

6869-6873 pdf

TANNERY, P.

1886

Bulletin des sciences mathématiques. 1886, 10.

6869	Le resume historique de Proclus	p 128 -
6870	La constitution des elements	p 183 -
6871	Hippocrate de Chios	p 213 -
6872	Democrite et Archytas	p 295 -
6873	Les geometries de l'Academie	p 303 -

le moins de temps possible par un point matériel soumis à l'action d'une force donnée jouit de cette propriété que la composante normale de la force est égale à la force centrifuge.

Application. — Rechercher la forme de la courbe brachistochrone lorsque la force qui sollicite le mobile émane d'un point fixe, est répulsive et varie proportionnellement au carré de la distance. Étudier toutes les circonstances du mouvement sur cette courbe et calculer la pression du mobile sur la trajectoire, dans le cas particulier où le centre de répulsion serait situé sur la courbe elle-même.

Épreuve pratique. — Sur une sphère dont le rayon est 8^m , les trois côtés d'un triangle sphérique ont respectivement 3^m , 4^m et 5^m . Calculer les angles de ce triangle avec toute la précision que comportent les Tables logarithmiques à sept décimales.

HIPPOCRATE DE CHIOS;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. La publication, vers le milieu du v^e siècle avant notre ère, des immortelles découvertes de Pythagore devait entraîner une double conséquence :

D'une part, l'Égypte pourra encore être regardée par les Grecs comme la source vénérée où il faut aller puiser les connaissances traditionnelles ; mais désormais, pour la Géométrie au moins, les élèves en remonteront à leurs maîtres.

D'un autre côté, les mathématiciens grecs sont maintenant en mesure d'aborder immédiatement des questions s'élevant déjà au-dessus des éléments, ou du moins dépassant le cadre dans lequel Euclide les a renfermés.

Je reviendrai sur le premier point ; quant au second, il suffit de remarquer que c'est en effet à l'époque précitée que remontent les problèmes de la quadrature du cercle, de la construction géométrique de la racine cubique, enfin de la division de l'angle dans un rapport donné.

C'est sans aucun doute pour ce dernier problème qu'Hippias d'Élis, sophiste contemporain de Socrate, inventa la *quadratrice*, premier exemple d'une courbe différente du cercle, et qui, contrairement aux habitudes classiques, doit avoir été construite par points ⁽¹⁾. On sait d'ailleurs que son nom lui vient de ce que cette courbe se trouva conduire également à une solution du problème de la quadrature du cercle.

Mais cette quadrature, comme aussi la duplication du cube, nous ramène tout d'abord à Hippocrate de Chios.

2. Sur ce géomètre, nous trouvons un assez curieux renseignement dans la *Morale d'Eudème*, attribuée à Aristote, mais qui est probablement de son disciple, l'historien des Mathématiques; Hippocrate est donné (VII, 14) comme exemple d'un homme d'une intelligence remarquable sous certains rapports, nulle sous d'autres; bon géomètre, il se montrait, pour le reste, comme hébété et stupide : ainsi, dans un voyage commercial, il perdit, par sa sottise, une somme considérable qui lui fut extorquée par les percepteurs du cinquantième (douane athénienne), à Byzance.

Aristote (*Météorol.*, I, 6) le cite d'autre part, avec son disciple Eschyle, pour rapporter leur opinion sur les comètes, analogue à celle des Pythagoriciens; c'est une preuve qu'Hippocrate cultivait également toutes les sciences de son temps.

Le récit de Jean Philopon (*Comment. in Arist. Phys.*, fol. 13), qu'il faisait le commerce sur mer, que, pris par des corsaires, il vint les poursuivre inutilement à Athènes, et que, s'y étant mis à fréquenter les écoles des philosophes, il devint ainsi un géomètre fameux, ne doit être regardé que comme une amplification du passage de la *Morale d'Eudème*, en sorte que les détails particuliers qu'il offre n'ont aucune valeur. Loin de supposer qu'il y avait déjà à Athènes, dès le milieu du v^e siècle, des écoles scientifiques renommées, il est à croire bien plutôt qu'Hippocrate, après y avoir peut-être été amené par des affaires de commerce, se mit à y

(1) Voir mes *Notes pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité* dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, VII₂, p. 278-283; 1883. — M. Allman (*Hermathena*, IV, 7, p. 220) a parlé d'une « organic motion » pour le tracé de la quadratrice; mais, depuis (XI, 11, p. 423, note), il a adopté mon opinion.

professer un des premiers ce qu'il avait appris dans sa patrie, auprès d'OEnopide. Quoiqu'il connût d'ailleurs la Géométrie pythagoricienne qui venait d'être publiée, rien ne prouve qu'il ait eu des Pythagoriciens pour maîtres, car les témoignages tirés de Jamblique à cet égard reposent sur une fausse interprétation des passages que nous avons vus.

Je ne trouve pas non plus que les anciens emploient, en général, un ton défavorable en parlant d'Hippocrate, ainsi que le dit M. Allman (*Hermath.*, IV, 7, p. 227). Si l'on écarte pour le moment les passages d'Aristote sur la quadrature des lunules, passages sur lesquels nous reviendrons plus loin, il est certain que le Stagirite, ainsi qu'Eudème, parle d'Hippocrate, en tant que savant, en termes très honorables; de même Jamblique. Ératosthène (dans sa *Lettre à Ptolémée* ⁽¹⁾), ne le maltraite pas plus que les autres géomètres. Proclus (p. 213 = Geminus) est très louangeur :

« On dit que la première (ὑπαγωγή) (réduction d'un problème à un autre) sur les figures difficiles, a été faite par Hippocrate de Chios, celui qui a aussi quarré la lunule et a fait en Géométrie nombre d'autres découvertes, ayant eu, autant que pas un autre, un génie naturel pour ces questions. »

Quant aux témoignages d'Alexandre Aphrodisias, de Philopon, d'Eutocius, ils ont d'autant moins de valeur qu'ils se rattachent à une opinion erronée sur un paralogisme, faussement attribué à Hippocrate au sujet de la quadrature du cercle, ainsi que nous le verrons.

3. J'ai déjà fait observer que le témoignage sur l'*apagoge* employée par Hippocrate doit, ainsi que toute la tradition sur le problème de Délos, provenir non pas d'Eudème, mais d'Ératosthène. Ce dernier, dans sa lettre à Ptolémée, nous montre, bien avant l'oracle rendu aux Déliens, le problème de la duplication du cube déjà célèbre à Athènes; un poète tragique (Euripide?) l'a mis sur la scène. Minos, voulant élever un monument à son fils Glaucus, dit à l'architecte :

Pour un tombeau royal, tu le prends bien petit;
Il faut doubler le cube et ne pas t'y tromper.

(¹) Eutocius sur Archimède (*Sphère et cylindre*, II, 2).

Ératosthène ajoute qu'Hippocrate ramena ce problème à l'invention de deux moyennes proportionnelles, et prétend qu'il n'alla pas plus loin, ce dont il est permis de douter dans une certaine mesure ⁽¹⁾.

Si c'est là d'ailleurs la plus ancienne *apagoge* que constate l'histoire, il est difficile de croire qu'elle ait réellement été la première; Hippocrate avait dû trouver des exemples dans la Géométrie pythagoricienne, qui présentait déjà des démonstrations par l'absurde, et qui sans doute n'était pas astreinte à exposer directement la solution de tous les problèmes, en rejetant la marche d'invention, nécessairement *apagogique*, du moment où la question est un peu compliquée.

Nous touchons ici évidemment à l'invention de la méthode analytique que la tradition attribue à Platon. Il est douteux que cette tradition remonte effectivement à Eudème, mais elle doit déjà avoir été admise par Geminus; voici, au reste, le passage de Proclus sur ce sujet (p. 211, 14-212, 4).

« Pour l'invention des lemmes, le plus important est une disposition spéciale de l'intelligence; car on peut voir nombre de gens trouvant rapidement des solutions sans se servir de méthodes: tel nous avons connu Kratistos, si capable pour résoudre une question avec aussi peu de principes que possible, qui cependant ne s'aidait que de son naturel. Cependant on donne des méthodes; la plus belle est celle par l'analyse, qui ramène le cherché à un principe connu; c'est celle que Platon, à ce que l'on dit, fit connaître à Léodamas, et grâce à laquelle ce dernier est connu comme auteur de nombreuses découvertes en Géométrie. La seconde est la méthode de division, qui décompose en ses parties le genre proposé, et fournit un point de départ pour la démonstration de la construction du proposé, en éliminant les éléments étrangers; cette méthode a aussi été célébrée par Platon comme un utile auxiliaire dans toutes les sciences. En troisième lieu vient la méthode de

(1) Hippocrate était certes capable de ramener ce problème à une *νεύσις* (inscription entre deux droites données d'une droite de longueur donnée et dont le prolongement passe par un point donné), ce qui est le principe de la solution de Nicomède par la conchoïde.

réduction à l'impossible, qui ne démontre pas directement la chose cherchée, mais réfute la contradictoire et arrive ainsi indirectement à la vérité. »

4. De même que les autres légendes que nous avons déjà rencontrées sur le rôle de Platon comme géomètre, celle-ci doit nous inspirer une certaine défiance.

Tout d'abord, nous voyons, dans le passage de Proclus, la méthode analytique associée à une autre à laquelle le nom de Platon est également attaché. Mais il est clair que les classifications dichotomiques, telles que le philosophe en développe l'usage dans ses dialogues du *Sophiste* et du *Politique*, n'ont pas grand' chose à voir avec la Géométrie, et que la perfection des définitions ou l'ordre des théorèmes dans les éléments n'ont guère de liaison avec cette prétendue méthode de division.

Si, d'autre part, nous considérons la méthode analytique en elle-même, telle que nous la voyons pratiquée dans Apollonius et dans Pappus, nous n'y pouvons voir qu'une *apagoge* successive du problème posé à un autre, jusqu'à ce que l'on arrive à un problème connu; il nous est dès lors impossible de reconnaître en quoi, sur ce point, aurait consisté la découverte de Platon.

La réduction à l'absurde correspond naturellement, pour les théorèmes, à la marche apagogique pour les problèmes; cependant nous trouvons pour les théorèmes, par exemple dans les scholies sur le commencement du XIII^e Livre, des démonstrations par voie analytique; la relation à démontrer est supposée vraie et on la transforme successivement jusqu'à ce que l'on arrive à une relation admise dans l'énoncé. Serait-ce là l'invention de Platon?

Tel est, semble-t-il, le sens dans lequel il faut entendre ce qu'en dit Proclus : il parle, en effet, non de problèmes, mais de lemmes; le procédé dont il s'agit n'est nullement propre à l'invention; il sert, au contraire, naturellement pour la vérification et se trouve donc applicable à la démonstration des lemmes que l'on peut rencontrer admis par un auteur, sans que l'on en reconnaisse immédiatement la vérité. Mais cette question des lemmes n'a surgi que longtemps après Platon, et, en tout cas, l'importance de la découverte qu'on lui attribue se trouverait singulièrement restreinte.

Cependant l'introduction d'un personnage d'ailleurs aussi peu

connu que Léodamas de Thasos ⁽¹⁾ semble indiquer que cette légende est ancienne et qu'elle repose sur quelque fondement plausible. Mais si, comme il semble convenable, on recherche un tel fondement dans les écrits de Platon, on est conduit à une conjecture toute différente de celles qui précèdent.

Nulle part, Platon ne fait allusion à une méthode géométrique qu'il aurait inventée; mais il y a une méthode philosophique qu'il a décrite à la fin du livre VI de la *République*, et à laquelle tous ses disciples ont attaché une grande importance : remonter de l'hypothèse au principe non supposé; suivre la marche inverse du principe à l'hypothèse ⁽²⁾.

Nous retrouvons là l'opposition constante dans les démonstrations anciennes entre l'*analyse* et la *synthèse*; c'est par un singulier abus de langage que l'on appelle aujourd'hui *synthétiques* les démonstrations géométriques d'Euclide; il n'y a chez les anciens de *synthèse* que quand il y a eu *analyse*, que quand on recompose en ordre inverse la suite des propositions obtenues, suivant la marche opposée ⁽³⁾.

Aujourd'hui, nous ne faisons plus de synthèses, parce qu'il est de règle de ne procéder en analyse que par conclusions immédiatement réversibles. Si A est vrai, B est vrai n'est employé que si l'on peut dire : B est vrai, donc A est vrai. Il est rare que les anciens aient été assez assurés de la pratique de leurs procédés pour se croire dispensés de faire la contre-épreuve, la synthèse après l'analyse ⁽⁴⁾.

⁽¹⁾ C'est à un Léodamas qu'est adressée la Lettre XI attribuée à Platon; il ne s'agit nullement de Géométrie, mais d'une constitution politique pour une colonie dont l'ami de Platon semble un des fondateurs. Le philosophe serait déjà vieux, ce qui n'est pas d'accord avec la chronologie du résumé historique de Proclus; le Socrate dont il est parlé dans la Lettre doit être Socrate le Jeune, dont parle Aristote (*Métaph.*, VI, 11); mais c'est peut-être un personnage fictif.

⁽²⁾ Dans ce passage, Platon s'exprime d'ailleurs sur la Géométrie en termes qui ont pu servir de point de départ à la légende sur la méthode analytique, mais dont la signification est en réalité toute différente.

⁽³⁾ Il est facile de se rendre compte que la marche d'Euclide ne suppose nullement, en thèse générale, une analyse préalable. Pour Archimède, la question peut être toute différente.

⁽⁴⁾ Et encore, dans ce cas, ont-ils l'habitude, comme Diophante, d'indiquer que la synthèse reste à faire, mais qu'elle va de soi.

Ainsi, nous serions tentés de croire que l'œuvre de Platon aurait été de remarquer la convenance de la double marche et de régulariser ainsi, en lui donnant une complète rigueur logique, les procédés antérieurs d'une analyse incertaine et mal assurée. Mais la question reste trop douteuse pour qu'il soit possible de lui donner une solution précise.

§. J'aborde maintenant les recherches d'Hippocrate sur la quadrature du cercle, ou plutôt sur celle des lunules; mais je dois d'abord expliquer comment ces recherches nous ont été conservées.

Aristote parle, à diverses reprises, de la quadrature du cercle comme d'un problème non résolu; il distingue, parmi les fausses solutions données, deux sortes : les unes, purement sophistiques, s'attaquent aux principes mêmes de la Géométrie : telles sont celles d'Antiphon et de Bryson; il leur oppose celles qui, tout en respectant les principes de la Science, contiennent de faux raisonnements, comme celui d'Hippocrate ou la quadrature par les lunules (*Soph., Elench.*, 11) ou bien encore la quadrature par les segments (*Phys.*, 1, 2) ⁽¹⁾.

On doit encore remarquer un passage (*Analyt. prior.*, II, 25), où Aristote fait une allusion assez claire à un théorème d'Hippocrate, que nous verrons tout à l'heure.

« Ainsi (c'est un exemple d'*apagoge*), soit Δ la quadrature, E le rectiligne, Z le cercle; si entre E et Z il n'y avait qu'un seul intermédiaire, l'égalité à un rectiligne de la somme du cercle et de lunules, on serait près de la connaissance ⁽²⁾. »

Hippocrate avait, en effet, construit une lunule dont la somme avec un cercle est quarrable; Aristote veut dire que si c'était là le seul intermédiaire à chercher pour la quadrature du cercle, celle-ci serait obtenue; mais il en faudrait un second, à savoir la quadra-

⁽¹⁾ Dès le v^e siècle, la quadrature du cercle était à Athènes un problème aussi célèbre que la duplication du cube; Aristophane (*Oiseaux*) met sur la scène l'astronome Méton proposant une solution (mécanique?).

⁽²⁾ L'emploi de lettres arbitrairement choisies pour désigner des concepts, emploi dont on voit ici un exemple, est très fréquent dans Aristote; il n'en fallut pas moins deux mille ans avant que Viète introduisit cet emploi dans l'Algèbre.

ture de la lunule particulière en question; c'est là, du moins, ce qu'on doit supposer qu'il sous-entend ⁽¹⁾.

En tout cas, nous pouvons constater qu'Aristote connaît au moins un faux raisonnement, peut-être deux, conduisant à une prétendue quadrature du cercle par les lunules ou par les segments; le texte ajoute une fois le nom d'Hippocrate. Mais, pour accepter comme pleinement valable l'accusation ainsi lancée contre le géomètre de Chios, il faudrait être assuré :

1° Que cette mention d'Hippocrate vient bien d'Aristote lui-même et n'a pas été introduite dans le texte, dès une époque d'ailleurs très ancienne, à la suite d'une glose sans valeur, provoquée par le terme de *lunule*;

2° Qu'Aristote était incapable de faire une pareille accusation à la légère, sur un point qui n'avait pas d'importance pour lui, alors qu'il lui arrive assez souvent d'attribuer sciemment à Platon et à d'autres des erreurs qu'il réfute, mais dont ils ne sont nullement coupables.

6. Les commentateurs d'Aristote se sont préoccupés d'expliquer en quoi consistaient au juste les quadratures dont parle le Stagirite. Pour Antiphon, il n'y a guère de difficulté; partant du triangle équilatéral (Thémistius) ou de tout autre polygone régulier inscriptible dans le cercle (Simplicius), il doublait le nombre des côtés jusqu'à arriver, disait-il, à la coïncidence avec le cercle. On doit d'ailleurs supposer qu'il ne proposait nullement ce procédé au point de vue pratique, mais bien au point de vue théorique, et dès lors les critiques d'Aristote sont parfaitement justes ⁽²⁾.

Il convient de remarquer que Simplicius parle d'après Alexandre d'Aphrodisias, mais cite également Eudème; toutefois, comme il

(1) Même ainsi, au reste, l'exemple est assez mal choisi; car, en réalité, il n'y a pas *apagoge* de la quadrature du cercle à celle de la lunule. puisque cette dernière quadrature est, dans le cas général, plus compliquée que celle du cercle.

(2) Antiphon paraît avoir été un sophiste athénien contemporain de Socrate, par conséquent d'Hippocrate de Chios; Bryson, fils d'Hérodore, d'Héraclée, appartient à la génération suivante; son enseignement semble avoir été voisin de celui des éristiques de Mégare; il a, d'autre part, composé des écrits moraux sur le modèle de ceux des Pythagoriciens de la même époque.

n'ajoute pas que c'est d'après l'*Histoire géométrique* de ce dernier, il faut entendre qu'il emprunte cette citation à un Commentaire sur la Physique d'Aristote. Ce Commentaire d'Eudème et celui d'Alexandre d'Aphrodisias, également perdu, forment en effet les deux sources principales auxquelles Simplicius emprunte le sien.

Pour Bryson, la question est moins claire; d'après Alexandre d'Aphrodisias, il inscrivait un carré dans le cercle et y circoncrivait un autre carré; puis il construisait un troisième carré intermédiaire entre les deux premiers et prétendait qu'il était égal au cercle, comme étant, en même temps que celui-ci, plus grand ou plus petit que les premiers carrés. Philopon rapporte que le maître de Proclus (Syrianus) rejetait l'assertion du commentateur du 11^e siècle après J.-C., et il me paraît en effet difficile de la prendre au sérieux. Mais on n'a, pour cela, aucunement le droit de considérer Bryson comme un précurseur d'Archimède; car, quel que fût son raisonnement, il n'avait certainement aucune portée pratique. Peut-être même cherchait-il seulement à établir l'existence d'un certain carré équivalent au cercle.

Enfin, au sujet d'Hippocrate, Simplicius, dans son Commentaire sur la Physique d'Aristote, rapporte deux témoignages essentiellement différents : l'un d'Alexandre d'Aphrodisias, l'autre tiré de l'*Histoire géométrique d'Eudème*.

L'édition d'Alde Manuce (1526) est si incorrecte pour le fragment d'Eudème que, malgré son importance capitale, il a été négligé jusqu'à Bretschneider; tous les historiens antérieurs ont donc admis ce que rapportait Alexandre d'Aphrodisias : Hippocrate aurait quarré la lunule, dont l'arc extérieur est de 180° , l'intérieur de 90° ; il aurait ensuite prétendu quarrer le cercle comme suit :

Si l'on partage une demi-circonférence de rayon R en trois parties égales, et que, sur les cordes égales au rayon, on décrive des demi-circonférences extérieures, on obtiendra trois lunules telles que, si on leur ajoute un demi-cercle de diamètre R , la somme sera égale au demi-hexagone inscrit dans le demi-cercle de rayon R . La quadrature du demi-cercle de diamètre R est donc ramenée à celle de la lunule, et cette dernière est supposée quarrable. L'erreur consiste en ce que, dans cette figure, la lunule a son arc intérieur de 60° seulement et n'est donc aucunement assimilable

à la lunule déjà quarrée. Ce serait là le faux raisonnement auquel Aristote fait allusion.

7. Bretschneider (1870) parvint le premier à expliquer convenablement l'extrait d'Eudème conservé par Simplicius, et par reconnaître qu'aucun paralogisme n'y est attribué à Hippocrate; qu'au contraire on trouve dans cet extrait une suite de théorèmes aussi intéressants qu'irréprochables.

Quoique le document ne remonte pas à Hippocrate lui-même, il n'en serait pas moins inappréciable pour permettre de juger des connaissances géométriques de son époque, si malheureusement Simplicius, sous prétexte d'éclaircir un texte trop concis, ne s'était pas avisé d'y introduire des explications de son cru et de malencontreux développements, qui le défigurent singulièrement. La restitution du texte d'Eudème devient dès lors assez difficile pour que Bretschneider ait été entraîné à de graves erreurs, notamment à dénier à Hippocrate la connaissance de la propriété caractéristique des segments semblables, à savoir que tous les angles inscrits y sont égaux.

M. Allman (*Hermathena*, IV, n° 7, p. 196-202; 1881) a, le premier, donné une traduction du texte d'Eudème, en le débarrassant des interpolations de Simplicius, d'après des règles dont l'application peut être discutée dans les détails, mais dont les principes sont hors de conteste. L'année suivante (Berlin, 1882) paraissait l'édition critique du Commentaire de Simplicius sur les quatre premiers Livres de la Physique d'Aristote, avec un texte singulièrement amélioré et un essai de distinction des interpolations dans le fragment d'Eudème (p. 61-68). Pour cette distinction, le savant éditeur, H. Diels, s'était aidé des lumières de M. Usener de Bonn, qui, en procédant suivant des principes analogues à ceux de M. Allman, est arrivé à des résultats concordants sur divers points, divergents sur d'autres. M. Diels a, d'autre part, inséré dans sa Préface, à la suite de remarques de M. Usener (p. xxiii-xxvi), quelques pages (xxvi-xxx1) d'observations critiques qu'il m'avait demandées, et dans lesquelles, tout en proposant des explications ou des corrections particulières pour certains passages obscurs, j'ai soutenu une partie des conclusions de M. Allman, en abandonnant les autres.

J'ai repris depuis la question dans les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* (V₂, p. 179-187; 1883), où j'ai publié le texte d'Eudème tel que je le comprenais, accompagné d'une traduction et des observations nécessaires. Enfin, M. Heiberg (*Philologus*, XLIII, 2, p. 337-344) a soumis ma restitution à une critique détaillée et proposé ses opinions sur divers points spéciaux.

La question ne peut évidemment être considérée comme épuisée; mais les lignes générales de la restitution sont désormais facilement assurées. S'il m'a paru, au reste, utile d'en rappeler l'histoire, je crois sans intérêt de rentrer ici dans la controverse particulière; je vais donc me contenter d'exposer dans le langage moderne la théorie que renferme le texte en question; je ferai seulement deux remarques préalables.

Autant qu'on en peut juger, la forme des démonstrations d'Hippocrate était déjà, à très peu près, celle d'Euclide; il n'ignorait d'ailleurs aucun des théorèmes fondamentaux sur le cercle, fait d'autant plus important à constater que, pour cette théorie, nous avons moins de données relatives aux connaissances des Pythagoriciens.

Il avait démontré la proportionnalité des surfaces des cercles aux carrés des rayons et des surfaces de segments semblables aux carrés des cordes; malheureusement, nous ignorons si son principe de démonstration contenait, en germe, la méthode d'exhaustion, dont l'invention doit donc être laissée à Eudoxe.

8. Du théorème sur les surfaces des segments découle immédiatement le principe de la quadrature des lunules.

Si l'arc extérieur est à l'intérieur dans un rapport de similitude $\frac{m}{n}$, qu'on divise le premier en m , le second en n parties égales, et qu'on joigne dans chaque arc les points de division voisins (y compris les extrêmes), on retranchera ainsi de la lunule m segments, on en ajoutera n , et l'on passera ainsi au rectiligne formé par les cordes.

Ce rectiligne sera donc équivalent à la lunule, si les n segments ajoutés forment une surface égale à celle des m segments retranchés. Comme d'ailleurs tous ces segments sont semblables entre

eux, il faudra donc que les carrés des cordes qui divisent les arcs extérieur et intérieur (ou bien ceux des rayons de ces arcs) soient entre eux dans le rapport $\frac{n}{m}$.

Pour que la lunule soit réellement quarrable, il faut, en outre, que la figure puisse être construite avec la règle et le compas, ce qui a lieu pour cinq valeurs déterminées de $\frac{m}{n}$, à savoir $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{5}{3}$; il y a donc cinq lunules quarrables.

D'après Eudème, Hippocrate a donné la quadrature des trois premières, et le fait qu'il passe de la deuxième à la troisième, et non à celle pour laquelle $\frac{m}{n} = \frac{4}{1}$, montre suffisamment qu'il se proposait effectivement de construire les lunules, et, quoique Eudème n'ait pas conservé ces constructions, sauf pour la première, quoiqu'il ait seulement ramené les autres à des problèmes déterminés, on ne doit pas douter qu'Hippocrate n'ait résolu ces problèmes; le premier est en fait assez simple, le second suppose la solution géométrique de l'équation du second degré; mais nous avons admis que cette solution était déjà connue des Pythagoriciens.

Dans un quatrième théorème, Hippocrate a construit une lunule dont la somme avec un cercle se trouve quarrable.

Le cercle ayant R pour rayon, l'arc extérieur de la lunule est de 120° et son rayon $R\sqrt{6}$, l'arc intérieur est de 60° ; la somme quarrable est égale au triangle maximum inscrit dans l'arc extérieur, plus l'hexagone inscrit dans le cercle (1).

(1) Il est facile de voir que le triangle en question se trouve lui-même équivalent à l'hexagone.

La solution d'Hippocrate peut être facilement généralisée.

Soient $\frac{2\pi r}{m}$ l'arc extérieur, $\frac{2\pi R}{n}$ l'arc intérieur qu'on supposera être tous deux des fractions de la circonférence susceptibles d'être obtenues avec la règle et le compas; soit ρ le rayon du cercle à ajouter; on le construira d'après la relation

$$\rho^2 = \frac{R^2}{n} - \frac{r^2}{m}.$$

Si l'on a

$$\frac{r^2}{m} - \frac{R^2}{n} > 0 \quad \text{et} \quad = \rho'^2,$$

c'est l'excès de la lunule sur le cercle du rayon ρ' qui sera quarrable.

9. En présence du témoignage d'Eudème, celui d'Alexandre d'Aphrodisias perd toute valeur; on doit cependant se demander quelle peut en être l'origine, et, d'autre part, à quelle fausse quadrature Aristote a pu faire allusion.

MM. Allman et Heiberg maintiennent encore que cette fausse quadrature peut être imputée à Hippocrate.

Le premier admet que ce dernier, élève des Pythagoriciens, aura publié, sans les bien comprendre, des travaux dus à ses maîtres, et qu'il aura pu, dès lors, y ajouter le paralogisme rapporté par Alexandre d'Aphrodisias.

Le second distingue deux fausses quadratures visées par Aristote : l'une, par les lunules, serait celle rapportée par Alexandre; l'autre, celle d'Hippocrate, ou par les segments, dériverait du dernier théorème développé par Eudème, et auquel Aristote, ainsi qu'on l'a vu, fait allusion ailleurs (*Analyt. prior.*, II, 25); l'erreur aurait encore consisté à prendre comme quarrable la lunule qui figure dans ce dernier théorème, quoiqu'elle diffère, essentiellement et à première vue, de chacune des trois lunules d'Hippocrate.

Cette conjecture d'Heiberg me paraît assez plausible, sauf pour ce qui concerne l'attribution du paralogisme à Hippocrate; car la mention de son nom par Aristote ne me paraît nullement, ainsi que je l'ai fait voir, constituer une preuve irrécusable. Je ne crois pas non plus qu'Hippocrate ait eu des Pythagoriciens pour maîtres, ou je ne vois pas de raison sérieuse pour supposer que le disciple n'ait pas égalé ses professeurs anonymes.

L'exemple de Grégoire de Saint-Vincent prouve certainement qu'un géomètre de valeur peut se laisser entraîner à des paralogismes dans la recherche d'un problème tel que celui de la quadrature du cercle; mais encore on ne peut admettre un paralogisme grossier et, d'autre part, conduisant à des conséquences dont l'inexactitude crève les yeux.

Si un véritable géomètre a cru pouvoir tirer de la théorie des lunules une quadrature du cercle, il a dû effectuer la construction; or, si l'un des paralogismes que nous avons vus conduisait à une valeur de π comprise entre 3 et $3\frac{1}{3}$ (limites pratiquement reconnues avant Archimède, d'après Aristarque de Samos), nous pourrions peut-être croire qu'Hippocrate, après avoir commis ce paralogisme, ne l'aurait pas reconnu. Mais que dire, quand les prétendues

quadratures nous amènent pour π à des valeurs voisines de 4 ou dépassant ce nombre?

Aucun géomètre n'a jamais pu s'y laisser prendre; il n'y a jamais eu là que des sophismes d'école, analogues à tant d'autres plaisanteries rapportées par Aristote, et dont la tradition s'est perpétuée jusqu'à nous, même en Géométrie. Il est possible d'ailleurs qu'Euclide ait conservé un de ces sophismes dans ses $\Psi\epsilon\upsilon\delta\acute{\alpha}\rho\iota\alpha$, qu'Alexandre d'Aphrodisias connaissait encore, et dont il aura pu le tirer, en croyant y retrouver celui que le texte d'Aristote attribuait à Hippocrate.

Mais ce dernier doit être hautement reconnu comme bien au-dessus de cette accusation, et, loin de voir dans son dernier théorème une tentative d'arriver à la quadrature du cercle par celle des lunules, il faut y constater la conscience très nette de ce fait que la quadrature générale des lunules dépend de celle du cercle et, les cas singuliers mis à part, ne peut être obtenue directement.

