. 129, lin. 9.

betreffenden Kreise bildeten, wie die Quadrate ihrer Sehnen. Es ist gewiss mit Recht betont worden¹⁾, es könne nicht um die Erfindung, sondern nur um den Nachweis dieser Sätze sich handeln. Bekannt waren einige derselben wohl schon früher, so der Satz vom rechten Winkel im Halbkreise schon Thales, dem wir sogar einen Beweis zuzutrauen wagten. Auch die Proportionalität der Kreisfläche und des Quadrates des Durchmessers kann nicht als neu angesehen werden, da die rechnende Kreisquadratur der Aegypter auf ihr beruhte.

Wir dürfen hier auf das Wort *δύναμις*, Vermögen, lateinisch *potentia* hinweisen, durch welches das Quadrat benannt ist²⁾. Dass aus der lateinischen Uebersetzung in erweiterter Bedeutung des Wortes unsere Potenzgrößen entstanden sind, liegt auf der Hand. Das Vorkommen des Wortes als Kunstaussdruck bei Hippokrates, den Eudemus hier wörtlich ausgenutzt haben dürfte, ist das erste nachweisbare. Später kommt das Wort sowohl in mathematischem als in nichtmathematischem Sinne ungemein häufig vor. Platon hat es benutzt³⁾, Aristoteles nicht minder an unzähligen Stellen, wo auch von dem dynamischen Auftreten dieser oder jener Eigenschaft — wir sagen gewöhnlicher in lateinischer Wortform deren virtuelles Auftreten — die Rede ist, der Kunstaussdruck der einen Wissenschaft zum Kunstaussdrucke einer anderen wurde. Es scheint fast, als läge in den Wörtern *δύναμις* und *τετραγώνος* ein ähnlicher Gegensatz wie in unseren Ausdrücken „zweite Potenz“ und „Quadrat“. Das eine bezieht sich auf die arithmetische Entstehung als Zahl, das andere auf die geometrische Deutung als Fläche, und somit wäre in der That bei Hippokrates von einer rechnenden Vergleichung der Kreisflächen, wie sie aus ihrem Durchmesser sich ergeben, ausgegangen worden. Ganz klar gestellt ist, wie sich im 11. Kapitel uns zeigen wird, diese schwierige, wie uns aber scheint nicht unwichtige Frage noch nicht, und ihre Beantwortung wird der Einzelforschung anheimgestellt bleiben müssen.

Kennzeichnend für die Schreibweise des Hippokrates und, wie wir sagten, die Annahme, dass Eudemus uns theilweise den alten Wortlaut aufbewahrt habe, wesentlich unterstützend ist eine gradezu unerträgliche Weitläufigkeit, eine Breite der Wiederholungen nur daraus erklärbar, dass es damals an Elementarlehrbüchern fehlte, auf welche für die einfachsten Hilfssätze ein für allemal hätte verwiesen werden können. So mag, wie scharfsinnig vermuthet worden ist⁴⁾, grade beim Verfassen dieser Abhandlung das Bewusstsein für

¹⁾ Bretschneider 132—133. ²⁾ *Eudemi fragm.* pag. 128, lin. 28.

³⁾ Platon, *Theaetet* pag. 147. ⁴⁾ Bretschneider 131.

Hippokrates recht deutlich zum Durchbruche gekommen sein, wie unentbehrlich ein Elementarwerk sei, so mag er nachher die Anfertigung eines solchen selbst in Angriff genommen haben, jedenfalls erst nachher, weil es sonst an Anführungen desselben bei ihm selbst gewiss nicht fehlen würde. Statt deren musste er in ermüdend eiförmiger Weise die einfachsten Dinge wiederholen oder unbewiesen als an sich bekannt aussprechen.

Wir erwähnen in letzterer Beziehung den Satz, dass die Sechsecksseite dem Halbmesser des Kreises gleich ist, den anderen Satz, dass das Quadrat einer Dreiecksseite grösser (kleiner) als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten ist, falls letztere einen stumpfen (spitzen) Winkel mit einander bilden.

Als selbstverständlich setzt Hippokrates auch die Trapeze voraus, welche er zur Herstellung seiner Mondchen bedarf. Dass diese Trapeze gleichschenkelig sind, und als solche zu den bei Aegyptern und bei in Aegypten gebildeten ausländischen Geometern beliebtesten Figuren gehören, braucht für unsere Leser kaum mehr betont zu werden. Aber auch das gleichschenkelige Trapez war unter allen Umständen so genau noch nicht studirt, dass die Gewissheit festgestanden hätte, es sei möglich ein solches zu bilden, dessen Seiten sich wie $1:1:1:\sqrt{3}$ verhalten, es sei ferner möglich ein solches in einen Kreis einzuzichnen. Seiten, welche das genannte Verhältniss darboten, zu zeichnen, war freilich einem Schüler von Pythagoräern nicht schwierig. Zog man im gleichseitigen Dreiecke von der Spitze aus eine Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite, so erhielt man das eine Elementardreieckchen des Timäus, dessen Seiten im Verhältnisse $1:\sqrt{3}:2$ stehen, und es war also nur nöthig die kleinere Kathete dieses Dreieckchens dreimal, die grössere einmal zu wählen, um die verlangten vier Strecken zu besitzen, aber es blieb zweifelhaft, ob und wie damit ein Paralleltrapez zu construiren war, und Hippokrates fühlte noch nicht die Nothwendigkeit diesen Beweis zu führen, während, wie wir sehen werden, wenige Jahrzehnte später kein griechischer Geometer sich dessen hätte entschlagen dürfen ohne gerechtem Tadel zu verfallen. Dass jenes Trapez einmal gegeben zu einem Sehnenvierecke gemacht werden könne, beweist dagegen Hippokrates. Dass zu diesem Nachweise genüge zu zeigen, dass je zwei gegenüberliegende Winkel sich zu zwei Rechten ergänzen, weiss Hippokrates offenbar noch nicht. Er zeigt vielmehr durch Congruenzen, dass der vierte Eckpunkt Δ des als gegeben gedachten Trapezes sich auf dem durch die drei anderen Eckpunkte $AB\Gamma$ gelegten Kreise befinde. (Fig. 33.) Er halbirt die Winkel bei A und Γ durch AE und ΓE und zieht von deren Durchschnitts-

punkte E aus die EB und EA . Weil nun $AB = \Gamma A$ war, wusste man daraus auf die Gleichheit der Winkel $B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}A$ zu schliessen. Daraus folgte, dass auch die Hälften BAE , EAG , AGE $EA\Gamma$

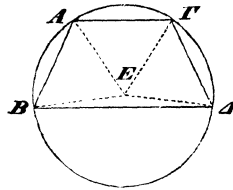


Fig. 33.

sämmtlich unter einander gleich waren. Ferner war gegeben $BA = A\Gamma = \Gamma A$. Da nun AE sich selbst gleich, so ist vermöge des Congruenzsatzes von den beiden gleichen einen gleichen Winkel einschliessenden Seiten Dreieck $BAE \cong EAG$ und $EB = E\Gamma$. Wegen der Gleichheit der Winkel EAG , AGE ist aber bereits $E\Gamma = EA$, mithin ist $EB = E\Gamma = EA$ oder E der

Mittelpunkt des durch $AB\Gamma$ gelegten Kreises. Jetzt ist bei $A\Gamma = \Gamma A$, $E\Gamma = EA$, Winkel $AGE = E\Gamma A$ auch die Congruenz $AGE \cong E\Gamma A$ erwiesen und in diesen Dreiecken $EA = EA$ d. h. der genannte Kreis geht auch durch A . Dieser Beweis bestätigt unsere obige Bemerkung, Hippokrates habe versäumt den Nachweis zu liefern, dass ein Trapez von dem verlangten Seitenverhältnisse überhaupt möglich sei. Hier ist nämlich nur die Gleichheit von drei Seiten BA , $A\Gamma$, ΓA , nicht deren Verhältniss zur vierten Seite BA berücksichtigt. Anders gesagt: es ist bewiesen, dass jedes Paralleltrapez mit drei gleichen Seiten ein Sehnenviereck ist.

Hippokrates beschäftigte sich, wie wir (S. 189) ankündigend bemerkten, auch noch mit einem anderen mathematischen Probleme, mit der Würfelverdoppelung. Das ist die letzte uns hier be-
gegnende von den drei grossen Aufgaben der griechischen Mathematiker, welche ihnen Gelegenheit gaben ihre Kräfte zu üben und das zu erfinden, was man die höhere Mathematik jenes Zeitraumes zu nennen berechtigt ist. Ueber die Geschichte der Würfelverdoppelung sind wir durch namhafte Ueberbleibsel aus alter Zeit ziemlich gut berichtet, und selbst der sagenhafte Anstrich des Ursprungs der Aufgabe wird im 30. Kapitel sich als erheblich ausweisen. Ein griechischer Mathematiker Eratosthenes im III. S. schrieb an Ptolemäus Euergetes den ägyptischen König einen Brief über diesen Gegenstand, der sich bei Eutokius von Askalon, einem späten Commentator des Archimed, erhalten hat und dessen Anfang wir hier beifügen¹⁾. Trotzdem er ziemlich weit jenseits der gegenwärtig

¹⁾ Zur Geschichte der Würfelverdoppelung vergl. N. T. Reimer, *Historia problematis de cubi duplicatione*. Göttingen, 1798. J. H. Dresler, Eratosthenes von der Verdoppelung des Würfels. Osterprogramm 1828 für die herzoglich Nassauischen Pädagogien zu Dillenburg, Hadamar und Wiesbaden. Ch. H. Biering, *Historia problematis cubi duplicandi*. Kopenhagen, 1844. Theilweise Neues auch an Stellenmaterial in der Dissertation von C. Blass, *De Platone*

allein zu behandelnden Zeit hinabführt, glaubten wir doch eine Trennung des zusammengehörigen Textes nicht vornehmen zu sollen und werden lieber später, wo es nöthig ist, auf dieses Kapitel hier zurückverweisen.

„Dem Könige Ptolemäus wünscht Eratosthenes Glück und Wohlbefinden. Von den alten Tragödiendichtern sagt man, habe einer den Minos, wie er dem Glaukos ein Grabmal errichten liess, und hörte, dass es auf allen Seiten 100 Fuss haben werde, sagen lassen:

Zu klein entwarfst Du mir die königliche Gruft,

Verdopple sie; des Würfels doch verfehle nicht.

Man untersuchte aber auch von Seiten der Geometer, auf welche Weise man einen gegebenen Körper, ohne dass er seine Gestalt veränderte, verdoppeln könnte, und nannte die Aufgabe der Art des Würfels Verdoppelung; denn einen Würfel zu Grunde legend suchte man diesen zu verdoppeln. Während nun lange Zeit hindurch Alle rathlos waren, entdeckte zuerst der Chier Hippokrates, dass, wenn man herausbrächte zu zwei gegebenen graden Linien, wo die grössere der kleineren Doppelte wäre, zwei mittlere Proportionalen von stetigem Verhältnisse zu ziehen, der Würfel verdoppelt werden könnte; wonach er dann seine Rathlosigkeit in eine andere nicht geringere Rathlosigkeit verwandelte. Nach der Zeit, erzählt man, wären die Delier, weil sie von einer Krankheit befallen waren, einem Orakel zufolge geheissen worden einen ihrer Altäre zu verdoppeln und in dieselbe Verlegenheit gerathen. Sie hätten aber die bei Platon in der Akademie gebildeten Geometer beschickt und gewünscht, sie möchten ihnen das Verlangte auffinden. Da sich nun diese mit Eifer der Sache unterzogen und zu zwei Gegebenen zwei Mittlere suchten, soll sie der Tarentiner Archytas mittelst der Halbcylinder aufgefunden haben, Eudoxus aber mittelst der sogenannten Bogenlinien. Es widerfuhr ihnen aber insgesamt, dass sie zwar ihre Zeichnungen mit geometrischer Evidenz nachgewiesen hatten, sie aber nicht leicht mit der Hand ausführen und zur Anwendung bringen konnten, ausser etwa einigermassen die des Menächmus, doch auch nur mühsam.“

Der alte Tragiker, auf dessen Verse Eratosthenes sich beruft, ist kein anderer als Euripides, in dessen verloren gegangenen Poleidos sie vorkommen, wie sehr wahrscheinlich gemacht worden ist¹⁾. Da nun Euripides 485—406 lebte, seine dichterische Wirk-

mathematico. Bonn, 1861, pag. 22—30. Unsere Uebersetzung des Briefes des Eratosthenes nach Dresler l. c. S. 8—10.

¹⁾ Valkenarius, *Diatrise de fragm. Eurip.* pag. 203. Vergl. Reimer, *De cubi duplicatione* pag. 20.

samkeit also etwa in die gleiche Zeit fällt, in die wir die wissenschaftliche Thätigkeit des Hippokrates verlegen, so geht hieraus hervor, dass eben damals die Sage von dem Grabmale des Glaukos bekannt war. Ob damals die Sage schon alt gewesen; ob Euripides ihrer gedachte, weil die Gelehrten des Tages sich bereits mit Würfelverdoppelung beschäftigten, die Anspielung also einen gewissen Eindruck auf die feiner gebildeten Zuhörer machen musste; ob man den entgegengesetzten Thatbestand annehmen soll, dass die Volksthümlichkeit der Verse des Euripides die Mathematiker auf die eigenthümlich gestellte Aufgabe aufmerksam machte; ob wir daran erinnern dürfen, dass Euripides der Dichter selbst ein Gelehrter, dass er ein Schüler des Anaxagoras war, das alles gehört in das Bereich gewagtester Vermuthung, oder wenigstens noch unerledigter Forschung. Als gesichert ist gemäss dem Berichte des Eratosthenes nur so viel zu betrachten, dass nach fruchtlosen Versuchen Anderer über die Aufgabe der Würfelverdoppelung Herr zu werden, Hippokrates von Chios auf die Bemerkung fiel, dass die Aufgabe auch in anderer Gestalt sich aussprechen lasse. Findet die fortlaufende Proportion $a:x = x:y = y:b$ statt, so ist $x^2 = ay$, $y^2 = bx$, mithin $x^4 = a^2y^2 = a^2bx$ und $x^3 = a^2b$ oder, wenn $b = 2a$, wie es bei der Würfelverdoppelung nothwendig erscheint, $x^3 = 2a^3$. Die Seite des doppelten Würfels ist in der That die erste von zwei mittleren Proportionalen, welche zwischen der einfachen und der doppelten Seite des ursprünglichen Würfels eingeschaltet werden. Diese Erkenntniss, welche auch Proklus¹⁾ dem Hippokrates nachrühmt, war ein Schritt weiter auf dem richtigen Wege, aber allerdings ein verhältnissmässig kleiner Schritt. Hippokrates verwandelte nur, wie Eratosthenes in fast scherzhaftem Tone sagt, seine Rathlosigkeit in eine andere nicht geringere Rathlosigkeit. Wie sollten jene beiden mittleren Proportionalen gefunden werden? Die Männer, welche der Lösung dieser Aufgabe sich gewachsen fühlten, sind es, die uns im Folgenden entgegengetreten werden.

Auf ihre Gemeinschaft führt auch das Mathematikerverzeichniss uns hin, wenn es neben Hippokrates von Chios noch Theodorus von Kyrene in der Geometrie berühmt nennt. Von diesem wissen wir an geometrischen Thatsachen nur, dass er die Irrationalität der Quadratwurzeln von Zahlen zwischen 3 und 17 bewies²⁾ (S. 170). Wir wissen von ihm ausserdem, dass er der Schule der Pythagoräer angehörte³⁾, und dass er Lehrer des Platon in mathematischen Dingen war⁴⁾.

¹⁾ Proklus (ed. Friedlein) 213. ²⁾ Platon, Theaetet 147, D. ³⁾ Jamblichus, *Vita Pythagor.* 267. ⁴⁾ Diogenes Laertius II, 103.

Platon und die Akademie nehmen jetzt, wie in der Geschichte der griechischen Philosophie, so in der Geschichte der griechischen Mathematik, die leitende Stellung ein. Mit ihnen müssen wir uns beschäftigen.

10. Kapitel.

Platon.

Zwei Kriege von schwerwiegender Bedeutung für die Gestaltung staatlicher Verhältnisse, wie für die Entwicklung der Wissenschaften wurden auf griechischem Boden innerhalb eines Menschenlebens gekämpft. Der peloponnesische Krieg, welcher die Macht Athens vernichtete, welcher den Staat des Perikles von seiner geistigen, wissenschaftlichen wie künstlerischen Höhe herabstürzte, begann 431. Der sogenannte heilige Krieg, in welchem die Thebaner durch ein kurzes Uebergewicht erschöpft, König Philipp von Macedonien zu Hilfe riefen und ihm so den ersten willkommenen Anlass gaben in griechische Dinge sich einzumengen, endete 346. Dieselben Jahreszahlen begrenzen fast genau das Leben Platons. Seine Geburt fällt in das Jahr 429, in das Schreckensjahr, in welchem die durch die Schilderung des Thukydides in grässlicher Wahrheit bekannte Pest Athen in Trauer hüllte, in welchem Perikles starb. Sein Tod erfolgte 348 an demselben Tage, an welchem er 81 Jahre früher geboren war.

In Platons Lebenszeit fallen auch zwei Künstler, deren die Geschichte der Mathematik Erwähnung thun darf: Pheidias und Polyklet, die Verfertiger des Olympischen Zeus, der Argivischen Here. Von Pheidias erzählt Lucian in dem Dialoge über die philosophischen Sekten¹⁾, er sei im Stande gewesen aus der Klaue eines Löwen anzugeben, wie gross der ganze Löwe war, woher die lateinische Redensart *ex ungue leonem* stammt, welche sich bis zu unseren Tagen erhalten hat. Von Polyklet meldet Galen²⁾, er habe in einer Schrift, die Kanon überschrieben war, die Lehre von allen Verhältnissen des Körpers aufgestellt. Wer denkt dabei nicht an die vorgezeichneten Quadrate im Grabmale Seti I (S. 66), wer nicht an die Nothwendigkeit einer in weite Kreise eingedrungenen Lehre von der Aehnlichkeit der Figuren?

¹⁾ Lucian, Ἐρμώτισμος ἢ περὶ αἱρέσεων. ²⁾ Galen, Περὶ τῶν κατ' ἱπποκράτην καὶ Πλάτωνα.