

6994 / 6995

2007

CIENCIA Y CULTURA EN LA EDAD MEDIA

ACTAS VIII y X

Canarias, noviembre de 2007 ISBN: 84-8309-048-1

6994 Vitrac, B.

HERÓN DE ALEJANDRIA: MATEMÁTICAS Y MECÁNICA

p 11-26

6995 García Cruz, J.A.

LAS MATEMÁTICAS EN LUCA PACIOLI P 431-446

LAS MATEMÁTICAS EN LUCA PACIOLI

Juan Antonio García Cruz
Universidad de La Laguna

La imagen más conocida de Luca Pacioli¹ aparece en un cuadro fechado en 1495. La obra se encuentra en el Museo Nacional de Capodimonte (Nápoles) y ha sido atribuida, no sin controversia, a Jacopo de Barbari.



¹ La otra corresponde, supuestamente, al segundo personaje por la derecha en el cuadro *Virgen con el Niño*, seis santos, cuatro ángeles y el duque Federico II de Montefeltro. Piero della Francesca. Retablo de Brera. Milán.



Luca Pacioli, en el centro de la escena, ejerce el magisterio utilizando un libro de geometría (posiblemente los *Elementos*, ya que el nombre de Euclides está escrito en el lateral de la pizarra) dirigiéndose a unos alumnos que se sitúan en el punto de vista del observador que contempla la escena.

Pacioli mira directamente hacia un sólido transparente y semilleno de agua, un rombicuboctaedro que cuelga delante de sus ojos y en primer plano. Este sólido es uno de los trece sólidos arquimedianos, cuyas caras son polígonos regulares, que fueron descritos por Arquímedes en un trabajo que se ha perdido. Fueron redescubiertos de nuevo y pintados por varios artistas en el Renacimiento, siendo Kepler el que los redefinió, completando la lista de forma sistemática en su obra *Harmonice Mundi*.

A su izquierda un enigmático personaje, con gesto serio, mira directamente al observador como si le conminara a prestar atención a la explicación de Pacioli. Se ha especulado mucho sobre la identidad del personaje, desde un autorretrato del propio pintor a un retrato de Dürero. La actitud vigilante, detrás del fraile, hace pensar en un protector, en un mecenas. Posiblemente se trate de Guidobaldo de Montefeltro, protector de Luca Pacioli.

Por último, a la derecha, tenemos otro modelo de un sólido conocido desde la antigüedad clásica y que representa a la quinta esencia, el quinto de los sólidos regulares platónicos: el dodecaedro.

Se ha considerado a esta obra como el epítome renacentista que mejor representa la relación íntima entre arte y matemáticas que se da en ese período de la historia. La perspectiva en que se dibujan los sólidos, la iluminación y toda la escena es una innovación. Sin embargo, aquí he querido resaltar un aspecto que no he visto citado en ninguno de los cortos relatos que he podido leer sobre la misma. Tal es el que se refiere a un acto docente, la exposición de un conocimiento geométrico, un acto de magisterio al fin, pues si algo define claramente a Luca Pacioli es que fue durante toda su vida un maestro, un profesor de matemáticas, protegido por mecenas, seguidor de Euclides y de Platón, siendo tal condición la que ha quedado reflejada de forma muy clara en el cuadro pintado por Jacopo de Barbari.

BREVES NOTAS BIOGRÁFICAS SOBRE LUCA PACIOLI

Luca Pacioli (c. 1445- 1517) nació en la pequeña localidad Borgo San Sepolcro, que perteneció a finales del siglo XV a la república de Florencia y que está situada en los confines de la Toscana y la Umbría italiana, a 60 Km al norte de la ciudad de Perugia. En esa misma ciudad nació Piero della Francesca (c.1412-1492) que con toda probabilidad fue quién inició a Luca Pacioli en el estudio de



las matemáticas y cuya obra matemática, nunca publicada, influyó notablemente sobre la obra de Luca.

A los veinte años abandona su ciudad natal y se traslada a Venecia donde entra al servicio del rico comerciante Antonio Rompiansi. Continúa sus estudios de matemáticas bajo la tutela de Domenico Bragadino. Durante este tiempo adquiere una doble experiencia. Primero como enseñante de matemáticas, actuando como tutor de los dos hijos de Antonio Rompiansi a quienes dedica un libro sobre álgebra y, segundo en los negocios al estar al servicio del mismo personaje. Esto puede explicar el interés de Pacioli por el desarrollo de un nuevo método más preciso de teneduría de libros, la contabilidad de doble entrada, tal y como se presenta en la *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionita*.

Durante los años 1470-1471 se encuentra en Roma alojado en casa de Alberti. Coincide con el maestro Piero della Francesca y frecuenta a personajes ilustres como Giuliano Della Rovere, futuro Papa Julio II, y al Cardenal Riario interesado por los estudios sobre Vitruvio. La Editio Princeps de *Los diez libros de arquitectura* aparece en Roma en 1490. En 1472 entra en la orden de los Franciscanos Menores.

En 1475 aparece como lector de matemáticas en Perugia. De esta época podría ser el manuscrito encontrado en el Vaticano (número 3129).

En 1481 se encuentra en Zara (Dalmacia) donde compone un tratado de álgebra. Después de una corta estancia en Florencia vuelve a Perugia donde obtiene el alto título académico de Magister con derecho a obtener una cátedra en la Universidad, estancia que se prolonga hasta 1487. En 1485 Alberti publica *De Architectura*.

En 1490 se encuentra en Nápoles enseñando teología y matemáticas, vuelve a Borgo de San Sepolcro para preparar la publicación de su obra *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionita*. El 12 de octubre de 1492 muere Piero della Francesca en Borgo San Sepolcro. En 1493 imparte lecciones de aritmética y geometría en Padua. En 1494 se traslada a Venecia para imprimir la *Summa*.

Después de la publicación de la *Summa*, Pacioli regresa a Urbino donde será acogido con gran gentileza por innumerables cortesanos. De esta época es el cuadro que hemos descrito al principio de este trabajo.

En 1496 se traslada a Milán, invitado por el duque Ludovico Sforza, para enseñar matemáticas. Entra en contacto con uno de los centros más importantes de la ciencia y el arte del Renacimiento y conoce a Leonardo da Vinci. Fruto de esta relación son los sesenta dibujos de sólidos regulares, en perspectiva, que acompañan a la segunda obra en importancia realizada por Pacioli, *De divina proportione* que finalizará el 14 de diciembre de 1498.



De 1500 a 1505 desempeña diversos puestos como docente en Pisa (1500), Perugia (1500), Bolonia (1501-1502), y Florencia (1502-1505). En Florencia goza de la protección y amistad de Pietro Solderini, Gonfalonero de Justicia de la República, de quién solicitará en 1508 la concesión durante quince años del privilegio de la publicación de su traducción de los *Elementos* de Euclides.

En 1506 marcha a Venecia para preparar la publicación de los *Elementos* y permanece en dicha ciudad, donde en 1509 aparecerá su *De divina proportione*.

Finalizada la edición se traslada a Perugia donde imparte de nuevo docencia. A requerimiento del Papa León X, se traslada a Roma en 1514, para hacerse cargo de la cátedra de matemáticas en la Sapienza. Muere en Borgo de San Sepolcro en 1517.

Las notas anteriores y la imagen que transmite el cuadro que pintó Jacopo de Barbari, nos señalan que Luca Pacioli fue, ante todo y durante toda su vida, un profesor de matemáticas, que vivió bajo la sombra y protección de las más importantes autoridades, tanto civiles como eclesiásticas, de la época. Frecuento los ambientes más ilustrados y estuvo en contacto con el conocimiento más avanzado, sea la reedición de las obras clásicas o la publicación de nuevos hallazgos. Conoció a Alberti y fue discípulo de della Francesca, luego la nueva ciencia de la perspectiva, la geometría como fundamento de la representación plana del mundo real, le fue muy familiar y así reivindica su lugar entre las ciencias en la introducción a *De divina proportione*. Fue también un escritor y un compilador al estilo de su admirado *Euclides*. De todas las obras que compuso a lo largo de su vida, Pacioli sólo imprimió dos, *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionita* (Venecia, 1494 y 1523) y *De divina proportione* (Venecia, 1509).

SUMMA DE ARITHMETICA GEOMETRIA PROPORTIONI ET PROPORTIONITA (VENECIA, 1494, 1523)

El incremento del comercio y de la banca que se da a partir del siglo XIII, especialmente en los estados italianos y en concreto en las repúblicas de Florencia y Venecia, impulsó la elaboración de obras dedicadas a exponer los principios básicos de la aritmética práctica.

La primera de tales obras, impresa, es la Aritmética de Treviso, que data de 1478 y que comienza con las palabras *Incommincia vna practica molto bona et vtile a ciaschaduno chi vuole larte dela merchadantia chiamata vulgarmente larte de labbacho*. Publicada en la ciudad de Treviso situada no muy lejos y al norte de Venecia. La obra es de interés como su introducción indica, para todos aquellos interesados en las actividades comerciales. Se exponen las cuatro operaciones aritméticas básicas, dedicándose especial atención y extensión a la multi-



plicación y división. Se concluye con una parte donde se aplica la *regola de tre cose* a la resolución de problemas mercantiles.

La aritmética de Treviso utiliza ampliamente y de forma única el sistema indo-arábigo de numeración. La introducción del sistema indo-arábigo de numeración se debe, principalmente, a Leonardo de Pisa (Fibonacci) y se lleva a cabo a principios del siglo XIII. El padre de Leonardo era un comerciante de Pisa con importantes negocios en la costa africana, conocida entonces como Berbería. Fue allí donde Leonardo entró en contacto con los escritos de al-Khwarizmi. En 1202 publica su *Liber Abaci*, donde explica extensamente el sistema indo-ará-

bigo de numeración, sistema posicional de base diez, y se considera a esta obra como la introductora de tal sistema en el Occidente Cristiano, de forma que durante este siglo es adoptado principalmente por los comerciantes italianos.

Quince años después de la publicación de la Aritmética de Treviso, Luca Pacioli publica una de sus dos obras matemáticas más importantes, *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionita*. Fue el primer libro impreso sobre aritmética y álgebra. Para estas partes se basó principalmente en los trabajos de Leonardo de Pisa. Su importancia en la historia de la matemática es debido a su amplia circulación y a la influencia que ejerció sobre las obras de Tartaglia y Cardano.

La *Summa* se imprime en Venecia, en los talleres de Paganus Paganinus en 1494, y esta dedicada a su protector Guidobaldo de Montefeltro duque de Urbino. Pacioli la escribió siete años antes, en 1487, durante su estancia en Perugia como se afirma en la propia *Summa*. Pacioli utiliza material propio, redactado para sus clases, así como otro proveniente de diversas fuentes, entre las que destacan Euclides, Ptolomeo, Boecio, Fibonacci, Jordanus de Nemoris entre otros, lo que demuestra que era un hombre versado en el conocimiento matemático de la época. Sin embargo no fue un escritor cuidadoso. Cardano en su *Arithmetica* (1539) dedica un capítulo a describir los errores cometidos por Pacioli en la *Summa*.

La *Summa*, considerada como el mayor compendio de matemáticas del siglo XV, consta de cinco partes. La primera dedicada a la aritmética, se inicia con la clasificación pitagórica de los números por la forma en que sus unidades se pueden disponer como figura geométrica (figurados). A continuación se exponen las reglas para las operaciones aritméticas fundamentales, adición (una), sustracción (tres), multiplicación (ocho) y división (cuatro). Sigue luego la extracción de



raíces cuadradas y cúbicas, cálculo de progresiones aritméticas y el estudio de las fracciones con el que se concluye esta primera parte dedicada a la aritmética.

La parte dedicada al álgebra, *regola della cosa* o *arte maggiore*, discute en detalle la resolución de ecuaciones simples y cuadráticas y problemas que conducen a tales ecuaciones. Para las ecuaciones de grado superior indica el método de solución para algunas bicuadráticas y afirma que la regla general de solución es imposible mediante procedimientos aritméticos de cálculo.

Todas sus ecuaciones son numéricas y por lo tanto no representa cantidades conocidas mediante letras, como sí hace Jordanus de Nemoris. Aunque casi todo el material está tomado del *Liber Abaci* de Leonardo, su notación es superior. Esta parte se puede considerar como el comienzo del *álgebra sincopada*, es decir el uso de abreviaturas para ciertas y más comunes cantidades y operaciones así como las reglas sintácticas utilizadas. Sin embargo, Pacioli no es muy consistente en su exposición y a veces, como es el caso para la solución a la ecuación del tipo $x^2+x=a$, utiliza la forma retórica.

A continuación exponemos algunas de las notaciones y abreviaturas más utilizadas por Pacioli y que suponen un avance sobre lo usual en la época y no superado hasta bien entrado el siglo siguiente con el desarrollo del álgebra simbólica por François Viète.

La incógnita *cosa* (Italiano) o *res* (Latín); abreviado *co.*.

El cuadrado *census* o *zensus*; abreviado *ce.*

El cubo *cuba de*; abreviado *cu.*.

La cuarta potencia *censo di censo*; abreviado *ce. di ce., ce. ce.*

Las palabras más y menos se indican por $\bar{p}$, letra inicial de *piú* y por $\bar{m}$, primera letra de *minus*, respectivamente.

La igualdad por *ae*, de *aequalis*.

También utiliza el signo — para representar la igualdad, como por ejemplo en:

$$2.co. \bar{p}.6. — 216 \quad (2x+6=216)$$

El símbolo *R* tiene diferentes usos.

El más común es como abreviatura de la palabra *radix* o *radici*.

Por ejemplo:

R 200 para $\sqrt{200}$

R .cuba. de.64 para $\sqrt[3]{64}$

Aparece también en combinación con otros símbolos, por ejemplo *v*, en

R v. R.20 1/4. m. 1/2. para expresar $\sqrt{\sqrt{20\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}}$



Al combinar símbolos para expresar raíces de orden superior Pacioli utiliza el principio aditivo de Diofanto, mientras que para expresar las potencias de orden superior utiliza el principio multiplicativo hindú.

De esta forma $R.R.R.cuba$. $(2+2+3)$ significa raíz séptima;
 $ce.ce.ce$. $(2 \times 2 \times 2)$ significa potencia octava.

Para las potencias quinta, séptima y undécima no es de aplicación, por corresponder a números primos, la regla de multiplicación. En estos casos y similares, utiliza la notación ampliamente utilizada en aquel tiempo y mucho después: $p^o.r^o$ (*primo relato*) para la potencia quinta; $2^o.r^o$ (*secundo relato*) para la potencia séptima.

También utiliza el signo R . para indicar potencias numéricas.

Ejemplo: *recca. 3. a. R. fa. 9.*

cuyo significado es

eleva 3 a la segunda potencia y obtienes 9.

También

quando fia recata prima 1. co. a R. fa. 1. ce.

cuyo significado es

cuando se eleva x a la segunda potencia se tiene x^2 .

La siguiente expresión combina el signo R . con el principio aditivo aplicado a las potencias:

reca. 3. a. R. R.cuba fa. 729,

que significa

elevando 3 a la potencia quinta se obtiene 729.

Una parte importante de la Summa la constituye la *De Computis et Scripturis*, donde Pacioli trata de la teneduría de libros y donde se expone el método de contabilidad por partida doble, conocido como método italiano o veneciano. Esta parte de la Summa ha tenido vida propia y ha superado con creces a cualquiera de las obras de Pacioli en cuanto a la influencia ejercida, influencia que llega hasta el siglo XX. Se conocen 34 traducciones de *De Computis et Scripturis*, en 14 lenguas. El Instituto Pacioli de Holanda dispone de 32 de tales traducciones y está desarrollando un proyecto sobre la obra de Pacioli con respecto a la teneduría de libros.

Los consejos que da Pacioli, al hombre de negocios, comienzan con la realización de un inventario de todas sus posesiones, tanto en su domicilio como en



su negocio. El inventario debería incluir la situación crediticia, es decir, cuánto dinero se prestó y a quién, cuánto se debía y a quién.

Una vez realizado este primer paso, podía empezar la contabilidad normal que debería anotarse en tres libros: el libro de *apuntes*, el *diario* y el libro *mayor*. Cada uno de los cuales podía constar de varios volúmenes y cada página debía estar numerada para impedir que alguien las arrancase con el fin de ocultar cosas con fines fraudulentos.

En el libro de *apuntes* se anotaban todas las transacciones, en la divisa que se utilizase y con todo detalle. Era un libro de datos en bruto que se utilizaba para la realización de los otros dos que eran más pulcros.

El *diario* era un registro fechado de las transacciones, entradas y saldos, expresadas en una sola divisa, la elegida por la empresa que ponía orden en el caos de los registros del libro de *apuntes*.

El libro *mayor* se confeccionaba a partir de los datos contenidos en el *diario*. En él se llevaba propiamente la contabilidad por partida doble. Cada apunte del *diario* se anotaba dos veces, el de *activo* a un lado y el de *pasivo* al otro.

Pacioli aconsejaba que para saldar las cuentas se tomara un papel y, en el lado izquierdo, se hiciera una lista de los totales del debe y en el derecho de los del haber. Luego se sumaban las columnas por separado y se comparaban. Si el total del apunte en el debe era igual al total del apunte en el haber entonces lo más probable era que las cuentas fuesen exactas. Si por el contrario eran desiguales, había un error de cálculo, omisión o falsedad en alguna parte y había que buscarlo diligentemente.

A continuación sigue el manual sobre cálculo de monedas, medidas y pesos que reproduce extensamente el *Libro tariffé* y el *Libro che tratta di mercanzie e usance di paesi*, este último anónimo y publicado en Florencia en 1481 y que junto con el primero constituían los dos libros, sobre el tema, de mayor difusión entre los mercaderes y comerciantes italianos. El tipo de problemas propuestos en esta parte tiene el interés añadido de servir para establecer el tipo de cambio entre las diferentes monedas y la conversión entre las diferentes medidas utilizadas en el comercio. Incluso para valorar los costos de los diferentes empleos.

De la *Summa* se hizo una segunda edición en 1523 sin prácticamente cambios respecto a la primera.

La *Summa* constituyó una notable recopilación de saberes matemáticos desde la aritmética comercial al álgebra y la geometría elemental, siendo su contenido el conocido como matemática del ábaco y que era muy utilizado para instruir a los futuros comerciantes y artesanos.

Su influencia sobre el trabajo de matemáticos posteriores fue reconocida personalmente tanto por Cardano, como por Tartaglia y Bombelli quien afirmó que Luca Pacioli era el primero desde Leonardo Fibonacci que arrojaba nueva luz

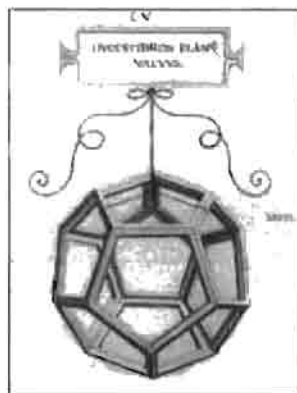


sobre la naciente ciencia del álgebra. Sin embargo su influencia más duradera en el tiempo fue la correspondiente a la teneduría de libros. Aunque parece ser que no fue del todo original, la contabilidad por partida doble, como afirma A. Crosby, no cambió el mundo, pero desempeñó un papel importante al permitir que los europeos del Renacimiento y sus sucesores en el comercio, la industria y el gobierno pusieran en marcha y mantuviesen el control de sus corporaciones y burocracias.

La teneduría de libros, al obligar a millones de personas a anotar apuntes en pulcros libros y luego racionalizar el mundo para que se ajustara a sus libros, hizo mucho por la búsqueda y desarrollo de la precisión indispensable para nuestra ciencia, tecnología y quehacer económico, que era tan rara y aún menos cuantitativa, durante la Edad Media.

DE DIVINA PROPORTIONE (VENECIA, 1509)

De divina proportione se imprime en Venecia en 1509 en los talleres de Paganus Paganinus, el mismo impresor de la *Summa* y de la traducción de los *Elementos* de Euclides hecha por Pacioli.



El manuscrito, como reza al final del mismo, lo terminó Luca Pacioli el 14 de diciembre, en Milán en nuestro almo convento, ..., en el año séptimo del pontificado de Alejandro VI (1498).

Fue realizado durante la estancia de Luca Pacioli en la corte de Ludovico Sforza, duque de Milán, a quién por otra parte dedica la obra que reconoce ha sido escrita siguiendo la recomendación del propio duque, cuando el 9 de febrero de 1498, durante un duelo científico con la participación de toda clase de autoridades religiosas y seglares que se celebró en la fortaleza de Milán, señaló como *digno de grandísima consideración de Dios y del mundo aquel que, estando dotado de*



alguna virtud, la comunica a los demás de buen grado. Luca ofrece además la obra para decoro y ornato de vuestra distinguidísima biblioteca... Este tratado, con todas las formas materiales de los cuerpos que en él se contienen, causará a quien visite dicha biblioteca una admiración no menor que todos los demás volúmenes...por haber permanecido hasta ahora ocultas dichas formas a los hombres. Esto último es una referencia clara a la colección de dibujos de Leonardo sobre sólidos regulares en perspectiva que realizó como acompañamiento gráfico para *De divina proportione* y que constituye la primera imagen jamás realizada en perspectiva de los sólidos regulares y sus derivados.

La obra fue escrita en italiano y Pacioli mandó realizar tres copias manuscritas, dos de las cuales han llegado hasta nuestros días. La versión española ha sido realizada a partir del manuscrito conservado en la Biblioteca Ambrosiana de Milán.

De divina proportione consta de LXXI capítulos y se puede dividir en tres partes bien diferenciadas.

La primera, hasta el capítulo XXIII, la dedica Pacioli a tres fines concretos. En primer lugar, en el capítulo III, aclara lo que debe entenderse por los vocablos *matemático* y *disciplinas matemáticas*, ampliando la división clásica del cuadrivium (aritmética, geometría, astronomía y música) para incluir la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, *así como cualquier otra dependiente de éstas*. De las tres sólo justifica la inclusión de la nueva ciencia de la perspectiva. No cita ninguna de las nuevas autoridades, ya sea Alberti o su maestro della Francesca, sino que argumenta de diversas formas, haciendo hincapié en que la perspectiva contenta a la vista, primera puerta del intelecto, como la música contenta al oído; la música recrea el ánimo mediante la armonía, la perspectiva nos deleita gracias a la *distan- cia debida* y a la *variedad de colores*; la música considera sus proporciones armónicas, la perspectiva hace lo propio con las aritméticas y geométricas.

Pacioli mantiene una confrontación entre la música y la perspectiva que va desde consideraciones sobre el puro deleite estético y sensual a la consideración de las proporciones que una u otra potencian, llegando a sugerir la exclusión de la música, con lo que sólo habría tres disciplinas matemáticas, o la inclusión de la perspectiva con lo que se llegaría a cinco, pues *nadie ha conseguido aclararme por qué deban ser cuatro las disciplinas y no tres o cinco*.

El capítulo V está dedicado a justificar el título que conviene al presente tratado o compendio. Mientras que los capítulos desde el VII al XXII, tomados del libro XIII de los *Elementos* y del llamado libro XIV, describen los trece efectos² que produce en una línea la división de la misma en razón media y extrema, es decir según la divina proporción.

Luca justifica el título dado a la obra y a la proporción que trata, estableciendo numerosas correspondencias de semejanza entre la proporción y Dios mismo.

²...hemos elegido sólo estos trece, en honor del grupo de doce y de su jefe, nuestro Santísimo Redentor Cristo Jesús.



La primera correspondencia es que *ella es una sola y no más, y no es posible asignarle otras especies ni diferencias*. Sólo hay una forma de dividir el segmento en razón media y extrema.

La segunda correspondencia es la de la Santa Trinidad, *así como in divinis hay una misma sustancia entre tres personas, Padre, Hijo y Espíritu Santo, de igual modo una misma proporción se encontrará siempre entre tres términos, y nunca de más o de menos...*

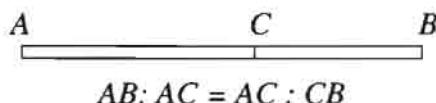
La tercera correspondencia es que, *así como Dios no se puede propiamente definir ni puede darse a entender a nosotros mediante palabras, nuestra proporción no puede nunca determinarse con un número inteligible ni expresarse mediante cantidad racional alguna, ... y es llamada irracional por los matemáticos*.

La quinta correspondencia señala cómo afecta la proporción a la construcción del pentágono y de ahí al dodecaedro cuerpo sólido que se atribuye al cielo mismo, quintaesencia, según el *Timeo* de Platón.

Pacioli utiliza los *Elementos* de Euclides para aclarar cómo debe entenderse la proporción y cómo es llamada por los más sabios.

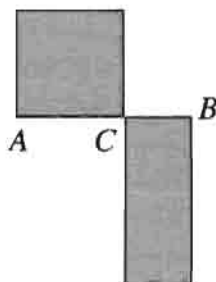
Primero para las *líneas* y luego para las *cantidades*. Comienza citando la definición dada por Euclides en el libro sexto:

Definición VI. 3: Una línea recta se dice que ha sido dividida en razón media y extrema cuando la línea completa es al segmento mayor como este es al menor.



Luego utiliza la proposición once del libro segundo para aclarar cómo dividir una línea según esta proporción:

Proposición II 11: Dividir una línea recta dada de forma que el rectángulo formado por el total y uno de los segmentos sea igual al cuadrado construido sobre el otro.





Esta proposición lleva implícita la solución de una ecuación de la forma $x^2 + lx = l^2$, donde l es la longitud de la línea recta dada ($l(l-x) = x^2$). Además, la solución de este problema es necesaria para inscribir un pentágono en una circunferencia tal y como queda patente en las proposiciones 10 y 11 del libro IV de los *Elementos*. Por último cita a Campano quién la señala entre los números en la Proposición IX, 16. Esta cita es importante pues se establece de forma indirecta la irracionalidad de la divina proporción, en ella se afirma que si a y b son números primos entre sí no existe x tal que $a:b=b:x$.

En el capítulo VIII pasa a explicar cómo se entiende la cantidad así dividida según la proporción que tiene el medio y dos extremos: *hacer de dicha cantidad dos partes desiguales tales que el producto de la menor por toda esa cantidad indivisa sea igual al cuadrado de la parte mayor como declara nuestro filósofo*³ en la tercera definición del sexto⁴.

Para aclarar los términos Pacioli pone un ejemplo. Sea 10 la cantidad. Luego se trata de hacer de 10 dos partes tales que una de ella multiplicada por 10 dé lo mismo que la otra por sí misma. Operando según la práctica especulativa denominada álgebra y almucabala y la regla dada en la *Summa* se llega a que la mayor de las partes es $\sqrt{125} - 5$ y la menor $15 - \sqrt{125}$. En este punto Pacioli vuelve a citar la autoridad de Euclides para afirmar que ambas cantidades son irracionales (Proposición X, 79) y que en el *arte*, es decir en álgebra, se denominan *residuos*. Concluye comprobando que $10:\sqrt{125} - 5 = \sqrt{125} - 5:15 - \sqrt{125}$ para cuyas operaciones y reglas correspondientes remite nuevamente a la *Summa*. Si traducimos, paso a paso, las operaciones aritméticas a trazos geométricos, veremos que la construcción dada por Pacioli para la solución de la ecuación de segundo grado esconde el procedimiento geométrico de división de una longitud dada en razón media y extrema.

Esta primera parte de *De divina proportione* concluye con la exposición de los trece efectos que producen en una línea la división de la misma en razón media y extrema. A cada efecto, descontando el primero, acompaña un calificativo, así tenemos esencial, singular, inefable, innominable, inestimable, más excelso de todos, supremo, excelentísimo, incomprensible y dignísimo. Cada efecto es la descripción de una proposición tomada del libro XIII de los *Elementos* y del llamado libro XIV.

Pacioli utiliza ampliamente los *Elementos* de Euclides como autoridad para definir la proporción relativa a las cantidades (magnitudes) y la irracionalidad de la misma y utiliza además el nuevo *arte de la cosa*, el álgebra, y los conocimientos

³ Euclides

⁴ Elementos, libro VI, definición 3.



sobre los números expuestos en su obra anterior, la *Summa*, para ejemplificar la división en razón media y extrema cuando se refiere a una longitud numérica concreta.

La segunda parte de *De divina proportione* comienza en el capítulo XXIV y abarca hasta el capítulo LIII.



Se ha considerado, no sin controversia, una reproducción de la obra de Piero della Francesca *libellus de quinque corporibus regularibus*.

Constituye un tratado sobre los cinco sólidos regulares de Platón (tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro) y su relación con la divina proporción.

El capítulo XXIV comienza enumerándolos y señalando la igualdad en número con los cinco cuerpos simples de la naturaleza: tierra, aire, agua, fuego y quinta esencia, o sea, la virtud celeste que a todos los demás sustenta en su ser. Pacioli argumenta sobre la suficiencia de tales cuerpos simples en la naturaleza como prueba de que Dios y la naturaleza no obran en vano.

Uno podría pensar que tal argumento va a ser utilizado para demostrar que sólo hay cinco sólidos regulares debido a la correspondencia que entre los cuerpos simples de la naturaleza y ellos estableció Platón en el *Timeo*. Sin embargo Pacioli demuestra en el siguiente capítulo, con argumentos geométricos, que no puede haber más de cinco cuerpos regulares.

La prueba utiliza las proposiciones 32 del libro I (más los corolarios añadidos por Proclo y que constituyen una extensión de la citada proposición a los polígonos) y la proposición 21 del libro XI. Esta última establece la relación entre el ángulo sólido y los ángulos planos que lo contienen, siendo la suma de estos ángulos necesariamente menor que cuatro ángulos rectos, si se quiere formar el ángulo sólido.



Del capítulo XXVI al XXXI expone cómo se construye cada sólido inscrito en una esfera y qué proporción guardan las aristas de los sólidos y el diámetro de la esfera circunscrita. La referencia es el libro XIII de los *Elementos*.

En el capítulo XXXIV comienza el estudio de las inclusiones de los cinco cuerpos regulares unos en otros, cuántas son en total y por qué. La primera parte del llamado *libro XV* de los *Elementos*, que es la fuente que cita Pacioli, trata precisamente este mismo asunto y también de forma no sistemática. Pacioli expone una tras otra las doce inclusiones y reserva el capítulo XLVI para concluir que no pueden ser más que esas doce que ha descrito, siendo a priori veinte las inclusiones posibles (5×4). Siendo el dodecaedro el único que contiene a todos los demás por inclusión, para concluir que *el dodecaedro, por estar dotado de una singular prerrogativa con respecto a los demás, a ninguno ha prohibido o vedado alojamiento, siendo receptáculo de todos*. Según Pacioli esta es la razón por la que Platón atribuyó tal sólido al Universo. La prueba geométrica es un argumento importante para ubicar la posición del sólido en el universo de Platón.

En el mismo capítulo, un párrafo antes, encontramos: *Y, mientras que el icosaedro da cabida a los tres cuerpos, únicamente la niega al octaedro, lo que sucede por respeto al glorioso signo que a todos los demonios hace temblar, el de la Santa Cruz*. A continuación argumenta geométricamente sobre la imposibilidad de la construcción, de este modo, la geometría en manos de Pacioli se convierte en una herramienta para justificar creencias tanto del cristianismo como del platonismo.

Los capítulos que van del XLVIII al LIII presentan los sólidos regulares y sus derivados. Distinguiendo en estos últimos los abscisos, obtenidos a partir de un sólido por extracción de otros cuerpos geométricos, o los elevados, obtenidos por adición. Esta parte está bellamente ilustrada en las láminas que muestran las construcciones en perspectiva y que acompañan a la obra. Fueron realizadas por Leonardo da Vinci exclusivamente para acompañar a *De divina proportione*.

Por último, la obra se cierra con un pequeño tratado de arquitectura, que trata principalmente de los cuerpos oblongos y de las bases y mediciones de columnas de diferentes formas geométricas.

Frente a la imagen de las matemáticas que transmite el código *De Sphaera*, una matemática útil para las transacciones comerciales, una matemática que se denominaba con el nombre genérico de enseñanzas del ábaco, Luca Pacioli quiso pasar a la historia como un geómetra. Esta es la imagen con la que se presenta en el cuadro de Jacopo de Barbari y está en correspondencia con su obra *De divina proportione*. La *Summa* fue un compendio de matemática útil, matemática del ábaco y algo más, quizás ayudó como pocos libros a la cuantificación de la sociedad occidental. Sin embargo, la unicidad de solución, la trinidad en la proporción y la inconmensurabilidad de la proporción divina son un parangón de la divinidad



cristiana y, al mismo tiempo, un matrimonio entre el cristianismo y el platonismo tan presente en las obras de su maestro Piero della Francesca. La Flagelación de Cristo, obra cumbre del maestro, combina el neoplatonismo renacentista, la mística cristiana y la armonía de forma que tan bien ha proporcionado la nueva ciencia de la perspectiva aplicada a la pintura. En esta pintura así como en *La Anunciación* y en *Virgen con el niño, seis santos, cuatro ángeles y el duque Federico II de Montefeltro*, el elemento distribuidor del espacio es precisamente la división de la horizontal o la vertical en razón media y extrema. La presencia de la proporción divina en la obra pictórica de Piero della Francesca es un punto más en común con la obra escrita de su discípulo.

De divina proportione fue la obra cumbre de un fraile que quiso utilizar la parte para él más sublime de la matemática, la geometría, como vehículo para presentar una encarnación de la divinidad cristiana que se manifiesta a través de un concepto geométrico cuyo origen está en las escuelas Pitagórica y Platónica. Tuvo que llegar el siglo XX para que un arquitecto, Le Corbusier, con su *Modulor* encontrara una utilidad práctica, al tiempo que estética, a la divina proporción.

Sirva como epílogo de este trabajo un fragmento de la carta que el arquitecto André Sive dirige a Le Corbusier a propósito del modulor:

Es, ante todo, un instrumento... no nos hará hacer arte, pero eliminará automáticamente, el más o menos de las proporciones, las notas desafinadas en la composición arquitectónica, en el detalle y en el conjunto de las relaciones. Desearía que el modulor fuese impuesto en las construcciones escolares, a fin de introducir en el espíritu de los niños el sentido de la armonía plástica; condición esencial de un futuro en que edificar volviera a ser la expresión misma de la civilización.



BIBLIOGRAFÍA

- Bergadá, D. (1979). La matemática renacentista. *Historia de la Ciencia 2. Edad Moderna*. Editorial Planeta. Barcelona.
- Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza Universidad Textos. Madrid.
- Cajori, F. (1993). *A History of Mathematical Notations*. Dover Publications, Inc. New York.
- Crombie, A. C. (1959). *Historia de la Ciencia: de San Agustín a Galileo /I. Siglos V-XII*. Alianza Universidad. Madrid.
- Crosby, A. W. (1998). *La medida de la realidad. La cuantificación de la sociedad occidental, 1250-1600*. Crítica. Grijalbo Mondadori. Barcelona.
- De Vecchi, P. (1988). Estudio analítico de la obra pictórica de Piero della Francesca. En *Piero della Francesca*. Clásicos del arte. Editorial Planeta. Barcelona.
- De Sphaera*. Siglo XIV. Edición facsímil. Original en la Biblioteca Estense de la Universidad de Modena. Moleiro Editor. Barcelona.
- González, A. M. (1991). *Introducción*, en la traducción española de la obra de Luca Pacioli: La divina proporción. Ediciones Akal: Madrid.
- Hart, G. (1996). *Virtual Polyhedra*. <http://www.georgehart.com>.
- Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Translated from the text of Heiberg. Three volumes. Dover Publications Inc. New York.
- Heath, T. L. (1981). *A History of Greek Mathematics. Volume 1. From Thales to Euclid*. Dover Publications Inc. New York.
- Le Corbusier. (1980). *El Modulor y el Modulor 2*. Editorial Poseidón. Barcelona.
- Pacioli, L. (1991). *La divina proporción*. Ediciones Akal: Madrid. (Traducción de Juan Calatrava).
- O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. *Luca Pacioli*. <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history>.
- Rouse Ball, W. W. (1960). *A Short Account of the History of Mathematics*. Dover Publications, Inc. New York.
- Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics*. 2 vol. Dover Publications Inc. New York.
- Smith, D. E. (1959). *A source book in Mathematics*. Dover Publications Inc. New York.