

6735 pdf
BÄRK, A.

1901

p 543 - 592

1901
55

Das Āpastamba - Śulba - Sūtra,

herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen

von

Albert Bärk (Tübingen).

Einleitung.

In dieser Einleitung zum Āp. Śulb. S. soll eine neue Untersuchung über Herkunft und Entwicklung der ältesten indischen Geometrie niedergelegt werden. Nun bilden die hier in Betracht kommenden Quellen bekanntlich Teile der indischen Ritualliteratur: sie enthalten die Regeln für die Konstruktion der Altäre, und darum auch das hierzu erforderliche geometrische Wissen. Wir werden also, um die Geschichte der ältesten indischen Geometrie zu untersuchen, nicht umhin können, damit einige Bemerkungen über die altindischen Altäre zu verbinden, so sehr es auch richtig ist, dass deren Formen teilweise „für jeden nichtindischen Geist an das Lächerliche streifen.“¹⁾

§ 1.

Die altindischen Altäre und das geometrische Wissen, welches ihre Konstruktion voraussetzt.

A. Die Anfänge des indischen Opferwesens reichen bis in die Zeit des Rgvēda zurück.²⁾ Dabei interessiert uns hier besonders, dass dem RV. für Opferzwecke nicht nur die *vēdi*,³⁾ sondern auch der „dreifache Sitz“⁴⁾ (*triśadhaṣṭha*)⁵⁾ des Agni — also der *gārhapatya*,⁶⁾ der *āhavanīya* und der *dakṣiṇāgni* — schon bekannt ist. Nach den Angaben der Ritualliteratur zu schliessen, handelte es sich bei der Ausmessung der Grundflächen jener 3 Feuerstätten um die Konstruktion von Quadraten, Kreisen und Halbkreisen. Natürlich ist uns über das hierbei eingeschlagene Verfahren in den

1) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 542 (2. Aufl., S. 597).

2) Vgl. A. Hillebrandt, Grundriss der indo-arischen Philol., III. Bd., 2. Heft, S. 11 ff.

3) Vgl. Hillebrandt, a. a. O., S. 14.

4) Vgl. a. B. RV. 5, 11, 2: *yajñasya kētuṃ, prathamam purōhitam, agniṃ naras triśadhaṣṭhē samidhirē.*

Bd. LV.

Das Āpastamba - Śulba - Sūtra,

herausgegeben, übersetzt und mit einer Einleitung versehen

von

Albert Bürk (Tübingen).

Einleitung.

In dieser Einleitung zum Āp. Śulb. S. soll eine neue Untersuchung über Herkunft und Entwicklung der ältesten indischen Geometrie niedergelegt werden. Nun bilden die hier in Betracht kommenden Quellen bekanntlich Teile der indischen Ritualliteratur: sie enthalten die Regeln für die Konstruktion der Altäre, und darum auch das hierzu erforderliche geometrische Wissen. Wir werden also, um die Geschichte der ältesten indischen Geometrie zu untersuchen, nicht umhin können, damit einige Bemerkungen über die altindischen Altäre zu verbinden, so sehr es auch richtig ist, dass deren Formen teilweise „für jeden nichtindischen Geist an das Lächerliche streifen.“¹⁾

§ 1.

Die altindischen Altäre und das geometrische Wissen, welches ihre Konstruktion voraussetzt.

A. Die Anfänge des indischen Opferwesens reichen bis in die Zeit des Rgvēda zurück.²⁾ Dabei interessiert uns hier besonders, dass dem RV. für Opferzwecke nicht nur die *vēdi*,³⁾ sondern auch der „dreifache Sitz“⁴⁾ (*triśadhaṣṭha*)⁵⁾ des Agni — also der *gārhapatya*,⁶⁾ der *āhavanīya* und der *dakṣiṇāgni* — schon bekannt ist. Nach den Angaben der Ritualliteratur zu schliessen, handelte es sich bei der Ausmessung der Grundflächen jener 3 Feuerstätten um die Konstruktion von Quadraten, Kreisen und Halbkreisen. Natürlich ist uns über das hierbei eingeschlagene Verfahren in den

1) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I, 542 (2. Aufl., S. 597).

2) Vgl. A. Hillebrandt, Grundriss der indo-arischen Philol., III. Bd., 2. Heft, S. 11 ff.

3) Vgl. Hillebrandt, a. a. O., S. 14.

4) Vgl. a. B. RV. 5, 11, 2: *yajñasya kētuṃ, prathamam purōhitam, agniṃ naras triśadhaṣṭhē samīdhire*.

Hymnen des RV. nichts Näheres überliefert; aber aus RV. 1, 67, 5 erfahren wir doch soviel, dass „kundige“ Männer den „Sitz“ des Agni „ausmassen“ (*sadmē 'va dhīrāḥ sammāya cakruḥ*). Aus dieser Stelle ergibt sich also die nicht unwichtige Thatsache, dass die Ausmessung der Feuerstätte schon zur Zeit des RV. (d. h. nach Whitney¹⁾ 2000—1500 vor Chr., nach Jacobi²⁾ u. a. noch bedeutend früher) Gegenstand besonderer Sorgfalt und Aufmerksamkeit war.

B. Die eigentliche Blütezeit des indischen Opferwesens war die Periode der Brāhmaṇa's, welche aus astronomischen, sowie aus Gründen, „die wir als litterarisch-chronologische bezeichnen können, . . . sehr wohl als das 12. vorchristliche Jahrhundert einschliessend angenommen werden darf.“³⁾ Wer nun mit dieser durch mehrere Jahrhunderte sich erstreckenden Epoche der indischen Kulturgeschichte vertraut ist, „der und eigentlich der allein vermag es ganz zu ermessen, welch eine Rolle zu jener Zeit das Opfer mit seinen unzähligen Details im Geistesleben der Inder spielte. Das gesamte Sinnen und Trachten eines hochbegabten Volkes ist in diesen Jahrhunderten auf das Opfer, seine Vorbereitung und Ausführung gerichtet. Die umfangreiche Litteratur, die als Zeuge jener Zeiten zu uns redet, handelt vom Opfer und immer nur vom Opfer. Dem Opfer in allen seinen Einzelheiten wird die höchste Bedeutung beigelegt, die Kraft Götter und Welten zu zwingen, Natur und Menschen zu beherrschen. Wunderbare, übernatürliche Macht wohnt ihm inne, und selbst die Kosmogonie geht auf das Opfer zurück, aus Opfern sind alle Welten und Wesen, alle Götter und Menschen, Tiere und Pflanzen entstanden. Gelangen die Inder hier auch schliesslich zu den grössten Absurditäten und wird ein gesunder Sinn sich auch mit diesen Spekulationen nie befreunden, so erkennt man doch, welche Bedeutung gerade diese Tendenz des indischen Denkens für unsere Frage hat; — geht sie ja doch deutlich hervor aus einer grenzenlosen, kein Mass mehr kennenden Hochschätzung des Opfers und seiner Bedeutung. Das Ceremoniell der Opfer, wie es uns schon die Yajurveden . . . zeigen, ist ein ungeheuer compliciertes, und die kleinste Äusserlichkeit wird mit einem Nimbus von Wichtigkeit umgeben, der für uns nicht selten an das Lächerliche streift. Die Vorbereitungen zum Opfer, die Fertigstellung des Opferplatzes, der mannigfaltigen Geräte und Utensilien spielt dabei eine hervorragende Rolle, ist schon an sich mit einer erdrückenden Masse ceremonieller Einzelheiten belastet und nimmt oft lange Zeiträume in Anspruch. Dabei ist natürlich die Konstruktion der Altäre von der allerhöchsten Bedeutung. Jede Linie, jeder Punkt, jedes Formverhältnis war hier von entscheidender Wichtigkeit und konnte nach dem indischen Glauben jener Zeit, je nachdem es aus-

1) Vgl. v. Schroeder, *Indiens Litteratur u. Cultur*, S. 292.

2) Jacobi, *Festgruss an Roth*, 68 ff.

3) Thibaut, *Grundriss d. ind.-ar. Philol.*, III. Bd., 9. Heft, S. 18.

geführt war, Segen oder Unheil bringen. Über die Gestalt und Grösse der Altäre, ihr Verhältnis zu einander und zu ihren einzelnen Teilen, zu den mannigfachsten abstrakten Begriffen, ihren tieferen Wert und symbolische Bedeutung und die richtige, nicht bloss gottgefällige, sondern selbst Götter zwingende Art ihrer Herstellung haben Generationen eines hochbegabten, für Spekulation und Abstraktion und namentlich auch für rechnerische Leistungen sehr beanlagten Volkes gegrübelt und immer wieder gegrübelt.“¹⁾

Diese lichtvollen Darlegungen werden wohl jedermann davon überzeugen, dass die Inder schon in jener sehr frühen Zeit durch wichtige praktische Bedürfnisse veranlasst wurden, auf dem Opferplatze eine Feldmesskunst auszubilden. Wie muss es uns da berühren, wenn wir bei einem berühmten Geschichtschreiber der Mathematik lesen, dass „wir die indische Geometrie nur auf indischer Grundlage nicht begreifen“²⁾ können, und wenn derselbe an einer andern Stelle von der indischen Geometrie sagt, dass ihre „Entstehungsweise mehr als räthselhaft“³⁾ sei? Hätte jenen Gelehrten nicht schon die Thatsache nachdenklich machen müssen, dass (wie er selbst sagt) die Śulbasūtra's „Schriften von geometrisch-theologischem Charakter“ sind, „wie sie abgesehen von einigen ägyptischen Inschriften in keiner Litteratur sich wiederfinden“⁴⁾?

Auf Grund dieser Śulbasūtra's und unter Berufung auf noch ältere Werke, wie die Taittirīya-Saṃhitā und das Śatapatha-Brāhmaṇa, wollen wir nun zunächst im einzelnen sehen, welches Mass geometrischer Kenntnisse die Konstruktion der Altäre erforderte; und zwar beschäftigen wir uns zuerst mit den *vedī*'s, sodann mit dem beim *Sōma*-Opfer geschichteten Feuertar (*agni*).

I. *Vedī*.

1. Die Inder legten grossen Wert auf genaue rechtwinklige Herstellung ihrer Altäre.⁵⁾ Zu diesem Zwecke lehrt Āpastamba bei der *vedī* für das *Sōma*-Fest, deren Masse schon in der Taitt. S. und im Śat. Br. angegeben werden, mehrere rationale rechtwinklige Dreiecke anwenden (Āp. Śulb. S. V, 1—6). Und auf diese bei der *sāumikī vedī* gelehnte Methode der Ausmessung verweist er bei einer Reihe weiterer *vedī*'s zurück (Āp. Śulb. S. V, 8; VI, 1. 4. 6. 7. 8).

2. Unter diesen ist einmal noch die *vedī* der *Sautrāmanī*-Cereemonie hervorzuheben, welche nach einer alten⁶⁾ Vorschrift $\frac{1}{3}$ der *sāumikī vedī* messen soll. Ihre Konstruktion geschieht ent-

1) v. Schroeder, Pythagoras und die Inder, S. 54 f.

2) Cantor, a. a. O., S. 549 (2. Aufl. S. 604).

3) Cantor, a. a. O., S. 558 (2. Aufl. S. 615).

4) Cantor, a. a. O., S. 540 (2. Aufl. S. 595).

5) Thibaut, Journal of the Asiatic Society of Bengal, XLIV [künftig, ohne Wiederholung der Zahl des Bandes, citirt als JASB.], S. 232. Cantor, a. a. O., S. 541 (2. Aufl. S. 596).

6) Thibaut, JASB., 232.

weder mit Hilfe der *trikaraṇī* oder der *ṭṭiyakaraṇī* (Āp. Śulb. S. V, 8), d. h. entweder der durch Zeichnung hergestellten¹⁾ $\sqrt{3}$ oder $\sqrt{1/3}$; deren geometrische Konstruktion beruht natürlich auf dem Satze vom Quadrat der Hypotenuse (so nennt Hankel in seinem Werke „Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter“, z. B. S. 99 und S. 209, den sogenannten Pythagoreischen Lehrsatz).

3. Ferner muss noch die *vēdi* beim *aśvamēdha* besonders erwähnt werden. Diese soll nach alter Tradition doppelt so gross sein als die *sāumikī vēdi* und wird darum mittels der *dvikaraṇī*, d. h. der geometrisch konstruierten $\sqrt{2}$ ausgemessen (Āp. Śulb. S. V, 10; VI, 1).

4. Die *vēdi*'s beim *aśvamēdha* und bei der *Sāutrāmaṇī*-Ceremonie sollen also in einem bestimmten Grössenverhältnisse zu der *sāumikī vēdi* stehen; nur wenn sie den betreffenden Vorschriften wirklich entsprechen, ist das Opfer den Göttern gefällig und von Erfolg begleitet. Dies war neben anderem ein Anlass zur Ausbildung von Regeln für Flächenberechnung. Da nun jene *vēdi*'s (und ebenso die meisten anderen) die Form eines gleichschenkligen Trapezes haben, so musste dieses zuerst in ein Rechteck verwandelt werden (Āp. Śulb. S. V, 7); dessen Berechnung (Āp. Śulb. S. V, 7 u. 9) geschah ähnlich wie die eines Quadrats, welches letztere Āp. Śulb. S. III, 7 nachgelesen werden kann.

II. *Agni*.

1. Alle in den Brāhmaṇa's und Sūtra's über den *agni* enthaltenen Vorschriften beziehen sich, soweit nicht ausdrücklich ein anderes angegeben ist, auf den *caturaśraśyēnacit*, „the most ancient and primitive form.“²⁾ Nach Śat. Br.³⁾ 10, 2, 2, 5. 7. 8, Āp. Śr. S.

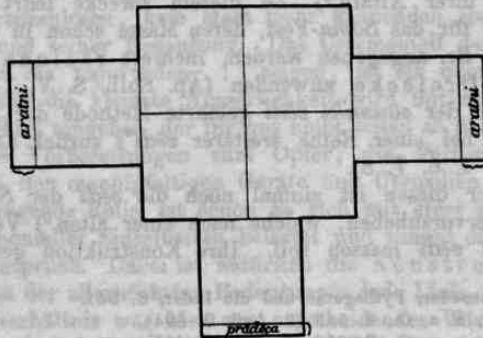


Fig. 1.

1) Cantor, a. a. O., S. 544 (2. Aufl. S. 599).

2) Thibaut, JASB, 231.

3) Śat. Br. 10, 2, 3, 17 wird der „einfache“ (*ēkavidha*), bloss quadratische, noch ältere *agni*, welcher offenbar die Vorstufe des *caturaśraśyēnacit* bildet,

XVI, 17, 10—14, *Āp. Śulb. S. VIII, 2*, *Bādh. Śulb. S. III, 16—22* besteht der *ātman* (Körper) dieser, die Gestalt eines Falken in rohen Umrissen nachahmenden,¹⁾ Normalform aus 4 Quadraten, jeder Flügel, sowie der Schwanz aus einem Quadrat; und damit die Form des Altars der wirklichen Gestalt eines Vogels noch etwas näher komme, wird jeder Flügel um 1 *aratni* ($= \frac{1}{5}$ *puruṣa*) und der Schwanz um 1 *prādēsa* ($= \frac{1}{10}$ *puruṣa*) verlängert. Gemäss seiner Zusammensetzung heisst dieser Altar auch *agni sāratinprādēsa saptavidha* (z. B. *Āp. Śulb. S. XV, 3*).

Bei der Ausmessung der Grundfläche desselben handelt es sich also um die Konstruktion von Quadraten, wofür *Āpastamba* ausdrücklich 2 Methoden überliefert.

a) Die erste, *Āp. Śulb. S. VIII, 8—IX, 2* beschriebene ist höchst altertümlich und primitiv. Sie dürfte die älteste unter allen uns bekannten Methoden für *caturaśrakaraṇa* sein, also insbesondere auch älter als diejenige des *Bādhāyana*, von welcher Thibaut *JASB.*, 251 sagt: „In the last place I give a method of *chatur-āśrakaraṇa*, which is found in *Baudhāyana* only, but there in the first place. It seems to be the most ancient of all the methods



Fig. 2.

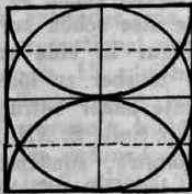


Fig. 3.

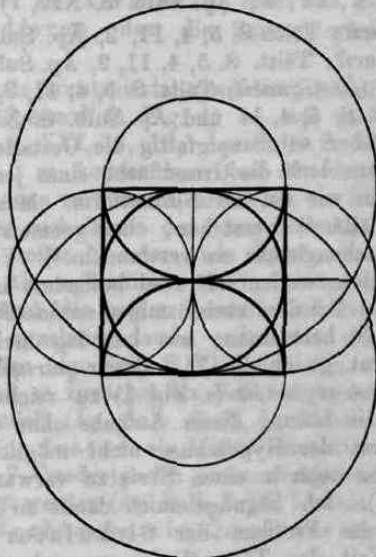


Fig. 4.

(Nach Thibaut *JASB.*, plate XV, fig. 9.)

verboten; er war also in der Schule des weissen *Yajus* zur Zeit des *Śat. Br.* bereits veraltet. Dagegen spielt er bei *Āpastamba* noch eine, freilich ganz untergeordnete, Rolle (vgl. *Āp. Śr. S. XVI, 17, 15*; *Āp. Śulb. S. VIII, 3 u. 5 XII, 1 u. 2*).

1) Thibaut, *JASB.*, 231.

enumerated.* Die in Rede stehende Methode des *Āpastamba*, welche sich unter den von Thibaut aufgeführten nicht befindet und in meiner Übersetzung a. a. O. nachgelesen werden kann, ergibt die Figur 2. Diese ist für den *ātman* viermal zu wiederholen, wodurch man die 3. Zeichnung erhält; und offenbar nur eine Weiterbildung dieser 3. Figur ist die vierte, welche das von Thibaut JASB., 251 wiedergegebene Verfahren des *Bāndhāyana* darstellt.

b) Die zweite, jüngere und rascher zum Ziel führende Methode des *Āpastamba* (*Āp. Śulb. S. IX, 3*) ist eine Anwendung des *saviśēṣa* (*Āp. Śulb. S. I, 6*), d. h. des Näherungswertes für die *dvikaraṇi* ($= \sqrt{2}$). Dieses Verfahren setzt also den Satz vom Quadrat der Hypotenuse als bekannt voraus.

2. Wenn die Inder durch das Opfer besondere Zwecke erreichen wollten, so traten an die Stelle der Normalform die *kāmya*'s, d. h. die *agni*'s für spezielle Wünsche. Dahin gehört der *agni* von der Gestalt eines Falken mit eingebogenen Flügeln und ausgebreitetem Schwanze (*Āp. Śulb. S. XV, 1ff.*, *Tāitt. S. 5, 4, 11, 1*), der in Form eines Dreiecks (*prāṅgacit*; *Tāitt. S. 5, 4, 11, 1*, *Āp. Śulb. S. XII, 4*), eines Doppeldreiecks (*ubhayataḥprāṅga*; *Tāitt. S. 5, 4, 11, 2*, *Āp. Śulb. S. XII, 7*), eines Wagenrades (*rathacakra*; *Tāitt. S. 5, 4, 11, 2*, *Āp. Śulb. S. XII, 11*), eines Troges (*drōṇacit*; *Tāitt. S. 5, 4, 11, 2*, *Āp. Śulb. S. XIII, 4*), einer Leichenstätte (*śmaśānacit*; *Tāitt. S. 5, 4, 11, 3*, *Āp. Śulb. S. XIV, 8*) u. s. w. (*Tāitt. S. 5, 4, 11* und *Āp. Śulb. S. XIV*) geschichtete *agni*.

Aber so mannigfaltig die Gestalten der *kāmya*'s auch waren, so hatte doch die Grundfläche eines jeden derselben genau so gross zu sein wie bei der Normalform. Man musste also schon zur Zeit der *Tāitt. S.* verstehen, eine geometrische Figur in eine andere ihr flächengleiche zu verwandeln.¹⁾ Von den hierbei zu lösenden Aufgaben wollen wir zwei besonders interessante näher betrachten.

a) Bei dem kreisförmigen *rathacakra* (*Āp. Śulb. S. XII, 11—XIII, 3*) hatte man, wie bei den meisten *kāmya*'s, zunächst ein Quadrat gleich der $7\frac{1}{2}$ Quadr.-*puruṣa* messenden Grundfläche des *caturaśraśyēnacit* (s. Fig. 1) zu zeichnen. Es ist leicht zu sehen, dass die Lösung dieser Aufgabe ohne die Kenntnis des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse nicht möglich war. Jenes Quadrat war alsdann noch in einen Kreis zu verwandeln (*Āp. Śulb. S. XII, 12; III, 2*). Ich begnüge mich damit zu konstatieren, dass die Inder also das Problem der Cirkulatur des Quadrates²⁾ schon zur Zeit der *Tāitt. S.* (wenn auch auf sehr primitivem Wege; s. *Āp. Śulb. S. III, 2*) zu lösen verstehen mussten, und werde mich hiermit, wie auch mit der Regel für die Quadratur des Kreises²⁾ (*Āp. Śulb. S. III, 3*), in dieser Abhandlung weiterhin nicht mehr beschäftigen.

1) Vgl. Cantor, a. a. O., S. 543 (2. Aufl. S. 597).

2) Vgl. Cantor, a. a. O., S. 546 (2. Aufl. S. 601).

b) Beim *praiṅgacit* (Āp. Śulb. S. XII, 4—6) musste man das unter a) genannte Quadrat = $7\frac{1}{2}$ Quadr.-*puruṣa* verdoppeln (Āp. Śulb. S. XII, 5), oder was dasselbe besagt, die *dvikaraṇi* (= $\sqrt{2}$) konstruieren. Die Hälfte des Quadrats über der *dvikaraṇi* ergab dann das gesuchte (gleichschenklige) Dreieck (Āp. Śulb. S. XII, 5).

3. Nach Śat. Br.¹⁾ 10, 2, 3, 18, Āp. Śr. S. XVI, 17, 15 u. 16, Āp. Śulb. S. VIII, 3 u. 4, Bāudh. Śulb. S. II, 1 ff. war der *agni*, wenn er das zweite Mal konstruiert wurde, um 1 Quadr.-*puruṣa* grösser als beim ersten Mal, ebenso beim dritten Mal um 1 Quadr.-*puruṣa* grösser als das zweite Mal und so fort. Die Inder mussten also ferner spätestens schon zur Zeit des Śat. Br. verstehen, eine geometrische Figur zu bilden, die einer gegebenen ähnlich ist und zu derselben in bestimmtem Grössenverhältnisse steht.²⁾

a) War nun der erstmals konstruierte *agni* der „einfache“ (*eka-vidha*) gleich 1 Quadr.-*puruṣa* — was Āpastamba (vgl. S. 546 Anm. 3) nebenbei noch zulässt, während Śat. Br. 10, 2, 3, 17 es verbietet —, so hatte man also den zweiten, ebenfalls quadratischen, doppelt so gross, den dritten dreimal so gross u. s. w. herzustellen, d. h. der Reihe nach $\sqrt{2}$ bis³⁾ $\sqrt{6}$ zu konstruieren, oder was dasselbe ist, Quadrate so zu addieren, dass die Summe wieder in Quadratform erschien.

b) War aber der erstmals konstruierte *agni* der „siebenfache“ (*saptavidha*) oder *caturaśraśyēnacit* (s. Fig. 1) — wie nach Śat. Br.¹⁾ 10, 2, 3, 18, Āp. Śr. S. XVI, 17, 16, Āp. Śulb. S. VIII, 4, Bāudh. Śulb. S. II, 1 ff. —, so konnte man bei den folgenden Malen entweder, wie Bāudhāyana vorschreibt, alle Teile der Normalform proportional vergrössern und darum das, was hinzukam, zunächst in 15 gleiche Teile teilen;⁴⁾ oder, wie Āpastamba lehrt (der offenbar auch hier eine ältere Tradition überliefert hat⁵⁾), nur die 7 *puruṣa*'s, nicht aber auch die beiden *aratni*'s und den *prā-dēśa* des *caturaśraśyēnacit* zunehmen lassen und darum den Zuwachs in 7 gleiche Teile teilen (Āp. Śulb. S. VIII, 6). Ein solches Siebenteil musste dann, wenn es zunächst als Rechteck gezeichnet war, in ein Quadrat verwandelt (Āp. Śulb. S. II, 7; hierbei tritt die Subtraktion von Quadraten als Hilfskonstruktion auf) und dieses mit einem der 7 Quadrate des *caturaśraśyēnacit* in einem neuen Quadrate vereinigt werden (Āp. Śulb. S. IX, 5, Anm. 5, β). Die Verwandlung von Rechtecken in Quadrate und die

1) Vgl. Weber, Indische Studien 10, 240 f.

2) Vgl. Cantor, a. a. O., S. 542 (2. Aufl. S. 597).

3) Vgl. Āp. Śulb. S. VIII, 5, Anm. 1 u. 2; IX, 5, Anm. 4; XII, 1.

4) Über das weitere Verfahren des Bāudhāyana siehe Thibaut's Erklärung zu Bāudh. Śulb. S. II, 12 (Paṇḍit X, 73).

5) Dies kann noch näher aus Āp. Śulb. S. IX, 5, Anm. 5, γ ersehen werden.

Addition von Quadraten setzt aber den Satz vom Quadrat der Hypotenuse als bekannt voraus.

4. Ebenso unentbehrlich war dieser Satz für die Konstruktion des *agni* beim *āsvamēdha*, der von vornherein entweder „dreimal so gross“ als die Normalform, oder „21fach“ sein musste (Āp. Sulb. S. XXI, 5 u. 9; IX, 5, Anm. 5, a). Dabei ist zu beachten, dass beide Vorschriften nach Bāudh. Sulb. S. III, 323 Brāhmaṇa-Stellen sind.

So sehen wir also (um nur das Wichtigste zu resümieren) rationale rechtwinklige Dreiecke, die Addition von Quadraten und die geometrische Konstruktion von $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ u. s. w., die Subtraktion von Quadraten und die Verwandlung von Rechtecken in Quadrate — mit Einem Wort: den Satz vom Quadrat der Hypotenuse bei der Ausmessung der altindischen Altäre schon in sehr früher Zeit eine so hervorragende Rolle spielen, dass wir jetzt speziell die Frage aufwerfen müssen:

§ 2.

Wie alt ist der Satz vom Quadrat der Hypotenuse bei den Indern?

I. Direkt ausgesprochen ist dieser Satz, und zwar in zwei Unterfälle geschieden, zuerst in den Sulbasūtra's, z. B. Āp. Sulb. S. I, 4 und 5. Wie alt ist nun das *Āpastamba-Sulba-Sūtra*?

Hierauf lautet die nächste Antwort: es ist nicht jünger als die übrigen Teile des *Āpastamba-Kalpa-Sūtra*; denn wie z. B. „das *Sulvasūtra* in dem *Mānava-Srāutasūtra* nicht etwa als einer der Anhänge oder Ergänzungen (*Parīśiṣṭa*) auftritt, sondern als ein reguläres Kapitel (Kap. 10)¹⁾; wie ferner das *Bāudhāyana-Sulba-Sūtra* „very likely forms a part of *Baudhāyana's Kalpasūtra*“²⁾; so bildet auch das *Āpastamba-Sulba-Sūtra* einen integrierenden Bestandteil³⁾ des *Āpastamba-Srāuta-Sūtra*. Dies geht besonders deutlich hervor aus der bis jetzt nicht verwerteten Stelle Āp. Śr. S. XVII, 26, 2: *chandas̄citam iti kām̄yās. tē sulbeṣv anukrāntāḥ*. Gemäss dieser Stelle finden wir die *kām̄ya's* auch wirklich im Āp. Śr. S. weiter mit keinem Worte erwähnt. Und doch werden die meisten derselben schon Tāitt. S. 5, 4, 11 aufgezählt. Ein *Srāutasūtra*, das sie nicht behandelt hätte, wäre also lückenhaft gewesen. Und so verweist der *Sūtra*-Verfasser in der Stelle Āp. Śr. S. XVII, 26, 2 auf einen anderen Teil desselben Werkes, eben auf sein *Sulbasūtra*, wo die *kām̄ya's* von den gesamten 21 Kapiteln nicht weniger als annähernd 10 ausfüllen (Āp. Sulb. S. XII, 3—XXI, 5).

Da sich demnach das Āp. Sulb. S. an das Āp. Śr. S. (*Praśna* 1—23 des gesamten Ritualkomplexes) ergänzend, also unmittelbar

1) v. Schroeder, Pythagoras und die Inder, S. 46, Anm. 1.

2) Thibaut, JASB., 228.

3) Garbe, Sāṃkhya-Philosophie, S. 93, Anm. 2.

anschliesst und mit demselben im engsten Zusammenhange steht, so legt sich die Frage nahe, ob nicht die Manuskripte D und E¹⁾, welche das *Āp. Śulb. S.* als 24. *Praśna* zählen, die älteste Anordnung überliefert haben. Ein weiteres Argument hiefür darf wohl darin gesehen werden, dass das 60. der (nach der bisherigen Annahme, nebst anderem, den 24. *Praśna* bildenden) *Paribhāṣāsūtra*'s, wie schon Max Müller in einer Anmerkung zu demselben²⁾ angedeutet hat, in erster Linie auf das *Śulbasūtra* sich zu beziehen scheint. Da dies darauf hinweisen würde, dass das *Śulbasūtra* den *Paribhāṣāsūtra*'s vorausgeht, und da wir andererseits vorhin gesehen haben, dass das *Śulbasūtra* unmittelbar auf das *Śrāutasūtra* folgen sollte, so ist es schon nach dem bisherigen sehr wahrscheinlich, dass das *Āp. Śulb. S.* ursprünglich nicht der 30., sondern der 24. *Praśna* war.

Diese meine Vermutung findet nun aber noch eine wichtige Bestätigung und Ergänzung dadurch, dass (wie ich erst nachträglich erfuhr) Prof. Garbe in seiner Einleitung³⁾ zum *Āp. Śr. S.*, Vol. III den Nachweis liefert, dass der ganze bisher als 24. gezählte *Praśna* (*Paribhāṣā*'s, *Pravara*, *Hāutraka*) eine spätere Interpolation ist. Garbe's Untersuchung zeigt also, dass dieser *Praśna* nicht von Anfang an der 24. gewesen sein kann; und ich glaube hier, von ganz anderen Gründen ausgehend, sehr wahrscheinlich gemacht zu haben, dass das *Śulbasūtra*, wie die Manuskripte D und E überliefern, ursprünglich der 24. *Praśna* war. Diese Übereinstimmung zweier unabhängig von einander gefundener Resultate spricht gewiss nicht wenig für die Richtigkeit eines jeden derselben.

Doch mag das *Āp. Śulb. S.* der 24. oder der letzte *Praśna* sein — jedenfalls ist es so alt wie die übrigen echten Teile des *Āpastamba-Kalpa-Sūtra*. Und dieses kann nach Bühler's⁴⁾ Untersuchungen, auf die sich auch Hillebrandt⁵⁾ und Jolly⁶⁾ beziehen, nicht später als im 4. oder 5. vorchristlichen Jahrhundert entstanden sein.

Schon die Thatsache, dass das *Āp. Śulb. S.* also mindestens dem 4. oder 5. Jahrhundert vor Chr. angehört, würde genügen, um Cantor's Hypothese⁷⁾, die indische Geometrie von den *Śulbasūtra*'s an sei ein Ableger der alexandrinischen, und zwar Heronischen, Geometrie (die später als 100 v. Chr. nach Indien eingedrungen

1) Über die Mss. D und E siehe Garbe's Einleitung zu *Āp. Śr. S.*, Vol. I.

2) Max Müller, ZDMG., 9. Bd., S. LVI. Das erwähnte 60. Sūtra lautet: *Selle, welche zusammengenommen werden, soll man nach links hin aufziehen, und nach rechts hin zusammennehmen.*

3) Herr Prof. Garbe hatte die Güte, mich seine Einleitung im Manuskript lesen zu lassen.

4) Bühler, *Sacred Books of the East*, Vol. II, Introduction to *Āpastamba* (S. IX, ff.; vgl. besonders S. XL—XLIII).

5) Hillebrandt, a. a. O., S. 31.

6) Jolly, *Grundriss der ind.-ar. Philol.*, II. Bd., 8. Heft, S. 3.

7) Cantor, a. a. O., S. 511. 540. 548 (2. Aufl. S. 562. 595. 604).

sein soll), als unbegründet; und Weber's Meinung, es stehe „der Annahme einer Benutzung der Lehre des Alexandriner's Hero [von Seiten der *Sūlasūtra*'s] litterargeschichtlich nichts im Wege“¹⁾, als unhaltbar zu erweisen.

Was nun aber speziell den Satz vom Quadrat der Hypotenuse betrifft, so sprechen mehrere Gründe dafür, dass er den Indern schon viel früher als im 4. oder 5. vorchristlichen Jahrhundert bekannt war.

Zunächst liesse sich darauf hinweisen, dass *Bāudhāyana*, dessen *Sūlasūtra* diesen Satz ja ebenfalls enthält, nach Bühler²⁾ mindestens 200 Jahre früher ist als *Āpastamba*. Da indessen über das zeitliche Verhältnis von *Bāudhāyana* und *Āpastamba* noch nichts Sicheres ausgemacht zu sein scheint, so will ich auf diesen Punkt keinen besonderen Wert legen³⁾.

Sehr ins Gewicht fallend ist dagegen die Thatsache, dass „das in den *Sūlasūtra*'s gebotene Material natürlich noch weit älter ist als die Lehrbücher selbst“⁴⁾. Denn „nur die Form, die Redaktion der einzelnen *Sūlasūtra*'s dürfen wir den Häuptionen, resp. massgebenden Autoritäten der einzelnen vedischen Schulen zuschreiben. Der wesentliche, ihnen allen gemeinsame Inhalt ist natürlich

1) v. Schroeder, Indiens Litteratur und Kultur, S. 720.

2) Bühler, a. a. O. (bes. S. XXII und XXIV).

3) Vielmehr möchte ich in diesem Zusammenhang darauf hinweisen, dass der Inhalt des *Āp. Sūla. S.* in mehreren Punkten eine frühere Stufe der altbrahmanischen Opfertradition darstellt als der des *Bāudh. Sūla. S.* Zwei solche Punkte wurden schon in § 1 gelegentlich erwähnt (§ 1. B, II, 1, a und 3, b). Hier sollen noch zwei andere, besonders charakteristische, angeführt werden. — Für die Quadratur des Kreises giebt *Bāudhāyana* 2 Regeln, wovon die eine, the „simpler and less accurate“ (Thibaut, JASB., 254), auch bei *Āpastamba* (und *Kātyāyana*) sich findet, während die andere, auf etwas umständlichem rechnerischem Wege gewonnene, ohne Zweifel jüngere, allein bei *Bāudhāyana* anzutreffen ist (Thibaut, JASB., 253). — Andererseits überliefert *Āpastamba* einige *Sūtra*'s worin die Zunahme und Abnahme der Seite des Quadrates mit der Zunahme und Abnahme des Inhalts desselben verglichen (*Āp. Sūla. S.* III, 4—6. 8. 10; Thibaut, JASB., 243) und Regeln für die Berechnung (*Āp. Sūla. S.* III, 7) und Vergrößerung (*Āp. Sūla. S.* III, 9) eines Quadrates gegeben werden; und diese *Sūtra*'s welche den Stempel hoher Altertümlichkeit tragen und für wichtige, in jedem *Sūlasūtra* enthaltene Regeln die — freilich sehr einfache — Voraussetzung bilden, fehlen bei *Bāudhāyana*, offenbar als zu elementar und zu selbstverständlich, während sie bei *Āpastamba* anscheinend als etwas dem *Sūtra*-Verfasser sehr Wichtiges vorgetragen werden und $\frac{1}{2}$ Kapitel füllen. Um diesen Unterschied zwischen *Bāudh.* und *Āp.* voll zu würdigen, müssen wir bedenken, dass auch unser *Sūtra*-Verfasser zu jenen indischen Schriftstellern gehört, die sich über die Ersparnis eines einzigen Buchstabens mehr gefreut haben als über die Geburt eines Sohnes. — Überliefert uns demnach das *Āp. Sūla. S.* in wichtigen Punkten eine ältere Stufe der vedischen Opfergeometrie als das *Bāudh. Sūla. S.*, so folgt daraus noch nicht notwendig, dass das letztere später schriftlich fixiert sein müsse als das erstere. Denn jene Unterschiede beider lassen sich vielleicht auch daraus erklären, dass die Schule des *Āpastamba* zäh an der alten, allen Schulen gemeinsamen Tradition festhielt, während die Schule des *Bāudhāyana* dieselbe früh in einzelner Weiterbildung.

4) Garbe, *Sāṃkhya-Philos.*, S. 93, Anm. 2.

älter, muss als alte Priesterweisheit, brahmanische Opfertradition bezeichnet werden¹⁾. Auf Grund dieser Erwägungen dürfen wir also annehmen, dass der Satz vom Quadrat der Hypotenuse, der z. B. Āpastamba, Bāudhāyana und Kātyāyana gemeinsam ist²⁾, in Indien schon viel früher als im 4. oder 5. Jahrhundert vor Chr. bekannt war.

Auf eine noch viel frühere Zeit als das 4. oder 5. vorchristliche Jahrhundert weist aber auch noch anderes, das schon in § 1 festgestellt wurde. Ich habe hier nicht etwa im Sinne, mich bloss in allgemeiner Weise darauf zu berufen, dass die Blütezeit des indischen Opferwesens in eine Periode fällt, die sehr wohl als das 12. vorchristliche Jahrhundert einschliessend angenommen werden darf. Vielmehr möchte ich an die im 1. Abschnitt konstatierte, sehr bestimmte Thatsache erinnern, dass sich (abgesehen von gewissen alten Traditionen über die Grösse bestimmter Altäre) in der Tāitt. S. Vorschriften über die *kāmya*'s und im Sat. Br. Vorschriften über die Vergrösserung des *caturāśraśyenacit* finden, von denen es sich gar nicht denken lässt, wie sie ohne die Kenntnis des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse hätten ausgeführt werden sollen. Nun ist die Tāitt. S. um einiges älter³⁾ als das Sat. Br., dieses aber gehört zu einer Klasse von Werken, von denen Oldenberg, Buddha, 3. Aufl., S. 19 sagt: „Wir werden schwerlich wesentlich fehl greifen, wenn wir ihre Entstehung etwa von dem zehnten bis zum achten Jahrhundert vor der christlichen Ära ansetzen“. Demnach sind wir berechtigt zu folgern, dass die Inder den Satz vom Quadrat der Hypotenuse spätestens im 8. Jahrhundert vor Chr. kennen mussten.

Zu demselben Ergebnis führt uns noch ein anderer Weg.

II. Die meisten der Gründe, die wir im vorstehenden für die Datierung des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse benützt haben, sind schon bisher bekannt gewesen. In ein ganz neues Stadium aber tritt die Untersuchung über das Alter jenes Satzes durch zwei Stellen — die eine aus der Tāitt. S., die andere aus dem Sat. Br. — die bisher von niemand für die Entscheidung unserer Frage verwertet worden sind.

Tāitt. S. 6, 2, 4, 5 heisst es von der *vēdi* (Fig. 5) für das Soma-Opfer: *triṃśat padāni paścāt tiraścī bhavati, śattriṃśat prācī, caturviṃśatiḥ purastāt tiraścī*. „Die westliche Seite ist 30 *padā*'s lang, die *prācī* 36, die östliche Seite 24“. Dasselbe wird Sat. Br. 10, 2, 3, 4 vorgeschrieben. Jene Stelle der Tāitt. S. liegt Āp. Śr. S. XI, 4, 12 und 13 zu Grunde; sie ist ferner Āp. Sulb. S. V, 1 mit *iti vijnāyatā* citiert, von Thibaut (jedoch ohne eine Bemerkung darüber, wo so gelehrt werde) in seine Abhandlung „On the Śulvasūtras“ aufgenommen (JASB., 235) und daselbst von

1) v. Schroeder, Indiens Litt. und Kultur, S. 719.

2) Thibaut, JASB., 233 f.

3) v. Schroeder, a. a. O., S. 89 f.

Cantor nebst den von Thibaut ausserdem aufgeführten Stellen *Āp. Sulb. S. V, 2—6* gelesen worden.

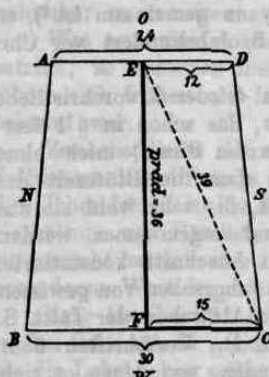


Fig. 5.

Es ist nun zunächst die Frage zu erheben: was wissen wir über die in jener Stelle der *Tāitt. S.* und des *Sat. Br.* genannte *prāci*? 1. Sie geht, genau in der Richtung von Westen nach Osten, durch die Mitte des Altars (Fig. 5). 2. Sie ist 36 *pada*'s lang. 3. Sie halbiert die westliche und die östliche Seite, zerlegt also jene in 2 mal 15, diese in 2 mal 12 *pada*'s. 4. Sie bildet mit den genannten Seiten rechte Winkel. 5. Über die Rolle, welche die *prāci* bei der Ausmessung des Altars spielte, sowie über die Konstruktion überhaupt, erfahren wir allerdings in den genannten Stellen der *Tāitt. S.* und des *Sat. Br.* nichts. Aber

wer diese Werke kennt, wird dies auch kaum erwarten. Die *Tāittirīya-Samhitā* ist der *Yajurvēda* in der Recension der *Tāittirīya-Schule*, und der *Yajurvēda* „enthält diejenigen Sprüche oder Verse, welche der die eigentliche Opferhandlung verrichtende Priester, der sogenannte *Adhvaryu*, zu sprechen oder zu murmeln hatte“¹⁾. Und die *Brāhmaṇa*'s „bieten keine fortlaufende Darstellung des Opfers, sondern vielmehr Erläuterungen zu demselben. Der Gang des Opfers wird in ihnen als bekannt vorausgesetzt und nur durch einzelne Anführungen ab und zu ins Gedächtnis gerufen“²⁾. Demnach ist es sehr begreiflich, wenn Werke wie die *Tāittirīya-Samhitā* und das *Satapatha-Brāhmaṇa* über das Verfahren bei der Konstruktion der Altäre schweigen. Dafür können wir nun aber z. B. bei Cantor lesen: „Das erste und wichtigste Geschäft besteht in der Absteckung der *prāci*, d. h. der ostwestlichen Linie“³⁾. „Ist die *prāci* gefunden, so werden rechte Winkel abgesteckt, und zwar mit Hilfe eines Seiles“⁴⁾. Rechte Winkel bildet nun, wie schon gesagt, die *prāci* = 36 *pada*'s mit der westlichen und der östlichen Seite; für die erstere waren von der *prāci* aus nach Norden und Süden je 15 *pada*'s abzumessen; d. h. die Inder stellten bei der Konstruktion der *sāumikī vēdi* schon zur Zeit der *Tāitt. S.* und des *Sat. Br.* einen rechten Winkel mit den Schenkeln 36 und 15 her. Nun hat es mit diesen, einen rechten Winkel bildenden, Seiten 36 und 15 eine besondere Bewandnis: sie sind die Katheten

1) v. Schroeder, a. a. O., S. 88.

2) v. Schroeder, a. a. O., S. 181.

3) Cantor, *Gräko-indische Studien*, S. 18 (*Zeitschrift für Mathematik und Physik* XXII, histor.-litterar. Abt.).

4) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I*, 542 (2. Aufl. S. 596).

eines rationalen rechtwinkligen Dreiecks. Wer sollte da nicht sofort bemerken, dass also die Konstruktion der *sāumikī vēdi* schon zur Zeit der Tāitt. S. und des Śat. Br. auf der Anwendung des rationalen rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 15 und 36 beruhte; ja, dass die Vorschriften des Śat. Br. und der Tāitt. S., die jene Masszahlen übereinstimmend, also auf Grund noch älterer Tradition angeben, offenbar erst aufgestellt wurden, nachdem man vorher schon jenes rationale rechtwinklige Dreieck gefunden hatte?

Dass Tāitt. S. 6, 2, 4, 5 und Śat. Br. 10, 2, 3, 4 von diesem rationalen rechtwinkligen Dreieck die Hypotenuse = 39 (EC in Fig. 5) nicht erwähnen, erklärt sich leicht daraus, dass jene Stellen die Masszahlen des fertigen Altars, nicht aber auch die der Hilfslinien angeben wollen. — Wie wenig es berechtigt wäre, an der Nichterwähnung der Hypotenuse Anstoss zu nehmen, geht aus folgender, ebenfalls nur die Katheten rationaler rechtwinkliger Dreiecke nennenden Regel des Bāudhāyana hervor, die ich nach Cantor wiedergebe: „Das Seil, quer über ein längliches Rechteck gespannt, bringt beide Flächen hervor, welche die Seile längs der grösseren und kleineren Seite gespannt hervorbringen. Diesen zweiten Fall erkenne man an den Rechtecken, deren Seiten aus 3 und 4, aus 12 und 5, aus 15 und 8, aus 7 und 24, aus 12 und 35, aus 15 und 36 Längeneinheiten bestehen. Das ist nun offenbar der pythagoräische Lehrsatz, erläutert an Zahlenbeispielen. Das zuletzt genannte Dreieck mit den Katheten 15 und 36 ist vorher schon einmal in den kleineren Zahlen 12 und 5 genannt...“¹⁾. — Das Fehlen der Hypotenuse darf also nicht auffallen. Schliesst doch auch Cantor daraus, dass bei biblischen Rechtecken das Verhältnis 3 zu 4 vorkommt, auf die Kenntnis des rationalen rechtwinkligen Dreiecks von den Seiten 3, 4 und 5. „Das Verhältnis 3 zu 4 für zwei senkrecht zu einander zu denkende Abmessungen, oder auch 10 mal 3 zu 4, 3 zu 5 mal 4 kommt wiederholt vor, und wenn wir nicht verschweigen wollen noch dürfen, dass ein Rechteck von 3 zu 5 ebenfalls an häufigeren Stellen sich bemerklich macht, so ist doch nicht ausgeschlossen, dass jene ersterwähnten Masszahlen 3 zu 4 dazu dienten, einen rechten Winkel mittels des Dreiecks von den Seiten 3, 4, 5 zu sichern“²⁾. — Dazu kommt endlich noch, dass im Āp. Sulb. S. genau dieselben Zahlen wie in der Tāitt. S. und im Śat. Br. (a. a. O.), nämlich 24, bzw. 12; 30, bzw. 15 und 36, auftreten und inmitten derselben nun auch die Hypotenuse = 39 erscheint (Āp. Sulb. S. V, 1 und 2).

Nach alledem kann kein Zweifel darüber bestehen, dass das rationale rechtwinklige Dreieck mit den Katheten 15 und 36 schon zur Zeit der Tāitt. S. und des Śat. Br. in Indien bekannt war und,

1) Cantor, a. a. O., S. 543f. (2. Aufl. S. 598f.).

2) Cantor, a. a. O., S. 92 (2. Aufl. S. 102).

ebenso wie *Āp. Śulb. S. V, 1* und *2*, bei der Ausmessung der *sāumikī vēdi* verwendet wurde.

Cantor, der den Inhalt der Stellen *Tāitt. S. 6, 2, 4, 5* und *Sat. Br. 10, 2, 3, 4* nur aus *JASB.*, 235 (d. h. aus *Āp. Śulb. S. V, 1*) kannte, hat nun in der Meinung, es handle sich lediglich um die *Śulbasūtra's*, im Anschluss an *Āp. Śulb. S. V, 2* folgenden hochwichtigen Satz ausgesprochen. Dass das Verfahren bei der Konstruktion der *sāumikī vēdi* „auf dem rechtwinkligen Dreiecke von den Seiten 15, 36, 39, oder in kleinsten Zahlen ausgedrückt 5, 12, 13 beruht, ist einleuchtend. Einleuchtend ist aber auch, dass es in der Kenntnis des pythagoräischen Lehrsatzes wurzelt¹⁾, dass es die Seilspannung genau in der gleichen Weise anwendet wie Heron dieselbe benutzte (*S. 324 Fig. 58*), wie wahrscheinlich die altägyptischen Harpedonapten bei der Lösung der gleichen Aufgaben verfahren (*S. 56*)“²⁾. Cantor glaubt in dem, was er hier ausführt, mit einen Beweis für seine Behauptung gefunden zu haben, „es sei die alexandrinische Geometrie in einer Zeit, die später liegt als das Jahr 100 vor Chr., nach Indien eingedrungen“³⁾. Aber welche Ironie des Schicksals! In Wirklichkeit sagt der berühmte Geschichtschreiber der Mathematik damit, ganz gegen seinen Willen, nichts anderes, als dass (wie nach dem vorhin Ausgeführten leicht zu ergänzen ist) der Satz vom Quadrat der Hypotenuse schon zur Zeit der *Tāitt. S.* und des *Sat. Br.*, also spätestens im 8. Jahrhundert vor Chr., in Indien bekannt war.

Dies soll der folgende Abschnitt noch näher erläutern.

§ 3.

Weg der Auffindung des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse.

Im Anschluss an Hankel, und um möglichst kurz und deutlich dasjenige Theorem zu bezeichnen, das man gewöhnlich den Pythagoreischen Lehrsatz nennt, habe ich bisher immer den Ausdruck „Satz vom Quadrat der Hypotenuse“ gebraucht. Hierzu muss jedoch bemerkt werden, dass die *Śulbasūtra's* hier nicht, wie wir, vom rechtwinkligen Dreieck, sondern vom Quadrat und vom Rechteck reden, und dass sie (wie schon weiter oben hervorgehoben wurde) jene geometrische Wahrheit nicht als einheitlichen Satz, sondern in folgenden 2 Unterfällen aussprechen, die wohl in der aufgeführten Reihenfolge nacheinander auf verschiedenen Wegen gefunden wurden.

I. *caturaśrasyā 'kṣṇayārajjuḥ dvistāvatiṁ bhūmim karōti* (*Āp. Śulb. S. I, 5*).⁴⁾ „Die Diagonale eines Quadrats bringt (wenn

1) Diese Stelle ist von mir durch Sperrdruck hervorgehoben.

2) Cantor, a. a. O., S. 542 (2. Aufl. S. 597).

3) Cantor, a. a. O., S. 548 (2. Aufl. S. 604).

4) Die Parallelstellen aus *Baudhāyana* und *Kātyāyana* siehe bei Thibaut, *JASB.*, 233.

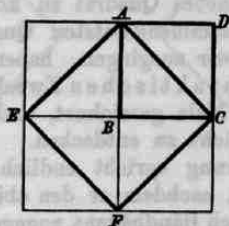
über ihr ein Quadrat konstruiert wird) eine doppelt so grosse Fläche hervor (als das ursprüngliche Quadrat ist)*.

Auf welchem Wege haben nun wohl die Inder diesen Satz gefunden?

Wie wir in § 1 sahen, ist der *caturaśrasyēnacit* einer der ältesten indischen Altäre. Für seine Konstruktion lehrt *Āpastamba* 2 Methoden, wovon die eine, die in § 1, B, II, 1, a als die älteste unter allen uns bekannten Methoden für *caturaśrakaraṇa* nachgewiesen wurde, den in Rede stehenden Satz nicht voraussetzt, während die zweite, jüngere eben auf dem obigen Satze beruht. Ich vermute nun, dass derselbe gerade an der mittels jener alten Methode konstruierten Figur des *caturaśrasyēnacit* entdeckt wurde. Der *ātman* dieses Altars (s. Fig. 1) besteht aus 4 Quadraten (Fig. 6); zog man in diesen die Diagonalen AE, EF, FC und CA, so konnte der Satz: *caturaśrasyā* (ABCD in Fig. 6) '*kṣṇayārājñur* (AC) *dvistāvatiṃ bhūmim* (AEFC) *karōti* uns schwer gefunden werden¹⁾.

Ich darf es wohl als eine Bestätigung meiner Vermutung betrachten, dass Fig. 6, die Quelle des obigen Satzes, sich auch sonst nachweisen lässt. *Bādhāyana's* „very imperfect“ Regel (Thibaut, JASB., 246) für die Verwandlung eines Quadrats (ABCD in Fig. 7) in ein Rechteck (EFCA) ergibt nämlich die Zeichnung 7, welche sich auf den ersten Blick als auf der danebenstehenden Fig. 6 beruhend erweist.

Weiter möchte ich zur Bestätigung meiner Annahme auf Thibaut's Erklärung hinweisen. „The authors of the sūtras do not give us



Siehe!*)
Fig. 6.

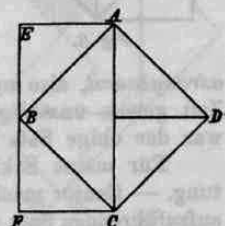


Fig. 7
(nach Thibaut, JASB., 246).

1) Als man später den unter II aufgeführten Satz und zugleich rationale rechtwinklige Dreiecke gefunden hatte, lag es nahe zu prüfen, ob sich nicht auch das Verhältnis zwischen der Diagonale des Quadrates und der Seite desselben in genauen Zahlen angeben lasse. Man verglich die Diagonale mit der Seite, nannte die Differenz *visēṣa* („Unterschied“; vgl. *Āp. Sūl.* S. II, 1 und I, 6) und kam nach langen vergeblichen Versuchen zu der Überzeugung, dass sich eine genaue Zahl für die Diagonale nicht finden lasse. So begnügte man sich mit einem Näherungswert, dem *saviṣēṣa* (*Āp. Sūl.* S. I, 6). Über den Weg, auf dem derselbe gefunden wurde, verweise ich auf Thibaut, JASB., 239 ff. Auf Thibaut's Erklärung bezieht sich auch Cantor, a. a. O., S. 545 (2. Auflage S. 600).

2) Vgl. Hankel, a. a. O., S. 205: „Das Wörtchen „Siehe!“ neben der mit den nötigen Hilfslinien versehenen Figur ersetzt den Brahmanen den mit dem feierlichen „Was zu beweisen war“ schliessenden Beweis der Griechen. Alles, was ein geübter Sinn durch anhaltende Betrachtung einer Fig. erkennen konnte, wurde als gewiss zugelassen“.

any hint as to the way in which they found their proposition regarding the diagonal of a square; but we may suppose that they, too, were observant of the fact that the square on the diagonal is divided by its own diagonals into four triangles, one of which is equal to half the first square. This is at the same time an immediately convincing proof of the Pythagorean proposition as far as squares or equilateral rectangular triangles are concerned" (Thibaut, JASB., 234). Die Fig. 8, von der Thibaut also ausgeht,

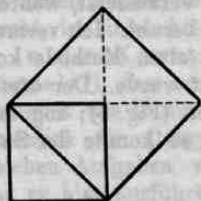


Fig. 8.

ist nun auch in unserer Fig. 6 enthalten; aber Thibaut's Erklärung befriedigt nicht, weil sie in den Quellen keine Anknüpfungspunkte findet, und weil es schwer zu sagen sein dürfte, was die indischen Priester, nachdem sie 1 Quadrat gezeichnet hatten, veranlasst haben soll, über der Diagonale desselben ein neues Quadrat zu konstruieren. Jene 4 zusammengesetzten Quadrate aber, von denen wir ausgingen, haben die Inder beim *catur-āśraśyēnacūṭ*, also zu praktischen Zwecken, schon in sehr früher Zeit gewiss unzählige Male gezeichnet, und an diesen 4 Quadraten war der obige Satz leicht zu entdecken.

Für meine Erklärung spricht endlich noch folgende Betrachtung. — Cantor macht, nachdem er den obigen, sowie den unter II aufzuführenden Satz nach Bāudhāyana angegeben hat, die Bemerkung: „Einen Beweis sucht man vergeblich“ (Cantor, Gräko-ind. Studien, in der Zeitschr. für Math. und Phys. XXII, histor.-litter. Abt., S. 13). Nun wird, wer die Sulbasūtra's näher kennt, wohl kaum einen Beweis darin suchen. Ausserdem würde z. B. Schopenhauer einen Beweis nicht gesucht haben; dies erhellt aus folgenden Stellen: „Ich kann mich nicht entbrechen, nochmals die, schon an einem andern Orte gegebene, Figur herzusetzen [hier Fig. 9], deren blosser Anblick, ohne alles Gerede, von der Wahrheit des Pythagorischen Lehrsatzes zwanzig Mal mehr Überzeugung giebt, als der Euklidische Mausefallenbeweis“ (Schopenhauer, Sämtl. Werke, Bd. III, „Über den Satz vom Grunde“, § 39). „Des Eukleides stelzbeiniger, ja, hinterlistiger Beweis verlässt uns beim Warum, und beistehende, schon bekannte, einfache Figur giebt auf einen Blick weit mehr, als jener Beweis, Einsicht in die Sache und innere feste Überzeugung von jener Notwendigkeit und von der Abhängigkeit jener Eigenschaft vom rechten Winkel“ (Schopenhauer, Sämtliche Werke, Bd. I, § 15). Wenn wir nun an der von Schopenhauer belobten Fig. 9 eine kleine Ergänzung vornehmen (Fig. 10), so erhalten wir genau die Figur, an der die Inder nach meiner Vermutung den Satz vom Quadrat über der Diagonale eines gegebenen Quadrats entdeckten, d. h. die anschauliche Überzeugung von der darin ausgesprochenen geometrischen Wahrheit zum ersten Male gewannen. Und an dieser anschaulichen Überzeugung liessen es sich die

Brahmanen offenbar genügen. Wir aber sind weit entfernt, von ihnen auch noch einen Beweis nach dem Muster der Euklidischen zu verlangen; wir halten es hierin vielmehr mit Schopenhauer und mit Hankel, welch letzterer, so feinführend und liebevoll in die Eigenart fremder Völker sich versenkender Mann in seinem geistreichen Buche „Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter“, S. 219 f., am Schlusse des von den Indern handelnden Kapitels, die folgenden (hier notwendig anzuführenden) goldenen Worte ausspricht: „Insofern es überhaupt die Aufgabe der Geschichts-

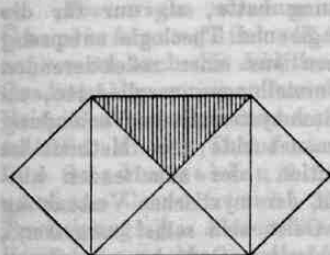


Fig. 9.

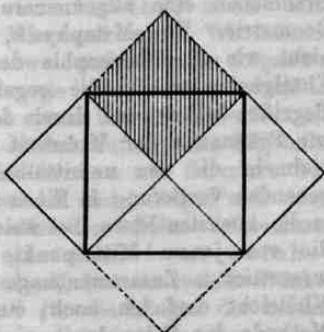


Fig. 10.

schreibung ist, durch die Schilderung verschiedener Völker und Zeiten die Anschauung so zu erweitern, dass sie nicht engherzig den Zustand einer bestimmten Zeit und eines bestimmten Volkes für den absolut normalen nimmt, — insofern ich es insbesondere für die Aufgabe des Geschichtsschreibers der Mathematik halte, das Vorurteil zu beseitigen, als ob es nur Eine Art ihrer geschichtlichen und nur Eine Form ihrer wissenschaftlichen Entwicklung gäbe, so gehört der Abschnitt, den wir jetzt beschliessen, zu den lehrreichsten.

Von früher Jugend an gewöhnt an die strenge griechische Form der Geometrie, mit Ehrfurcht erfüllt vor der klassischen Litteratur des griechischen Volkes, sind wir aufgewachsen in der Meinung, jene Form sei die absolut notwendige und einzig wissenschaftliche, und bemerken kaum, dass nicht allein die Form sondern auch der Geist unserer Arithmetik und Algebra, ja der gesamten neueren Mathematik ein von der Form und dem Geiste antiker Geometrie durchaus verschiedener ist. Es wird dem Leser nicht entgangen sein, wie nahe sich der Geist der heutigen Wissenschaft mit dem berührt, der sich in der Mathematik der Inder offenbart; die Folge wird zeigen, wie auch historisch die Entwicklung der neueren Völker durch Vermittelung der Araber von Indien her beeinflusst wurde. Unter diesen Umständen gewinnt die Mathematik unserer Stammverwandten am Ganges ein höheres Interesse, welches

es rechtfertigen wird, wenn wir zum Schlusse ihre charakteristischen Eigentümlichkeiten nochmals zusammenstellen.

Unter diesen tritt zunächst hervor das Vorwiegen der unmittelbaren Anschauung in der Entwicklung der Geometrie¹⁾, welches einen so merkwürdigen Gegensatz bildet gegen die durch Begriffe vermittelte Konstruktion der Sätze bei den Griechen. Wir haben uns über Vorzüge und Mängel beider Richtungen bereits ausgesprochen und hier nur hinzuzufügen, dass ebenso wie die Euklidische Methode nicht zufällig gerade die der griechischen Mathematiker geworden ist, so auch jene intuitive Methode bei den Brahmanen eine allgemeinere Bedeutung hatte, als nur für die Geometrie. Ihre Metaphysik, Kosmologie und Theologie entsprang nicht wie die Philosophie der Griechen aus einer reflektierenden Tätigkeit, welche die gegebenen Vorstellungen zergliederte, zu Begriffen bildete und durch deren logisch-systematische Verbindung zur Erkenntnis der Wahrheit zu kommen suchte; ihre Methode ist vielmehr die der unmittelbaren Intuition, der anhaltenden hingebenden Vertiefung in Einen Gedanken, der mystischen Versenkung in die höchsten Ideen, bei welcher der Geist, sich selbst vergessend, die von jenem Mittelpunkte ausstrahlenden Gedanken in ihrem wesentlichen Zusammenhange in Einem Bilde zu schauen meint. Vielleicht darf ich auch, um zu zeigen, wie jene geometrische Methode der Inder durch unsichtbare Fäden mit der Gesamtanlage verknüpft gewesen ist, darauf hinweisen, dass der Philosoph Deutschlands, welcher sich zu der Metaphysik der alten Brahmanen am stärksten hingezogen gefühlt hat, dass Schopenhauer einer der ersten gewesen ist, welcher gegen die Euklidische Methode kämpfend auftrat und, ohne von der indischen Geometrie Kunde zu haben, eine mit ihr wesentlich übereinstimmende anschauliche Entwicklung vorschlug²⁾.

II. Wir wenden uns nun zu dem zweiten indischen Satze, welcher *Āp. Sūl. S. I, 4* folgendermassen lautet³⁾: *dirghasya 'kṣṇayārajjuh, pārsvamānī tiryakmānī ca yat prthagbhūtē kurutas, tad ubhayaṃ karōti*. „Die Diagonale eines Rechteckes bringt (wenn mit ihr als Seite ein Quadrat konstruiert wird) beides hervor, was die längere und die kürzere Seite desselben, jede für sich, hervorbringen“³⁾.

1) Siehe S. 561 Anm. 2.

2) Über die Parallelstellen aus *Bāudhāyana* und *Kātyāyana* s. Thibaut, *JASB.*, 234.

3) *Āpastamba* fährt hier fort: *tābhir jñeyābhir uktaṃ viharāṇam*. „Mittels (Anwendung) dieser (d. h. der beiden Seiten und Diagonale eines Rechteckes) — und zwar solcher, die erkennbar sind — ist die Konstruktion (in I, 2 und 3) gelehrt worden“. Die hier erwähnten (allgemein gefassten) *Sūtra's* 1, 2 und 3, welche V, 2 und 3 in konkreter Form wiederkehren, enthalten Regeln für die Herstellung gewisser Altäre (*vedi's*) und sind eine Anwendung bestimmter rationaler rechtwinkliger Dreiecke. Mit den Worten „*tābhir jñeyābhir uktaṃ viharāṇam*“ sagt also *Āpastamba*, dass der oben angeführte

Wenn wir nun fragen, wie die Inder diesen Satz wohl gefunden haben, so ist es nicht ohne Interesse, zunächst einen Blick zu werfen auf den Weg, auf welchem nach Cantor's Annahme Pythagoras den nach ihm genannten Satz entdeckte. „Pythagoräisch war nach unserer durch mannigfache Überlieferung¹⁾ gestützten Darstellung die Erfindung des Satzes von den Quadraten der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks als eines arithmetischen²⁾ ausgehend von dem bestimmten Zahlenbeispiele $3^2 + 4^2 = 5^2$ “ (Cantor, Vorlesungen über Gesch. der Math., S. 159; 2. Aufl., S. 175). „Pythagoras bemerkte, meinen wir, dass $9 + 16 = 25$ (S. 144. [Hier heisst es: „Hier wagen wir nun ... eine unmittelbar nicht auf Überlieferung sich stützende Vermutung³⁾. Wir nehmen an, es sei auch die Addition von je zwei auf einander folgenden Quadratzahlen vorgenommen worden, um wie in den vorher erwähnten Beispielen einmal zuzusehen, ob dabei etwas Bemerkenswertes sich enthülle. In der That fand sich ein höchst auffallendes Ergebnis: Die Quadratzahlen 9 und 16 lieferten als Summe die nächste Quadratzahl 25, und nur bei ihnen zeigte sich diese Erscheinung“.). Als er diese unter allen Umständen interessante Bemerkung machte, kannte er bereits, gleichviel aus welcher Quelle, die Erfahrungsthat⁴⁾sache⁵⁾, dass ein rechter Winkel durch Annahme der Masszahlen 3, 4, 5 für die Längen der beiden Schenkel und für die Entfernung der Endpunkte derselben konstruiert werde. Wir haben (S. 56) darauf hingewiesen, dass die Ägypter, (S. 92) dass die Babylonier vielleicht die gleiche Kenntnis besaßen, dass die Chinesen ihrer sicherlich teilhaftig waren. ... Die geometrische und die arithmetische Wahrheit vereinigten sich nun in dem Bewusstsein des Pythagoras zu einem gemeinschaftlichen Satze“ (Cantor, a. a. O., S. 153 f. 2. Aufl., S. 169). „Pythagoräisch war ... eine Regel zur Ermittlung anderer Zahlen als 3, 4, 5, welche

2. indische Satz und rationale rechtwinklige Dreiecke (genauer: Rechtecke, deren beide Seiten und Diagonale in ganzen Zahlen ausgedrückt werden können) für ihn aufs engste zusammengehören. Dasselbe dürfen wir aus der entsprechenden Stelle des Bādhāyana herauslesen (vgl. Thibaut, JASB., 234f.; Cantor, a. a. O., S. 543 f. und 2. Aufl. S. 598. Diese Stelle ist schon oben S. 555 nach Cantor citiert worden). Die sehr wichtige That⁴⁾sache, dass der 2. Fall des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse für beide Sūtra-Verfasser mit rationalen rechtwinkligen Dreiecken im engsten Zusammenhange steht, werden wir erst recht würdigen können, nachdem wir aus der folgenden Untersuchung ersehen haben, dass die Brahmanen ihre rationalen rechtwinkligen Dreiecke und ihren 2. Satz an derselben geometrischen Figur entdeckten.

1) Auf die äusseren Zeugnisse, auf die sich der Cantor'sche Rekonstruktionsversuch stützt, will ich nicht näher eingehen, da Cantor, a. a. O., S. 129 (2. Aufl. S. 142) selbst hervorgehoben hat, dass man den meisten derselben „wegen ihres späten Datums kein Gewicht beilegen dürfe“. Die Stellen aus Proklus und aus dem alten Mathematikerverzeichnis, auf die Cantor dagegen grossen Wert legt, sagen nichts über den Weg der Auffindung jenes Satzes, sondern überliefern nur, dass derselbe von Pythagoras herrühre.

2) Von mir durch Sperrdruck hervorgehoben.

als Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks dienen können“, (Cantor, a. a. O., S. 159; 2. Aufl. S. 175. Dazu vgl. S. 157, 2. Aufl. S. 173).

An dieser Erklärung ist unter anderem interessant, dass Cantor nicht nur bei Pythagoras, sondern auch bei den Ägyptern, Babyloniern und Chinesen die Kenntnis des rationalen rechtwinkligen Dreiecks 3, 4, 5 als auf empirischem Wege erlangt betrachtet. Es ist mir sehr angenehm, mich hierauf weiter unten berufen zu können.

Gegen anderes in dem Cantor'schen Rekonstruktionsversuch erheben sich dagegen gewichtige Bedenken. 1. Nicht eine geometrische Figur, sondern die arithmetische Wahrheit, dass $9 + 16 = 25$, soll den ersten Ausgangspunkt bei der Entdeckung jenes Theorems gebildet haben. Dies stimmt folgerichtig zu einer anderen Stelle Cantor's, wo er vom „Rechnen in nahezu unbegrenzter Möglichkeit“ und „Anschauen“ sagt: „Das Eine wie das Andere ist zum Beweise schon bekannter Sätze gleich gut anzuwenden, die Rechnung ist strenger, die Berufung auf unmittelbare Anschauung¹⁾ vielfach überzeugender. Aber kann letztere zur Erfindung neuer Sätze führen?“¹⁾ (Cantor, a. a. O., S. 558; 2. Aufl. S. 614). Cantor hegt also allen Ernstes die Überzeugung, dass unmittelbare Anschauung nicht zur Entdeckung neuer Sätze führen könne. Nun haben sich z. B. auch Kant und Schopenhauer mit der Untersuchung der Quellen und Grundlagen der Mathematik und speziell auch der Geometrie beschäftigt. So sagt Kant: „Geometrie legt die reine Anschauung des Raumes zum Grunde“ (Prolegomena, § 10). „Um etwas zur Erläuterung und Bestätigung beizufügen, darf man nur das gewöhnliche und unumgänglich notwendige Verfahren der Geometer¹⁾ ansehen. Alle Beweise von durchgängiger Gleichheit zweier gegebener Figuren (da eine in allen Stücken an die Stelle der anderen gesetzt werden kann) laufen zuletzt darauf hinaus, dass sie einander decken, welches offenbar nichts anderes als ein auf der unmittelbaren Anschauung beruhender¹⁾ synthetischer Satz ist. . . . Dass der vollständige Raum (der selbst keine Grenze eines anderen Raumes mehr ist) drei Abmessungen habe, und Raum überhaupt auch nicht mehr derselben haben könne, wird auf den Satz gebaut, dass sich in einem Punkte nicht mehr als drei Linien rechtwinklig schneiden können; dieser Satz aber kann gar nicht aus Begriffen dargethan werden, sondern beruht unmittelbar auf Anschauung,¹⁾ und zwar reiner a priori, weil er apodiktisch gewiss ist“ (Prolegomena, § 12). Schopenhauer andererseits sagt, es müsse sich bei jeder möglichen geometrischen Wahrheit zu einer anschaulichen Überzeugung bringen lassen, „schon deshalb, weil ihre Auffindung allemal von einer solchen angeschauten Notwendigkeit ausging¹⁾ und der Beweis erst hinterher hinzu ersonnen

1) Siehe S. 561 Anm. 2.

ward* (Schopenhauer, Sämtl. Werke, Bd. I, §-15). — Aus alledem ergibt sich, dass es schwer einzusehen ist, wie jemand, der mit Cantor fragt: Kann die Anschauung zur Erfindung neuer Sätze führen?, sich ein richtiges Bild von den ersten Entdeckungen in der Geometrie zu machen vermöge. 2. Pythagoras soll seinen Satz aus 1 Fall abgeleitet haben. 3. Pythagoras soll weitere rationale rechtwinklige Dreiecke erst mit Hilfe einer Formel gefunden haben.

Wenn man sich dieses alles vergegenwärtigt, so wird man notwendig zu dem Ergebnis kommen, dass der Cantor'sche Rekonstruktionsversuch in wichtigen Punkten der inneren¹⁾ Wahrscheinlichkeit in hohem Grade ermangelt.

Was die vorhin erwähnte Formel betrifft, so wird dieselbe von Cantor nach Proklus wie folgt angegeben (Cantor, a. a. O., S. 157; 2. Aufl. S. 173):

kleinere Kathete	grössere Kathete	Hypotenuse
$2\alpha + 1$	$2\alpha^2 + 2\alpha$	$2\alpha^2 + 2\alpha + 1$

Hankel dagegen sagt (a. a. O., S. 100) unter Berufung auf Heron, Pythagoras habe folgende Formel für rationale rechtwinklige Dreiecke aufgestellt:

kleinere Kathete	grössere Kathete	Hypotenuse
a	$\frac{1}{2}(a^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(a^2 + 1)$

Wenn man nun in der letzteren Formel $2\alpha + 1$ an Stelle von a einsetzt, so erhält man die erstere. Beide besagen also dasselbe; aber offenbar ist die von Hankel nach Heron angegebene die ältere; und wenn Pythagoras überhaupt eine aufgestellt hat, so wird es diese gewesen sein. Dass ihm auch die andere zugeschrieben wird, ist wohl ein weiterer Beleg dafür, dass, „wo Pythagoras selbst der Urheber gewesen sein soll, sehr wohl eine Namensverschiebung stattgefunden haben könne“ (Cantor, a. a. O., S. 129; 2. Aufl. S. 142).

Doch es ist nicht meine Aufgabe, dies noch weiter zu untersuchen. Es lag mir nur daran, einen Ausgangspunkt zu gewinnen für den Beweis, dass die in den Sūlbasūtra's überlieferten rationalen rechtwinkligen Dreiecke nicht mit jenen Formeln gefunden wurden.

Die Sūlbasūtra's kennen nämlich folgende rationalen rechtwinkligen Dreiecke:

	kleinere Kathete	grössere Kathete	Hypotenuse
I	3	4	5 (Āp. Śulb. S. V, 3; Bāudh. ²⁾).
	12	16	20 (Āp. Śulb. S. V, 3).
	15	20	25 (Āp. Śulb. S. V, 3).
II	5	12	13 (Āp. Śulb. S. V, 4; Bāudh. ²⁾).
	15	36	39 (Āp. Śulb. S. V, 2 u. 4; Bāudh. ²⁾).

1) Siehe S. 561 Anm. 1.

2) Siehe Thibaut, JASB., 235 oben.

	kleinere Kathete	grössere Kathete	Hypotenuse
III	7	24	25 (Bāudh. ¹⁾).
IV	8	15	17 (Āp. Sulb. S. V, 5; Bāudh. ¹⁾).
V	12	35	37 (Āp. Sulb. S. V, 5; Bāudh. ¹⁾).

Mit Hilfe jener dem Pythagoras zugeschriebenen Formeln würden sich z. B. folgende Dreiecke ergeben:

kleinere Kathete	grössere Kathete	Hypotenuse
3	4	5
5	12	13
7	24	25
9	40	41
11	60	61
13	84	85 u. s. w.

Wie aus diesen Beispielen, sowie schon aus jenen Formeln hervorgeht, ist hier die Differenz zwischen der grösseren Kathete und der Hypotenuse stets = 1. Daraus folgt erstens, dass es ein Irrtum ist, wenn Hankel a. a. O., S. 100 sagt, dass die von ihm angegebene Formel „alle rationalen rechtwinkligen Dreiecke“ umfasse, „sobald man dem a jeden beliebigen rationalen Wert geben“ dürfe. Und aus jener Thatsache folgt zweitens, dass von den in den Sulbasūtra's aufgeführten rechtwinkligen Dreiecken wohl diejenigen mit den Seiten 5, 12, 13; 7, 24, 25 zu jenen Formeln passen, während diejenigen mit den Seiten 8, 15, 17 und 12, 35, 37 (weil die Differenz zwischen der grösseren Kathete und der Hypotenuse hier eine andere als 1, nämlich 2 ist) unmöglich mit Hilfe jener Formeln gefunden sein können.

Über den Weg, auf dem die Inder ihre rationalen rechtwinkligen Dreiecke entdeckten, hat Thibaut folgende Vermutung aufgestellt (JASB., 238): „The way in which the Sūtrakāras found the cases

enumerated above, must of course be imagined as a very primitive one. Nothing in the sūtras would justify the assumption that they were expert in long calculations. Most likely they discovered that the square on the diagonal of an oblong, the sides of which were equal to three and four, could be divided into twenty-five small squares, sixteen of which composed the square on the longer side of the oblong, and nine of which formed the area of the square on the shorter side.“ Thibaut zeigt indessen nicht näher, wie die Inder zu der Fig. 11 ge-

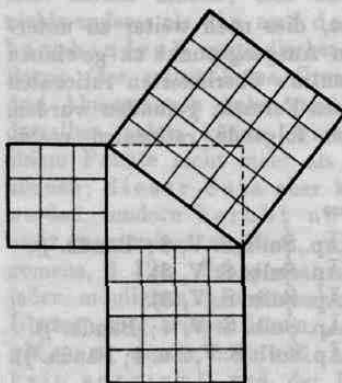


Fig. 11.

1) Siehe S. 563 Anm. 2.

kommen seien; er schlägt vielmehr selbst noch einen anderen Weg vor:
 „Or, if we suppose a more convenient mode of trying, they might
 have found that twenty-five pebbles or seeds, which could be arranged
 in one square, could like-
 wise be arranged in two
 squares of sixteen and of
 nine [s. Fig. 12]. Going
 on in that way they would
 form larger squares, al-
 ways trying, if the

Fig. 12.

pebbles forming one
 of these squares could not as well be arranged in
 two smaller squares.¹⁾ So they would form a square
 of 36, of 49, of 64 etc. Arriving at the square formed by
 $13 \times 13 = 169$ pebbles, they would find that 169 pebbles could
 be formed in two squares, one of 144 the other of 25. Further
 on 625 pebbles could again be arranged in two squares of 576
 and 49, and so one. The whole thing required only time and
 patience, and after all the number of cases which they found is
 only a small one.“ Thibaut glaubt also, die Inder hätten, von
 einem grösseren Quadrate ausgehend, durch Zerlegen
 desselben 2 kleinere erhalten. Wir werden nun freilich auf Grund
 von Āp. Sulb. S. III, 9 zeigen, dass sie vielmehr von einem
 kleineren ausgingen und, dasselbe vergrößernd, fanden,
 das neue Quadrat sei die Summe zweier kleinerer Quadrate. Das
 Zerlegen war schwierig, und zwar um so mehr, je grösser das zu
 teilende Quadrat war; es wäre darum sehr vom Zufall abhängig
 gewesen, ob überhaupt etwas dabei herauskomme. Das Vergrössern
 dagegen war leicht und musste, wie wir sehen werden, notwendig
 zu den überlieferten Ergebnissen führen. — Thibaut's Grundgedanke
 muss aber gleichwohl als sehr glücklich bezeichnet werden. Wir
 werden ihn im folgenden zu verwerten, näher auszuführen und zu
 begründen und vor allem auf sichere Quellen zu stützen suchen.

Diese Quellen sind besonders die Sūtra's Āp. Sulb. S. III, 4—10
 (vgl. hierüber S. 552 Anm. 3). Von denselben sind III, 7. 8 u. 10
 (nebst einigen ähnlichen aus Kātyāyana) von Thibaut JASB., 243
 u. 274 mitgeteilt worden. Dagegen wurde insbesondere die sehr
 wichtige Regel Āp. Sulb. S. III, 9 in Thibaut's Abhandlung nicht
 aufgenommen.

Wir wollen nun die genannten Sūtra's der Reihe nach be-
 trachten. Āp. Sulb. S. III, 4 sagt, durch eine Seite von 1 Längen-
 einheit werde ein Quadrat von 1 Flächeneinheit hervorgebracht
 (Fig. 13, I); Āp. Sulb. S. III, 6: durch eine Seite von 2 Längen-
 einheiten entstehe ein Quadrat von 4 Flächeneinheiten, durch eine
 Seite von 3 Längeneinheiten ein Quadrat von 9 Flächeneinheiten

1) Siehe S. 561 Anm. 2.

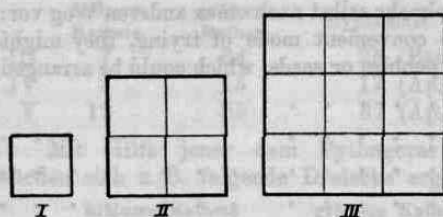


Fig. 13.

(Fig. 13, II u. III). — Hier sehen wir die Brahmanen mit Quadraten beschäftigt. Quadrate waren ja ihrer Aufmerksamkeit schon seit uralten Zeiten empfohlen (s. § 1, A); und z. B. ein Quadrat, das aus 4 kleineren Quadraten zusammengesetzt war, mussten sie nachweislich ebenfalls schon in sehr früher Zeit herstellen, nämlich jedesmal, wenn sie den *caturaśraśyēnacū* konstruierten.

Wie die Brahmanen den Flächeninhalt nicht bloss der angeführten, sondern überhaupt beliebiger Quadrate (bei denen die Masszahl der Seite bekannt war) feststellten, erfahren wir aus dem unmittelbar darauf folgenden Sūtra III, 7: Eine Schnur bringe, wenn mit ihr als Seite ein Quadrat konstruiert werde, jedesmal so viele Reihen kleiner Quadrate hervor, als sie Längeneinheiten enthalte. So könne man das in den vorausgehenden und nachfolgenden Sūtra's über den Inhalt gewisser Quadrate Gesagte herausfinden. — Das heisst also: Man könne ein Quadrat, dessen Seite z. B. 4 Längeneinheiten messe, in 4 Reihen einteilen, deren jede aus 4 kleinen Quadraten bestehe. So bringe man als Flächeninhalt $4 \cdot 4 = 16$ kleine Quadrate heraus (Fig. 14).

Auf ähnlichem Wege fand man auch folgendes: „Eine Schnur von $1\frac{1}{2}$ *puruṣa*'s bringt $2\frac{1}{4}$ Quadrat-*puruṣa*'s hervor (Fig. 15), eine solche von $2\frac{1}{2}$ *puruṣa*'s $6\frac{1}{4}$ Quadrat-*puruṣa*'s“ (Āp. Śulb. S. III, 8).

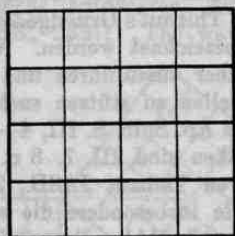
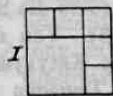
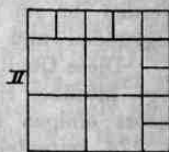


Fig. 14.



$$1 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{4}$$

Siehe!



$$4 + \frac{1}{2} = 6\frac{1}{4}$$

Fig. 16.

Nachdem wir aus den bisherigen Sūtra's ersehen haben, dass die Brahmanen ihre Aufmerksamkeit auf den Zusammenhang und das Verhältnis zwischen der Seite eines Quadrats und dessen Flächeninhalt gerichtet hatten und die Grösse eines jeden Quadrats festzustellen verstanden, wenden wir uns nunmehr zu dem nächsten Sūtra, welches das schon weiter oben als sehr wichtig bezeichnete ist.

Āp. Śulb. S. III, 9 beginnt: „Es folgt nun eine allgemeine Regel.“ Dieselbe bezieht sich, wie die Kommentatoren richtig

bemerken, auf die Vergrößerung eines gegebenen Quadrats. Hierbei soll man „an 2 Seiten“ des Quadrats das hinzufügen, was man mit der jedesmaligen Verlängerung erhalte (meist ist dies ein Rechteck, z. B. I u. II in Fig. 16, selten wieder ein Quadrat; wohl um auf beide Fälle zu passen, sagt das Sūtra in weitester Fassung: das, was man mit der jedesmaligen Verlängerung erhalte); und „an der Ecke (A)“ habe man „das Quadrat“ hinzuzufügen (III in Fig. 16), „das durch die Verlängerung hervorgebracht“ werde.

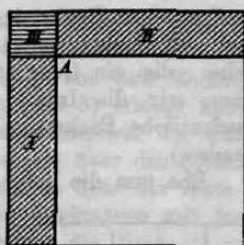


Fig. 16.

Was zu dem gegebenen Quadrate hinzukommt, bildet also die Fig. 17. Darauf, dass diese Figur dasjenige ist, was bei den Griechen Gnomon heisst und schon den Pythagoreern bekannt war (Cantor, a. a. O., Seite 136; 2. Aufl. S. 150), werden wir später zu sprechen kommen.

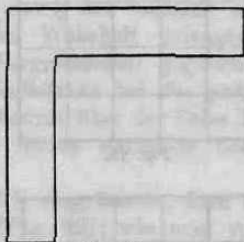


Fig. 17.

Dagegen muss schon jetzt konstatiert werden, dass die von Āpastamba gelehrt Vergrößerung eines Quadrats nachweislich auf dem indischen Opferplatz eine Rolle spielte. Bei der Ausmessung der Grundfläche des von Bāudhāyana beschriebenen *sūrarathacalcracit* (Thibaut, JASB., 261 ff.) hatte man nämlich als Hilfskonstruktion ein Quadrat mit der Seite von 17 Längeneinheiten herzustellen. Dabei begann man (s. Thibaut, JASB., 261 unten) mit dem Quadrat von der Seite = 2 und vergrößerte dasselbe stufenweise, indem man die Seite jedesmal um 1 Längeneinheit zunehmen liess, bis man endlich das Quadrat mit der Seite = 17 erreicht hatte.

Hierbei, d. h. unter Anwendung der allgemeinen Regel Āp. Śulb. S. III, 9, mussten nun hochinteressante Wahrheiten zu Tage kommen.

Da nämlich die Inder, nach jenem Sūtra, die hinzukommende Figur analysierten und als aus 2 Rechtecken und 1 Quadrat bestehend erkannten; da sie ferner das gegebene Quadrat durch Zerlegung in kleinere Quadrate zuvor berechnet hatten (Fig. 18); so durften sie, um den Flächeninhalt des neuen Quadrats zu finden, nur die Zahl der neu hinzukommenden kleinen Quadrate feststellen (Fig. 19). Dass sie thatsächlich so verfahren (d. h. den Unterschied zwischen dem gegebenen und dem neuen Quadrat berechneten), zeigt Bāudhāyana, welcher sagt (JASB., 261): Wenn man aus 256

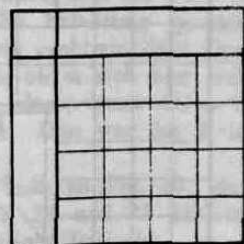


Fig. 18.

quadratischen Backsteinen ein Quadrat gebildet habe, so soll man noch 33 Backsteine hinzufügen. So erhält man aber 289 Backsteine, die ein Quadrat mit der Seite 17 bilden. (Wie hier, so sehen wir die Inder auch sonst, z. B. *Āp. Sūlb. S. XVIII, 3*, quadratische Backsteine bei der Ausmessung des *agnikṣētra* verwenden.)

Ehe nun die Inder zu dem vorhin erwähnten, aus 256 quadratischen Backsteinen bestehenden Quadrat gelangt waren, also z. B. aus 16 Backsteinen ein Quadrat mit der Seite 4 hergestellt hatten, da ergab sich, dass sie bei der Vergrößerung $2 \cdot 4 + 1$, d. h. 9 Backsteine hinzufügen mussten (Fig. 19). Nun hatten sie aber schon vorher an derselben Figur bemerkt (s. Fig. 20), dass diese 9 Backsteine ein Quadrat (ABCD) mit der Seite 3 bilden (vgl. *Āp. Sūlb. S. III, 6*); demnach mussten sie notwendig finden, dass das neue, aus 25 Backsteinen zusammengesetzte Quadrat (mit der Seite 5) die Summe der vorher schon vorhandenen, aus 9 und 16 Backsteinen bestehenden Quadrate war.

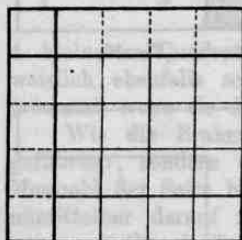


Fig. 19.

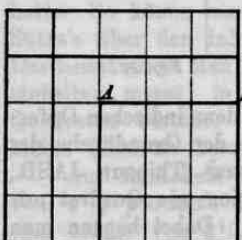


Fig. 20.

Bekanntlich immer auf grösste Anschaulichkeit bedacht, mögen die Inder — um die 3 interessanten Quadrate statt bloss ineinander, auch nebeneinander zu sehen — die beiden kleineren Quadrate vielleicht in nebenstehender Weise zu dem grösseren gesetzt haben (s. Fig. 21). Hierbei hätten sie, wie leicht zu sehen, das rationale rechtwinklige Dreieck mit den Katheten 3 und 4 (oder wie sie selbst sagen: das Rechteck mit den Seiten 3 und 4) entdecken können. Indessen, es ist sehr wahrscheinlich, dass sie dasselbe schon lange vorher als „Erfahrungsthat-

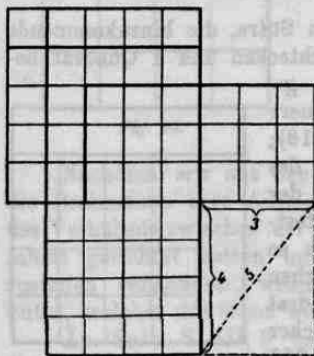


Fig. 21.

sache“ kannten. Dies anzunehmen berechtigen uns die oben angeführten Stellen Cantor's. Ausserdem kann ich mich hier auf Hankel berufen, welcher bei Pythagoras „die empirische Kenntnis von dem rechtwinkligen Dreieck 3, 4, 5“ ebenfalls voraussetzt (Hankel, a. a. O., S. 98) und von den Chinesen sagt, ihr Wissen, „dass die Seiten 3, 4, 5 ein rechtwinkliges Dreieck bilden“, sei „ein empirisches Resultat handwerksmässiger Erfahrung“ (Hankel, a. a. O., S. 83). Auf empirischem Wege können also auch die Inder

schon in sehr früher Zeit die (in den *Sūlasūtra*'s — z. B. *Āp. Sūb. S. V, 3* — wirklich überlieferte) Kenntnis von dem rechtwinkligen Dreieck 3, 4, 5 (oder wie sie sagen: von dem Rechteck mit den Seiten 3 und 4 und mit der Diagonale 5) erlangt haben. Als sie dann bei der Vergrößerung von Quadraten, wie wir sahen, noch die Entdeckung machten, dass die Quadrate über den Seiten 3 und 4 zusammen so gross seien, wie das Quadrat über der Seite 5, da konnte sich dieselbe in dem Geiste eines Brahmanen mit jener Erfahrungsthatfache zu der Erkenntnis verbinden: die Diagonale = 5 eines Rechtecks bringt beides hervor, was die Seiten = 3 und 4 desselben, jede für sich hervorbringen.

Wie die Inder zur Verallgemeinerung der zunächst nur an einem Falle gefundenen geometrischen Wahrheit gelangten, zeigt wieder *Āpastamba*'s Regel für die Vergrößerung gegebener Quadrate. Wir sahen schon oben, dass *Bāudhāyana* bei der praktischen Anwendung derselben bis zu dem Quadrat über der Seite 17 aufstieg; *Āpastamba*'s „allgemeine“ Regel führte natürlich noch weiter.

Als man das Quadrat über der Seite 12 vergrösserte, fand es sich, dass 25 kleine Quadrate hinzukamen (Fig. 22); wie man von

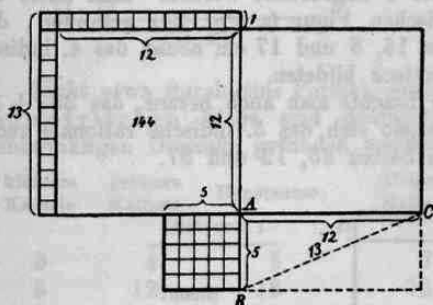


Fig. 22.

Siehe!

$$\begin{aligned} 12 + 12 + 1 &= 25 \\ 144 + 25 &= 169 \\ 12^2 + 5^2 &= 13^2 \end{aligned}$$

früher her wusste, bildeten diese ein Quadrat über der Seite 5; das neue Quadrat hatte 13 zur Seite und 169 zum Inhalt; man hatte also jetzt gefunden, dass die Quadrate über den Seiten 12 und 5 zusammen so gross seien, wie das Quadrat über der Seite 13. Da man aber früher bei $3^2 + 4^2 = 5^2$ die Erfahrung gemacht hatte, dass die Quadratseiten 3, 4 und 5 ein rechtwinkliges Dreieck ergeben, so lag es nahe zu untersuchen, ob es sich hier nicht ähnlich verhalte. Und wirklich fand man, dass, wenn $AC = 12$ und $AB = 5$, dann $BC = 13$ sei (Fig. 22). Dies war das 2. indische rationale rechtwinklige Dreieck.

Auf diesem Wege weitergehend, fand man an Fig. 23, dass $24^2 + 7^2 = 25^2$. Aus den Quadratseiten 7, 24 und 25 bildeten die Inder sodann ihr 3. rationales rechtwinkliges Dreieck.

Ferner sehen wir JASB., 261, wie *Bāudhāyana* zu einem aus

225 Backsteinen gebildeten Quadrat 64 weitere hinzufügt, um ein neues Quadrat zu erhalten. Man hatte also auch bemerkt, dass, weil zu dem Quadrat über der Seite 15 einunddreissig Backsteine, zu dem über der Seite 16 aber 33 hinzukamen, das Quadrat über der Seite 17 um 64 grösser sei als das über der Seite 15. Diese 64 Backsteine aber konnten, wie die Inder schon vorher wussten,

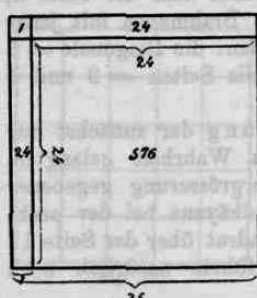


Fig. 23.

Siehe!

$$24 + 24 + 1 = 49$$

$$576 + 49 = 625$$

$$24^2 + 7^2 = 25^2$$

Siehe!

$$30 + 30 + 4 = 64$$

$$225 + 64 = 289$$

$$15^2 + 8^2 = 17^2$$

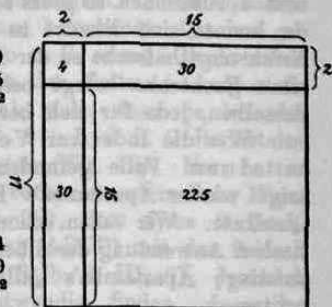


Fig. 24.

als Quadrat über der Seite 8 angeordnet werden. Man hatte also weiter an einer geometrischen Figur (s. Fig. 24) gefunden, dass $15^2 + 8^2 = 17^2$, und dass 15, 8 und 17 ein neues, das 4. indische rationale rechtwinklige Dreieck bildeten.

Auf ähnlichem Wege brachte man auch heraus, dass $35^2 + 12^2 = 37^2$ (s. Fig. 25). So ergab sich das 5. indische rationale rechtwinklige Dreieck mit den Seiten 35, 12 und 37.

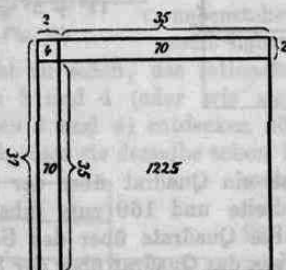


Fig. 25.

Siehe!

$$70 + 70 + 4 = 144$$

$$1225 + 144 = 1369$$

$$35^2 + 12^2 = 37^2$$

Endlich fand man so an Fig. 26, dass $36^2 + 15^2 = 39^2$. Die Quadratseiten 36, 15, 39 ergaben also für die Inder ein neues rationales rechtwinkliges Dreieck. Darum zählt es auch Bāudhāyana noch als ein besonderes neben demjenigen mit den Seiten 5, 12, 13 auf. Wohl schwerlich würde Cantor, wenn ihm der richtige Weg der Auffindung bekannt gewesen wäre, dem Bāudhāyana dafür die Censur erteilt haben, „dass er den Gegenstand seiner Darstellung nicht durchaus beherrschte“ (Cantor, a. a. O., S. 544; 2. Aufl.

S. 599). Dazu kommt noch, dass das rationale rechtwinklige Dreieck 15, 36, 39 bei den Indern in besonderem Ansehen stand, weil die Masse und die Ausmessung der wichtigsten *vēdi* (Āp. Śulb. S. V, 1 u. 2) auf ihm beruhten. Übrigens hat Āpastamba (wie aus Āp. Śulb. S. V, 4 hervorgeht) die Beziehung zwischen den rechtwinkligen Dreiecken 5, 12, 13 und 15, 36, 39 gekannt. Man hat also offenbar die beiden Dreiecke miteinander verglichen; dies war aber erst möglich, nachdem man sie vorher einzeln an geometrischen Figuren kennen gelernt hatte.

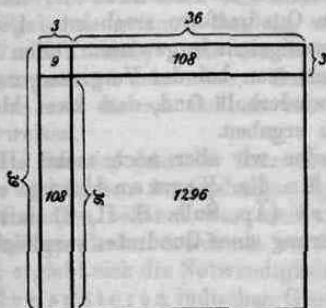


Fig. 26.

Siehe!

$$\begin{aligned} 108 + 108 + 9 &= 225 \\ 1296 + 225 &= 1521 \\ 36^2 + 15^2 &= 39^2 \end{aligned}$$

Nicht etwa durch eine Formel, sondern auf dem beschriebenen geometrischen Wege sind demnach die indischen rationalen rechtwinkligen Dreiecke gefunden worden. Aus der Übersicht:

kleinere Kathete	grössere Kathete	Hypotenuse;	kleinere Kathete	grössere Kathete	Hypotenuse
	Differenz 1			Differenz 2	
3	4	5	8	15	17
5	12	13	12	35	37
7	24	25		Differenz 3	
			15	36	39

geht nämlich hervor, dass die Differenz zwischen der grösseren Kathete und der Hypotenuse teils 1, teils 2, teils 3 ist; und dies kommt eben daher, dass man die grösseren Quadrate in den Figuren 20—26 aus dem unmittelbar vorhergehenden (z. B. 13^2 nach 12^2) oder aus dem vorletzten (z. B. 17^2 nach 15^2) oder aus dem drittletzten (39^2 nach 36^2) durch Verlängerung der Quadratseite um 1 oder um 2 oder um 3 Längeneinheiten geometrisch konstruierte.

So haben also die Inder durch Wiederholung derselben geometrischen Figur 1. mehrmals je drei Quadrate gefunden, von denen zwei zusammen das dritte ergaben; und 2. rationale rechtwinklige Dreiecke entdeckt, die sich aus den Seiten eben jener Quadrate bilden liessen. Und dabei hat sich ihnen die geometrische Wahrheit, die sie zunächst nur an 1 Falle bemerkt hatten, durch

die Häufung der Fälle als allgemeingültig enthüllt: „Die Diagonale eines Rechtecks bringt beides hervor, was die längere und die kürzere Seite desselben, jede für sich, hervorbringen.“

Mit der Quelle dieses Satzes, der nach *Āp. Sūlb. S. III, 9* gezeichneten Figur, lässt sich sehr leicht auch der wichtigste übrige Bestand der ältesten indischen Geometrie in Zusammenhang bringen.

Nach § 1 besteht schon in sehr früher Zeit eine der wichtigsten Anwendungen jenes indischen Satzes in der Lösung der Aufgabe, Quadrate so zu addieren oder zu subtrahieren, dass die Summe oder der Rest wieder in Quadratform erscheint. Die Beobachtung, dass dieses Problem wenigstens in gewissen Fällen lösbar sei, konnte man schon machen, als man bei der Vergrößerung von Quadraten (*Āp. Sūlb. S. III, 9*) wiederholt fand, dass zwei kleinere Quadrate zusammen ein größeres ergaben.

An *Āp. Sūlb. S. III, 9* werden wir aber noch mehr erinnert, wenn wir die Figur (Nr. 27) für die Verwandlung eines Rechteckes in ein Quadrat (*Āp. Sūlb. S. II, 7*) mit derjenigen (Nr. 28) für die Vergrößerung eines Quadrates vergleichen¹⁾.

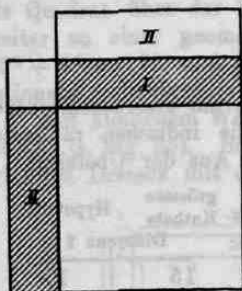


Fig. 27.

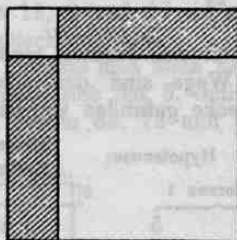


Fig. 28 (Fig. 16).

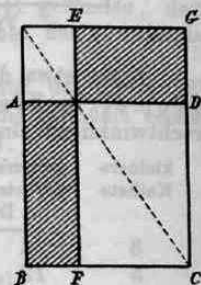


Fig. 29.

In diesem Zusammenhang will ich, obwohl ich mich hier nur mit der ältesten indischen Geometrie befasse, doch ausnahmsweise noch erwähnen, dass die Kommentatoren, welche Vertreter der späteren indischen Mathematik sind²⁾, für die Verwandlung eines Quadrates (ABCD in Fig. 29) in ein Rechteck (EFCG) ein Verfahren beschreiben, (s. *Āp. Sūlb. S. III, 1, Anm. 2*), das die Fig. 29 ergibt, in der wir ebenfalls die Fig. 28, wenn auch verallgemeinert³⁾, wiedererkennen dürfen. —

Wann die ersten Anfänge gemacht wurden, welche die Inder zur Entdeckung rationaler rechtwinkliger Dreiecke und zugleich

1) Vgl. Cantor, a. a. O., S. 545, Fig. 76 (2. Aufl. S. 600, Fig. 83).

2) Thibaut, JASB., 272 oben.

3) Vgl. Cantor, a. a. O., S. 137, Fig. 20 (2. Aufl. S. 151, Fig. 21).

des Satzes vom Quadrat über der Diagonale des Rechteckes geführt haben, weiss ich nicht zu sagen; mit aller Bestimmtheit aber kann ich angeben, wann die Entwicklung spätestens abgeschlossen war. Haben wir doch in § 2, II gefunden, dass das rationale rechtwinklige Dreieck 15, 36, 39, welches ja am Ende der Entwicklungsreihe steht, spätestens zur Zeit der Tāitt. S. und des Śat. Br. (d. h. im 8. Jahrhundert vor Chr.) in Indien bekannt war. So alt ist also (um von den anderen, in § 2, I auseinandergesetzten Gründen hier abzusehen) auch der Satz vom Quadrat der Hypotenuse. Und so sind wir, wenn auch auf anderem Wege, doch wie Cantor zu dem Ergebnisse gelangt, dass da, wo das rechtwinklige Dreieck 15, 36, 39 sich findet, auch der Satz vom Quadrat der Hypotenuse bekannt gewesen sein muss. Darum kann ich nicht umhin, hier nochmals auf das am Schluss von § 2 gegebene Citat aus Cantor zu verweisen.

III. Daraus, dass der Satz vom Quadrat der Hypotenuse nebst seinen wichtigsten Anwendungen spätestens im 8. Jahrhundert vor Chr. in Indien bekannt war und z. B. das *Āpastamba-Sūla-Sūtra* nicht später als im 5. oder 4. vorchristlichen Jahrhundert abgefasst wurde, ergibt sich die Notwendigkeit, strenge zwischen der ältesten und der späteren indischen Geometrie zu unterscheiden. Darum ist es verfehlt, wenn Cantor von den *Sūlasūtra's* sagt: „Ist also die Zeit, um welche es sich hier handelt, wesentlich höher als die der Āryabhaṭa [geboren 476 nach Chr.] und Brahmagupta [geb. 598 nach Chr.], so reicht sie immer nicht so weit hinauf, um uns zu gestatten, geschweige denn zu nötigen, von einer altindischen Geometrie zu reden“ (Cantor, a. a. O., S. 541; 2. Aufl. S. 596). — Was nun die Frage nach der Herkunft der späteren indischen Geometrie betrifft, so muss ich mich vorerst eines Urtheiles hierüber noch enthalten. Doch möchte ich darauf hinweisen, dass Hankel, welcher (weil schon 1873 gestorben) die *Sūlasūtra's* noch nicht kannte, von der späteren indischen Geometrie sagt: „Überhaupt giebt es bisher keine Anzeichen, welche die Vermutung, dass die Inder in ihrer Geometrie nicht selbständig, sondern von den Griechen abhängig seien, rechtfertigen könnten“ (Hankel, a. a. O., S. 219). Auch Thibaut hat, ohne jedoch eine endgültige Entscheidung treffen zu wollen, eine Reihe von Gründen beigebracht¹⁾, welche für die Unabhängigkeit auch der späteren indischen Geometrie sprechen. — Wie es sich mit der späteren indischen Geometrie aber auch verhalten möge: soweit Cantor's Hypothese die *Sūlasūtra's* betrifft, ist sie sicher ein Irrtum. Derselbe ist freilich, „hauptsächlich eben infolge der grossen Autorität Cantor's“¹⁾, heutzutage weit verbreitet. Darum will ich die Cantor'sche Argumentation, die zu diesem Resultate geführt hat, wenigstens in 1 Falle noch näher beleuchten. Es handelt sich um einen sehr merkwürdigen Beweis, wonach die

1) Thibaut, Grundriss der ind.-ar. Philol., III. Bd., 9. Heft, S. 77 f.

Inder unter anderem den Satz vom Quadrat der Hypotenuse nicht selbst gefunden haben können¹⁾! — Obwohl Cantor, a. a. O., S. 539 (2. Aufl. S. 594) gelegentlich der Erwähnung von Nārāyaṇa und von Gaṇeśa (dieser schrieb um 1545 nach Chr.) die sehr richtige Bemerkung macht: „Das sind freilich recht späte Daten, aus welchen auch nur Vermutungen auf eine ältere Zeit sich nicht stützen lassen“, steht doch einige Blätter weiter unten: Daraus, dass (wie wir gerne zugeben) der Pythagoreische Lehrsatz mit den „Beweisen“ des Bhāskara (geboren 1114 nach Chr.) nicht gefunden sein könne, folge, dass die Inder diesen Satz von den Griechen entlehnt haben! Cantor sagt nämlich (a. a. O., S. 558; 2. Aufl. S. 614f.), für Geometer wie Bhāskara und seinen Kommentator Gaṇeśa sei charakteristisch: „Rechnen in nahezu unbegrenzter Möglichkeit oder Anschauen, darüber kommen sie nicht hinaus. Das Eine wie das Andere ist zum Beweise schon bekannter Sätze gleich gut anzuwenden, die Rechnung ist strenger, die Berufung auf *unmittelbare Anschauung*²⁾ vielfach überzeugender. Aber kann Letztere zur Erfindung neuer Sätze führen? [!] Kann es Erstere, wenn nicht eine gewisse Summe geometrischer Sätze als Ausgangspunkt vorhanden ist, unter welchen der pythagoräische Lehrsatz einer der wichtigsten ist? Kann der pythagoräische Lehrsatz²⁾ gefunden worden sein von einem Beweise ausgehend wie die beiden durch Bhāskara [geboren 1114 nach Chr.] uns überlieferten? Wir denken, dass diesen Fragen die verneinende Antwort nicht fehlen wird. Dann aber kommen wir immer und immer zu dem gleichen Schlusse: Geometrisches in ziemlich bedeutender Menge tritt verwandter Art, vielfach sogar in voller Übereinstimmung in Alexandria und in Indien auf. In Alexandria können wir es mit Bestimmtheit in einer zum Teil sehr viel früheren Zeit nachweisen als dieses in Indien möglich ist[!]. In Alexandria haben wir es als Frucht organischer Entwicklung reifen sehen, in Indien ist die Entstehungsweise mehr als rätselhaft[!]. Folglich muss eine Übertragung von Alexandria nach Indien angenommen werden[!]“. An einer anderen Stelle sagt Cantor, es sei nicht anzunehmen, „dass der umgekehrte Weg der Beeinflussung stattfand, für welchen sonst ein entsprechend

1) Bei dieser Gelegenheit möchte ich auch bemerken, dass Cantor's abfälliges Urteil über die geometrische Begabung der Inder sehr der Einschränkung bedarf. Ein wesentlicher Teil der geometrischen Begabung besteht ja darin, dass man durch anhaltende Betrachtung einer Figur ihre Eigenschaften und die Relationen ihrer Teile herauszufinden vermag. Und diese Fähigkeit haben die Inder unstreitig in hohem Grade besessen. Dagegen sind sie allerdings nicht dazu gelangt, wie die Griechen mit der geometrischen Anschauung ein anderes, dieser fremdes Element — logische Deduktion, und Systematik — konsequent zu verbinden. Aber auch durch Anschauung allein konnte schon eine nicht geringe Zahl wichtiger geometrischer Wahrheiten gefunden werden. Ja, die ältesten Entdeckungen und die ersten Schritte in der Geometrie können nur an der Hand der Anschauung gemacht worden sein.

2) Siehe pag. 561 Anm. 2.

früheres Datum, d. h. die Zeit vor dem Jahre 100 vor Chr. anzusetzen wäre" (Cantor, a. a. O., S. 548; 2. Aufl. S. 604). —

Dass die Inder ihre älteste Geometrie selbständig entwickelt haben, will ich zum Überflusse jetzt noch durch die Thatsache erhärten, dass der Satz vom Quadrat der Hypotenuse und rationale rechtwinklige Dreiecke bei keinem Volke so früh nachgewiesen werden können wie bei den Indern.

Den alten Babyloniern kann höchstens die Kenntnis des rechtwinkligen Dreiecks 3, 4, 5 — und zwar nur vermutungsweise — zugeschrieben werden (Cantor, a. a. O., S. 92 f.; 2. Aufl. S. 102 f.).

Dagegen gilt als Entdecker des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse, der den Indern spätestens im 8. vorchristlichen Jahrhundert bekannt war, auch der vielgereiste Pythagoras ¹⁾, der etwa 580—500 lebte.

1) Es ist nicht uninteressant, hier auch die übrigen Übereinstimmungen zwischen der ältesten indischen Geometrie und dem mathematischen Wissen, das man dem Pythagoras zuschreibt, noch anzuführen. 2. Die Inder haben (vgl. S. 557 Anm. 1) im Anschluss an ihren 1. Unterfall für die *dvikaraṇī* ($= \sqrt{2}$) einen Näherungswert (den *saviśēṣa*) aufgestellt — offenbar, nachdem sie zuvor das Irrationale entdeckt hatten. Auch Pythagoras wird als Entdecker des Irrationalen bezeichnet (vgl. Cantor, a. a. O., S. 130. 154; 2. Aufl. S. 142. 169). 3. Bei der nach *Āp. Śulb. S. III, 9* gezeichneten Figur, die, wie wir sahen, bei der Entdeckung des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse eine so wichtige Rolle spielte, haben wir ein Flächenstück kennen gelernt, das bei den Griechen Gnomon heisst. Dieser Gnomon tritt uns ausserdem in der nach den *Śulbasūtra's* (z. B. *Āp. Śulb. S. II, 7*) gezeichneten Figur für die Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat (s. Fig. 27 und S. 572 Anm. 1) sehr deutlich entgegen. — Damit ist zu vergleichen, was Cantor, a. a. O., S. 136 (2. Aufl. S. 150) in seinem von Pythagoras und den Pythagoreern handelnden Kapitel sagt: „Gnomon war das, was von einem Quadrat übrig blieb, wenn aus dessen einer Ecke ein kleineres Quadrat herausgeschnitten wurde. Diese Bedeutung des Wortes war bei den Pythagoreern gang und gebe.“ —

Das mathematische Wissen, das sich so übereinstimmend zuerst bei den Indern und später auch bei Pythagoras, bzw. den Pythagoreern, findet, könnte seiner Natur nach sehr wohl auf beiden Seiten selbständig gefunden worden sein. Durch die aufgeführten Übereinstimmungen würde ich mich also nicht für berechtigt halten, an einen historischen Zusammenhang zwischen Pythagoras und den Indern auch nur zu denken — wenn sich bei den Griechen Grundlagen aufzeigen liessen, auf denen Pythagoras hätte weiterbauen können; wenn sich nicht Pythagoras nach allgemeiner Überzeugung orientalische Weisheit angeeignet hätte; wenn nicht zu jenen Übereinstimmungen auf mathematischem Gebiete auffallende weitere hinzukämen; wenn sich nicht auch die (den Ägyptern unbekannte) Lehre von der Seelenwanderung, das Verbot des Bohnenessens u. a. früher in Indien als bei Pythagoras nachweisen liesse. Den für diese ganze Frage sich interessierenden Leser verweise ich auf L. v. Schroeder's Schrift „Pythagoras und die Inder“ und auf Garbe, *Sāṃkhya-Philosophie*, S. 90—96. Wer sich angesichts der zahlreichen und zum Teil sehr merkwürdigen Übereinstimmungen zwischen Pythagoras und den Indern mit mir dem Eindruck nicht entziehen kann, dass man hier entweder „einen wunderbaren Fall der prästabilierten Harmonie“ *) anerkennen, oder aber den Pythagoras als von den

*) Diesen Ausdruck entnehme ich Windisch, *Verh. des 5. internat. Oriental.-Kongr. 1881, II. Teil, 2. Hälfte, S. 17.*

Was ferner die Ägypter betrifft, so vermutet Cantor, indem er sich auf die Beschreibung der am 23. Aug. 237 vor Chr. stattgefundenen Grundsteinlegung des Tempels zu Edfu stützt¹⁾, die Ägypter hätten hierbei das rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5 verwendet; ja, Cantor versucht sogar eine nähere Beschreibung des Verfahrens zu geben, die freilich, da die ägyptischen Quellen sehr wenig Anhaltspunkte dafür bieten, fast ganz mit den Mitteln der *Sūlbasūtra*'s bestritten ist²⁾ (Cantor, a. a. O., S. 56 f.; S. 59 f. 2. Aufl. S. 64 f.; S. 67 f.). Dass Cantor den alten Ägyptern die Kenntnis des Satzes vom Quadrat der Hypotenuse nicht zuschreibt, geht daraus hervor, dass er Pythagoras für den Entdecker dieses Satzes hält, trotzdem er glaubt, derselbe sei in Ägypten gewesen und habe dort Anregungen empfangen (Cantor, a. a. O., S. 126 ff.; 2. Aufl. S. 138 ff.).

Bei den Chinesen endlich ist der Satz vom Quadrat der Hypotenuse zuerst im I. Teil des *Tcheou pei* überliefert (Cantor, a. a. O., S. 579 ff.; 2. Aufl. S. 635 ff.). Nach Cantor weist der Inhalt dieses I. Teiles, der nicht genau datiert werden kann, aber wohl um den Beginn unserer Zeitrechnung entstand, auf Entlehnung aus Indien.

Hankel, dem (wie schon bemerkt) die *Sūlbasūtra*'s noch nicht bekannt waren, hatte im I. Teil des *Tcheou pei* das älteste Denkmal der Geometrie gesehen. Dies sind aber vielmehr die *Sūlbasūtra*'s; von ihnen gilt also mit Recht, was Hankel irrtümlich von jenem chinesischen Werke gerühmt hatte: In keiner anderen Litteratur ist uns aus so früher Periode der Geometrie ein Denkmal aufbewahrt worden, und so verdienen wohl die *Sūlbasūtra*'s eine besondere Beachtung als Typen jener ersten naiven Stufe, auf die wir, an eine so ganz andere Art des Denkens gewöhnt, uns ohne solche Dokumente nicht zu versetzen vermöchten³⁾.

§ 4.

Die Handschriften.

Bei der Feststellung des Textes des *Āp. Sūlb. S.* sind folgende Handschriften benützt worden:

1. D; die Beschreibung s. bei Garbe, *Āp. Śr. S.*, Vol. I, Preface. (Ich benützte das Ms. D nicht direkt, sondern in einer von Prof.

Indern abhängig betrachten müsse, — für den würde feststehen, dass die Menschheit auf mathematischem Gebiete nicht nur die Ziffern und das dezimale Stellensystem, nicht nur reiche (durch die Araber vermittelte) Förderung in Arithmetik und Algebra, sondern auch eines der wichtigsten Theoreme der Geometrie, den sogenannten pythagoreischen Lehrsatz (samt vielem, was auf ihm beruht) unsern Stammverwandten am Ganges verdankt.

1) Cantor, *Gräko-indische Studien*, S. 19 (*Zeitschrift für Math. und Phys.* XXII, histor.-litterar. Abt.).

2) So ist es zu verstehen, wenn Cantor S. 56, 2. Aufl. S. 64, etwas undeutlich von einem „Analogieschluss“ spricht, dessen „Ausführung“ er „auf einige ziemlich späte Kapitel“ seines I. Bandes verschoben müsse.

3) Vgl. Hankel, a. a. O., S. 83.

Garbe schon früher gemachten und mir gütigst zur Verfügung gestellten Abschrift.)

2. S; siehe hierüber Garbe, *Āp. Śr. S.*, Vol. III, Preface.

3. Gr.: eine der India Office Library in London gehörige Grantha-Handschrift (20 Palmblätter; 4 Linien auf einer Seite); Burnell, *Catalogue of a Collection of Sanscrit Manuscripts*, Nr. LXXVIII.

An Kommentaren¹⁾ (samt Text) standen mir zur Verfügung:

1. der Kommentar des Sundararāja; 36 Blätter in europäischer Buchform.

2. der Kommentar des Karavindasvāmin, und zwar in zwei Manuskripten; Karav. I: 69 Blätter in europäischer Buchform; Karav. II: 84 Blätter in indischem Format. — Die 3 bisher genannten Kommentar-Handschriften gehören Herrn Dr. Thibaut, Principal, Muir Central College in Allahabad, der sie mir gütigst zur leihweisen Benützung zugesandt hat. Hierfür, sowie für die reiche Belehrung, die ich aus seiner Abhandlung²⁾ „On the Śulvasūtras“ (*JASB.* XLIV, S. 227 ff.) und aus seiner Ausgabe und Übersetzung des Bāudh. Śulb. S. (Paṇḍit IX ff.) schöpfen durfte, möchte ich Herrn Dr. Thibaut hiermit auch öffentlich meinen wärmsten Dank aussprechen.

3. der Kommentar des Kapardisvāmin, den ich in einer Kopie des dem Sanskrit College zu Benares gehörigen Manuskripts benützte. Herrn A. Venis, Principal, Sanskrit College in Benares, der die Freundlichkeit hatte, diese Abschrift für mich anfertigen zu lassen, sage ich hierfür besten Dank. —

Es ist mir Bedürfnis, an dieser Stelle auch meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. Garbe, dem ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für freundliche Beratung, und Herrn Geheimrat Windisch, dem ich für den Druck des *Āp. Śulb. S.* verpflichtet bin, meinen herzlichsten Dank öffentlich auszusprechen.

1) Bei der Abteilung des Textes in Paragraphen konnte den Kommentatoren, die hierin selten übereinstimmen, nur hier und da ganz gefolgt werden.

2) Dr. Thibaut hat in seinen Auszug aus den verschiedenen Śulbasūtra's von den 21 Kapiteln des *Āp. Śulb. S.* im ganzen etwa 6 aufgenommen. Ich habe es in den Noten zu der Übersetzung jedesmal bemerkt, wenn sich ein Sūtra des Āpastamba, ganz oder teilweise, in Dr. Thibaut's Abhandlung „On the Śulvasūtras“ findet.

I. Text.

śrīgaṇeśāya namaḥ!
prathamah paṭalaḥ.

Kap. I.

1. vihārayōgān vyākhyāsyāmaḥ.

2. yāvadāyāmaṁ pramāṇaṁ, tadardham abhyasyā, 'parasmims tṛtiyē ṣaḍbhāgōṇē lakṣaṇaṁ karōti. prṣṭhyāntayōr antāu niyāmya, lakṣaṇēna dakṣiṇā 'pāyāmya, nimittaṁ karōty. ēvaṁ uttaratō. viparyasyē 'tarataḥ. sa samādhis. tannimittō nirhrāsō vivṛddhir vā.

3. 1) āyāmaṁ vā 'bhyasyā, 'gantucaturtham āyāmas cā 'kṣṇayā-
rajjus, tiryāṇmānī śēṣō 2). vyākhyātaṁ viharāṇaṁ 2).

1) D beginnt mit: *athā yōgāntaram*, was wegen des folgenden *vā* überflüssig ist. — 2) . . . 2) fehlt in D.

4. dīrghasyā 1) 'kṣṇayārajjūḥ, pārśvamānī tiryāṇmānī 1) ca yat
prthagbhūtē kurutas, tad ubhayaṁ karōti. tābhir jñeyābhir uktaṁ
viharāṇaṁ.

1) . . . 1) fehlt in D.

5. caturāśrasyā 1) 'kṣṇayārajjur dvistāvatiṁ bhūmiṁ karōti.
samasya dvikaraṇī.

1) D: *caturasrasyā*; so auch überall im folgenden.

6. pramāṇaṁ tṛtiyēna vardhayēt tac ca caturthēnā 'tmacatus-
triṁśōṇēna. saviśēṣaḥ.

7. athā 'paraṁ. pramāṇamātrīṁ rajjum ubhayataḥpāsāṁ karōti,
madhyē lakṣaṇaṁ ardhamadhyayōs ca. prṣṭhyāyāṁ rajjum āyāmya,
pāsāyōr lakṣaṇēṣv iti śāṅkūn nihanty. upāntayōḥ pāsāu pratimucya,
madhyamēna lakṣaṇēna dakṣiṇā 'pāyāmya, nimittaṁ karōti. madhyamē
pāsāu pratimucyō, 'paryupari nimittaṁ madhyamēna lakṣaṇēna
dakṣiṇā 'pāyāmya, śāṅkūṁ nihanti. tasmin pāsāṁ pratimucya,
pūrvasminn itaraṁ, madhyamēna lakṣaṇēna dakṣiṇaṁ aṁsam āyacchēd.
unmucya pūrvasmād, aparasmin pratimucya, madhyamēnāi 'va lakṣa-
ṇēna dakṣiṇāṁ śrōṇim āyacchēd. ēvaṁ uttarāu śrōṇyāṁsāu.

Kap. II.

1. athā 'parō yōgaḥ. prṣṭhyāntayōr madhyē ca śāṅkūn 1)
nihatyā, 'rdhē tadviśēṣam abhyasya, lakṣaṇaṁ kṛtvā, 'rdham āgamayēd.
antayōḥ 2) pāsāu kṛtvā, madhyamē saviśēṣaṁ pratimucya, pūrvasminn
itaraṁ, lakṣaṇēna dakṣiṇaṁ aṁsam āyacchēd. unmucya pūrvasmād,
aparasmin pratimucya, lakṣaṇēnāi 'va dakṣiṇāṁ śrōṇim āyacchēd.
ēvaṁ uttarāu śrōṇyāṁsāu.

1) S: *śāṅkūṁ*. — 2) D: *antayōḥ*.

2. pramāṇaṁ tiryag, dvikaraṇy āyāmas. tasyā 'kṣṇayārajjus
trikaraṇī.

3. tṛtiyakaraṇy ētēna vyākhyā i. vibhāgas tu navadhā.

4. tulyayōś caturaśrayōr uktaḥ samāsō. nānāpramāṇayōś caturaśrayōḥ samāsō: hrasīyasah karaṇyā varṣiyasō vṛdhram¹⁾ ullikhēd. vṛdhrasyā 'kṣṇayārajjuḥ ubhē samasyati. tad uktam.

1) D: *vṛddham*; vgl. JASB., 243. 244; Bāudh. Śulb. S. I. 50 (Paṇḍ. X, S. 17. 18; hier giebt Thibaut eine ausführliche Begründung der Lesart *vṛdhram*).

5. caturaśrāc caturaśram nirjihīrṣan, yāvan nirjihīrṣēt, tasya karaṇyā varṣiyasō vṛdhram ullikhēd. vṛdhrasya pārśvamānīm akṣṇayē 'tarat pārśvam upasaṃharēt. sā yatra nipatēt, tad apa-cchindyāc. chinṇayā nirastam.

6. upasaṃhṛtā 'kṣṇayārajjuḥ. sā catuṣkaraṇī. chinṇā cē 'tarā ca yat prthagbhūtē kurutaḥ, tad ubhayaṃ karōti. tiryāṇmānī puruṣaṃ, śēśas triṣṇ. tad uktam.

7. dīrghacaturaśram samacaturaśram cikīrṣan, tiryāṇmānyā 'pacchidya, śēśaṃ vibhajyō, 'bhayata upadadhyāt. khaṇḍam āgantunā sampūrayēt. tasya nirhāra¹⁾ uktaḥ.

1) So Sund., Karav., Bāudh. Śulb. S. I. 54. Da mit *tasya nirhāra uktaḥ* auf den vorausgegangenen § 5 verwiesen wird, wo es . . . *nirjihīrṣan* heisst, so lese ich *nirhāra* gegen D, S, Kapard. und JASB., Seite 245, die *nirhāra* haben.

Kap. III.

1. samacaturaśram dīrghacaturaśram cikīrṣan, yāvac cikīrṣēt, tāvatīm pārśvamānīm kṛtvā, yad adhikaṃ syāt, tad yathāyogam upadadhyāt.

2. caturaśram maṇḍalaṃ cikīrṣan¹⁾ madhyāt kōṭyāṃ nipātayēt; pārśvataḥ parikṛṣyā, 'tisayatṛtīyēna saha maṇḍalaṃ parilikhēt. sā nityā maṇḍalaṃ¹⁾. yāvad dhīyatē, tāvad āgantu.

1) . . . 1) fehlt in S.

3. maṇḍalaṃ caturaśram cikīrṣan, viṣkambhaṃ pañcadaśa bhāgān kṛtvā, dvāv uddharēt; trayodaśa 'vaśiṣyantē. sā nityā caturaśram.

4. pramāṇēna pramāṇaṃ vidhiyatē.

5. caturaśram ādēśād anyat.

6. dvābhyāṃ catvāri, tribhir nava.

7. yāvatpramāṇā rajjus, tāvatastāvato¹⁾ vargān karōti. tathō 'palabdhiḥ.

1) S nur *tāvato*.

8. adhyardhapuruṣā rajjuḥ dvāu sapādāu karōty, ardhatrītiya-puruṣā ṣaṭ sapādān.

9. athā 'tyantapradēśō¹⁾. yāvatāyāvato²⁾ 'dhikēna parilikhati, tat pārśvayōr upadadhāti; yac ca tēna caturaśram kriyatē, tat kōṭyām.

1) D hat fälschlich *athā 'tyantaṃ prādēśō*. Die Stelle *athā 'tyanta-pradēśah* findet sich auch Āp. Śr. S. XV, 2, 8. — 2) D nur *yāvato*.

10. ardhapramāṇēna pādapramāṇaṃ vidhiyatē, 'rdhasya dvipramāṇayāḥ pādapūrapatvāt; tṛtīyēna navamī kalā.

dvitīyaḥ paṭalaḥ.

Kap. IV.

1. āgnyādhēyikē¹⁾ viharē gārhapatyāhavanīyayōr antarālē vijñāyatē: śṭasū prakramēṣu brāhmaṇō 'gnim ādadhitāi, 'kādaśasu rājanyō, dvādaśasu vāisyaḥ.

1) D: agny°.

2. caturvimpśatyām, aparimitē, yāvata vā cakṣuṣā manyatē, tasman nā 'tidūram ādhēya¹⁾ iti sarvēśām avisēṣeṇa śrūyatē.

1) Gr.: ādhēyā. — Vgl. auch Āp. Śr. S. V, 4, 4.

3. dakṣiṇataḥpurastād vitṛtiyadēśē gārhapatyasya 'nēdīyasi dakṣiṇāgnēr vijñāyatē.

4. gārhapatyāhavanīyayōr antarālam pañcadhā ṣaḍdhā¹⁾ vā sambhujya, ṣaṣṭham saptamam vā bhāgam upasamasyā²⁾, 'gantusamam²⁾ trāidham vibhajyā, 'parasmimṣ tṛtiyē lakṣaṇam kṛtvā, gārhapatyāhavanīyayōr antāu niyamya, lakṣaṇēna dakṣiṇā 'pāyamya, nimittam karōti. tad dakṣiṇāgnēr āyatanam śrūtisāmarthyāt.

1) ṣaḍdhā bei Kapard., Bl. 8, b (vgl. p. w., wo ausserdem noch die Form ṣaḍdhā verzeichnet ist); alle MSS. haben ṣaḍdhā, ebenso Sund. (Bl. 6, a); auch Karav. hat ṣaḍdhā im Sūtra, dagegen im Kommentar dazu ṣoḍdhā (Karav. I: Bl. 18, a).

2) . . . 2) Alle MSS. und Kommentare (und Bāudh. Śulb. S. I, 68) haben hier: „āgantum upasamasya, samam.“ Gleichwohl halte ich die oben gegebene Korrektur für notwendig. Dass die Teile gleich werden sollen, versteht sich für den Sūtra-Verfasser sonst von selbst; siehe z. B. unmittelbar vorher pañcadhā ṣaḍdhā vā sambhujya; ferner III, 3: pañcadaśa lḥgān kṛtvā; und so noch öfter. Vergleichen wir nun mit unserer Stelle Bāudh. Śulb. S. I, 69 (Pañd. X, 44): apivā pramāṇam pañcamān . . . 'hayēt, tat sarvaṁ pañcadhā sambhujya . . .; und ferner die Erklärung des Sund. (Bl. 6, a): samam sarvān: so liegt es nahe anzunehmen, samam sei aus sarvam verschrieben. Dabei würde jedoch ein Bedenken übrig bleiben: āgantum upasamasya, „man füge als Verlängerung hinzu“, ist ein Pleonasmus, der zu dem konzisen Sūtra-Stil sehr wenig passt. Ich glaube daher, dass Kātyāyana-Parīṣiṣṭa I, 27 (Pañd., New Series, vol. IV, p. 336): . . . āgantusamam trēdhā vibhajya . . ., den richtigeren Weg zur Verbesserung unserer Stelle weist: es ist, lediglich mit einer Änderung der Reihenfolge der Wörter, upasamasyā 'gantusamam . . . zu lesen.

5. yajamānamātri prācy, aparimitā vā yathā 'sannāni havimṣi sambhavēd. ēvaṁ tiraścī¹⁾. prāñcāu vēdyamsāv unnayati, pratīci śrōṇi. purastād amphīyasi, pascāt prathīyasi, madhyē samnatatarāi. 'vam iva hi yōṣē. 'ti dārsikya vēdēr vijñāyatē.

1) D: tiraścī. — Vgl. auch den Kommentar zu Bāudh. Śulb. S. I, 75 (Pañd. X, 45).

6. aparēṇā 'havanīyam yajamānamātram dirghacaturaśram vihrtya, tāvatim rajjum abhyasya, madhyē lakṣaṇam kṛtvā, dakṣiṇayōḥ śrōnyamsayōr antāu niyamya, lakṣaṇēna dakṣiṇā 'pāyamya, nimittam karōti. nimittē rajjum niyamya, 'ntāu samasya, dakṣiṇayāi śrōṇēr dakṣiṇam aṣṣam ālikhēd. ēvam uttaratas. tiryahmānim dviguṇam tathā kṛtvā, pascāt purastād cō 'palikhēd¹⁾. vimitāyam purastāt pārśvamānyāv upasampharēc chruti rthyāt.

1) So D, Gr. und die Kommentare : 'parilikhēd.

Kap. V.

1. triṃśat padāni prakramā vā paścāt tiraścī bhavati, ṣaṭtriṃśat prāci, caturvimpśatiḥ purastāt tiraścī. 'ti sāumikyā vēdēr vijñāyatē.

2. ṣaṭtriṃśikāyām aṣṭādaśo 'pasamasyā, 'parasmād antād dvādaśasu lakṣaṇam, pañcadaśasu¹⁾ lakṣaṇam¹⁾. prṣṭhyāntayōr antāu niyamyā, pañcadaśikēna²⁾ dakṣiṇā 'pāyamyā, śaṅkuṃ nihanty. ēvam uttaratas. tē śrōṇī. viparyasyā 'msāu. pañcadaśikēnāi 'vā 'pāyamyā²⁾, dvādaśikē śaṅkuṃ nihanty. ēvam uttaratas. tāv aṃsāu. tad ēkarajivā viharāṇam.

1) . . . 1) und 2) . . . 2) fehlt in D. — Vgl. auch JASB., 235.

3. trikacatuṣkayōḥ pañcīkā 'kṣṇayārajus; tābhīr trirabhyastābhīr aṃsāu, caturabhyastābhīḥ śrōṇī.

4. dvādaśikapañcīkayōs trayōdaśikā 'kṣṇayārajus; tābhīr aṃsāu, dvirabhyastābhīḥ śrōṇī.

5. pañcadaśikāṣṭīkayōḥ saptaśikā 'kṣṇayārajus; tābhīḥ śrōṇī. dvādaśikapañcatrīṃśīkayōḥ saptatrīṃśīkā 'kṣṇayārajus; tābhīr aṃsāu.

6. ētāvanti jñāyāni vēdiviharaṇāni bhavanti.

7. aṣṭāvimpśatyō 'nam padasahasraṃ mahāvēdir. dakṣiṇasmād aṃsād dvādaśasu dakṣiṇasyām śrōṇyām nipātayēc. chēdam viparyasyē 'tarata¹⁾ upadadhyāt. sā dirghacaturaśrā. tathāyuktām samcakṣita.

1) So Gr., Sund., Karav., Kapard.; D verstümmelt: tara; S: 'sya tarata.

8. sāumikyā vēditṛtīyē yajētē 'ti sāutrāmanya vijñāyatē. prakramasya tṛtīyakaraṇī prakramasthāniyā bhavati. trikaraṇyā vā; ṣṭīkadaśikē tīryaṇmānyāu, dvādaśikā prṣṭhyā.

9. trīṇi caturvimpśāni padaśatāni sāutrāmanīkt vēdīḥ.

10. dvistāvā¹⁾ vēdir bhavati 'ty aśvamēdhē vijñāyatē.

1) Gr.: dvistāvān. — Vgl. Āp. Śr. S. XX, 9, 1.

Kap. VI.

1. prakramasya dvikaraṇī prakramasthāniyā bhavati.

2. prakramō dvipadas tripadō vā; prakramē yāthākāmi, śabdārthasya viśayitvād. yajamānasyā 'dhvaryōr vāi; 'sa hi cēṣṭānām kartā bhavati.

3. rathamātri nirūḍhapaśubandhasya vēdir bhavati 'ti vijñāyatē. tatra khalv āhū: rathākṣamātri paścāt tiryag, īṣayā prāci, vipathayugēna purastād, yāvata vā¹⁾ bāhyē chidre.

1) fehlt in D. — Vgl. auch Āp. Śr. S. VII, 3, 8.

4. tad ēkarajivō 'ktam. pañcadaśikēnāi 'vā 'pāyamyā, 'rdhā-kṣēṇā 'rdhayugēnē 'ti śrōṇyāṃsān nirharēt.

5. athā 'py udāharanty:

aṣṭāṣṭīśatam īṣā, tiryag akṣas catuṣsatam.

ṣaḍaṣṭīr yugam cū 'sya, sa¹⁾ rathas cāraṇa²⁾ ucyata.

iti rathaparimāṇam.

1) sa steht bei S., Sund. (Bl. 9, a), Karav. (K. I: Bl. 24, a), Kapard. (Bl. 13, a), fehlt dagegen in D und Gr. — 2) Gr.: cāraṇa.

6. aratnibhir vā caturbbhiḥ paścāt, ṣaḍbbhiḥ prāci, tribhiḥ purastāt. tad ēkarajjvō 'ktaṃ. pañcadaśikēnāi 'vā 'pāyamyā, dvābhyāṃ adhyardhēnē 'ti śrōṇyāṃsān nirharēt.

7. yajamānamātrī, catuḥsraṅgī bhavati 'ti pāitṛkyā vēdēr vijñāyatē. tad ēkarajjvō 'ktaṃ. pañcadaśikēnāi 'vā 'pāyamyā, 'rdhēna tataḥ śrōṇyāṃsān¹⁾ nirharēt¹⁾.

1) ... 1) fehlt in S.

8. daśapado¹⁾ 'ttaravēdir bhavati 'ti sōmē vijñāyatē. tad ēkarajjvō 'ktaṃ. pañcadaśikēnāi 'vā 'pāyamyā, 'rdhēna tataḥ¹⁾ śrōṇyāṃsān nirharēt.

1) ... 1) fehlt in S.

9. tāṃ yugēna yajamānasya vā padāir vimāya, śamyayā parimimittē.

10. padē, yugē, 'ratnāv, iyati, śamyāyāṃ ca mānārthēṣu yāthā-kāmī, śabdārthasya viśayitvāt.

11. vimitāyāṃ purastāt pārśvamānyāv upasaṃharēc chrutī-sāmarthyāt.

Kap. VII.

1. navāratni tiryak, saptavimpśatir udag āyatam iti sadasō vijñāyatē.

2. aṣṭādaśē 'ty ēkēṣāṃ.

3. tad ēkarajjvō 'ktaṃ. pañcadaśikēnāi 'vā 'pāyamyā, 'rdha-pañcamālī¹⁾ śrōṇyāṃsān nirharēt.

1) So Karav. (K. I: Bl. 26, a) im Sūtra, u. im Kommentar dazu: *ardha-pañcamēṣu ... lakṣaṇaṃ kṛtvā*. (Der Plur. von *ardhapañcamā* findet sich auch in Āpastamba's Dharmasūtra I, 2, 3.) Dagegen D: *ardhapañcamakāi*; Gr.: *pañcamai*; S: *ardhapañcamē*; u. Sund. (Bl. 10, a): *ardhapañcamūna*.

4. prādēśamukhālī, prādēśāntarālā bhavanti 'ty uparavāṇāṃ vijñāyatē. 'ratnimātraṃ caturaśraṃ vihr̥tya, sraṅgīṣu śaṅkūn nihatyā, 'rdhaprādēśēna tamtaṃ parilikhēc chrutīsāmarthyāt.

5. vyāyāmamātrī bhavati 'ti gārhapatyacitēr vijñāyatē.

6. caturaśrē 'ty ēkēṣāṃ, parimaṇḍalē 'ty ēkēṣāṃ.

7. karaṇaṃ vyāyāmasya tṛtīyāyāmaṃ, saptamavyāsaṃ¹⁾ kārayēt.

1) So Sund. (Bl. 11, a); D: *saptavyāsaṃ*, S u. Gr., sowie Karav. (K. I: Bl. 28, a): *saptamaṃ vyāsaṃ*.

8. tā ēkavimpśatir bhavanti.

9. prāgāyāmāḥ prathamē prastārē, 'parasminn udagāyāmāḥ.

10. maṇḍalāyāṃ mṛdō dēhaṃ kṛtvā, madhyē śaṅkūn nihatyā, 'rdhavyāyāmēna saha maṇḍalaṃ parilikhēt. tasmimś caturaśraṃ avadadhyād, yāvat saṃbhavēt. taṃ navadhā vyavalikhya, trāidham ēkāikaṃ pradhikaṃ vibhajēt.

11. upadhānē caturaśrasyā 'vāntaradēśān prati sraṅgīḥ saṃpādayēn, madhyānī¹⁾ 'tarasmin¹⁾ prastārē. vyatyāsaṃ cinuyād, yāvataḥ prastārāṃś cikīrṣēt.

1) D: *madhyānī tasmīn*. — Vgl. auch XIII, 3.

12. piślāmātrā bhavanti 'ti dhiṣṇīyānāṃ¹⁾ vijñāyatē.

1) Gr.: *dhiṣṇīyānāṃ*.

13. caturaśrā ity ekēśāṃ, parimaṇḍalā ity ekēśāṃ.

14. mṛdō dēhān kṛtvā, 'gnīdhriyaṃ navadhā vyavalikhyāi, 'kasyāḥ¹⁾ sthānē 'śmānam upadadhyāt.

1) D u. S.: 'syā; Gr.: 'sya. — Vgl. Bādh. Śulb. S. II, 74 (Paṇḍ. X, 166).

15. yathāsamkhyam itarān vyavalikhya, yathāyōgam upadadhyāt.

tṛtīyaḥ paṭalaḥ.

Kap. VIII.

1. bhavati 'va khalu vā ēśa¹⁾, yō 'gnim cinuta iti vijñāyatē. vayasāṃ vā ēśa pratimayā cīyata ity ākṛticōdanā²⁾. pratyakṣavi-dhānād³⁾ vā.

1) fehlt in D. — 2) So D, Sund. (Bl. 12, b), Karav. (K. I: Bl. 32, b), Kapard. (Bl. 17, b); dagegen S u. Gr.: 'cōdanāt. — 3) So S, Sund., Karav., Kapard.; dagegen D: 'vidhād dā, Gr.: 'virōdhanād vā.

2. yāvadāmnātēna¹⁾ vēṇunā catura ātmani puruṣān avamimitē, puruṣaṃ dakṣiṇē pakṣē, puruṣaṃ pucchē, puruṣaṃ uttarē. 'ratninā dakṣiṇatō dakṣiṇaṃ pakṣaṃ pravardhayaty²⁾, ēvam uttarata uttaraṃ, prādeśēna vitastyā vā pascāt puccham.

1) So S; dagegen D u. Gr.: yāvadāmnātēna. — 2) So Karav. (K. I: Bl. 33, b), Kapard. (Bl. 18, b) u. Āp. Śr. S. XVI, 17, 12; dagegen die MSS.: pravardhayanty. Sund. (Bl. 13, a): pravardhayēty.

3. ekavidhaḥ prathamō 'gnir, dvividhō dvitīyas, trividhas tṛtīyas. ta ēvam ēvō 'dyanty āi 'kaśatavidhāt.

4. tad u ha vāi: saptavidham ēva cinvīta, saptavidhō vāva prākṛtō 'gnis. tata ūrdhvam ēkōttarān iti vijñāyatē.

5. ekavidhaprabhṛtināṃ na pakṣapucchāni bhavanti, saptavi-dhavyākyaśeṣatvāc chrutivipratīṣēdhāc ca.

6. aṣṭavidhaprabhṛtināṃ yad anyat saptabhyas, tat saptadhā vibhajya pratipuruṣaṃ āvēśayēd, ākṛtīvikārasyā 'śrutatvāt.

7. puruṣamātrēṇa vimimītē. vēṇunā vimimīta iti vijñāyatē.

8. yāvān yajamāna¹⁾ ūrdhvaśāḥ, tāvadantarālē vēṇōś chidre karōti, madhyē tṛtīyam.

1) So S. Gr., ferner alle Kommentare und Āp. Śr. S. XVI, 17, 8; dagegen D: puruṣa; ebenso Tāitt. S. 5, 2, 5, 1 und Bādh. Śulb. S. III, 13 (Paṇḍ. X, 170).

9. aparēṇa yūpāvaśadēśam anupṛṣṭhyam vēṇuṃ nidhāya, chidreṣa śaṅkūn¹⁾ nihatyō, 'nmucyā 'parābhyām, dakṣiṇāprāk parilikhēd ā 'ntāt.

1) So der Kommentar zu Bādh. Śulb. S. III, 23 (Paṇḍ. X, 186). Dagegen S und Gr.: śaṅkūṃ; in D fehlt das Wort.

10. unmucya pūrvasmād, aparasmin¹⁾ pratimucya, dakṣiṇāpratyak parilikhēd ā 'ntāt.

1) fehlt in D.

Kap. IX.

1. unmucya vēṇuṃ, madhyamē śaṅkāv antyam vēṇōś chidraṃ pratimucyō, 'paryupari¹⁾ lēkhāsamaram dakṣiṇā vēṇuṃ nidhāyā,

'ntyē chidrē śaṅkuṃ nihatya, tasmin madhyamaṃ vēṇōś chidraṃ pratimueya¹⁾, lēkhāntayōr itarē pratiṣṭhāpya, chidrayōḥ śaṅku nihanti. sa²⁾ puruṣaś caturaśraḥ.

1) . . . 1) fehlt in Gr. — 2) fehlt in Gr.

2. ēvaṃ pradakṣiṇaṃ catura¹⁾ ātmani puruṣān avamimitē, puruṣaṃ dakṣiṇē pakṣē, puruṣaṃ pucchē, puruṣaṃ uttarē. 'ratninaḥ dakṣiṇatō²⁾ dakṣiṇaṃ ity uktam.

1) So S u. der Kommentar zu Bādh. Śulb. S. III, 23 (Paṇḍ. X, 186). Dagegen D u. Gr.: *caturaśra*. — Vgl. auch VIII, 2. — 2) fehlt in D. Siehe jedoch VIII, 2.

3. pṛṣṭhyātō vā puruṣamātrasyā 'kṣṇayāvēṇuṃ nidhāya, purvasminn itaraṃ, tābhyāṃ dakṣiṇaṃ aṃsaṃ nirharēd. viparyasya śrōṇi. pūrvavad uttaram aṃsam.

4. rajjvā vā vimāyō, 'ttaravēdinyāyēna vēṇunā vimimītē¹⁾.

1) Gr.: *mimītē*.

5. sapakṣapucchēṣu vidhābhyasē ['pacayē ca¹⁾] vidhāsaptamakarāṇi puruṣasthāniyāṃ kṛtvā viharēt.

1) Ich halte das Eingeklammerte für einen Zusatz und werde die Begründung bei der Übersetzung dieses Sūtra geben.

6. karāṇāni 'ṣṭakānāṃ puruṣasya pañcamēna kārayēt. tāsāṃ ēvāi 'katō 'dhyardhās; tad dvitīyaṃ. puruṣasya pañcamō bhāga ēkataḥ, prādēśa ēkatas; tat¹⁾ tṛtīyaṃ. sarvataḥ prādēśas; tac caturthaṃ. samacaturaśraḥ pañcadaśabhāgiyās; tat pañcamam.

1) fehlt in D u. S.

7. ūrdhvapramāṇaṃ iṣṭakānāṃ jānōḥ pañcamēna kārayēd; ardhēna nākasadāṃ pañcacōḍānāṃ ca.

8. yat paçyamānānāṃ pratihrasēta¹⁾, puriṣēṇa tat sampūrayēd, aniyataparimāṇatvāt puriṣasya.

1) So Gr., Karav. (K. I: Bl. 38, b), Kapard. (Bl. 22, a). D: *pratihasēt*; S: *pratihasēta*.

Kap. X.

1. upadhānē 'dhyardhā daśa purastāt pratieir ātmany upadadhāti, daśa paścāt prāciḥ, pañcapañca pakṣāgrayōḥ pakṣāpyayayōś ca viśayās; tāsāṃ ardhēṣṭakāmātrāṇi pakṣayōr bhavanti; pañcapañca¹⁾ pucchapārsvayōr dakṣiṇā udiciś ca.

1) S: *pañca*.

2. pucchē prādēśam upadhāya, sarvam agniṃ pañcamabhāgiyābhiḥ pracchādayēt.

3. pañcadaśabhāgiyābhiḥ samkhyāṃ pūrayēt.

4. aparasmīn prastārē 'dhyardhā daśa dakṣiṇata udiciir ātmany upadadhāti, daśō 'ttaratō dakṣiṇā; yathā prathamē prastārē pakṣāu, tathā puccham; yathā¹⁾ puccham, tathā pakṣāu; viparītā apyayē.

1) D: *tathā*.

5. sarvam agniṃ pañcamabhāgiyābhiḥ pracchādayēt.

6. pañcadaśabhāgiyābhiḥ samkhyāṃ pūrayēd. vyatyāsaṃ cinuyād, yāvataḥ prastārāṃś cikīrṣēt.

7. „pañca citayō bhavanti, pañcabhiḥ puriṣāir abhyuhati“ 'ti¹⁾.
puriṣāntā citir, arthāntaratvāt puriṣasya.

1) So in S u. sämtlichen Kommentaren; dagegon fehlt *iti* in D u. Gr.

8. jānudaghnām, sāhasraṃ¹⁾ cinvīta prathamam cinvānō;
nābhidaghnām, dviśāhasraṃ dvitīyam; āsyadaghnām, triśāhasraṃ
tṛtīyam; uttaramuttaram jyāyāmsam. mahāntam, brhantam, apari-
mitam svargakāmaś cinvitē 'ti vijñāyatē.

1) fehlt in D.

9.¹⁾ dviśāhasrē dviprastārās citayō bhavanti, triśāhasrē tripra-
stārās. caturthaprabhṛtiṣv āhārēṣu nityam iṣṭakāparimāṇam.

1) Dieser §. der sich in S und den Kommentaren findet, fehlt in D ganz und in Gr. zum Teil.

10.¹⁾ vijñāyatē ca: na jyāyāmsam citvā kanyāmsam cinvitē 'ti.

1) Dieser § fehlt in Gr.

caturthaḥ paṭalaḥ.

Kap. XI.

1. caturaśrābhir agniṃ cinuta¹⁾ iti vijñāyatē. samacaturaśrā
anupapadatvāc²⁾ chabdasya.

1) So S, Gr. und die Kommentare; D: *cinvitē*. — 2) So S, Gr. u. die
Kommentare; D: *anupadatvāc*.

2. pādāmātryō bhavanty. aratnimātryō¹⁾ bhavanty. urvasthi-
[dafür nach Āp. Śr. S. XVI, 13, 6 ūrvasthi-] mātryō¹⁾ bhavanty.
aṇūka-²⁾ mātryō¹⁾ bhavanti 'ti vijñāyatē.

1) D: *°mātrō*. — 2) „Fehlerhaft“ für *anūka*; vgl. p. w. letzte Nachträge. —
Zur Erklärung des *u* in *aṇūka* vgl. Garbe, Gurupūjākāumudī, S. 35 und
Wackernagel, Altindische Grammatik, Bd. I, § 173; § 170, b, Anmerkung.

3. caturbhāgiyā 'ṇukam¹⁾; pañcamabhāgiyā²⁾ 'ratniḥ; tathō
'rvasthi; pādēṣṭakā pādāmātri.

1) Siehe § 2, Anm. 2. — 2) D: *pañca°*.

4. tatra yāthākāmī, śabdārthasya viśayitvāt.

5. upadhānē 'ṣṭāvaṣṭāu pādēṣṭakāś caturbhāgiyānām pakṣāgrayor
'nidadhyāt, samdhyōś ca tadvad ātmānam ṣaḍaṅgulōpētāḥ, śrōṇyāmsēṣu
cā 'ṣṭāu prāciḥ praticiś ca.

6. samdhyantarālē pañcamabhāgiyāḥ sapādāḥ.¹⁾

1) D: nur *pādāḥ*.

7. pucchē prādeśam upadhāya, sarvam agniṃ caturbhāgiyābhiḥ
pracchādayēt.

8. pādēṣṭakābhiḥ samkhyāṃ pūrayēt.

9. aparasmīn prastārē pucchāpyayē pañcamabhāgiyā¹⁾ viśayās;
tā ātmani caturdaśabhiḥ pādair yathāyōgam paryupadadhyāt.

1) D: *pañca°*.

10. sarvam agniṃ pañcamabhāgiyābhiḥ¹⁾ pracchādayēt.

1) D: *pañca°*.

11. pādēṣṭakābhiḥ samkhyāṃ pūrayēt. vyatyāsam cinuyād,
yāvataḥ prastārāṃ cikīrṣēt.

Kap. XII.

1. ekavidhaprabhṛtinām karaṇinām dvādaśēna trayōdaśēnē 'ti 'ṣṭakāḥ kārāyēt pādēṣṭakāś ca. vyatyāsam cinuyād, yāvataḥ prastārāms cikīrṣēt.

2. ekavidhaprabhṛtinām prathamābhāreṇa dvitīyēna tṛtīyēnē 'ti yō yujyēta, sarvēṣāṃ yathāśruti samkhyā tathō 'rdhvapramāṇam.

3. kāmāyā guṇavikārā guṇasāstratvāt.

4. praūgacitam cinvita bhrātṛvyavān iti vijñāyatē.

5. yāvān agniḥ sārātniprādēśō, dvistāvatiṃ bhūmiṃ caturaśrām kṛtvā, pūrvasyāḥ karaṇyā ardhāc chrōṇi praty ālikhēt. sā nityā praūgam.

6. karaṇāni cayanam ity ekavīdhōktam. praūgā iṣṭakāḥ kārāyēt.

7. ubhayataḥpraūgam cinvita, yaḥ kāmāyēta: pra¹⁾ jātān bhrātṛvyān nudeya prati¹⁾ janiṣyamāṇān iti vijñāyatē.

1) Siehe Tāitt. S. 5, 4, 11, 2.

8. yathā vimukhē śakāṣē.

9. tāvad ēva dīrghacaturaśram vihr̥tya, pūrvāparayōḥ karaṇyōr ardhāt tāvati dakṣiṇōttarayōr nipātāyēt. sā nityō 'bhayataḥpraūgam.

10. praūgacitō 'ktam. ubhayataḥpraūgā iṣṭakāḥ kārāyēt.

11. rathacakracitam cinvita bhrātṛvyavān iti vijñāyatē.

12. yāvān agniḥ sārātniprādēśas, tāvatiṃ bhūmiṃ parimaṇḍalāṃ kṛtvā, tasmimś caturaśram avadadhyād, yāvat sambhavēt.

Kap. XIII.

1. tasya karaṇyā dvādaśēnē 'ṣṭakāḥ kārāyēt.

2. tāsāṃ ṣaṭ pradhāv upadhāya, śēṣam aṣṭadhā vibhajēt.

3. upadhānē caturaśrasyā 'vāntaradēśān prati sraktiḥ sampādayēn, madhyāni 'tarasmin prastārē. vyatyāsam cinuyād, yāvataḥ prastārāms cikīrṣēt.

4. drōṇacitam cinvita 'nnakāma iti vijñāyatē.

5. dvayāni tu khalu drōṇāni, caturaśrāṇi parimaṇḍalāni ca.

6. tatra yāthākāmi śabdārthasya viśayitvāt.

7. caturaśram vā, yasya guṇasāstram.

8. sa caturaśrah.

9. paścāt tsarur bhavaty anurūpatvāyē 'ti vijñāyatē.

10. sarvasyā bhūmēr daśamaṃ tsarus; tasya pucchēna nirhāra uktaḥ.

11. tasya karaṇyā dvādaśēnē 'ṣṭakāḥ kārāyēt, adhyardhāḥ pādēṣṭakāś ca.

12. upadhānē 'dhyardhāḥ purastāt praticir ātmany upadadhāti, tsarvagrē śrōṇyōś ca prācīḥ.

13. sarvam agniṃ caturaśrābhīḥ pracchādayēt.

14. pādēṣṭakābhīḥ samkhyāṃ pūrayēt.

15. aparasmīn prastārē 'dhyardhā dakṣiṇata udicir ātmany upadadhāty, uttaratāś ca dakṣiṇās; tsarupārsavayōr dakṣiṇā udicir ca.

16. sarvam agniṃ caturaśrābhiḥ pracchādayēt.
17. pādeṣṭakābhiḥ saṃkhyāṃ pūrayēt.
18. vyatyāsaṃ cinuyād, yāvataḥ prastārāṃś cikirṣēt.

Kap. XIV.

1. samūhyaṃ cinvita paśukāma iti vijñāyatē.
2. samūhann ivē 'ṣṭakā upadadhāti.
3. dikṣu cātvalā bhavanti. tēbhyaḥ puriṣam abhyūbati 'ti vijñāyatē.
4. paricāyyaṃ cinvita grāmakāma iti vijñāyatē.
5. madhyamāṃ svayamātrṇṇāṃ pradakṣiṇam iṣṭakāgaṇāḥ paricinoti. sa paricāyyaḥ.
6. upacāyyaṃ cinvita grāmakāma iti vijñāyatē.
7. paricāyyēnō 'ktah.¹⁾
1) So alle Kommentare. — D: 'kta, S: 'ktēh, Gr.: 'ktaṃ.
8. śmaśānacitaṃ cinvita, yaḥ kāmayēta: pitṛlōka ṛdhnuyām iti vijñāyatē.
9. dvayāni tu khalu śmaśānāni, caturaśrāṇi parimaṇḍalāni ca.
10. tatra yāthākāmi śabdārthasya viśayitvāt.
11. caturaśraṃ vā, yasya guṇaśāstram.
12. sa caturaśras¹⁾ tsaruvarjaṃ drōṇacitō²⁾ 'ktah.
1) So S. — D: caturasaṃ, Gr.: caturaśrāt. — 2) D: drōṇacitēnō.
13. chandaścitaṃ cinvita paśukāma iti vijñāyatē.
14. sarvāis chandōbhiḥ cinuyād ity ēkaṃ. prākṛtair ity aparam.

pañcamah paṭalaḥ.

Kap. XV.

1. śyēnacitaṃ cinvita suvargakāma iti vijñāyatē.
2. vakrapakṣō vyastapucchō bhavati. paścāt prāṇ udūhati, purastāt¹⁾ pratyaḥ udūhaty.¹⁾ ēvam iva hi vayasāṃ madhye pakṣanirṇāmō bhavati 'ti vijñāyatē.
1) ... 1) fehlt in D; aber XVIII, 2 steht es auch in D.
3. yāvān agniḥ sārataniprādēśaḥ saptavidhaḥ saṃpadyatē, prādēśaṃ, caturtham¹⁾ ātmanaś¹⁾ caturbhāgiyāś cā 'ṣṭāu. tāsāṃ tisraḥ śira; itarat pakṣayōr vibhajēt.
1) ... 1) fehlt in D.
4. pañcāratniḥ puruṣaś, caturatnir vyāyāmaś, caturvimpśaty angulayō 'ratniś, tadardhaṃ prādēśa iti kṛptiḥ.
5. ardhaśamā aratnayō 'nguliś ca caturbhāgōnā pakṣāyāmaḥ.
6. dvipuruṣāṃ rajjum ubhayataḥpāśāṃ karōti, madhye lakṣaṇaṃ. pakṣasyā 'parayōḥ kōṭyōr antāu niyāmya, lakṣaṇēna prācinam āyacchēd. ēvaṃ purastāt. sa nirṇāmaḥ.
7. ētēnō 'ttaraḥ pakṣō vyākhyātaḥ.

8. ātmā dvipuruṣāyāmō, 'dhyardhapuruṣavyāsaḥ.

9. pucchē 'rdhapuruṣavyāsaṃ puruṣaṃ praticīnam āyacchēt. tasya dakṣiṇatō 'nyam uttarataś ca. tāv akṣṇayā vyavalikhēd,¹⁾ yathā 'rdhapuruṣō 'pyayē syāt.

1) So Kapard., Karav. II u. Thibaut, JASB., 257. Dagegen D, S u. Sund.: ālikhēd; Karav. I: vyalikhēd.

10. śirasy ardhapuruṣeṇa caturaśraṃ kṛtvā, pūrvasyāḥ karanyā ardhāt tāvati dakṣiṇōttarayōr nipātayēt.

Kap. XVI.

1. apyayān prati śrōnyamsān apacchindyād. ēvam iva hi syēnaḥ.

2. karaṇaṃ puruṣasya pañcamāyāmaṃ, śaṣṭhavyāsaṃ kārayēd, yathāyōganatam. tat prathamam.

3. tē dvē prācisaṃhitē. tad dvitīyam.

4. prathamasya ṣaḍbhāgam aṣṭamabhāgēna¹⁾ vardhayēd yathā-
yōganatēna.²⁾ tat tṛtīyam.

1) D u. S: aṣṭa°; dagegen JASB., 257: aṣṭama°. — 2) So JASB., 257.
— D u. S: °natam.

5. caturbhāgiyādhyardhā; tasyāś caturbhāgiyāmātram akṣṇayā bhindyāt. tac caturtham.

6. caturbhāgiyārdham pañcamam.

7. tasyā 'kṣṇayābhēdaḥ śaṣṭham.

8. puruṣasya pañcamabhāgam¹⁾ daśabhāgavyāsaṃ praticīnam āyacchēt, tasya dakṣiṇatō 'nyam uttarataś ca. tāv akṣṇayā dakṣiṇā-parayōḥ kōṭyōr ālikhēt. tat saptaṃam.

1) D: pañca°.

9. ēvam anyad; uttaraṃ tū 'ttarasyāḥ kōṭyā ālikhēt. tad aṣṭamam.

10. caturbhāgiyākṣṇayōbbhayatōbbhēdō navamam.

11. upadhānē śaṣṭiḥśaṣṭiḥ pakṣayōḥ prathamā udīcīr upa-
dadhyāt.¹⁾

1) D: nī°.

12. pucchapārsvayōr aṣṭavaṣṭau śaṣṭhyas: tistrō 'grē, tata ēkāṃ, tatas tistras, tata ēkāṃ.

13. pucchāpyayē caturthyāu viśayē, tayōś ca paścāt pañcamyāv anikasaṃhitē.

Kap. XVII.

1. śēṣe daśa caturthyāḥ, śrōnyamsēṣu cā 'ṣṭau prācīḥ pra-
ticīś ca.

2. śēṣe ca ṣaḍvimpasatīr, aṣṭau śaṣṭhyas, catasraḥ pañcamyāḥ.

3. śirasi caturthyāu viśayē, tayōś ca purastāt prācīyāu.

4. ēṣa dvīṣataḥ prastāraḥ.

5. aparasmin prastārē pañcapañca¹⁾ nirṇāmayōr dvitīyā, apya-

yayōś ca tṛtīyā ātmānam aṣṭabhāgōpētāḥ; śeṣe pañcacaṭvāriṃśatpañcacaṭvāriṃśat prathamāḥ prāciḥ.¹⁾

1) . . . 1) fehlt in D.

6. pucchapārśvayōḥ¹⁾ pañcapañca saptamyō, dvitīyācaturthyōś²⁾ cā 'nyatarataḥ pratisamhitām ěkāikāṃ; śeṣe trayōdaśā 'ṣṭamyāḥ.

1) fehlt in D. — 2) So Thibaut, JASB., 260. — D u. S: *dvitīya*°.

7. śrōṇyampśeṣu cā 'ṣṭāu caturthyō dakṣiṇā udiciś ca, śeṣe ca viṃśatis, triṃśat ṣaṣṭhya, ěkāṃ¹⁾ pañcamīm.¹⁾

1) . . . 1) so D u. S. Dagegen Thibaut, JASB., 260: *ěkā pañcamī*. Wenn diese Lesart eine durch „*viṃśatis*“ u. „*ṣaṣṭhya*“ veranlasste Korrektur sein sollte, so wäre sie unbegründet; denn *viṃśatis* u. *ṣaṣṭhya* fungieren hier, obwohl sie formell Nominative sind, syntaktisch als Akkusative. Über einige ähnliche Fälle aus dem Āp. Śr. S. vgl. Garbe, Gurupūjākāumudī, S. 36. Ferner finden sich solche zahlreich hier im Āp. Śulb. S. in den unmittelbar vorhergehenden Sūtras: XVI, 11: *ṣaṣṭiḥṣaṣṭis*, XVI, 12: *ṣaṣṭhyas*; XVII, 1: *caturthyas*; XVII, 2: *ṣaḍviṃśatis*, *ṣaṣṭhyas*, *pañcamyas*; XVII, 6: *saptamyas*, *aṣṭamyas*; XVII, 7: *caturthyas* (*viṃśatis*, *ṣaṣṭhyas* s. oben); XVII, 8: *navamyas*.

8. śirasi caturthyāu, tayōś ca purastāc catasrō navamyāḥ.

9. ēṣa dvīśataḥ prastāraḥ.

10. vyatyāsam cinuyād, yāvataḥ prastārāṃś cikīrṣēt.

ṣaṣṭhaḥ paṭalaḥ.

Kap. XVIII.

1. śyēnacitam cinvita suvargakāma iti vijñāyatē.

2. vakrapakṣō vyastapucchō bhavati. paścāt prāṇ udūhati, purastāt pratyaṇ udūhaty. ēvam iva hi vayasāṃ madhyē pakṣa-nirṇāmō bhavati 'ti vijñāyatē.

3. puruṣasya ṣōḍaśibhir viṃśaśataṃ sārataniprādeśaḥ saptavidhaḥ sampadyatē. tāsāṃ caṭvāriṃśad ātmani, tisraḥ śirasi, pañcadaśa puccha, ěkatirīṃśad dakṣiṇē pakṣe tathō 'ttarē.

4. adhyardhapuruṣas tiryag, dvāv āyāmata; iti dirghacaturaśraṃ viḥṛtya, śrōṇyampśebhyō dvēdvē ṣōḍaśyāu nirasyēc;¹⁾ caṭvāriṃśat pariśiṣyantē. sa ātmā.

1) D: *vidṛśyēc*.

5. śirasy ardhapuruṣēna caturaśraṃ kṛtvā, pūrvasyāḥ karanyā ardhāt tāvati dakṣiṇōttarayōr nipātyēt; tisraḥ pariśiṣyantē. tac chirah.

6. puruṣas tiryag, dvāv āyāmataḥ ṣōḍaśabhāgas ca dakṣiṇaḥ pakṣas tathō 'ttaraḥ.

7. pakṣāgrēpakṣāgrē¹⁾ puruṣacaturthēna caṭvāri caturaśrāni kṛtvā, tāny akṣṇayā vyavalikhyā, 'rdhāni nirasyēd; ěkatirīṃśat pariśiṣyantē.

1) So D; dagegen S u. Gr. nur *pakṣāgrē*.

8. pakṣāgram utsṛjya, madhyē pakṣasya prāciṃ lēkhām ālikhēt. pakṣāpyayē puruṣaṃ niyama, lēkhāyāṃ puruṣāntē nitōḍaṃ¹⁾ kur-

yān; nitōdāt prācinam puruṣāntē¹⁾ nitōdam. nitodayōr nānāntāv ālikhēt. tat pakṣanamanam. ētēnō 'ttaraḥ pakṣō vyākhyātaḥ.

1) . . . 1) fehlt in D.

Kap. XIX.

1. dvipuruṣam paścād, ardhapuruṣam purastāc, caturbhāgōnaḥ puruṣa āyamō, 'ṣṭadaśakaranyāu pārśvayōs; tāḥ pañcadaśa parigrhṇanti. tat puccham.

2. ṣoḍaśīm caturbhiḥ parigrhṇīyād: aṣṭamēna, tribhir aṣṭamāś, caturthēna, caturthasaviśēṣēnē 'ti.

3. ardheṣṭakām tribhir: dvābhyām caturthābhyām,¹⁾ caturthasaviśēṣēnē 'ti.

1) fehlt in D.

4. pādēṣṭakām tribhiś: caturthēnāi 'kam, caturthasaviśēṣār-dhābhyām cē 'ti.

5. pakṣeṣṭakām caturbhir: dvābhyām caturthābhyām saptamābhyām¹⁾ cē 'ti.

1) So alle Kommentare; dagegen S u. D: *saptabhyām*.

6. pakṣamadhyīyām caturbhir: dvābhyām caturthābhyām dvisaptamābhyām cē 'ti.

7. pakṣāgrīyām tribhiś: caturthēnāi 'kam, caturthasaptamābhyām ekam, caturthasaviśēṣasaptamābhyām cē 'ti.

8. pakṣakaranyāḥ saptamam tīryānmānī, puruṣacaturtham ca pārśvamānī. tasyā 'kṣṇayārajivā karaṇam prajrmbhayēt, pakṣanamanyāḥ saptamēna phalakāni namayēt.

9. upadhānē catasraḥ pādēṣṭakāḥ¹⁾ purastāc chirasy; aparēṇa śirasō 'pyayam pañca; pūrvēṇa pakṣāpyayāv ekādaśā, 'parēṇāi¹⁾ 'kādaśa; pūrvēṇa pucchāpyayam pañcā, 'parēṇa pañca;²⁾ pañcadaśa pucchāgrē.

1) . . . 1) fehlt in S. — 2) fehlt in S.

Kap. XX.

1. catasraścatasraḥ pakṣāgrīyāḥ pakṣāgrayōḥ pakṣāpyayayōś ca viśayāḥ.

2. tā ātmani catasrbhiścatasrbhiḥ ṣoḍaśibhir yathāyōgam paryupadadhyāt.¹⁾

1) S: *upa*°.

3. catasraścatasraḥ pakṣamadhyīyāḥ pakṣamadhyayōḥ.

4. pakṣeṣṭakābhiḥ prācibhiḥ pakṣāu pracchādayēt.

5. avaśiṣṭam ṣoḍaśibhiḥ pracchādayēt; antyā bāhyaviśēṣā, anyatra śirasāḥ.

6. aparasmin prastārē purastāc chirasi dvē ṣoḍaśyāu bāhyaviśēṣe upadadhyāt; tē aparēṇa dvē viśayē abhyantaraviśēṣe.

7. dvābhyām ardheṣṭakābhyām yathāyōgam paryupadadhyāt, bāhyaviśēṣābhyām parigrhṇīyāt.

8. ātmakaraṇinām saṃdhiṣu ṣoḍaśyō bāhyaviśeṣā upadadhyāt.
 9. catasraścataśrō 'rdhēṣṭakāḥ pakṣāgrayōḥ; pakṣeṣṭakābhīr
 udicibhiḥ pakṣāu pracchādayēt.
 10. tistrastisrō 'rdhēṣṭakāḥ pucchapārśvayōḥ.
 11. avasiṣṭam ṣoḍaśtibhiḥ pracchādayēd; antyā bāhyaviśeṣā,
 anyatra pucchāt.
 12. yac caturaśram tryaśram¹⁾ vā sampadyētā, 'rdhēṣṭakābhīr
 pādeṣṭakābhīr vā pracchādayēt.
 1) So S; dagegen D: *tryasri*.
 13. aṇukāḥ¹⁾ pañcadaśabhāgyānām sthānē.
 1) Vgl. XI, 2.
 14. vyatyāsam cinuyād, yāvataḥ prastārāṃś cikīrṣēt.

Kap. XXI.

1. kaṅkacid alajacid iti śyēnacitā¹⁾ vyākhyātāu.
 1) D: *cityā*.
 2. ēvam iva hi: śyēnasya varṣīyāṃsāu pakṣāu pucchād vakrāu,
 saṃnatam puccham, dirgha ātmā maṇḍalaḥ;¹⁾ śiraś ca, tasmāc
 chrutisāmarthyād; aśiraskō vā 'nāmnānāt.
 1) So D u. alle Kommentare bis auf Sund., der im Sūtra wie S *maṇḍalaḥ*,
 aber im Kommentar dazu ebenfalls *maṇḍalaḥ* hat.
 3. vijñāyatē ca:¹⁾ kaṅkacitam śirṣaṇvantam cinvita, yaḥ kā-
 mayēta: „saśirṣā 'muṣmiṃ lōkē sambhavēyam²⁾“ iti. vidyamānē
 katham brūyāt?
 1) fehlt in D. — 2) S: *bhavēyam*.
 4. prākṛtāu vakrāu pakṣāu; saṃnatam puccham vikāraśravaṇād;
 yathāprakṛty ātmā 'vikārat.¹⁾
 1) S: *vikārāśravaṇāt*.
 5. yathō ētac „chyēnacitam cinvitē“ 'ti, yāvad āmnātam¹⁾
 sārūpyam, tad vyākhyātam.
 1) S: *āmnānam*.
 6. tristāvō¹⁾ 'gnir bhavati 'ty aśvamēdhē vijñāyatē.
 1) V, 10 findet sich *dvistāvā*; beide Formen stehen Āp. Śr. S. XX, 9, 1;
 vgl. hierüber Garbe, Gurupūjākāumudī, S. 37. *tristāva* findet sich auch Bāudh.
 Śulb. S. III, 323 (Paṇḍ., N. S. I, 770). Vgl. Pāṇini 5, 4, 84 (Böhtlingk,
 Pāṇini's Gramm. S. 274): *dvistāvā tristāvā vēdih*. — Dazu vgl. Wacker-
 nagel, Altind. Gramm., p. XXXIII: „In der Grammatik des Pāṇini (um 300
 v. Chr.?) ist eine der Sprache der Sūtren nah verwandte Form der Hoch-
 sprache fixiert.“
 7. tatra sarvābhyāsō 'viśeṣāt.
 8. dirghacaturāśrāṇām samāsēna pakṣapucchānām samāsa uktaḥ.
 9. ēkavimpśō 'gnir bhavati 'ty aśvamēdhē vijñāyatē.
 10. tatra puruṣābhyāsō, nā 'ratniprādēśānām, saṃkhyāsaṃyōgāt
 saṃkhyāsaṃyōgāt.¹⁾
 1) *vipsā samāptikhyāpanārthā* (Kommentar zu Bāudh. Śulb. S. III, 323
 [Paṇḍ., N. S. I, 770]).

Zu Friedrich Schulthess' Besprechung S. 337 ff.

Von

B. Jacob.

Herr Privatdocent Schulthess hat meine Ergänzung seiner Verbesserungen der christlich-palästinischen Texte (Bd. 53, S. 705—713 cfr. Bd. 55, S. 185 ff.) *ibid.* 337 ff. einer Besprechung unterzogen, die ich nicht unbeantwortet lassen kann, da sie erhebliche Missverständnisse und Irrtümer enthält, auf die ich ihn gern vorher aufmerksam gemacht hätte, wenn auch er die Güte gehabt hätte, mir einen Korrekturabzug zu schicken.

Zunächst muss es in der That einem Kenner dieser Texte auffallen, dass ich von den Land'schen Fragmenten abgesehen habe, da doch gerade sie mit ihren zahlreichen Fehlern die reichste Nachlese zu versprechen und „des Schweisses der Edlen wohl wert“ zu sein schienen. Allein ich verzichtete mit Absicht, weil ich den Rand des von mir benützten Exemplars der hiesigen Bibliothek mit vielen (übrigens oft recht glücklichen) Bleistiftkorrekturen, von denen nur ein Teil mangelhaft ausradiert war, versehen fand. Offenbar hatte also hier schon ein Edler geschwitzt, dem ich auch nicht einmal einen Anhalt zu dem Verdacht des Raubes geben wollte. Daher unterdrückte ich alle, auch die selbständig gefundenen Korrekturen. Dass auch ich viele der von Sch. veröffentlichten und zwar fast alle irgend wahrscheinlichen schon gefunden hatte, liegt nahe, aber es zu erwähnen, erschien mir ebenso überflüssig, wie es hinterher billig gewesen wäre. Alles, was ich nachher schon bei anderen notiert fand, strich ich aus meiner Liste und nur aus Versehen sind einige wenige Fälle stehen geblieben. — Meine Bemerkungen auf S. 140 über eine „vergleichende lexikalische Bearbeitung des Dialekts“ hat Sch. durchaus missverstanden. Eine solche zu fordern, lag mir fern. Falls sie aber jemand — nach dem Vorgange Schwally's, an diesen dachte ich hierbei — unternehmen sollte, dann wollte ich das Samaritanische und Jüd.-Paläst. mehr berücksichtigt sehen. Ich bin ganz mit Sch. einverstanden, dass es vor allem auf die empirische Feststellung des lexikalischen Thatbestandes ankommt; in der That lässt sich der Sprachschatz nur an einem Lexikon, nicht an einem Idiotikon übersehen, und Sch. wird sich