

6819
PIERRE DUGAC, M.
1984

Persee

M PIERRE DUGAC

Histoire des espaces complets

In: Revue d'histoire des sciences. 1984. Tome 37 n°1. pp. 3-28.

Résumé

RÉSUMÉ. — C'est, semble-t-il, au Ve siècle avant notre ère qu'un Pythagorien inconnu découvrit l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Alors commence la longue histoire de la completion de l'ensemble des nombres rationnels où l'on retrouve, entre autres, les noms d'Euler, Bolzano, Cauchy, Méray, Heine, Cantor et Dedekind. L'étape suivante est la généralisation du critère de Cauchy aux espaces métriques par Fréchet, leur completion par Hausdorff et l'introduction des espaces de Banach. Enfin on aboutit aux espaces uniformes complets de Weil, aux espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet de Dieudonné et à la completion des espaces vectoriels topologiques localement convexes de Grothendieck.

Abstract

SUMMARY. — In the fifth century B.C., it is said, an unknown Pythagorean discovered the irrationality of $\sqrt{2}$. There begins the long history of the completion of the rationals, to which are tied the names of Euler, Bolzano, Cauchy, Méray, Heine, Cantor, Dedekind, and many others. The next chapter opens with Fréchet's generalization of the Cauchy criterion for metric spaces, Hausdorff's result on the completion of metric spaces, and the introduction of Banach spaces. This leads to the works of Weil, on complete uniform spaces, of Dieudonné, on topological spaces which can receive a complete uniform space structure, and of Grothendieck, on the completion of locally convex topological vector spaces.

Citer ce document / Cite this document :

DUGAC PIERRE. Histoire des espaces complets. In: Revue d'histoire des sciences. 1984, Tome 37 n°1. pp. 3-28.

doi : 10.3406/rhs.1984.1972

http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_1984_num_37_1_1972



Histoire des espaces complets

In: Revue d'histoire des sciences. 1984, Tome 37 n°1. pp. 3-28.

Résumé

RÉSUMÉ. — C'est, semble-t-il, au Ve siècle avant notre ère qu'un Pythagoricien inconnu découvrit l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Alors commence la longue histoire de la complétion de l'ensemble des nombres rationnels où l'on retrouve, entre autres, les noms d'Euler, Bolzano, Cauchy, Méray, Heine, Cantor et Dedekind. L'étape suivante est la généralisation du critère de Cauchy aux espaces métriques par Fréchet, leur complétion par Hausdorff et l'introduction des espaces de Banach. Enfin on aboutit aux espaces uniformes complets de Weil, aux espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet de Dieudonné et à la complétion des espaces vectoriels topologiques localement convexes de Grothendieck.

Abstract

SUMMARY. — In the fifth century B.C., it is said, an unknown Pythagorean discovered the irrationality of $\sqrt{2}$. There begins the long history of the completion of the rationals, to which are tied the names of Euler, Bolzano, Cauchy, Méray, Heine, Cantor, Dedekind, and many others. The next chapter opens with Fréchet's generalization of the Cauchy criterion for metric spaces, Hausdorff's result on the completion of metric spaces, and the introduction of Banach spaces. This leads to the works of Weil, on complete uniform spaces, of Dieudonné, on topological spaces which can receive a complete uniform space structure, and of Grothendieck, on the completion of locally convex topological vector spaces.

Citer ce document / Cite this document :

DUGAC PIERRE. Histoire des espaces complets. In: Revue d'histoire des sciences. 1984, Tome 37 n°1. pp. 3-28.

doi : 10.3406/rhs.1984.1972

http://www.persee.fr/web/revues/home/prescript/article/rhs_0151-4105_1984_num_37_1_1972

Histoire des espaces complets

RÉSUMÉ. — C'est, semble-t-il, au ^{ve} siècle avant notre ère qu'un Pythagoricien inconnu découvrit l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Alors commence la longue histoire de la complétion de l'ensemble des nombres rationnels où l'on retrouve, entre autres, les noms d'Euler, Bolzano, Cauchy, Méray, Heine, Cantor et Dedekind. L'étape suivante est la généralisation du critère de Cauchy aux espaces métriques par Fréchet, leur complétion par Hausdorff et l'introduction des espaces de Banach. Enfin on aboutit aux espaces uniformes complets de Weil, aux espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet de Dieudonné et à la complétion des espaces vectoriels topologiques localement convexes de Grothendieck.

SUMMARY. — *In the fifth century B.C., it is said, an unknown Pythagorean discovered the irrationality of $\sqrt{2}$. There begins the long history of the completion of the rationals, to which are tied the names of Euler, Bolzano, Cauchy, Méray, Heine, Cantor, Dedekind, and many others. The next chapter opens with Fréchet's generalization of the Cauchy criterion for metric spaces, Hausdorff's result on the completion of metric spaces, and the introduction of Banach spaces. This leads to the works of Weil, on complete uniform spaces, of Dieudonné, on topological spaces which can receive a complete uniform space structure, and of Grothendieck, on the completion of locally convex topological vector spaces.*

1. APPARITION DU CRITÈRE « DE CAUCHY »

Le critère « de Cauchy », qui conduira à la notion d'espace complet, est le théorème central sur lequel repose toute l'analyse classique. Rappelons son énoncé actuel concernant les suites de nombres :

Pour qu'une suite (u_n) de nombres complexes ait une limite, il faut et il suffit que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier positif N tel que $m, n \geq N$ entraîne $|u_n - u_m| \leq \varepsilon$.

Faisons d'abord quelques remarques sur les notations utilisées dans cet énoncé et qui montrent le très long cheminement qui y conduit.

Les signes d'inégalités se trouvent déjà dans le livre *Artis analyticae praxis* de T. Harriot, paru en 1631, où cet auteur introduit ([1], 199) (1) les « signes de comparaison utilisés pour les suites ».

La notation u_n se trouve d'abord chez Lagrange, en 1759 ([2], 41), sous la forme y^m : « où les exposants des y dénotent leurs places », avant d'être fixée en 1800, sous la forme actuelle, dans le *Traité des différences et des séries* de S. F. Lacroix ([37], 3).

Quant à la notation des valeurs absolues, elle fut introduite par Weierstrass, et nous en avons trouvé la première trace, dans un mémoire publié, lors de l'exposé de sa théorie des fonctions analytiques uniformes paru en 1877 ([3], 19).

C'est au cours du xiv^e siècle que les mathématiciens commencent à s'occuper des séries infinies, ce qui conduira à la recherche des critères de convergence portant sur les termes de la série et à l'élaboration de la notion de limite. Notons que la difficulté de la démonstration du critère « de Cauchy » provient de ce qu'il faut conclure que la limite existe, sans la connaître explicitement. La preuve exige une « construction » de la limite à partir de la suite considérée. Cette preuve sous-entend la « construction » de l'ensemble des nombres réels, un des moments essentiels de l'analyse classique, et qui fut menée à bien dans les années 1860-1870.

Remarquons que déjà au xiv^e siècle N. Oresme démontre de la façon suivante que la série de terme général $\frac{1}{n}$, la série harmonique, n'est pas convergente. Il groupe les termes de la série harmonique « par paquets » dont la somme est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \frac{1}{8} = \frac{1}{2}, \dots,$$

$$\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} > 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}, \dots$$

Il en résulte que la somme de la série harmonique est supérieure à $n \frac{1}{2}$, quel que soit n ; donc cette somme tend vers l'infini avec n et la série n'est pas convergente.

Plus précisément, Oresme écrit dans ses *Questiones super geo-*

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie ci-après, p. 26-28.

metriam Euclidis ([4], 6) que la « somme » de la série est « infinie », parce que « les 3^e et 4^e termes ont une somme supérieure à $\frac{1}{2}$, de même les termes du 5^e au 8^e, et jusqu'au 16^e, et ainsi à l'infini ».

1.1. Le critère d'Euler

Ce qui est important dans la démonstration d'Oresme, c'est, d'une part, la mise en évidence que la condition nécessaire de convergence de la série, à savoir que le terme général tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, n'est pas suffisante, elle ne « caractérise » pas complètement la convergence d'une série ; et, d'autre part, elle contient implicitement le critère « de Cauchy », plus précisément sa négation.

Le pas suivant, vers la formulation de ce critère, sera fait par Euler, en 1740, dans son article *De progressionibus harmonicis observationes*, où il énonce pour la première fois, de façon certes incomplète, le critère « de Cauchy », un « principe » ([5], 88) lui permettant de conclure que « la somme d'une série considérée est finie ou infinie ». Euler n'envisage pas les séries divergentes dont les sommes partielles sont bornées, sujet dont l'étude mathématique a été amorcée par d'Alembert en 1768 ([6], 134) et qui aboutira au XIX^e siècle au théorème de Bolzano-Weierstrass.

Euler considère la « série »

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2b}, \dots, \frac{c}{a+(n-1)b} \dots$$

à laquelle est associée la suite

$$S_n = \frac{c}{a} + \frac{c}{a+b} + \dots + \frac{c}{a+(n-1)b}$$

(il suppose, implicitement, que $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$).

Il applique ensuite le critère « de Cauchy » à la différence $S_{ni} - S_i$; le nombre de termes étant $(n-1)i$, cette différence « sera plus grande » que $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$. « D'où l'on voit que cette somme est finie », c'est-à-dire que lorsque i tend vers l'infini cette différence ne tend pas vers zéro. D'où Euler conclut que « la série proposée » tend « vers l'infini lorsque n tend vers l'infini ».

A. Pringsheim a déjà noté ([7], 252) que le critère d'Euler n'est pas une condition suffisante de convergence, car la série divergente de terme général $\frac{1}{n \operatorname{Log} n}$ le vérifie.

1.2. *Le critère de Bolzano*

C'est à Bolzano qu'on doit le premier énoncé précis du critère fondamental de convergence, ainsi que la démonstration qu'un ensemble infini borné de nombres réels conserve la propriété, immédiate pour les ensembles finis, d'existence des bornes supérieure et inférieure. Ce dernier problème ouvre la voie à l'étude des sous-ensembles infinis de la droite, donc aux raffinements de la notion de limite. De plus, la démonstration de Bolzano de l'existence de la borne supérieure, basée sur le procédé de dichotomie et d'emboîtement des intervalles, procédé conduisant à la topologie générale, formera la base même de la rigueur weierstrassienne ([8], 95-99) qui a permis une refonte des fondements de l'analyse.

C'est dans son mémoire sur le théorème des valeurs intermédiaires, publié en 1817 — affirmant que toute fonction réelle continue f définie sur un intervalle $[a, b]$ prend toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$, — que Bolzano avait donné le meilleur de son œuvre d'analyste. Bien que ce mémoire fût ignoré des mathématiciens jusqu'à la redécouverte de Bolzano vers 1865, il constitue un des pas essentiels vers l'arithmétisation de l'analyse.

Ce mémoire de Bolzano est remarquable, car il fournit le premier énoncé précis du critère « de Cauchy », la première tentative pour le démontrer, et une belle application de ce critère à la démonstration de l'existence de la borne supérieure. A cette occasion Bolzano élabore une chaîne de démonstrations d'une grande invention, chaîne qui, une fois « construits » les nombres réels, assoira l'analyse classique sur des bases solides.

Lorsque Bolzano aborde dans ce mémoire la théorie des séries, il va considérer ([9], 148) les séries convergentes comme une sous-classe de la classe des séries dont toute somme partielle est bornée. Bolzano est le premier à insister sur les séries divergentes « dont la valeur, aussi loin qu'on veuille les prolonger, *ne dépasse jamais une certaine valeur* ». On est ici sur le chemin qui conduira au théorème de Bolzano-Weierstrass.

Ce qui est particulièrement remarquable dans ce mémoire,

c'est le premier énoncé dans l'histoire des mathématiques du critère « de Cauchy ». Bolzano note ([9], 150) par $\sum x$, que nous écrivons $F_n(x)$, la somme des n premiers termes d'une série de fonctions, et il démontre d'abord que le critère « de Cauchy » est une condition nécessaire de la convergence d'une série. Bolzano tente ensuite de démontrer la réciproque, c'est-à-dire que ce critère est aussi une condition suffisante de convergence.

Mais cette démonstration n'est pas et ne pouvait être correcte. Bolzano affirme ([9], 151) que l'hypothèse qu'il existe « une grandeur X , dont s'approchent d'aussi près que l'on veut » les termes de la suite $(F_n(x))$, « ne contient rien d'impossible : cela vient du fait que cette hypothèse permet de déterminer cette grandeur avec la précision que l'on voudra ». Ainsi, la démonstration de l'existence de X se transforme en une démonstration de la possibilité d'approcher X , que rien par ailleurs n'assure exister, avec une précision voulue d'avance. Or, tant que la théorie des nombres réels n'était pas élaborée, il était impossible d'établir l'existence de X . En effet, la démonstration de cette réciproque est basée, par exemple, sur le théorème que tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels. Par conséquent, tant qu'une théorie rigoureuse des nombres réels n'existait pas, on ne pouvait pas démontrer cette réciproque. Le cercle vicieux était inéluctable aussi longtemps que les mathématiciens ne prirent pas clairement conscience que, préalablement à la définition de la limite, il fallait bien définir les objets auxquels cette définition était applicable, à savoir l'ensemble des nombres réels. En tout état de cause, on était loin de la notion d'un corps commutatif totalement ordonné complet.

Vers 1835, Bolzano écrit la *Théorie des grandeurs*, vaste tentative, restée inachevée, pour élaborer un traité englobant l'ensemble des mathématiques de son temps. J. Berg a publié en 1976 la partie qui concerne la *Théorie des nombres pure* de Bolzano, où celui-ci expose sa théorie des nombres entiers, rationnels et irrationnels. C'est la première tentative menée avec esprit de suite pour fonder la théorie des nombres réels sur une base purement arithmétique, bien que cette théorie de Bolzano, basée sur une méthode d'approximation (idée qu'il avait déjà avancée dans son mémoire de 1817), ne soit pas rigoureuse.

Après avoir construit l'ensemble des nombres « mesurables »,

à partir des nombres entiers, l'ensemble qui devait correspondre à l'ensemble des nombres réels, Bolzano en déduit les théorèmes de base de l'analyse. A ce propos, il est intéressant d'examiner sa démonstration du critère « de Cauchy » ([10], 151-154). La façon d'énoncer et de démontrer ce théorème montre que Bolzano avait parfaitement compris l'enchaînement allant du critère « de Cauchy » à la « construction » de l'ensemble des nombres réels. Ainsi, il considère une suite de « nombres mesurables » (X_n) qui vérifie les hypothèses de ce critère et il conclut qu'il existe un « nombre mesurable » A tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = A$. Toutefois, dans sa démonstration, Bolzano fait une hypothèse supplémentaire de monotonie de la suite (X_n) qui l'amène à utiliser implicitement dans sa preuve le théorème qu'une suite croissante majorée admet une limite, théorème qui est une conséquence du critère « de Cauchy ».

1.3. *Le critère de Cauchy*

Dans son *Cours d'analyse*, publié en 1821 et qui ouvre la voie à l'analyse moderne, Cauchy définit de la façon suivante la notion de limite ([11], 19) :

« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées. »

Il est clair que, pour parler de la limite des nombres rationnels, il est nécessaire qu'au préalable l'ensemble des nombres réels soit défini, ce dont Cauchy, comme d'ailleurs tous les mathématiciens de ce temps, n'avait pas pris conscience.

C'est le chapitre VI, « Des séries convergentes et divergentes », qui est parmi les plus importants de ce *Cours d'analyse*.

Cauchy introduit ([11], 115-116), d'une façon si naturelle — après avoir codifié les notations actuelles — que son évidence pour lui n'étonne pas, le critère « de Cauchy » de convergence nécessaire et suffisante d'une série. Il n'y a rien à redire sur sa démonstration de la condition nécessaire ; quant à la démonstration de la condition suffisante, elle se réduit à l'affirmation :

« Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée. »

Mais ce livre de Cauchy a eu un immense écho dans les mathématiques du XIX^e siècle, et, grâce à lui, ce critère allait devenir le théorème central de l'analyse classique.

2. COMPLÉTION DE L'ENSEMBLE DES NOMBRES RATIONNELS

Nous allons voir qu'autour de l'année 1870 paraissent plusieurs exposés sur la « construction » des nombres réels à partir de l'ensemble des nombres rationnels, muni de la topologie usuelle définie par la valeur absolue. Ces « constructions » sont le résultat de la prise de conscience que l'analyse ne repose pas sur des bases solides. La première tentative publiée et aboutie est celle de Charles Méray.

2.1. Les limites « fictives » de Méray

C'est en 1868 et en 1869 que Méray publie deux mémoires, fruit d'années de réflexion. Le premier, *Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie de développement des fonctions en séries* ([12]), esquisse sa doctrine d'analyse — qui est pour lui l'assise de toutes les mathématiques — fondée sur le développement des fonctions en séries de Taylor. Le second, *Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données* ([13]), fournit une justification au premier en donnant une définition satisfaisante des nombres irrationnels.

Dans son mémoire sur les nombres irrationnels, il indique d'abord ([13], 280) que deux « principes » étaient à cette époque le fondement essentiel de toutes les parties des mathématiques où intervient la notion de limite. Le premier principe était qu'une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) tend vers une limite. Le second principe était qu'une suite de Cauchy tend vers une limite. Méray écrit que « jusqu'à présent on a regardé ces propositions comme des axiomes » et il ajoute ([13], 281) :

« Toutefois, en les examinant avec attention, j'ai reconnu qu'on peut ramener la seconde à la première, dont le caractère d'évidence est plus prononcé, et même finalement qu'il est possible de se passer de l'une et de l'autre. En procédant de cette manière, on suit, il est vrai, une voie détournée, mais elle est plus sûre, et on échappe à la nécessité d'introduire dans le raisonnement la conception assez obscure de nombre incommensurable. »

Méray commence d'abord par démontrer ([13], 281-283) que si l'on admet le premier « principe » — c'est-à-dire qu'une suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente — alors une suite de Cauchy est convergente. En fait, Méray démontre pour la première fois en histoire des mathématiques, dans un texte publié, le théorème de Bolzano-Weierstrass, à savoir que d'une suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente. Pour cela il démontre d'abord que la suite est bornée, puis qu'on peut extraire de cette suite bornée soit une suite croissante majorée, soit une suite décroissante minorée. Cette suite extraite converge donc vers une limite l , et comme la suite considérée est une suite de Cauchy elle converge donc aussi vers l .

Méray démontre donc que le théorème sur les suites monotones entraîne le théorème sur les suites de Cauchy, et, comme la réciproque est également vraie ([14], 230), il en résulte que les deux « principes » considérés par Méray sont équivalents.

Il écrit ensuite ([13], 283) :

« Revenons au premier principe. Toute méthode propre à constater l'existence d'une quantité remplissant des conditions déterminées repose essentiellement sur quelque procédé à l'aide duquel on pourrait calculer d'après les données la *valeur* même de cette inconnue. Or les notions fournies par notre axiome sur la nature de la variable ne permettent pas à elles seules à découvrir la valeur de sa limite ; donc elles ne suffisent pas non plus à en établir l'existence. »

Mais, d'après Méray, ces énoncés « dissimulent des propriétés spéciales des nombres proprement dits », et « il suffira de les en extraire » pour tourner les obstacles rencontrés.

Soit alors ([13], 284) une « variable progressive », c'est-à-dire une suite, $v = (v_n)$, $n \in \mathbf{N}$, v_n étant un nombre rationnel, qui tend vers un nombre rationnel V , alors v est une suite de Cauchy. Si maintenant v est une suite de Cauchy, et s'il n'existe pas de nombre rationnel vers lequel converge v , alors on dira qu'une telle suite converge vers une « limite fictive ». L'introduction des « limites fictives » va permettre à Méray de compléter l'ensemble des nombres rationnels. En effet, il définit d'abord la notion de suites de Cauchy de nombres rationnels « équivalentes », et il écrit immédiatement qu'on voit que « deux variables équivalentes à une troisième le sont entre elles ». Ainsi, il s'agit, comme on le dit aujourd'hui, d'une relation d'équivalence. La définition de Méray des nombres irrationnels va correspondre à un passage au quotient par cette

relation d'équivalence (voir, pour un exposé moderne, [14], p. 215-221). Effectivement, il note d'abord ([13], 285) que si deux suites u et v ont des limites U et V qui sont des nombres rationnels, et « si u, v sont équivalentes, U, V seront égales ». Si, au contraire, u, v n'ont pas de limites rationnelles, « il y aura avantage » à dire « qu'elles ont des limites égales, si elles sont équivalentes ». Enfin, « un signe quelconque » désignera « commodément dans le langage la limite fictive », et « le même signe » pourra représenter « toute variable progressive équivalente à v ». Et Méray précise sa pensée ([13], 287) :

« En résumé, à toute quantité dite incommensurable correspondent une infinité de variables progressives (commensurables) convergentes, dont l'équivalence peut s'exprimer en disant qu'elles ont pour limite commune la quantité dont il s'agit. »

2.2. Les « symboles de nombres » de Heine-Cantor

E. Heine publie en 1872 *Les éléments de la théorie des fonctions*, un écrit d'ensemble sur les fondements de l'analyse, donnant la première démonstration correcte du théorème des valeurs intermédiaires. Il écrit au début de son mémoire ([15], 172) :

« Le progrès de la théorie des fonctions est réfréné essentiellement par le fait que même certains théorèmes élémentaires, bien que démontrés par le plus sagace des savants, sont toujours mis en doute, de sorte que les résultats de recherche ne sont pas regardés partout comme corrects, lorsqu'ils s'appuient sur ces théorèmes fondamentaux indispensables. J'en trouve l'explication dans le fait qu'à la vérité les principes de Monsieur *Weierstrass* se sont seulement répandus dans de vastes cercles — directement par ses leçons et autres communications orales, indirectement par des copies des cahiers contenant ces leçons — mais que ces principes n'ont pas été publiés dans une version établie par lui-même ; ainsi il n'existe nulle part d'endroit où on peut trouver les théorèmes *développés systématiquement*. Mais la vérité de cette explication repose sur le fait que les nombres irrationnels ne sont pas définis de façon complètement rigoureuse. »

Heine indique au début de son mémoire ([15], 173) que la théorie des nombres irrationnels qu'il va développer est due à G. Cantor ; cette théorie est, quant au fond, semblable à celle de Méray.

Heine introduit d'abord ([15], 174) la notion de suite « de Cauchy » qu'il appelle « suite de nombres », puis celle de suites de Cauchy équivalentes ([15], 175) qu'il désigne par suites de nombres « égales ». Enfin, les « symboles de nombres » ([15], 176) sont

les classes d'équivalence représentant les nombres irrationnels « construits ».

Il donne ensuite ([15], 185-186), entre autres, une démonstration rigoureuse du théorème des valeurs intermédiaires, ainsi que du théorème qu'une fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes supérieure et inférieure ([15], 186-188).

Ce mémoire de Heine est également important pour la préhistoire de la topologie générale, car la démonstration ([15], 188) du théorème qu'une fonction réelle continue sur un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$ utilise le recouvrement de $[a, b]$ par un nombre fini de sous-intervalles, procédé qui conduira à la notion d'ensemble compact.

2.3. Les « coupures » de Dedekind

En publiant en 1872 son livre *Continuité et nombres irrationnels*, Dedekind fait connaître, en plus de ses idées sur les fondements de l'analyse, une nouvelle théorie des nombres irrationnels.

Dès le début de sa préface ([16], 3), Dedekind précise que les considérations qu'il va exposer datent de l'automne 1858, lorsque, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, il se trouva dans l'obligation d'enseigner, pour la première fois, les éléments du calcul différentiel. En effet ([17], 24), il fait pendant le semestre d'hiver 1858-1859 un cours intitulé *Première partie du calcul différentiel et intégral*. C'est à cette occasion qu'il sentit « le manque d'une base réellement scientifique de l'arithmétique ».

Le § 1 de son livre ([16], 5) a pour titre « Propriétés des nombres rationnels ». Dedekind suppose construite l'arithmétique des nombres rationnels. Il trace ([16], 6) un rapide panorama du développement de l'arithmétique qui aboutit, après la « création » des nombres entiers négatifs et des entiers rationnels, à l'ensemble des nombres rationnels possédant la propriété de stabilité pour les quatre opérations élémentaires de l'arithmétique, propriété que Dedekind venait de donner comme caractéristique de la notion de « corps », introduite par lui dans la deuxième édition des *Leçons sur la théorie des nombres* de Dirichlet ([17], 32).

Cet ensemble des nombres rationnels possède en particulier la propriété suivante ([16], 7) :

Si a est un nombre rationnel, alors on peut partager l'ensemble des nombres rationnels en deux classes A_1 et A_2 de façon que, quel

que soit $a_1 \in A_1$, on ait $a_1 < a$ et, quel que soit $a_2 \in A_2$, on ait $a_2 > a$; le nombre a pouvant appartenir à volonté à A_1 ou à A_2 . Remarquons que cette définition de la coupure dans l'ensemble des nombres rationnels, faisant intervenir une partition de cet ensemble en deux sous-ensembles, base la définition dedekindienne des nombres sur la notion même d'ensemble.

Dans le § 3, « Continuité de la droite », Dedekind rappelle ([16], 9) que déjà les Grecs connaissaient une infinité de points de la droite qui ne correspondent à aucun nombre rationnel. Ainsi la droite est « infiniment plus riche en points que le domaine des nombres rationnels en nombres » ; et, pour Dedekind, c'est cette « complétude » de la droite qui est à l'origine de la création de nouveaux nombres, afin que le domaine des nombres ait « la même *continuité* que la droite ».

Refusant de suivre des méthodes étrangères à l'arithmétique ([16], 10), Dedekind va s'inspirer de ce qui a été déjà fait lors de l'introduction des nombres entiers négatifs et des nombres rationnels, « libres créations » de l'esprit humain. Ainsi, comme pour définir les nombres entiers négatifs et les nombres rationnels, on ne fait intervenir que les nombres entiers positifs, de même il faut que les nombres irrationnels puissent être entièrement définis en ne faisant appel qu'aux nombres rationnels.

Or, la comparaison entre l'ensemble des nombres rationnels et la droite fait ressortir la continuité de cette dernière, et Dedekind se pose alors la question fondamentale : « En quoi consiste en définitive cette continuité ? » La réponse, selon Dedekind, permettra de trouver une base scientifique « à l'étude de *tous* les domaines continus ».

Dedekind indique que c'est seulement après de longues réflexions qu'il « trouva finalement ce qu'il avait cherché », c'est que l'essence de la continuité réside dans l'axiome suivant :

« Si l'on partage tous les points de la droite en deux classes, de façon que tout point de la première classe se trouve à gauche de tout point de la seconde, alors il existe un point, et un seul, qui engendre cette division de tous les points en deux classes, cette coupure de la droite en deux parties. »

Le § 4 ([16], 11) est intitulé « Création des nombres irrationnels ». Ainsi, nous sommes avertis, par avance, qu'il s'agira de « créer » ces nombres.

Soit maintenant un partage quelconque de l'ensemble des

nombres rationnels en deux classes A_1 et A_2 tel que tout nombre a_1 de A_1 soit plus petit que tout nombre de A_2 , alors on dira qu'un tel partage est une « coupure », que l'on désignera par (A_1, A_2) . Ainsi, on pourra dire qu'un nombre rationnel engendre une coupure, et cette coupure possède la propriété : ou bien A_1 a le plus grand élément, ou bien A_2 a le plus petit élément ; et, réciproquement ([16], 12), si une coupure possède cette propriété, elle est engendrée par le plus grand élément de A_1 ou le plus petit élément de A_2 .

Dedekind donne ensuite l'exemple d'une infinité de coupures qui ne sont pas engendrées par des nombres rationnels. Pour lui ([16], 13), c'est dans ce fait — que toutes les coupures ne sont pas engendrées par des nombres rationnels — que réside l'« incomplétude » ou la « discontinuité » du domaine des nombres rationnels, et il écrit :

« Maintenant, chaque fois qu'il existe une coupure (A_1, A_2) qui n'est pas engendrée par un nombre rationnel, nous *créons* ainsi un nouveau nombre, un nombre irrationnel a que nous considérons comme entièrement défini par cette coupure (A_1, A_2) ; nous dirons que le nombre a correspond à cette coupure ou qu'il engendre cette coupure. »

Nous sommes ici au cœur de la conception dedekindienne des nombres irrationnels, et ce passage témoigne, à notre avis, de l'idée qu'il avait que l'ensemble des nombres réels n'est défini qu'à un isomorphisme près.

Dans le § 5, « Continuité du domaine des nombres réels » ([16], 16), Dedekind précise que l'ensemble des nombres réels « construit » $\mathbf{R}$ possède la propriété suivante :

Si $a \in \mathbf{R}$, alors on peut partager l'ensemble $\mathbf{R}$ en deux classes A_1 et A_2 telles que, quel que soit $a_1 \in A_1$, on a $a_1 < a$ et, quel que soit $a_2 \in A_2$, on a $a_2 > a$. Pour a lui-même, $a = \sup A_1 = \inf A_2$, on peut avoir soit $a \in A_1$, soit $a \in A_2$; et on dira que cette partition sera « engendrée par a ».

Dedekind démontre ensuite ([16], 17) que l'ensemble des nombres réels « construit » possède aussi la propriété de *continuité*, c'est-à-dire que l'on a le théorème suivant :

Si on partage l'ensemble $\mathbf{R}$ en deux classes A_1 et A_2 de façon que, quel que soit $a_1 \in A_1$ et quel que soit $a_2 \in A_2$, on a $a_1 < a_2$, alors il existe un nombre a unique qui engendre cette partition.

Le dernier paragraphe du livre est intitulé « Analyse infinitésimale » ([16], 20), ce qui indique clairement que Dedekind, une fois construite sa théorie des nombres réels, va l'utiliser pour éla-

borer les fondements de l'analyse. Dans ce dernier paragraphe, Dedekind a l'intention de faire la lumière sur la liaison qui existe entre les « considérations précédentes et certains théorèmes fondamentaux de l'analyse infinitésimale ». Il commence d'abord par donner une définition de la limite, et note que le théorème que toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) admet une limite est équivalent au « principe de continuité », énoncé précédemment. Toutefois c'est seulement dans un manuscrit de 1882 que Dedekind donne ([17], 201) la démonstration — utilisant le coupures — du théorème que tout ensemble borné des nombres réels admet une borne supérieure et une borne inférieure. Ce théorème entraîne immédiatement ([14], 230) le théorème précédent sur les suites monotones. Notons que nous avons déjà remarqué dans 2.1 que ce théorème sur les suites monotones a comme conséquence le critère de Cauchy. Il en résulte, en particulier, que la théorie de Dedekind des nombres réels est équivalente à celle de Méray-Heine-Cantor.

La correspondance que Dedekind a eue en 1876 à propos de sa théorie des nombres irrationnels avec R. Lipschitz est importante du point de vue où nous nous sommes placés ici, car Dedekind y insiste beaucoup sur la notion de complétion.

Dedekind résume ainsi sa théorie des nombres réels dans sa lettre du 10 juin 1876 ([18], 471) : supposant construit l'ensemble des nombres rationnels, on peut, sans y introduire d'éléments étrangers, le compléter grâce à la notion de coupure. L'ensemble $\mathbf{R}$ ainsi obtenu possède la propriété d'être « continu ». Répondant aux objections de Lipschitz ([18], 473-474) qu'on peut déjà trouver dans les *Eléments* d'Euclide une bonne théorie des nombres irrationnels, Dedekind affirme que dans le cinquième livre des *Eléments* — que cite Lipschitz — on ne trouve rien qui permette de conclure qu'il existe un domaine de grandeurs « plus complet » que celui correspondant aux grandeurs rationnelles. Se rapportant alors au livre X des *Eléments*, où l'on considère les grandeurs « incommensurables », Dedekind fait alors l'objection essentielle à la théorie d'Eudoxe — exposée dans ce dixième livre — ainsi qu'à celles de ses successeurs : c'est qu'en complétant l'ensemble des nombres rationnels ils ne mentionnent jamais la « fermeture » de cette complétion, à savoir la notion d'un domaine de grandeurs « continues » tel que si l'on partage l'ensemble de ces grandeurs en deux classes de façon que toute grandeur de la première soit plus petite

que toute grandeur de la seconde, alors il « existe » ou bien dans la première classe une grandeur qui est la plus grande, ou bien dans la seconde une grandeur qui est la plus petite. Si cette propriété n'est pas incluse « explicitement » dans le concept du domaine des grandeurs, il reste incomplet, et il est « impossible » de définir dans un tel domaine toutes les opérations arithmétiques.

3. ESPACES COMPLETS

3.1. *Fréchet et la « généralisation du théorème de Cauchy »*

C'est Maurice Fréchet, créateur de la topologie générale, qui va introduire la notion d'espace complet dans sa thèse *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, publiée en 1906.

Fréchet considère ([19], 1) pour la première fois « un ensemble E d'éléments *de nature quelconque* », et il pose ([19], 2) très clairement le problème central de la « topologie générale », à savoir la généralisation de la notion de fonction continue :

« Si on veut l'étendre à des opérations dont la variable soit un élément *de nature quelconque*, il faut savoir ce que l'on doit entendre par éléments voisins ou par limite d'une suite d'éléments. »

Il est très intéressant de noter comment Fréchet a « tourné cette difficulté » (ce qui montre encore la solidarité de toutes les parties des mathématiques) : par « une méthode analogue à celle qui permet dans la théorie des groupes *abstrait*s de raisonner sur un mode de composition non défini explicitement ». Ainsi, il remarque que beaucoup de définitions classiques de la limite peuvent se traduire comme suit :

« Pour la catégorie d'éléments considérés, on peut faire correspondre à tout couple d'éléments A, B un nombre $(A, B) \geq 0$ ayant des propriétés très analogues à celles de la distance de deux points, et tel que : 1° B coïncide avec A si $(A, B) = 0$ et 2° B tend vers A si (A, B) tend vers zéro. En adoptant cette hypothèse moins générale, mais cependant très étendue, on obtient des résultats plus précis et plus nombreux.

« La voie que nous venons d'indiquer nous a conduit à la généralisation de presque tous les théorèmes sur les ensembles linéaires et sur les fonctions continues (du moins de ceux qu'on peut énoncer d'une manière indépendante de la nature des éléments que l'on considère). »

Pour généraliser la notion de limite dans les « ensembles abstraits », Fréchet analyse le développement des notions de groupe et de loi de composition sur des cas particuliers et il écrit ([19], 5) :

« On ne peut arriver à une théorie commune qu'en s'abstenant de donner une définition générale de ce mode de composition, mais en recherchant les conditions communes aux définitions particulières et en ne retenant que celles qui étaient indépendantes de la nature des éléments considérés. »

Fréchet examine ensuite les diverses définitions classiques de la limite et dégage ([19], 5-6) les deux propriétés suivantes qui vont caractériser la classe (L) d'éléments de nature quelconque :

« I) Si chacun des éléments de la suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ est identique à un même élément A , la suite a certainement une limite qui est A .

« II) Si une suite infinie $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ a une limite A , toute suite d'éléments de la première pris dans le même ordre : $A_{n_1}, A_{n_2}, \dots, A_{n_p}, \dots$ (les nombres entiers $n_1, n_2, \dots, n_p, \dots$ iront donc en croissant) a une limite qui est aussi A . »

Mais ces classes (L) sont trop générales et on ne peut pas « leur étendre un grand nombre des propriétés des ensembles linéaires » ([19], 17). C'est pourquoi il faut leur imposer « de nouvelles restrictions », et cela de façon à vérifier les conditions suivantes :

« 1° Ces restrictions devraient pouvoir s'énoncer indépendamment de la nature des éléments considérés ; 2° Elles devraient être satisfaites par les classes d'éléments qui interviennent le plus fréquemment dans les applications ; 3° Elles devraient fournir la généralisation cherchée des théorèmes sur les ensembles linéaires et les fonctions continues. »

Fréchet introduit alors les classes (V) telles que, si A et B sont deux éléments de nature quelconque de la classe, on puisse leur faire correspondre un nombre $(A, B) = (B, A) \geq 0$, jouissant des propriétés suivantes ([19], 18) :

« 1° La condition nécessaire et suffisante pour que (A, B) soit nul est que A et B soient identiques ; 2° Il existe une fonction positive bien déterminée $f(\varepsilon)$ tendant vers zéro avec ε , telle que les inégalités $(A, B) \leq \varepsilon$, $(B, C) \leq \varepsilon$ entraînent $(A, C) \leq f(\varepsilon)$, quels que soient les éléments A, B, C . Autrement dit, il suffit que (A, B) et (B, C) soient petits pour qu'il en soit de même de (A, C) . Nous appellerons *voisinage* de A et B le nombre (A, B) . »

C'est Fréchet qui introduit la notion d'espace complet telle que nous la connaissons aujourd'hui, en la définissant pour les classes (V) ([19], 23) :

« Nous dirons alors qu'une classe (V) admet une généralisation du théorème de Cauchy si toute suite d'éléments de cette classe, qui satisfait aux conditions de Cauchy, a un élément limite. »

Un autre mérite important de Fréchet est l'introduction de la notion d'espace métrique. En effet, il définit ([19], 30) la notion d'« écart », c'est-à-dire de distance, en faisant « correspondre à tout couple d'éléments A, B un nombre $(A, B) \geq 0$ » vérifiant les propriétés suivantes :

« a) L'écart (A, B) n'est nul que si A et B sont identiques ; b) Si A, B, C , sont trois éléments quelconques, on a toujours $(A, B) \leq (A, C) + (C, B)$. »

Il démontre ensuite que *l'écart est un voisinage*, c'est-à-dire que « toute classe (E) est une classe (V) » (les classes (E) étant définies par la donnée d'un écart sur elles).

Fréchet va ouvrir avec sa thèse une nouvelle époque en analyse, caractérisée par un foisonnement d'espaces nouveaux et par la recherche des propriétés caractéristiques de ces espaces conduisant à des « structures » à la fois assez souples et assez riches pour répondre aux applications les plus importantes en analyse.

3.2. Hausdorff et les espaces « complets »

C'est dans son livre sur les *Eléments de la théorie des ensembles*, publié en 1914, que Hausdorff développe une théorie qui formera la base de toutes les mathématiques où intervient la notion de limite et ses généralisations.

Hausdorff y introduit ([20], 213), pour la première fois, le mot « espace topologique », espace topologique séparé ou espace « de Hausdorff », qu'il définit de la façon suivante :

« Un espace *topologique* est un ensemble E dont les éléments (points) x sont associés à des sous-ensembles U_x , appelés voisinages, vérifiant les *axiomes de voisinages* suivants :

« (A) A tout point x correspond au moins un voisinage U_x ; tout voisinage U_x contient le point x .

« (B) Si U_x, V_x sont deux voisinages du même point x , alors il existe un voisinage W_x qui est sous-ensemble des deux.

« (C) Si le point y appartient à U_x , alors il existe un voisinage U_y qui est sous-ensemble de U_x .

« (D) Pour deux points distincts x, y , il existe deux voisinages U_x, U_y dont l'intersection est vide. »

Hausdorff définit également ([20], 211) la notion d'espace métrique : « Un ensemble E est un espace *métrique* si à deux éléments (points) quelconques x, y on fait correspondre un nombre non négatif, leur *distance* » $d(x, y)$ (nous employons ici la notation

actuelle), de sorte que les « axiomes de distance » soient vérifiés. A savoir : (α) (« axiome de symétrie ») on a toujours $d(x, y) = d(y, x)$; (β) (« axiome de coïncidence ») on a $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$; (γ) (« axiome triangulaire ») on a toujours

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Hausdorff définit ensuite ([20], 315) le concept d'espace métrique « complet » : c'est un espace métrique dans lequel *toute suite fondamentale converge*, une suite « fondamentale » étant une suite « de Cauchy ». Il rappelle que Fréchet a nommé un tel espace une « classe » qui « admet une généralisation du théorème de Cauchy ».

Hausdorff démontre ([20], 315-316) dans son livre que tout espace métrique E peut se « prolonger » en un espace métrique « complet » $\mathbf{E}$, et cela par une méthode analogue à celle de G. Cantor et C. Méray pour construire l'ensemble des nombres réels : $\mathbf{E}$ étant l'ensemble des suites de Cauchy de E .

Il démontre d'abord que si $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ et, $\beta = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ sont deux suites de Cauchy, alors la suite des distances ($\rho_n = d(a_n, b_n)$) est aussi une suite de Cauchy de nombres réels. D'où, en utilisant le critère de Cauchy pour les nombres réels, il en résulte que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n$ est un nombre réel, et, par définition, ce nombre sera $d(\alpha, \beta)$.

Soient maintenant trois suites de Cauchy α, β, γ , alors on a $d(\alpha, \gamma) \leq d(\alpha, \beta) + d(\beta, \gamma)$.

Pour que l'axiome de « coïncidence » soit vérifié, il faut considérer que, dans $\mathbf{E}$, $\alpha = \beta$ si $d(\alpha, \beta) = 0$.

En identifiant la suite $(a, a, \dots, a, \dots)$ avec a , l'ensemble $\mathbf{E}$ devient un sous-ensemble de $\mathbf{E}$.

Hausdorff montre ensuite que $\mathbf{E}$ est dense dans $\mathbf{E}$, et si on appelle une suite d'éléments de $\mathbf{E}$ « séquence », alors, si les a_n forment dans E une suite de Cauchy α , les suites constantes $(a_n, a_n, \dots, a_n, \dots)$ formeront dans $\mathbf{E}$ une séquence convergente de limite α .

Il prouve ensuite que $\mathbf{E}$ est complet, en notant d'abord que si l'on a deux séquences $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ et $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\alpha_n, \beta_n) = 0$, alors si l'une est une séquence de Cauchy l'autre l'est également.

Soit maintenant $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ une séquence de Cauchy de $\mathbf{E}$, comme $\mathbf{E}$ est dense dans $\mathbf{E}$, on peut associer à toute α_n une suite

constante (x_n) telle que $d(\alpha_n, (x_n)) < \frac{1}{n}$. Donc les suites constantes (x_n) forment également une séquence de Cauchy dans $\mathbf{E}$. Il en résulte que les x_n forment dans $\mathbf{E}$ une suite de Cauchy $\xi = (x_1, \dots, x_n, \dots)$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\xi, (x_n)) = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(\xi, \alpha_n) = 0$, c'est-à-dire que la séquence de Cauchy $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ converge vers $\xi \in \mathbf{E}$.

3.3. Banach et les espaces vectoriels normés complets

Dans sa thèse de 1920, publiée en 1922, S. Banach développe la théorie des espaces vectoriels normés complets. Il commence ([21], 135) par définir axiomatiquement la notion d'espace vectoriel et introduit ensuite le concept d'espace vectoriel normé complet, où il utilise la notation déjà employée par F. Riesz, en 1918, dans son article *Sur les équations fonctionnelles linéaires* ([22], 72) :

« Il existe une opération appelée norme (nous la désignerons par le symbole $\|X\|$), définie dans le champ $\mathbf{E}$, ayant pour contre-domaine l'ensemble des nombres réels et satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \|X\| &\geq 0, \\ \|X\| &= 0 \text{ équivaut à } X = 0, \\ \|a \cdot X\| &= |a| \cdot \|X\|, \\ \|X + Y\| &\leq \|X\| + \|Y\|. \end{aligned}$$

« Si 1° (X_n) est une suite d'éléments de $\mathbf{E}$, 2° $\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ p \rightarrow \infty}} \|X_r - X_p\| = 0$, il existe un élément X tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|X - X_n\| = 0$. »

S. Banach publie, en 1932, son livre sur la *Théorie des opérations linéaires* ([23]), le livre de chevet de toute une génération de mathématiciens. Banach introduit ([23], 53) les mots « espace vectoriel normé » et « espaces de type (B) » qui sont des espaces vectoriels normés complets et qu'on désigne aujourd'hui par « espaces de Banach ».

4. ESPACES UNIFORMES

4.1. André Weil et les espaces uniformes

A. Weil introduit en 1936 la notion d'espace uniforme dans sa note *Les recouvrements des espaces topologiques : espaces complets, espaces bicomacts* ([24]) ; le mot « bicomact », utilisé avant 1940,

a été remplacé, dans la terminologie bourbachique, par « compact » — toutefois l'espace considéré n'était pas nécessairement séparé.

La théorie de Weil, comme l'ont remarqué A. Weil lui-même ([24], 1004) et L. M. Graves ([25], 61), contient comme cas particuliers plusieurs conceptions qui ont été développées entre 1923 et 1935 ; en particulier, celle des espaces vectoriels topologiques localement convexes exposée par J. von Neumann, en 1935, dans son article *Sur les espaces topologiques complets*. Dans l'introduction à son mémoire, J. von Neumann note ([26], 1) que la notion de « complétion » implique « une certaine « uniformité de la topologie » de l'espace », et que les espaces vectoriels topologiques « offrent une possibilité d' « uniformisation » pour leur topologie : à cause de leur homogénéité, tout peut être discuté au voisinage de 0 ».

A. Weil a développé la théorie des espaces uniformes dans son livre *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, paru en 1937. Dans son introduction, Weil « s'explique mal » ([27], 147) que la notion de distance joue « un pareil rôle dans une branche des mathématiques où elle n'est, à proprement parler, qu'une intruse ». Cela est dû à l'emploi du dénombrable, « malfaisant parasite qui infeste tant de livres et de mémoires dont il affaiblit la portée tout en nuisant à une claire compréhension des phénomènes ». Mais, « lorsqu'on quitte le dénombrable, il n'est plus légitime de faire des notions de suite et de limite l'outil essentiel, et on doit les remplacer par d'autres dont le champ d'action soit moins restreint. A plus forte raison faudra-t-il abandonner la notion de distance ». Or, beaucoup de propriétés des espaces métriques « ont une origine commune, qui est simplement la possibilité de comparer entre eux les voisinages donnés en tous les points de l'espace ».

Les commentaires d'André Weil dans ses *Œuvres scientifiques* sont très précieux pour éclairer le développement de la topologie générale. En effet, il écrit ([28], 537-538) que, « déjà depuis 1934, le projet se dessinait des *Éléments de mathématiques* auxquels Nicolas Bourbaki allait donner son nom bientôt prestigieux », et il ajoute :

« La nécessité apparut immédiatement de mettre au point, pour ces *Éléments*, un exposé de topologie générale qui ne retint, du fatras de notions disparates dont on disposait alors en ce domaine, qu'un minimum de principes vraiment utiles. Il devenait visible en particulier que les premiers essais d'axiomatisation de la topologie générale avaient attribué une importance excessive à la notion traditionnelle de limite. »

Le temps était aussi venu « d'élargir de même les notions d'uniformité, de complétion, d'espace complet ». Ainsi, « vers 1936 », les membres du groupe Bourbaki, dont André Weil, « s'étaient mis d'accord pour adopter la notion de structure, et celle d'isomorphisme qui lui est liée, comme principe fondamental de classification des théories mathématiques » ; et Weil précise :

« Je pensai faire œuvre utile en introduisant en topologie générale une nouvelle structure, dite « uniforme », plus précise que la simple structure topologique, et tout juste suffisante pour servir de support à la construction d'espaces complets. »

Quant au dénombrable, le « malfaisant parasite », A. Weil écrit ([28], 540) :

« Avec le recul que donnent les quarante dernières années, on sourira sans doute du zèle que j'apportais alors à l'expulsion du dénombrable ; chassé par la porte, il a fini par rentrer par la fenêtre. »

Dans son livre *Sur les espaces à structure uniforme*, Weil considère ([27], 148) les espaces uniformes « qui sont ceux où la notion de continuité uniforme a un sens : on a là une structure, beaucoup plus faible qu'une structure métrique, mais plus forte qu'une structure topologique ».

Il donne ensuite une définition d'un espace topologique, telle que N. Bourbaki venait de l'adopter, c'est-à-dire un ensemble « où se trouve donnée une famille de sous-ensembles, dits *ensembles ouverts* », vérifiant les axiomes : toute réunion d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert ; toute intersection finie d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert. (Notons qu'en 1935 Alexandrov et Hopf appellent ([29], 26) un ensemble « ouvert », si « son complémentaire est fermé » ; le concept d'ensemble fermé pour les espaces euclidiens de dimension finie a été introduit par G. Cantor.)

Puis A. Weil introduit ([27], 150-151) la notion de « système uniforme de voisinages », défini de la façon suivante :

« On dira que dans un ensemble E on a défini un *système uniforme de voisinages* si l'on a fait correspondre à tout α pris dans un certain ensemble (non vide) d'indices, et à tout élément p de E , un sous-ensemble $V_\alpha(p)$ de E , qui sera dit *le voisinage de p d'indice α* , et si les axiomes que voici sont satisfaits :

« (U_I) Quels que soient p et l'indice α , on a $p \in V_\alpha(p)$; quels que soient p, q distincts dans E , il y a un indice α tel que $q \notin V_\alpha(p)$.

« (U_{II}) Quels que soient les indices α, β , il y a un indice γ tel que $V_\gamma(p) \subset V_\alpha(p) \cap V_\beta(p)$ quel que soit p .

« (U_{III}) A tout indice α on peut faire correspondre un indice β tel que les deux relations $p \in V_\beta(r)$, $q \in V_\beta(r)$ entraînent $q \in V_\alpha(p)$. »

Si (E, d) est un espace métrique, alors les boules ouvertes de centre p et de rayon α forment un système uniforme de voisinages $(V_\alpha(p))$.

A Weil reformule ensuite les définitions précédentes, en se plaçant dans l'ensemble $E^2 = E \times E$:

« Tout sous-ensemble C de E^2 définit une correspondance entre éléments de E : C étant donné, on fera correspondre à tout élément p de E tous les éléments q de E tels que (p, q) soit dans C ; l'ensemble de ces éléments q sera noté $C(p)$, et plus généralement, si A est un sous-ensemble quelconque de E , l'ensemble des points q qui correspondent aux points p sera noté $C(A)$: c'est la réunion des $C(p)$ quand p décrit A . Nous noterons par Δ l'ensemble de tous les éléments (p, p) de E^2 . »

Si maintenant C et D sont deux sous-ensembles de E^2 , il désigne par CD

« l'ensemble tel que l'on ait, quel que soit p , $CD(p) = C[D(p)]$, c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments (p, r) de E^2 tels qu'on puisse choisir q dans E de façon à avoir à la fois $(p, q) \in C$ et $(q, r) \in D$ ».

De même, on désigne par C^{-1} l'ensemble des éléments (q, p) tels que (p, q) appartient à C .

A. Weil se donne après cela une nouvelle famille d'ensembles qui définira une « structure uniforme » sur E ([27], 152), en désignant par V_α l'ensemble des éléments (p, q) de E^2 tels que $q \in V_\alpha(p)$:

« Au lieu de se donner le système de voisinages $V_\alpha(p)$ de E , il revient évidemment au même de se donner la famille d'ensemble V_α dans E^2 ; ceux-ci doivent satisfaire aux axiomes que voici, respectivement équivalents aux axiomes (U) :

« (U_I') On a $\bigcap_\alpha V_\alpha = \Delta$.

« (U_{II}') Quels que soient α, β , il y a γ tel que $V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

« (U_{III}') A tout α on peut faire correspondre β tel que $V_\beta V_\beta^{-1} \subset V_\alpha$.

« Tout sous-ensemble W de E^2 contenant l'un des V_α sera appelé un *entourage* de Δ dans E^2 ; on dira qu'une propriété des couples (p, q) est vérifiée dès que p, q sont suffisamment voisins l'un de l'autre si l'ensemble des couples (p, q) qui possèdent cette propriété constitue un entourage de Δ dans E^2 . »

Une telle famille (V_α) définit une « structure uniforme », et « un espace E où a été définie, au moyen d'une telle famille V_α , une structure uniforme sera appelé un *espace uniforme* ».

initial : par exemple, on engendre, au début de l'analyse, l'ensemble des nombres réels comme espace complet sur le corps des rationnels, et on le définit comme corps en y prolongeant les fonctions somme et produit. »

4.2. *J. Dieudonné et les espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet*

A la fin de son livre ([27], 182), A. Weil a posé la question suivante : « Quels sont les espaces topologiques susceptibles d'une structure uniforme pour laquelle ils sont complets ? »

Le mémoire de J. Dieudonné de 1939, *Sur les espaces uniformes complets*, est consacré à cette question. Notons d'abord que l'auteur, dans ses « Préliminaires » ([30], 144), renvoie à l'exposé « didactique et détaillé de ces questions dans la partie du *Traité d'analyse* de N. Bourbaki consacrée à la Topologie générale qui paraîtra prochainement », mais le titre du traité de Bourbaki deviendra, dans la note de J. Dieudonné *Sur les espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet* ([31], 163), *Eléments de mathématiques*.

J. Dieudonné démontre ([30], 150), dans son mémoire *Sur les espaces uniformes complets*, qu'il est possible de « munir tout espace métrisable d'une structure uniforme d'espace complet, compatible avec sa topologie », mais cette structure uniforme n'est pas nécessairement métrisable.

Il prouve ensuite ([32], 160) l'existence d'un espace normal — c'est-à-dire ([33], TG IX, 41) d'un espace topologique séparé X tel que, quels que soient les ensembles fermés disjoints A, B de X , il existe une application continue de X dans $[0, 1]$ égale à 0 en tout point de A et à 1 en tout point de B — qui n'est pas susceptible d'une structure uniforme d'espace complet.

Il démontre enfin ([31], 162) le théorème suivant :

« Tout espace topologique uniformisable, dont la topologie est plus fine qu'une topologie d'espace métrisable, est susceptible d'être muni d'une structure d'espace complet. »

4.3. *D'un pythagoricien inconnu à Alexandre Grothendieck*

T. Heath, dans son *Histoire des mathématiques grecques*, croit ([34], 157) que l'irrationalité de $\sqrt{2}$ « a été découverte par

un des pythagoriciens, à une date sensiblement antérieure » à l'époque où vivait Démocrite (460-370 avant notre ère). Peut-être pourrait-on dater de ce temps la préhistoire de la complétion de l'ensemble des nombres rationnels et celle des espaces complets.

Quant à un des derniers résultats dans la théorie des espaces complets, il a été obtenu par A. Grothendieck pour la complétion des espaces vectoriels. Il a été publié en 1950, et J. Dieudonné nous disait le 15 juin 1982 : « Grothendieck avait vingt ans et il est venu nous trouver à la fin d'un séminaire Bourbaki en disant : « Voilà ce que j'ai trouvé. » »

Soient E un espace vectoriel localement convexe, E' dual de E et H une partie équicontinue de E' (pour tout voisinage V de 0 dans E' , il existe un voisinage U de 0 dans E tel que $u(U) \subset V$ pour tout $u \in H$). On munit E de la topologie faible : si $(x, x') \mapsto \langle x, x' \rangle$ est la forme bilinéaire canonique sur $E \times E'$, alors c'est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires $x \mapsto \langle x, x' \rangle$ lorsque x' parcourt E' .

Alors A. Grothendieck a énoncé ([35], 606) et démontré ([36], 98) le théorème suivant :

« Pour que E soit complet, il faut et il suffit que toute forme linéaire sur E' , dont les restrictions aux parties équicontinues sont faiblement continues, soit déjà faiblement continue, *i.e.* soit élément de E . »

Notons que dans cette démonstration intervient la propriété qu'un sous-espace uniforme fermé d'un espace complet est complet.

Pierre DUGAC.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. Cajori, *A History of Mathematical Notations*, vol. I, Chicago, Open Court, 1928.
- [2] J. L. Lagrange, Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des suites récurrentes, *Miscellanea philosophico-mathematica Societatis privatae taurinensis*, 1, 1759, p. 33-42.
- [3] K. Weierstrass, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen, *Math. Abhandlungen K. Akad. Wissenschaften Berlin*, 1876, 1877, p. 11-60.
- [4] N. Oresme, *Questiones super geometriam Euclidis*, Leiden, 1961.
- [5] L. Euler, De progressionibus harmonicis observationes, *Comm. acad. sci. Petropolitanae*, 7, 1734-1735, 1740, p. 150-161 = *Opera omnia*, (1), vol. XIV, p. 87-100.
- [6] J. d'Alembert, *Opusculs mathématiques*, vol. IV, Paris, 1768.
- [7] A. Pringsheim, Über Eulersches Konvergenzkriterium, *Bibl. Math.*, (3), 6, 1905, p. 252-256.

- [8] P. Dugac, Histoire du théorème des accroissements finis, *Arch. intern. Hist. Sci.*, 30, 1980, p. 86-101.
- [9] B. Bolzano, Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes daß je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurtzel der Gleichung liege, *Abhandlungen K. Böhm. Gesell. Wissenschaften*, (3), 5, 1817, p. 1-60 = Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation, *Revue d'Histoire des Sciences*, XVII, 1964, p. 136-164.
- [10] B. Bolzano, *Reine Zahlenlehre*, Stuttgart-Bad Cannstatt, Friedrich Frommann Verlag, 1976.
- [11] A. L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique*, Paris, Debure, 1821 = *Œuvres complètes*, (2), t. III, Paris, Gauthier-Villars, 1897.
- [12] C. Méray, Remarques nouvelles sur les points fondamentaux du calcul infinitésimal et sur la théorie de développement des fonctions en séries, *Revue des Sociétés savantes, Sci. math. phys. nat.*, (2), 3, 1868, 37, p. 133-138.
- [13] C. Méray, Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites à des variables données, *Revue des Sociétés savantes, Sci. math. phys. nat.*, (2), 4, 1869, p. 280-289.
- [14] J. Dixmier, *Cours de mathématiques du premier cycle, première année*, 2^e éd., Paris, Gauthier-Villars, 1976.
- [15] E. Heine, Die Elemente der Functionenlehre, *Journal reine und angew. Math.*, 74, 1872, p. 172-188.
- [16] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig, Vieweg, 1872.
- [17] P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*, Paris, Vrin, 1976.
- [18] R. Dedekind, *Gesammelte mathematische Werke*, t. III, Braunschweig, Vieweg, 1932.
- [19] M. Fréchet, Sur quelques points du calcul fonctionnel, *Rendiconti Circolo mat. Palermo*, 22, 1906, p. 1-74.
- [20] F. Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914 = New York, Chelsea, 1965.
- [21] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fundamenta Math.*, 3, 1922, p. 133-181.
- [22] F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, 41, 1918, p. 71-98.
- [23] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932.
- [24] A. Weil, Les recouvrements des espaces topologiques : espaces complets, espaces bicomacts, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 202, 1936, p. 1002-1005.
- [25] L. M. Graves, On the completing of a Hausdorff space, *Annals of Math.*, 38, 1937, p. 61-64.
- [26] J. von Neumann, On complete topological spaces, *Transactions Amer. Math. Soc.*, 37, 1935, p. 1-20.
- [27] A. Weil, *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*, Paris, Hermann, 1937 = *Œuvres scientifiques*, vol. I, New York, Springer-Verlag, 1980, p. 147-183.
- [28] A. Weil, *Œuvres scientifiques*, vol. I, New York, Springer-Verlag, 1980.
- [29] P. Alexandroff und H. Hopf, *Topologie*, Berlin, 1935.

- [30] J. Dieudonné, Sur les espaces uniformes complets, *Annales sci. Ecole normale sup.*, 56, 1939, p. 277-291 = *Œuvres mathématiques*, t. I, Paris, Hermann, 1981, p. 144-158.
- [31] J. Dieudonné, Sur les espaces topologiques susceptibles d'être munis d'une structure uniforme d'espace complet, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 209, 1939, p. 666-668 = *Œuvres mathématiques*, t. I, Paris, Hermann, 1981, p. 162-164.
- [32] J. Dieudonné, Un exemple d'espace normal non susceptible d'une structure uniforme d'espace complet, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 209, 1939, p. 145-147 = *Œuvres mathématiques*, t. I, Paris, Hermann, 1981, p. 159-161.
- [33] N. Bourbaki, *Topologie générale*, chap. 5 à 10, Paris, Hermann, 1974.
- [34] T. Heath, *A history of Greek mathematics*, vol. I, Oxford, Clarendon Press, 1921.
- [35] A. Grothendieck, Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe, *Comptes rendus Acad. Sci. Paris*, 230, 1950, p. 605-606.
- [36] A. Grothendieck, *Espaces vectoriels topologiques*, São Paulo, Soc. Mat., 3^e éd., 1964.
- [37] S. F. Lacroix, *Traité des différences et des séries*, Paris, 1800.