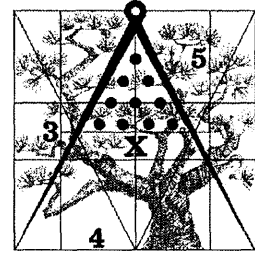


6754 pdf
LAUENSTEIN, H.
9 p.

Lehr- und Forschungsgebiet Freiraum- und Grünplanung

RWTH Aachen; Prof. Dr.-Ing. H. Lauenstein



Ursprünge des architektonischen Proportionenkanons

0. Einleitung

Die Entdeckung der ganzzahligen Proportionsverhältnisse harmonischer Zweiklänge, welche in der griechischen Antike dann auf die Abmessungen von Werken der Bau- und Bildkunst übertragen worden sind, wird gemeinhin Pythagoras von Samos (etwa 570 – 490 v. Chr.) zugeschrieben.

Rund 2000 Jahre später wurde in Italien der pythagoreïschen Harmonielehre erneut große Aufmerksamkeit zuteil und die Anwendung der antiken Prinzipien harmonikaler Proportionierung von Längen-, Breiten- und Höhenverhältnissen in der Architektur, in der Plastik wie auch in der Malerei wurde gang und gäbe.

Mit dem „Monochord“, einem länglichen Resonanzkasten mit darüber gespannter Saite, soll Pythagoras den Nachweis geführt haben, dass beide Teile der Saite rechts und links von einem darunter gestellten Steg nur dann harmonisch zusammen klingen, wenn beide Teillängen in einem ganzzahligen Verhältnis stehen.

Heute erscheint das wenig sensationell, weil die Erklärung dafür so selbstverständlich ist: Konsonanz, der von uns als harmonisch empfundenen Zusammenklang, resultiert daraus, dass die Schwingungskurven unterschiedlicher Amplitude und Wellenlänge gemeinsame Null-Durchgänge haben.

Für Pythagoras war das Faszinierende der Umstand, dass den als schön empfundenen Zweiklängen die Ganzzahligkeit beider beteiligter Saitenlängen als klare mathematische Regel zugrunde liegt. Er sah sich dadurch in seiner Auffassung bestätigt, dass alles in der Welt – vom Kosmos bis in die menschlichen Empfindungsmuster hinein – durch Zahlen und ihre mathematischen Zusammenhänge bestimmt ist.

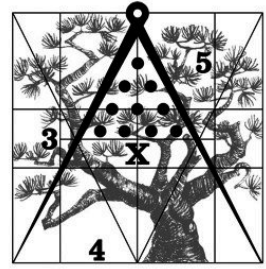
„Alles ist Zahl“ soll Pythagoras gesagt haben, und in diesem Glauben umso mehr bestärkt hat ihn sicherlich die Tatsache, dass sich aus dem reinsten Zweiklang mit dem kleinsten Zahlenverhältnis – dem 2 : 1 der Oktave – weitere Harmonien, nämlich die Quarte und Quinte, die Terzen sowie Ganztöne und Halbtöne durch Bildung der arithmetischen und harmonischen Mittelwerte rechnerisch herleiten lassen.

Damit war – spätestens Ende des 6. Jh. v. Chr. – die sogenannte „Kanonteilung“ erfunden, doch authentische schriftliche Belege aus dieser Zeit scheint es nicht zu geben. Etwa 200 Jahre später (um 330 v. Chr.) hat Euklid in seiner „Sectio canonis“ und in der „Introductio Harmonica“ (s. Lit. 2) die mathematische Herleitung beschrieben; es sind dies die ersten verfügbaren nachpythagoreïschen Schriften, in welchen die „Kanonteilung“ – wie auch pythagoreïsche Arithmetik und Geometrie – fundiert und relativ gut nachvollziehbar dargestellt sind.

Spätere Abhandlungen (auch die der Neuzeit) sind nicht annähernd so verständlich und man wird den Verdacht nicht los, dass die Mehrzahl der Verfasser lediglich abgeschrieben und die – an sich einfache – Sache nicht so recht durchschaut haben.

Lehr- und Forschungsgebiet Freiraum- und Grünplanung

RWTH Aachen; Prof. Dr.-Ing. H. Lauenstein



Ursprünge des architektonischen Proportionskanons

0. Einleitung

Die Entdeckung der ganzzahligen Proportionsverhältnisse harmonischer Zweiklänge, welche in der griechischen Antike dann auf die Abmessungen von Werken der Bau- und Bildkunst übertragen worden sind, wird gemeinhin Pythagoras von Samos (etwa 570 – 490 v. Chr.) zugeschrieben.

Rund 2000 Jahre später wurde in Italien der pythagoreischen Harmonielehre erneut große Aufmerksamkeit zuteil und die Anwendung der antiken Prinzipien harmonikaler Proportionierung von Längen-, Breiten- und Höhenverhältnissen in der Architektur, in der Plastik wie auch in der Malerei wurde gang und gäbe.

Mit dem „Monochord“, einem länglichen Resonanzkasten mit darüber gespannter Saite, soll Pythagoras den Nachweis geführt haben, dass beide Teile der Saite rechts und links von einem darunter gestellten Steg nur dann harmonisch zusammen klingen, wenn beide Teillängen in einem ganzzahligen Verhältnis stehen.

Heute erscheint das wenig sensationell, weil die Erklärung dafür so selbstverständlich ist: Konsonanz, der von uns als harmonisch empfundenen Zusammenklang, resultiert daraus, dass die Schwingungskurven unterschiedlicher Amplitude und Wellenlänge gemeinsame Null-Durchgänge haben.

Für Pythagoras war das Faszinierende der Umstand, dass den als schön empfundenen Zweiklängen die Ganzzahligkeit beider beteiligter Saitenlängen als klare mathematische Regel zugrunde liegt. Er sah sich dadurch in seiner Auffassung bestätigt, dass alles in der Welt – vom Kosmos bis in die menschlichen Empfindungsmuster hinein – durch Zahlen und ihre mathematischen Zusammenhänge bestimmt ist.

„Alles ist Zahl“ soll Pythagoras gesagt haben, und in diesem Glauben umso mehr bestärkt hat ihn sicherlich die Tatsache, dass sich aus dem reinsten Zweiklang mit dem kleinsten Zahlenverhältnis – dem 2 : 1 der Oktave – weitere Harmonien, nämlich die Quarte und Quinte, die Terzen sowie Ganztöne und Halbtöne durch Bildung der arithmetischen und harmonischen Mittelwerte rechnerisch herleiten lassen.

Damit war – spätestens Ende des 6. Jh. v. Chr. – die sogenannte „Kanonteilung“ erfunden, doch authentische schriftliche Belege aus dieser Zeit scheint es nicht zu geben. Etwa 200 Jahre später (um 330 v. Chr.) hat Euklid in seiner „Sectio canonis“ und in der „Introductio Harmonica“ (s. Lit. 2) die mathematische Herleitung beschrieben; es sind dies die ersten verfügbaren nachpythagoreischen Schriften, in welchen die „Kanonteilung“ – wie auch pythagoreische Arithmetik und Geometrie – fundiert und relativ gut nachvollziehbar dargestellt sind.

Spätere Abhandlungen (auch die der Neuzeit) sind nicht annähernd so verständlich und man wird den Verdacht nicht los, dass die Mehrzahl der Verfasser lediglich abgeschrieben und die – an sich einfache – Sache nicht so recht durchschaut haben.

1. Die mathematischen Hintergründe der Kanonteilung

Die Kanonteilung muss man nicht beherrschen, um harmonische Proportionen in der Architektur und Bildkunst aufspüren oder umsetzen zu können, aber

- *mit* Kenntnis dieses mathematischen Hintergrundes der pythagoreischen Harmonik wird der Enthusiasmus verständlicher, mit dem die Renaissance (wie 2000 Jahre zuvor schon die Pythagoreer) harmonische Klangverhältnisse auf die sichtbare Kunst zu übertragen trachteten und

- ohne Kenntnis der Kanonteilung sieht man das zahlentheoretische und philosophische Gedankengebäude der Pythagoreer nur fragmentarisch, denn deren Demut vor der „Göttlichkeit“ des Irrationalitätsphänomens rührt nicht nur vom „Goldenen Schnitt“ her, welcher sich – vielfach – im Geheimsymbol ihrer Bruderschaft, dem Pentagramm verbirgt, sondern irrational (inkommensurabel)



ist auch das *geometrische Mittel* zwischen den rationalen Zahlenwerten der Harmonien. Der Kanonteilung liegt die Erkenntnis zugrunde,

- dass der aus den beiden an der Oktave beteiligten Längeneinheiten (2 LE : 1 LE) berechnete *arithmetische Mittelwert* (AM) und *harmonische Mittelwert* (HM) jeweils als Saitenlänge gegen die Gesamtlänge der Saite gespielt zwei neue Harmonien ergibt und
- dass sich aus den beteiligten Längeneinheiten dieser neuen Harmonien durch erneute Mittelbildung nochmals harmonikale Zweiklänge ableiten lassen.

Das *arithmetische Mittel* (AM) ist als „Durchschnitt“ geläufig: Summe aller beteiligten Werte durch deren Anzahl.

Bei den zwei Zahlenwerten einer Konsonanz:

$$AM = (A + B) : 2$$

Für die Oktave (A = 2 LE; B = 1 LE) ist **AM** = (2+1) : 2

$$= 3/2 = 1^{1/2}$$

Die ganze Saite (2 LE) mit AM ($1\frac{1}{2}$ LE) gespielt*) ergibt

$2 : 1^{1/2} = 4/2 : 3/2 = 4 : 3 = \text{Quarte.}$

Das *harmonische Mittel* ist der Kehrwert des arithmetischen Mittels der Kehrwerte der beteiligten Werte.

Das ist etwas verwirrend, deshalb schrittweise:

1. arithmetisches Mittel der Kehrwerte von A und B =

$$(1/A + 1/B) : 2$$

2. Kehrwert des Quotienten $(1/A + 1/B) : 2 =$

$$2 : \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right)$$

Durch Multiplikation mit A und B erhält man:

$$\text{HM} = 2 \text{ AB} : (\text{B} + \text{A})$$

Für die Oktave (A = 2 LE; B = 1 LE) ist **HM** = 2 (2x1) : (2+1)

$$= 4/3 = 1\frac{1}{3}$$

Die ganze Saite (2 LE) mit HM ($1\frac{1}{3}$ LE) gespielt*) ergibt

$$2 : 1^{1/3} = 6/3 : 4/3 = 3 : 2 = \text{Quinte.}$$

[*) Bei der Überprüfung – z. B. auf einer Gitarre – sollte man mit zwei gleich gestimmten Saiten arbeiten!]

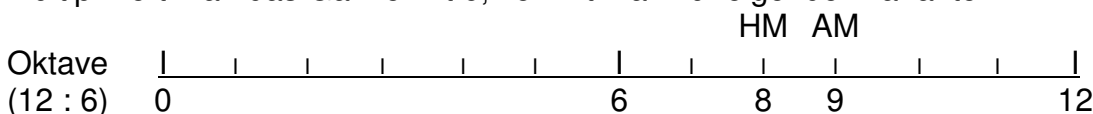
An der zeichnerischen Darstellung ist folgende vereinfachte Aussage ablesbar:

Das *arithmetische Mittel* teilt die Differenz zwischen den beteiligten Werten in der Mitte.

Das *harmonische Mittel* teilt die Differenz beider beteiligter Werte in deren Verhältnis.



Multipliziert man das Ganze mit 6, kommt man zu folgender Variante:



Die *erste Stufe der Kanonteilung* ist damit vollzogen. Durch die Korrektur mit dem Faktor 6 ist erreicht, dass AM und HM ganzzahlig werden, was nichts daran ändert dass

- ganze Saite (12) : AM (9) = 4 : 3 – Quarte und

- ganze Saite (12) : HM (8) = 3 : 2 – Quinte ist.

Zwischenexkurs: „Tetraktys“ und „Harmonieschlüssel“

Die Vierergruppe 6, 8, 9, 12 nannten die Pythagoreer „Große Tetraktys“; aus ihr lassen sich – wie auch aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 der „Kleinen Tetraktys“ – die Oktave, Quarte, Quinte bilden.

Die „Kleine Tetraktys“ (in Abb. 1 als Dreieckzahl mit der Summe $X = 10$ dargestellt) gibt aber zusätzlich mit $1 : 3$ und $1 : 4$ noch Duodezime und Doppeloktave als Konsonanzen her und hat darüber hinaus geometrische Bedeutung, da sie Punkt, Linie, Fläche (Dreieck) und (mit einem Punkt über dem Dreieck) Raum verkörpert.

Die „Große Tetraktys“ hingegen hatte den Vorteil, dass mit ihren Zahlen 6, 8, 9, 12 die Harmonien symmetrisch darstellbar sind (dar- auf muss man erst mal kommen!).

Den so genannten „Harmonieschlüssel“ (Abb. 1) zeigt Raffael auf einer der beiden „Programmtafeln“ in der „Schule von Athen“, – eines seiner Wandfresken in den Stanzen des Vatikans (s. Abb. 9).

Das wie eine Überschrift auf der Tafel stehende ΕΠΟΓΔΟΩΝ¹ ist die pythagoreische Wortschöpfung für die 8:9-Proportion (HM : AM der Oktave-Ableitung) des „Großen Ganztons“.

Von Bedeutung war das 8 : 9 weniger als Harmonie, sondern vielmehr, weil es – symbolisch – zugleich für die Irrationalität der Zahl π stand, denn schon in Ägypten war der Näherungsbruch für π : $[2(\frac{8}{9})]^2$.

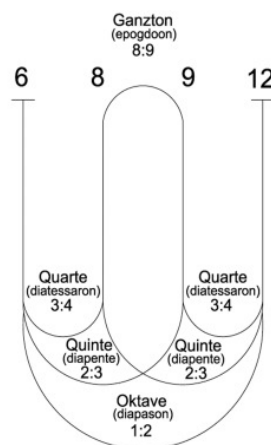


Abb. 1: Harmonieschlüssel

Die *zweite Stufe der Kanonteilung* führt – in gleicher Weise – über AM und HM von Quarte und Quinte zu Terzen, von denen 6:5 reiner klingt als 7:6 und einem 8:7-Ganzton, welcher reiner klingt als der 9:8-Ganzton (je kleiner – je reiner).

Es wurden aber Konsonanzen mit der Zahl 7 wegen deren mystischer Bedeutung² (u. a. weil $\frac{7}{5}$ als Näherungsbruch für $\sqrt{2}$ stand, – die irrationale Diagonale im Quadrat) nicht ins pythagoreische Tonsystem aufgenommen.

2. Ableitung:

				HM	AM
Quarte					
(4 : 3)	0		3	$\frac{24}{7}$	$\frac{7}{2}$

$$\text{AM der Quarte (A = 4 LE; B = 3 LE)} = (4+3) : 2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{98}$$

$$\text{HM der Quarte (A = 4 LE; B = 3 LE)} = 2(4 \times 3) : (4+3) = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7} \rightarrow \mathbf{96}$$

Neue Harmonien mit AM u. HM der Quarte:

$$4 : \frac{7}{2} [x \ 2] = 8 : 7 \text{ – Gro\ss{}er Ganzton}$$

$$4 : \frac{24}{7} [x \ \frac{7}{4}] = 7 : 6 \text{ – Kleine Terz}$$

				HM	AM
Quinte					
(3 : 2)	0		2	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{2}$

$$\text{AM der Quinte (A = 3 LE; B = 2 LE)} = (3+2) : 2 = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \rightarrow \mathbf{100}$$

$$\text{HM der Quinte (A = 3 LE; B = 2 LE)} = 2(3 \times 2) : (3+2) = \frac{12}{5} = 2\frac{2}{5} \rightarrow \mathbf{96}$$

¹ Raffael schreibt ΕΠΟΓΔΟΩΝ, doch diesen Fehler hat er – ebenso wie die VII statt VIII über dem Harmonieschlüssel – bewusst begangen; Aufklärung darüber: Lauenstein 1998 (Lit. 3), S. 52 u. 66f.

² Lauenstein 1998 (Lit. 3), S. 37 - 40

Neue Harmonien mit AM u. HM der Quinte:

$$3 : \frac{5}{2} [x \ 2] = 6 : 5 - \text{Kleine Terz}$$

$$3 : \frac{12}{5} [x \ \frac{5}{3}] = 5 : 4 - \text{Große Terz}$$

Die *dritte Teilungsstufe* ist nur noch zur Hälfte erfolgreich, weil aus den Kleinen Terzen durch Mittelbildung keine hinreichend „sauberen“ Zweiklänge mehr ableitbar sind. Ergebnisse der Kanonteilung bis zur dritten Ableitung:

1. Ableitung	2. Ableitung	3. Ableitung
		AM 225 → 16:15 Gr. Halbton
	AM: 98 → 8:7 Gr. Ganzton.	HM 224 → 15:14 Kl. Halbton. ?
AM: 9 → 4:3 Quarte		
		AM 169 → 14:13 ?
	HM: 96 → 7:6 Kl. Terz	HM 168 → 13:12 ?
1:2 Oktave		
		AM 121 → 12:11 ?
	AM 100: → 6:5 Kl. Terz	HM 120 → 11:10 ?
HM: 8 → 3:2 Quinte		
		AM 81 → 10: 9 Kl. Ganzton
	HM 96: → 5:4 Gr. Terz	HM 80 → 9: 8 Gr. Ganzton

Das oben erwähnte *Irrationalitätsphänomen*, die Inkommensurabilität, verbirgt sich zwischen arithmetischem und harmonischem Mittel, – als geometrisches Mittel (GM).

Das GM ist definiert als *n*te Wurzel aus dem Produkt von *n* beteiligten Zahlenwerten; bei nur zwei Zahlenwerten – die Quadratwurzel aus *A* x *B*.

Die rationalen Zahlenwerte der harmonischen Intervalle führen zu einem stets irrationalen Wert des GM, das jeweils zwischen AM und HM liegt, aber nie genau in deren Mitte! Bei der Oktave: AM = 9, HM = 8; $\sqrt{9 \times 8} = \sqrt{72} = 8,48528137424.....$

Dieser mathematische Zusammenhang bildet den Hintergrund für die pythagoreische Definition des Harmoniebegriffes: **Harmonie ist die Ungleichheit zweier Teile beiderseits einer** – dem Göttlichen vorbehaltenen – **irrationalen Mitte**.

2. Die Übertragung auf die Bau- und Bildkunst

Aus der Tatsache, dass es bestimmte ganzzahlige Verhältnisse sind, welche für uns den Wohlklang der Töne ausmachen, folgerten die Pythagoreer, dass es auch für das Auge wohlthuend sein müsste, wenn diese harmonikalen Zahlenverhältnisse in der Bau- und Bildkunst Anwendung fänden.

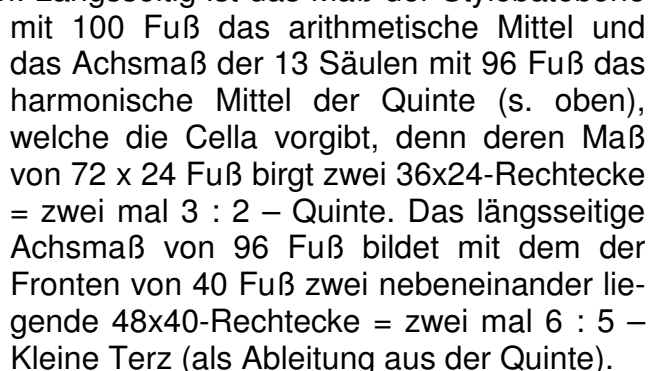
Noch zu Lebzeiten des Pythagoras, um 510 v. Chr., wurde im westgriechischen Poseidonia, dem heutigen Paestum in Unteritalien, der „Athenatempel“ nach den Zahlenverhältnissen der pythagoreischen Harmonielehre proportioniert³.



Abb. 2: Der Athenatempel zu Paestum (Foto: Autor)

³ Einen Zusammenhang zur pythagoreischen Schule vermutete bereits Naredi-Rainer (Lit. 4, S. 156)

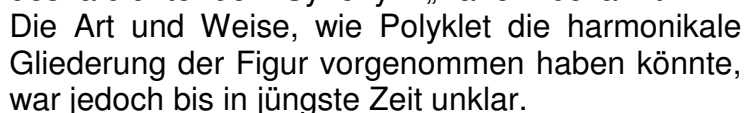
Dazu nur einige beispielhafte Andeutungen: Längsseitig ist das Maß der Stylobateebene



Noch beweiskräftiger sind die Frontproportionen, denn bereits die beiden Hauptmaße bis zur Unterkante des Dachaufbaus repräsentieren – durch $3\frac{3}{4}$ und $2\frac{1}{2}$ geteilt – die vier Zahlen der „Großen Tetraktys“ und das Säulenachsmaß von 40 Fuß zur 30er Höhe bildet mit 4 : 3 die Quarte.



deshalb unter dem Synonym „Kanon“ bekannt.



Der letzte – wenig erhellende – Versuch datiert von 1995, – die in nebenstehender Abbildung⁵ unterliegende Feinteilung mit den Bruchzahlen.

Es gibt für das Problem aber eine ebenso simple wie überzeugende Lösung (Lauenstein, S. 48-51):

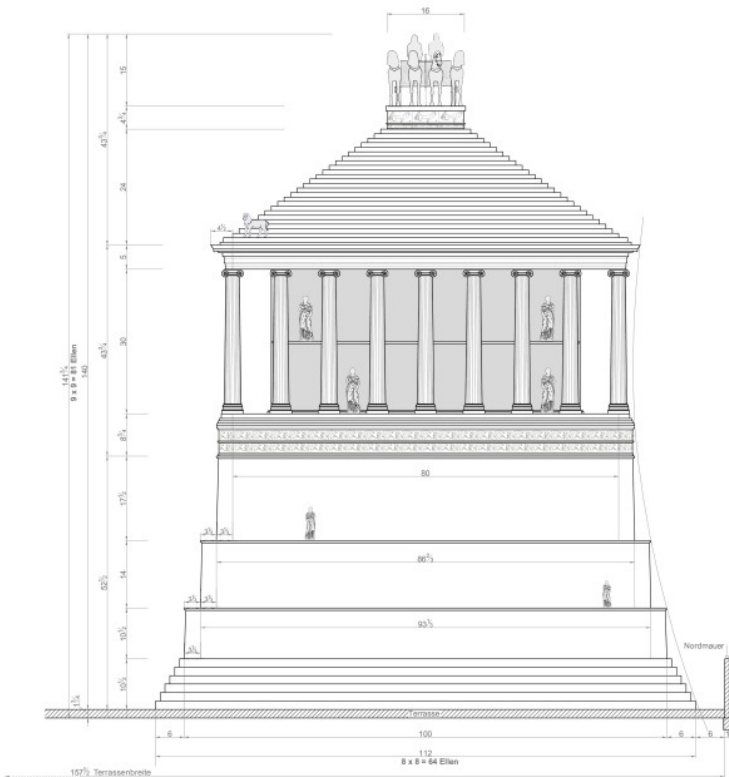
Über der 98 Daktylen hohen Figur (98 = AM der Quartel!) liegt – wie bei der Oktave (s. S. 2 unten) – eine 12er-Höhenteilung. Die Rasterhöhen, insbesondere die Zahlen der „Großen Tetraktys“, treffen auf markante Punkte des Körpers:

6 – Schambein, 8 – Solarplexus, 9 – Achselhöhlen. Doch auch mit nicht im Raster liegenden Punkten erfolgen harmonikale Teilungen; am Nabel z.B. teilt sich die Gesamthöhe im Verhältnis 3:2 der Quinte. Die Breiten der Körperabschnitte sind so gewählt, dass sie mit den entsprechenden Höhen harmonikale Rechtecke bilden.

⁴ Lauenstein 1998 (Lit. 3), S. 75 - 93

⁵ Sonntagbauer 1995 (Lit. 5), S. 35

Ein weiteres Jahrhundert später kam das „kanonische Prinzip“ auch im östlichen griechischen Siedlungsraum zur Anwendung: Nach einem harmonikalen Gesamtkonzept wurde um 350 v. Chr. im kleinasiatischen Halikarnassos, dem heutigen Bodrum/ Türkei, für König Mausolos ein monumentales Grabmal errichtet, das fortan als „Mausoleum von Halikarnassos“ zu den 7 Weltwundern der Antike zählte.



Das rund 45 Meter hohe Bauwerk überstand mehr als 1.600 Jahre, bis Anfang des 14. Jahrhunderts ein Erdbeben die von einer Quadriga gekrönte Dachpyramide zum Einsturz brachte. Seit dem 15. Jahrhundert nutzten dann Kreuzritter des Johanniterordens die Ruine als Steinbruch für die Errichtung des Kastells St. Petri am Hafen der Stadt, wo noch zahlreiche zum Mausoleum gehörende Bauteile nachweisbar sind.

Reste der Quadriga, etliche Statuen und Reliefplatten von drei Friesen waren bereits Mitte des 19. Jh. von Engländern ausgegraben worden und befinden sich noch immer im Britischen Museum in London.

Abb. 6: Frontansicht des Mausoleums von Halikarnassos
(Rekonstruktionsvorschlag des Autors, 2009)

Am Standort selbst sind neben einigen Artefakten und Säulentrommeln des krönenden tempelartigen Aufbaus nur noch die Grundmauern zu besichtigen, doch gerade hier findet sich der eindeutige Hinweis auf ein „kanonisches Prinzip“: Der Grundriss der Grabkammer hat eine Proportion von 9 : 8, – der pythagoreische Große Ganzton.

Das gleiche Verhältnis steckt auch im Grundriss des Gesamtareals, denn 432 Ellen x 192 Ellen sind zwei nebeneinander liegende 9:8-Rechtecke. Zusätzlich finden sich 9 und 8 im Verhältnis von Gesamthöhe des Bauwerks (81 Ellen) zur frontalen Basisbreite des Stufenunterbaus (64 Ellen); mit $9 \times 9 : 8 \times 8$ ist das eine pythagoreische Große Terz.

Seit den ersten Ausgrabungen gibt es etwa zwei Dutzend Rekonstruktionsversuche, die sich u. a. auch auf die Maßangaben und Beschreibung des römischen Schriftstellers Plinius⁶ stützen, doch hatte bisher keiner der Rekonstrukteure den pythagoreischen Planungshintergrund erkannt und harmonikale Proportionen in Ansatz gebracht.

Der Autor hat in – kürzlich abgeschlossener – einjähriger Forschungsarbeit⁷ den Nachweis erbracht, dass sämtliche verfügbaren Maßangaben bis in kleinste vorhandene Bauteile (z.B. Stufen der Dachpyramide) „nahtlos“ in ein harmonikales Gesamtkonzept passen und auf dieser Basis konnte die äußere Gestalt des Baukörpers der historischen Realität mit hoher Wahrscheinlichkeit weitgehend entsprechend rekonstruiert werden.

⁶ C. Plinius secundus d. Ä.: Naturalis historiae libri XXXVII; Liber XXXVI, p 30 u. 31 (um 50 n. Chr.)

⁷ Lauenstein 2009, Pythagoreisches Kalkül: Der Bauplan des Mausoleums von Halikarnassos.
(<http://frp.landeco.rwth-aachen.de/downloads/Halikarnassos.pdf>)

„Harmonikales Gesamtkonzept“ bedeutet, dass die zum pythagoreischen Tonsystem gehörenden Zahlenverhältnisse sowohl in den Grundrissen als auch in Flächen- und Höhenproportionen der Aufrisse realisiert wurden.

Wie beim Athenatempel – auch hier zum Mausoleum von Halikarnassos nur einige Beispiele für harmonikale Proportionsverhältnisse am Bauwerk.

a) Bauwerksgrundriss:

Neben dem bereits genannten 9:8-Verhältnis des Großen Ganztons in den Grundrissen der unterirdischen Grabkammer und des Gesamtareals waren im Bauwerksgrundriss die Terzen die Hauptproportion.

5 : 4 - Gr. Terz: Quadrigasockel	20 F x 16 F = 6,40 m x 5,12 m
Pyramidenfuß u. Achsmaß Säulen	100 F x 80 F = 32,00 m x 25,60 m
Außenmaß Cella	80 F x 64 F = 25,60 m x 20,48 m
6 : 5 - Kl. Terz: Fuß unterste Sockelstufe	120 F x 100 F = 38,40 m x 32,00 m

b) Flächenproportionen in den Ansichten:

Frontseiten –	30 F Säulenhöhe : 80 F Achsmaß = 2 Rechtecke 30 : 40 – Quarte
Längsseiten –	30 F Säulenhöhe : 100 F Achsmaß = 2 Rechtecke 30 : 50 – Gr. Sexte

c) Höhenproportionen des Sockelbaus:

Der gesamte Unterbau bis zur Oberkante des Stylobats war höhenmäßig so kalkuliert, dass die Abfolge der einzelnen Höhenstufen stets harmonikale Proportionen ergab.

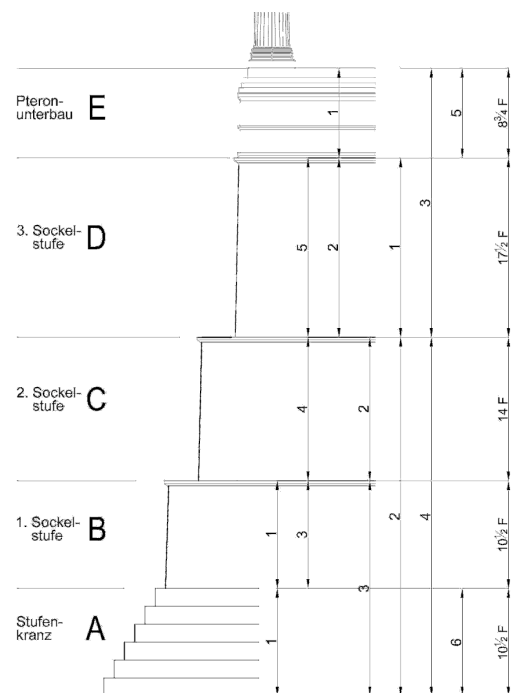
A	: B	= 1 : 1	– Prime
B	: C	= 3 : 4	– Quarte
C	: D	= 4 : 5	– Gr. Terz
D	: E	= 2 : 1	– Oktave
A + B	: C	= 3 : 2	– Quinte
A + B + C	: D	= 2 : 1	– Oktave
A + B + C	: D + E	= 4 : 3	– Quarte
A	: E	= 6 : 5	– Kl. Terz

Das Höhenverhältnis der Sockelstufen B – C – D ist mit 3 : 4 : 5 offensichtlich zugleich eine Anspielung auf das pythagoreische Dreieck, – der Ausnahmefall, bei dem sich nach der Formel

$$a^2 + b^2 = c^2$$

aus zwei ganzzahligen Katheten eine ganzzahlige Hypotenusenlänge ergibt.

Abb. 7: Höhenproportionen des Mausoleumsockels



Inwieweit und wie lange nach Ende des 6. Jahrhunderts v. Chr. der pythagoreische harmonikale Proportionenkanon in der griechischen Baukunst bestimmend war und in welcher Weise dieser zum Einsatz kam, ist noch längst nicht hinreichend erforscht.

Vor der Veröffentlichung der Erkenntnisse des Autors zum harmonikalen Konzept des Athenatempels zu Paestum im Jahre 1998 (Lit. 3) war die Proportionslehre für Archäologen und Bauhistoriker kein wirklich ernsthaft als hilfreich für die Interpretation und Rekonstruktion antiker Bauwerke angesehenes Thema.

Eine erste gründliche Analyse mit vergleichbarem Untersuchungsansatz stammt von Birnbaum⁸ zum Apollontempel von Didyma, der etwa 50 km nördlich vom Mausoleum rund 50 Jahre später errichtet worden war.

⁸ Birnbaum, Jens: Der Apollontempel von Didyma – Analyse einer pythagoreisch-platonischen Entwurfskonzeption. Diss. TU Berlin 2006

Der Frage, ob die harmonikale Proportionierung von Bauwerken später bei den Römern eine Rolle gespielt hat, ist die Bauforschung bisher auch noch nicht hinreichend nachgegangen. Immerhin hatte Vitruv um 50 v. Chr. in seinem Traktat „De architectura libri decem“ (Lit. 6) die Harmonielehre – allerdings wenig konkret auf deren Anwendung in der Architektur bezogen – behandelt.

Durch das Mittelalter transportiert wurde die Harmonielehre u. a. mit der „Musica“ des Augustinus (354 – 430) und „De Institutione Musica“ des Boetius (475 – 525), und es sind durchaus auch Beispiele für die architektonische Umsetzung harmonikaler Proportionen an Sakralbauten bekannt; in der 1130 - 1147 erbauten Abteikirche zu Fontenay beispielsweise dominieren eindeutig Oktave, Quinte, Quarte⁹.

Fußend auf Vitruv beschreibt Leon Battista Alberti in seinen 1485 gedruckten „Zehn Büchern über die Baukunst“ (Lit. 1) die Grundzüge der pythagoreischen Harmonielehre und initiierte damit deren geradezu enthusiastische Anwendung in der Renaissance-Architektur. Abbildung 8 zeigt die wichtigsten musikalischen Harmonien, die seit der Renaissance – quasi obligatorisch – zum Proportionenkanon in der Bau- und Bildkunst gehörten

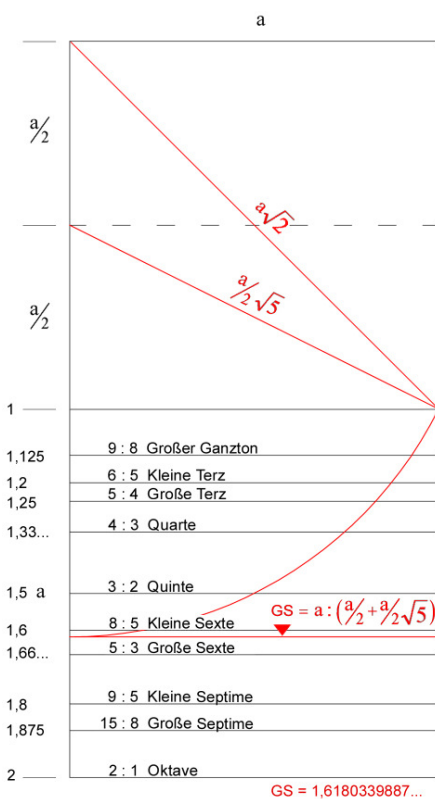
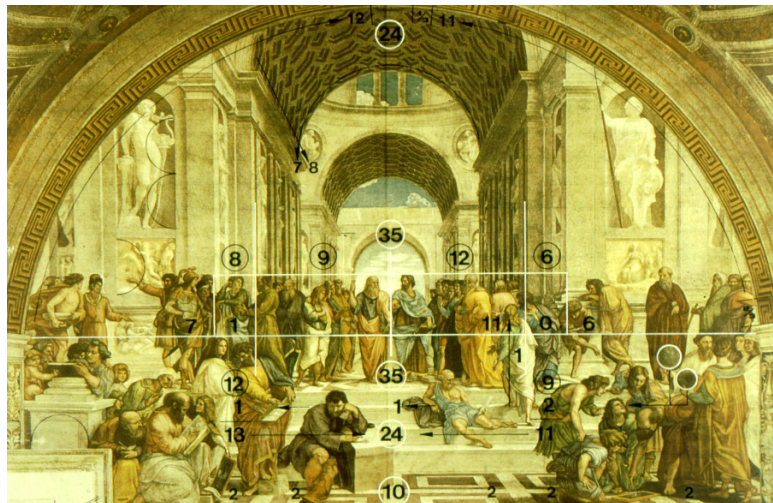


Abb. 8: Harmonikale Rechtecke

Abb. 9: Raffaels „Schule von Athen“; Vatikan, 1509 (Lauenstein 1998, S. 67)

Den irrationalen „Goldenen Schnitt“ (GS) und dessen geometrische Ableitung aus der Diagonalen des halben Quadrates ($\frac{a}{2}\sqrt{5}$) haben bereits die Pythagoreer mit Sicherheit gekannt, doch aufgenommen in die Bau- und Bildkunst hat ihn – nach bisheriger Kenntnis – erst die Renaissance.

Raffael hat bei der Bildaufteilung seiner „Schule von Athen“ (Abb. 9) sowohl den Goldenen Schnitt als auch die Zahlenverhältnisse konsonanter Zweiklänge – sogar bis in die Personenzahlen – konsequent realisiert; die 35 Personen z. B. auf der oberen Ebene sind die Summe der Zahlen 6 – 8 – 9 – 12 der Großen Tetraktys.



Längere Strecke : Zahlenwert der ersten Spalte
 = harmonikales Verhältnismaß der kürzeren Strecke
 Kürzere Strecke x Zahlenwert der ersten Spalte
 = harmonikales Verhältnismaß der längeren Strecke
 oder:

Längere Strecke : großen Zahlenwert der 2. Spalte; Quotient x kleinen Zahlenwert
 = harmonikales Verhältnismaß der kürzeren Strecke
 Kürzere Strecke : kleinen Zahlenwert der 2. Spalte; Quotient x großen Zahlenwert
 = harmonikales Verhältnismaß der längeren Strecke

Quotient <u>lange Strecke</u> kurze Strecke	Proportion	Harmonie
4	4 : 1	Doppeloktave
3	3 : 1	Duodezime
2	2 : 1	Oktave
1,875	15 : 8	Große Septime
1,8	9 : 5	Kleine Septime
1,666...	5 : 3	Große Sexte
1,6180339887...	≈ 55 : 34	Goldener Schnitt = $a : (a/2 + a/2\sqrt{5})$
1,6	8 : 5	Kleine Sexte
1,5	3 : 2	Quinte
1,333...	4 : 3	Quarte
1,265625	81 : 64 (9x9 : 8x8)	Pythagoreische Große Terz
1,25	5 : 4	Große Terz
1,2	6 : 5	Kleine Terz
1,185185 ...	32 : 27	Pythagoreische Kleine Terz
1,125	9 : 8	Großer Ganzton
1,111...	10 : 9	Kleiner Ganzton
1,0666...	16 : 15	Großer Halbton
1,041666...	25 : 24	Kleiner Halbton

Heutzutage gilt Proportionslehre in Architektenkreisen eher als „alter Hut“ und fällt immer häufiger effektheischender oder – weitaus öfter – gedankenloser Beliebigkeit von Dimensionen und Proportionen zum Opfer.

Jede Verletzung gewohnter und „eingängiger“ Ordnung – nicht nur formal (die Meldungen in den Medien sind der beste Beweis) – erregt zunächst einmal Aufmerksamkeit, doch die Frage für unser Metier ist, ob das Bizarre, Abstruse oder durch formale Beliebigkeit Auffällige auch wirklich mehrheitlich und dauerhaft Gefallen findet.

Andererseits erscheint die Skepsis gegenüber dem antiken kanonischen „Dogma“ insofern berechtigt, als die „Eingängigkeit“ harmonikaler Proportionen bis heute nicht bewiesen ist und wohl auch schwerlich hinlänglich exakt zu beweisen sein wird.

Literatur:

1. Alberti, L. B.: Zehn Bücher über die Baukunst. (dt. Übers. M. Theuer) Wien, Leipzig 1912/ 1. Druckausgabe: Florenz, 1485
2. Euklid: Phaenomena et Scripta Musica. In: Op. omn., Ed. Heiberg et Menge, Teubner 1916
3. Lauenstein, H.: Arithmetik und Geometrie in Raffaels Schule von Athen. Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M., 1998
4. Naredi-Rainer, P. v.: Architektur und Harmonie. Zahl, Maß und Proportion in der abendländischen Baukunst. DuMont Buchverlag, Köln 1982 (6. überarbeitete Aufl. 1999)
5. Sonntagbauer, W.: Das Eigentliche ist unaussprechbar. Der Kanon des Polyklet als „mathematische“ Form. Peter Lang Verlag, Frankfurt a. M., 1995
6. Vitruv: Vitruvii de architectura libri decem. Nachdruck u. kommentierte Ausg. v. Cesare Cesarino (Como, 1521); München 1969