

6869-6873 pdf

TANNERY, P.

1886

Bulletin des sciences mathématiques. 1886, 10.

6869	Le resume historique de Proclus	p 128 -
6870	La constitution des elements	p 183 -
6871	Hippocrate de Chios	p 213 -
6872	Democrite et Archytas	p 295 -
6873	Les geometries de l'Academie	p 303 -

positive, les carrés restant multipliés par l'unité négative, et où le nombre des deux parties est indépendant de la substitution choisie selon la loi d'inertie des formes quadratiques.

MÉLANGES.

LA CONSTITUTION DES ÉLÉMENTS;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Dès le milieu du ^v^e siècle avant J.-C., ai-je dit, il a dû exister un Traité de Géométrie portant le nom de Pythagore et présentant déjà le même cadre que les *Éléments* d'Euclide. Quels progrès successifs ont amené cette première ébauche, sans doute bien imparfaite encore, à la forme classique qui devait s'imposer à l'enseignement? Voilà ce qu'il serait intéressant de connaître.

Proclus, dans son résumé historique, nous a conservé les noms de trois ou quatre auteurs d'*Éléments* antérieurs à Euclide: Hippocrate de Chios, Léon, Theudios de Magnésie, Hermotime de Colophon (¹). Mais ces noms nous sont inconnus, sauf le premier, et les renseignements que nous possédons sur Hippocrate sont relatifs à des travaux en dehors du cadre d'Euclide; il nous faut donc chercher ailleurs.

Il est à remarquer que Proclus, quand il parle, soit des travaux d'Hermotime, soit de ceux d'Euclide, indique chaque fois, comme précurseurs, deux géomètres qu'il ne cite pas comme auteurs d'*Éléments*, mais sur les travaux desquels il a spécialement attiré l'attention. Il semble donc que ces deux géomètres, Eudoxe et Théétète, soient en réalité ceux qui aient joué le rôle le plus important dans le développement de la Géométrie, de Pythagore à Euclide.

Est-il permis de préciser ce rôle pour chacun d'eux, de déterminer les théories spéciales qui leur sont dues?

(¹) Il n'est pas très clair que ce dernier ait effectivement composé des *Éléments*.

2. Sur la part d'Eudoxe dans la constitution des *Éléments*, nous possédons deux données positives, d'une importance capitale, et qui suffiraient, sans ses autres travaux, trop souvent dépréciés par l'ignorance, pour assurer au Cnidien un rang parmi les premiers génies de l'antiquité.

Un scholie anonyme sur Euclide (peut-être provenant de Proclus) ⁽¹⁾ dit que le Livre V d'Euclide, lequel contient la théorie des proportions, conçue généralement et comme applicable à l'Arithmétique et à la Musique aussi bien qu'à la Géométrie ⁽²⁾, est une invention d'Eudoxe.

Archimède (Préface *Sur la sphère et le cylindre*) lui attribue expressément la mesure de la pyramide et du cône, c'est-à-dire, en somme, ce que le Livre XII contient de véritablement capital. Il nous dit ailleurs (Préface de la *Quadrature de la parabole*) que les deux théorèmes sur ces mesures, ainsi que ceux qui concernent la proportionnalité des aires de deux cercles aux carrés de leurs rayons et des volumes de deux sphères aux cubes de leurs rayons, ont été démontrés à l'aide d'un *lemme* semblable à celui dont il se sert lui-même ⁽³⁾.

Or ce lemme se retrouve, sous une forme différente il est vrai, mais qui ne l'altère pas, dans la déf. 4 du Livre V d'Euclide, c'est-à-dire celui dont le fond est attribué à Eudoxe par le scholiaste anonyme ⁽⁴⁾. Quoique le théorème sur la proportionnalité des aires de deux cercles fût déjà connu d'Hippocrate, on peut donc considérer Eudoxe comme le véritable auteur du principe qui, pendant toute l'antiquité, a tenu le rôle que joue aujourd'hui le principe des limites; car, s'il ne l'a peut-être pas formulé le premier, il a su, avant tout autre, montrer la fécondité de ses applications; il a été ainsi le véritable précurseur d'Archimède pour les quadratures et les cubatures.

⁽¹⁾ Κροχμ, *Untersuchungen über die neu aufgefundenen Scholien des Proklus zu Euclid's Elementen*, Herford, 1865.

⁽²⁾ C'est sans doute par là qu'il faut expliquer l'expression de théorèmes généraux (καθόλου) attribués à Eudoxe dans le résumé de Proclus.

⁽³⁾ Sous une forme un peu modernisée. « Si deux quantités (lignes, surfaces ou volumes) sont inégales, leur différence, ajoutée à elle-même un nombre de fois suffisant, finira par dépasser toute quantité donnée de même ordre. »

⁽⁴⁾ Il va sans dire qu'Euclide se sert de cette définition pour la démonstration des théorèmes dont il s'agit.

3. Le premier témoignage que nous avons cité exige peut-être certaines explications.

La différence la plus saillante que présente la Géométrie plane d'Euclide (ses six premiers Livres) avec les Traités élémentaires modernes consiste en ce que les Grecs introduisaient aussi tard que possible la notion de similitude. En fait, elle n'apparaît qu'au Livre VI; les triangles, les parallélogrammes, le cercle, les polygones réguliers ont déjà été étudiés dans toutes leurs propriétés essentielles; il ne s'agit plus que de traiter à part ce qui concerne les figures semblables, sans se servir d'aucune de leurs propriétés pour démontrer des théorèmes dont l'énoncé ne les suppose pas.

Euclide emploie d'ailleurs, dès son premier Livre, pour ses constructions et pour ses démonstrations, un artifice spécial qui supplée souvent pour lui la théorie de la similitude. Si, par un point quelconque d'une diagonale d'un parallélogramme, on mène des parallèles aux côtés, on divisera le parallélogramme en quatre autres, deux *péridiamétraux* (traversés par la diagonale) semblables entre eux, et deux *paraplérômes* (compléments) équivalents entre eux, et dont les côtés sont par conséquent réciproques. Cette équivalence se démontre directement de la façon la plus simple, et Euclide a dès lors le moyen, par exemple, de construire, sans employer le mot, une quatrième proportionnelle, comme second côté d'un *paraplérôme* dont le premier côté est connu avec le *paraplérôme* correspondant. Il suffit d'achever la figure parallélogrammique.

Or il est difficile de croire que cette singularité historique corresponde réellement à la marche du développement de la Géométrie. Comme je l'ai déjà remarqué, le principe de similitude est supposé par les arts du dessin, dès leurs premières tentatives; sa connaissance est bien constatée chez les Égyptiens et l'on peut d'autant moins refuser à Pythagore d'en avoir eu pleine conscience, que la tradition la plus constante lui attribue l'emploi de la proportion géométrique. On est donc amené à penser que la Géométrie de Pythagore ne procédait nullement comme celle d'Euclide, qu'elle suivait plutôt une marche bien plus voisine de celle de nos Traités élémentaires.

Mais, à l'origine, on fondait la corrélation entre la Géométrie et l'Arithmétique sur la proportion géométrique dans l'hypothèse de

la commensurabilité de toutes les grandeurs, hypothèse certainement aussi naturelle qu'elle est fausse, et qui, à l'époque où Platon écrivait les *Lois*, était encore très répandue. La découverte de l'incommensurabilité par Pythagore dut donc causer, en Géométrie, un véritable scandale logique, et, pour y échapper, on dut tendre à restreindre autant que possible l'emploi du principe de similitude, en attendant qu'on fût arrivé à l'établir sur une théorie de la proportionnalité indépendante de l'hypothèse de la commensurabilité.

C'est à Eudoxe qu'appartient la gloire d'avoir créé cette théorie, puisque c'est là l'objet du Livre V des *Éléments*; la rigueur en est incontestable, et, si l'embarras de la forme géométrique a été un motif pour l'abandonner, il serait facile de l'en dégager, et elle soutiendrait alors sans aucun désavantage la comparaison avec les expositions modernes, si souvent défectueuses ⁽¹⁾.

4. Il semble donc que, entre Pythagore et Euclide, la Géométrie plane ait subi dans son ensemble un remaniement profond, dont le moment décisif aura été le travail d'Eudoxe sur les proportions. Ce travail, en réalité, n'appartient pas à la Géométrie proprement dite, et, en bonne logique, il eût convenu de le placer en tête des *Éléments*; mais, pour être adopté, cet ordre était trop en désaccord avec la tradition et avec la gradation des difficultés. Euclide fut donc conduit à procéder suivant une tout autre marche.

Les circonstances que je viens d'essayer de retracer ont eu une conséquence spéciale sur laquelle je crois utile d'appeler l'attention.

Le principe de similitude se démontre en employant le postulatum des parallèles; mais, inversement, en formulant le principe sous une forme suffisamment simple et en l'admettant *a priori*, on pourrait s'en servir pour démontrer le postulatum des parallèles. La formule choisie peut enfin être assez claire pour lutter d'évidence intuitive avec le postulatum ⁽¹⁾, et si on les proposait

⁽¹⁾ Duhamel (*Éléments de Calcul infinitésimal*, t. I, p. 1-6, etc.) a suffisamment traité cette question pour que je n'insiste pas.

⁽²⁾ Par exemple, le rapport entre l'hypoténuse d'un triangle rectangle et un côté de l'angle droit est constant, si l'angle compris reste le même.

à quelque ouvrier, ignorant en Géométrie mais familier avec les pratiques de son art, il y aurait souvent chance pour qu'il prononçât en faveur du principe de similitude.

Il ne faut pas évidemment se représenter la Géométrie de Pythagore comme arrivée au degré de perfection qui date d'Euclide. La forme des démonstrations devait être, en général, aussi rigoureuse, mais le nombre des vérités admises comme primordiales était, sans doute, beaucoup plus considérable, et, si l'on met à part les travaux originaux d'Eudoxe et de Théétète, le progrès dut consister, en ce qui concerne le domaine des *Éléments*, beaucoup moins dans la découverte de propriétés nouvelles que dans la réduction des axiomes. Or il me semble hors de doute que du moment où l'abstraction géométrique commença, elle dut admettre sur le même pied, sous une forme ou sous une autre, d'une part, le principe de similitude, dérivé des arts du dessin, de l'autre, le postulatum des parallèles, qui, peut-être, provient plutôt de l'arpentage. Si, plus tard, l'un des deux principes passa au second plan, ce ne fut pas pour quelque raison *a priori*, qui n'existe pas, mais bien parce que la similitude fut reconnue dépendre d'une théorie générale, laquelle n'était point suffisamment élucidée. Ainsi l'ordre que nous continuons à suivre à cet égard n'a qu'une valeur simplement historique.

5. J'ai déjà eu l'occasion d'indiquer, à propos d'un passage du résumé historique de Proclus ⁽¹⁾, comment Bretschneider avait été amené à voir, dans les démonstrations analytiques adjointes aux premières propositions du Livre XIII des *Éléments*, le débris d'un travail d'Eudoxe; il a semblé, d'après cela, que le Cnidien avait également apporté une contribution importante à la théorie des polyèdres réguliers, objet de ce Livre, théorie, nous le savons, déjà ébauchée par Pythagore.

Mais cette conclusion tombe, si, comme j'ai essayé de le montrer, l'interprétation de Bretschneider est inexacte. Tout au contraire, le témoignage de Suidas peut être invoqué pour affirmer que c'est à Théétète, non à Eudoxe, qu'a été emprunté comme fond le Livre XIII d'Euclide ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Voir *Bulletin*, 1886, p. 59.

⁽²⁾ « Théétète, d'Athènes, astrologue, philosophe, disciple de Socrate, enseigna

Si l'autorité de Suidas est souvent sans valeur, sa donnée peut recevoir une confirmation sérieuse d'après la nature d'un travail qu'on est unanime pour attribuer à Théétète.

Dans le dialogue auquel Platon a donné le nom de son disciple se trouve un précieux document : Théodore de Cyrène, leur maître commun en Géométrie, avait composé un Ouvrage sur les lignes pouvant une surface ⁽¹⁾ (côtés des carrés ayant cette surface) comme de trois pieds, de cinq pieds, pour montrer qu'elles sont incommensurables en longueur à la ligne d'un pied, et il avait ainsi examiné successivement toutes ces lignes jusqu'à celle pouvant 17 pieds.

Théétète, encore tout jeune, est représenté par Platon comme s'élevant au concept général de la ligne racine carrée incommensurable d'une aire rationnelle, ligne qu'il appelle *δυναμένη* (*ῥητὴ δύναμει μόνον σύμμετρος* d'Euclide = rationnelle commensurable en puissance seulement), tandis qu'il appelle *μήκος* (longueur) la racine carrée commensurable (*ῥητὴ μήκει σύμμετρος* d'Euclide = rationnelle commensurable en longueur).

On a vu là un motif suffisant pour regarder Théétète comme le fondateur de la théorie des incommensurables, telle qu'elle est exposée dans le Livre X d'Euclide, avec une terminologie, toutefois, quelque peu modifiée, ainsi qu'on vient de le voir. En y joignant le Livre XIII, on a de la sorte un ensemble de travaux qui peuvent n'avoir point l'importance de ceux d'Eudoxe, mais suffisent pour placer Théétète au rang que lui assigne le résumé historique de Proclus.

6. Il convient de faire ressortir la liaison singulière qui existe entre les deux Livres précités d'Euclide, liaison qui fournit la confirmation dont peut avoir besoin la donnée de Suidas.

L'objet du Livre XIII semble moins, en fait, être la construction

à Héraclée. Il écrivit le premier « les cinq solides » comme on les appelle. Il vivait après la guerre du Péloponnèse.

» Théétète, d'Héraclée du Pont, philosophe, disciple de Platon. »

Il est probable que les deux Notices se rapportent au même personnage.

(1) Je considère le texte actuel de Platon comme corrompu par la substitution du mot *δύναμις* (puissance) au mot technique *δυναμένη* (pouvant). Voir mon article : *La langue mathématique de Platon*, dans les *Annales de la Faculté des Lettres de Bordeaux* (fasc. 3, p. 95; 1884).

des polyèdres réguliers et leur inscription dans la sphère (problèmes dont on peut très bien attribuer la solution à Pythagore), que la détermination des rapports qu'ont entre eux et avec le rayon de la sphère les côtés des cinq polyèdres. Cette question avait dû se poser déjà pour Pythagore, mais il n'avait évidemment pu la mener à bout; car, s'il découvrit l'incommensurabilité de lignes fournies par les constructions géométriques, ses travaux ne paraissent pas avoir été bien loin dans cette voie. En tout cas, l'Ouvrage publié par ses disciples ne devait renfermer, sur cette question, que la démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale au côté du carré ⁽¹⁾, puisque Théodore de Cyrène reprit la question à $\sqrt{3}$ ⁽²⁾.

Pour arriver au but dont il s'agissait, nous employons des notations algébriques; les Grecs imaginèrent de classer les irrationnelles fournies par les constructions géométriques, et le Livre X nous fournit ce classement, avec les propriétés, non seulement pour l'équation du second degré et pour l'équation bicarrée à coefficients rationnels, mais même en partie pour l'équation tricarrée.

Le Livre XIII s'appuie immédiatement sur ce classement; ainsi telle ligne que nous déterminons comme différence de deux radicaux est déterminée en tant qu'*apotome*; telle autre, de la forme $\sqrt{p + \sqrt{p^2 - q}}$, est suffisamment désignée comme *majeure* ($\mu\epsilon\lambda\lambda\omicron\nu$). Si l'on observe, d'autre part, que ce Livre contient plusieurs théorèmes qu'Euclide aurait certainement mieux placés dans le quatrième, où il traite des polygones réguliers, on est facilement induit à penser que l'on se trouve, pour le Livre XIII, en présence d'un ensemble introduit dans les *Éléments* avec très peu de modifications. Dès lors, les théories du Livre X, qui y sont employées, apparaissent comme provenant sans doute du même auteur, c'est-à-dire de Théétète, conformément aux données émanant de Platon et de Suidas.

(1) Démonstration qui, au témoignage d'Aristote, se faisait par l'absurde, en prouvant qu'un nombre devrait être à la fois pair et impair. Ce semble donc être celle qu'on trouve précisément à la fin du Livre X d'Euclide.

(2) Je crois inutile d'insister sur la difficulté que semblent avoir éprouvée les premiers géomètres à s'élever aux généralisations les plus simples, difficultés dont le témoignage de Platon nous fournit un exemple si curieux; on en a déjà vu un autre (Geminus dans Eutocius sur Apollonius, p. 9) à propos du théorème sur la somme des trois angles d'un triangle.

Il est à peine utile de faire remarquer qu'on ne peut nullement conclure de là que le Livre X tout entier soit dû à Théétète ; tout au contraire, il est assez probable que la plus grande partie de la nomenclature, que ne suppose pas le Livre XIII, est postérieure, et l'état d'imperfection sensible où Euclide laisse cette théorie peut même indiquer que, avant lui, elle n'avait guère été travaillée depuis son fondateur ⁽¹⁾.

7. Ainsi nous avons pu, avec une probabilité plus ou moins grande, reconstituer le rôle des deux géomètres qui nous sont indiqués comme ayant exercé la plus grande influence sur la doctrine des *Éléments*.

Il nous reste, pour contrôler le résultat de nos recherches, à passer rapidement en revue les données précises que nous possédons sur les travaux géométriques des pythagoriciens, et à examiner si, entre les théories dont il convient de leur supposer la connaissance et celles que nous avons attribuées à Eudoxe et à Théétète, ne se trouverait pas quelque lacune importante ; dans ce cas, nous ne saurions guère qui l'aurait comblée.

Je relève exclusivement ce qui concerne la Géométrie, en suivant, d'ailleurs, l'ordre théorique.

a. (*Proclus*, p. 379). — « Eudème, le péripatéticien, fait remonter aux pythagoriciens l'invention de ce théorème (*Euclide*, I, 32) que, dans tout triangle, la somme des angles intérieurs est égale à deux droits. Il dit qu'ils le démontrent comme suit :

» Soit le triangle ABC ; menez, par A, DE parallèle à BC. Puisque BC, DE sont parallèles et que les angles alternes-internes (ἐναλλάζει) sont égaux, on a

$$\widehat{DAB} = \widehat{ABC} \quad \text{et} \quad \widehat{EAC} = \widehat{ACB}.$$

Ajoutez de part et d'autre $\widehat{BAC}$. On aura donc

$$\widehat{DAB} + \widehat{BAC} + \widehat{EAC},$$

(1) La théorie des irrationnelles exige des notions sur les nombres ; sont-ce les travaux de Théétète qui ont déterminé l'introduction dans les *Éléments* des Livres arithmétiques (VII à IX) au rang singulier qu'ils occupent ? A-t-il lui-même travaillé sur ce sujet ? Ces questions, actuellement, me paraissent insolubles.

c'est-à-dire

$$\widehat{DAB} + \widehat{BAE},$$

c'est-à-dire deux droits = la somme des trois angles du triangle ABC. La somme des trois angles d'un triangle est donc égale à deux droits. Telle est la démonstration des pythagoriciens. »

b. (*Proclus*, p. 304-305). — « Ainsi, six triangles équilatéraux, assemblés par le sommet, remplissent exactement les quatre angles droits; de même trois hexagones et quatre carrés. Tout autre polygone quelconque dont on multipliera l'angle donnera plus ou moins que quatre droits; cette somme n'est donnée exactement que par les seuls polygones précités, assemblés suivant les nombres donnés. C'est là un théorème pythagoricien. »

c. (*Proclus*, p. 426, sur Euclide, I, 47 : théorème du carré de l'hypoténuse). — « Si l'on écoute ceux qui veulent raconter l'histoire des anciens temps, on peut en trouver qui attribuent ce théorème à Pythagore et lui font sacrifier un bœuf après sa découverte. »

d. (*Proclus*, p. 419, sur Euclide, I, 43). — « Ce sont, nous dit-on d'après Eudème (οἱ περὶ τὸν Εὐδῆμον), d'anciennes découvertes dues à la muse des Pythagoriciens, que la *parabole* des aires, leur *hyperbole* ou leur *ellipse* ⁽¹⁾. C'est de là que, plus tard, on prit ces noms pour les transporter aux coniques, qu'on appela : l'une, *parabole* (comparaison), l'autre, *hyperbole* (excès), la troisième, *ellipse* (défaut); tandis que, pour ces hommes anciens et divins, c'était dans la construction plane des aires sur une droite déterminée qu'apparaissait la signification de ces termes. Si vous prenez la droite tout entière et que vous y terminiez l'aire donnée, on dit que vous faites la *parabole* de cette aire; si vous lui donnez une longueur qui dépasse la droite, c'est l'*hyperbole*; si une longueur inférieure, c'est l'*ellipse*, une partie de la droite restant alors en dehors de l'aire construite. C'est au Livre VI qu'Euclide traite de l'*hyperbole* et de l'*ellipse*; mais ici il avait besoin de la *parabole* par une droite donnée d'une aire équivalente à un

(1) Soient A une aire donnée, p la longueur par rapport à laquelle se fait la *parabole*, il s'agit de construire l'inconnue x dans les équations $px = A$ (*parabole simple*), $px + mx^2 = A$ (*parabole avec hyperbole*), $px - mx^2 = A$ (*parabole avec ellipse*). C'est la nomenclature classique depuis Euclide.

triangle donné, pour nous fournir, après la construction (σύστασις, prop. 42) d'un parallélogramme équivalent à ce triangle, sa *parabole* par une droite déterminée. Ainsi, qu'on donne un triangle ayant une aire de 12 pieds et une droite dont la longueur soit de 4 pieds, nous faisons la *parabole* de l'aire du triangle sur la droite, si, prenant la longueur totale de 4 pieds, nous trouvons de combien de pieds doit être la largeur pour que le parallélogramme soit équivalent au triangle. Ainsi, ayant trouvé, dans ce cas, la largeur de 3 pieds, nous multiplions la longueur par la largeur, en supposant que l'angle donné soit droit, et nous avons l'aire. Voilà ce qu'est la *parabole* d'après l'antique tradition venue des Pythagoriciens. »

J'ai tenu à traduire *in extenso* ces passages de Proclus (ici Porphyre-Pappus) à cause de l'authenticité de la tradition qu'ils représentent. Je mentionnerai seulement les témoignages qui suivent :

e. Emploi du pentagone étoilé comme signe de reconnaissance par les Pythagoriciens (LUCIEN, *Pro lapsu in salut.* 5, etc.).

f. Le sacrifice légendaire a dû être offert par Pythagore, soit pour le théorème sur le carré de l'hypoténuse, soit pour la *parabole* des aires (PLUTARQUE, *non posse suav. vivi sec. Epic.*, 11), soit plutôt pour la solution du problème suivant :

Construire une figure équivalente à une figure donnée et semblable à une seconde figure donnée (PLUTARQUE, *Sympos.* VIII) (1).

g. Construction des polyèdres réguliers (Proclus, p. 65) et, en particulier, inscription du dodécaèdre dans la sphère. (JAMBLIQUE, *De vit. Pyth.*, 18).

8. J'ai déjà suffisamment parlé des questions (a) et (g); il est clair que (b) dérive logiquement de (a), mais a dû être provoqué par les problèmes pratiques de décoration des carrelages ou des murailles, de même que la recherche des polyèdres réguliers doit avoir eu son origine dans des tentatives analogues d'architectes. Il est même très possible que ce soit la reconnaissance empirique de la propriété des triangles équilatéraux, assemblés autour d'un sommet commun, qui ait amené la découverte de l'égalité à deux

(1) Plutarque, qui n'est nullement mathématicien, dit mal à propos « faire la parabole » au lieu de « construire ».

droits de la somme des angles de chacun de ces triangles ; on sera passé ensuite, d'après le témoignage de Geminus, d'abord au triangle isoscèle, enfin au scalène.

Le ton sur lequel Proclus parle de la découverte du carré de l'hypoténuse (c) prouve assez, sans en rapprocher les contradictions de Plutarque (f), que la légende du sacrifice n'était nullement assurée. Il semble qu'Eudème ne l'ait pas connue et qu'elle ait été appuyée uniquement, dans l'antiquité, sur deux vers anciens, rapportés par un logisticien du nom d'Apollodore (-ote), et qu'on peut traduire comme suit :

Pythagore inventant la célèbre figure
Offrit une victime et rendit grâce aux dieux,

témoignage bien insuffisant, certes, pour reconnaître le théorème auquel est resté attaché le nom du sage de Samos. Tout semble indiquer, au contraire, qu'il ne l'a pas emprunté aux Égyptiens (¹) ; cette proposition fut une des premières qu'il rencontra et nullement le couronnement de ses recherches.

Proclus paraît dire assez clairement (p. 426) que la démonstration donnée par Euclide (²) appartient à ce dernier ; mais celle de Pythagore nous est absolument inconnue, et c'est peine bien inutile que de chercher les raisonnements les plus primitifs pour les lui attribuer. La Géométrie de Pythagore était déjà assez savante pour qu'il pût faire la démonstration par les triangles semblables.

9. La substance du Livre I^{er} d'Euclide, d'après des témoignages suffisamment précis de Proclus, appartient en tout cas aux Pythagoriciens et il leur attribue aussi nettement les théories du Livre VI.

Le problème que cite en dernier lieu Plutarque (f) (*Euclide*, VI, 25) se réduit à la connaissance du rapport des aires de deux figures semblables, proposition connue d'Hippocrate de Chios, à l'invention de deux quatrièmes ou troisièmes proportionnelles

(¹) M. Cantor (*Vorlesungen*, p. 56, etc.) a solidement établi qu'on ne peut dénier aux Égyptiens la connaissance de triangles rectangles en nombres particuliers. L'exemple des Chinois semble bien prouver qu'on pouvait arriver à reconnaître la loi générale ailleurs qu'en Grèce ; je ne parle pas des *Culvasûtras* hindous, parce qu'ils peuvent être postérieurs à la conquête d'Alexandre.

(²) Celle que nous appelons vulgairement le *pont-aux-ânes*, et que les Grecs désignent comme *Θεώρημα τῆς νόμης* (George Pachymère, mss. de la Bibliothèque nationale).

[parabole simple (d) = 1,44] et d'une moyenne proportionnelle (II, 14). Ce problème est essentiel pour le cas de la parabole complète avec ellipse ou hyperbole, telle que la traite Euclide au Livre VI (28, 29), c'est-à-dire lorsque, dans l'équation à résoudre $px \pm mx^2 = A$, m est un rapport donné différent de l'unité (¹).

C'est attribuer à Pythagore la construction géométrique des problèmes du second degré; mais, si les témoignages cités à cet égard peuvent paraître sujets à caution, il convient de remarquer que, comme nous le verrons, cette construction était très probablement connue d'Hippocrate de Chios; que, d'autre part, la connaissance du pentagone régulier(e)(g) par les Pythagoriciens prouve bien qu'ils savaient au moins résoudre un problème spécial du second degré, la division d'une ligne en moyenne et extrême raison.

Dès lors, ils semblent bien avoir au moins fourni le fond de toutes les théories importantes des *Éléments*, si l'on excepte, d'une part, celles que nous avons attribuées à Eudoxe ou à Théétète, de l'autre, la théorie proprement dite du cercle, c'est-à-dire le Livre III, auquel rien ne nous renvoie, car j'omets, comme sans valeur, l'assertion de Jamblique (Simplicius sur la Physique d'Aristote, 13, V), d'après laquelle ils auraient trouvé une quadrature du cercle.

Cependant ils avaient dû s'occuper spécialement du cercle que Pythagore disait être la plus belle des figures planes (*Diog. Laërce*, VIII, 19), et, en tout cas, la lacune n'aurait pas une importance relativement très grande.

L'insuffisance des preuves relatives à l'extension réelle des connaissances géométriques de Pythagore ne peut être niée; cependant il me semble que l'on peut dire, en résumé, que ces preuves ont été un peu trop négligées, et que tous les témoignages concordent assez pour rendre probable l'opinion que j'ai avancée, que, en thèse générale, le premier Ouvrage mathématique dû à l'École de Pythagore présentait déjà le même cadre que les éléments géométriques d'Euclide et qu'il remplissait assez complètement ce cadre, si l'on excepte les théories générales sur les proportions, sur les incommensurables et sur les cubatures dérivant de la mesure de la pyramide.

(¹) Il est à remarquer que le cas simple, où $m = 1$, peut se déduire immédiatement des théorèmes II, 5 et 6.