

Les formules de la "puissance" (*δύναμις*, *δύνασθαι*) dans les mathématiques grecques et dans les dialogues de Platon*

Bernard Vitrac, CNRS UMR 8567, Centre Louis Gernet

7239
VITRAC, B.
2008

Introduction

La 12^{ème} section du "dictionnaire" philosophique que constitue, pour nous, le Livre Δ de la *Métaphysique* d'Aristote est consacrée à la *δύναμις*, notion cardinale dans la doctrine du Stagirite en tant que « principe du mouvement et du changement qui est dans autre chose ou dans la même en tant qu'autre ... »¹. Incidemment, en 1019 b33-34, Aristote remarque « κατὰ μεταφορὰν δὲ ἢ ἐν γεωμετρίᾳ λέγεται δύναμις », soit quelque chose comme « par transposition (ou « par extension de sens »²), on parle de puissance³ en géométrie »⁴. A quoi le Stagirite fait-il allusion à propos de cet usage métaphorique ou homonymique⁵ de la "puissance" par les géomètres ? Le lecteur français qui a recours à la fort utile traduction de J. Tricot consultera sans doute la note explicative infrapaginale insérée à cet endroit⁶ :

« (i) Par exemple, les carrés et les cubes.

(ii) Cf. Alex., 394, 34-36 : τὰ γὰρ τετράγωνα δυνάμεις καλοῦσιν· ὁ γὰρ δύναται ἡ πλευρά, τοῦτο δύναμις, ἐκάστη δὲ δύναται τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, et

(iii) Ascl., 325, 22-25, qui cite Euclide (X, 73⁷) pour montrer que la ligne droite engendrant le rectangle est

* Ce travail a été présenté au cours de la séance du 25 Mai 2002 du Séminaire « Puissance, Mouvement, Acte », organisé par M. Crubellier, A. Jaulin, D. Lefebvre et P.-M. Morel. Je remercie les participants de cette stimulante réunion. Je remercie également F. Acerbi, M. Caveing, A. Herreman, E. Mazet et N. Vinet qui ont accepté de lire une version préliminaire de ce texte et dont les remarques m'ont été très utiles. Pour les éditions et traductions de textes anciens fréquemment citées, j'utilise une série d'abréviations dont la liste se trouve dans la bibliographie en fin d'article, ainsi que les références complètes des ouvrages cités.

¹ « ἡ μὲν ἀρχὴ κινήσεως ἢ μεταβολῆς ἢ ἐν ἑτέρῳ ἢ ἢ ἑτερον », 1019 a15-16. Aristote, *Métaphysiques*, Livre Delta. Texte, traduction et commentaire, M.-P. Duminil et A. Jaulin. Toulouse, Presses Universitaires du Mirail, 1991, p. 67.

² C'est le choix de J. Tricot, dans Aristote, *La Métaphysique*. Paris, Vrin, 1974, pp. 287-288 et de W. D. Ross, dans *The Complete Works of Aristotle*. The revised Oxford Translation. Ed. by J. Barnes. 2 Vol. Princeton, Bollingen Series LXXI. 2, 1995⁶, vol. II, p. 1610 (« extension of meaning »).

³ Traduction usuelle en français du terme "δύναμις". L'un et l'autre partagent un sens faible de "capacité", "potentialité", et un sens fort s'appliquant à celui qui possède beaucoup de pouvoir (qui culmine avec la Toute-puissance divine) ou à ce qui a beaucoup d'effets. De cette acception intensive dérive, dès l'Antiquité, la notion de force ou d'efficacité d'une machine (d'où « αἱ πέντε δυνάμεις », les cinq puissances, pour désigner les cinq machines simples), et, dans la physique actuelle, la notion de quantité de travail. Voir à ce sujet la notice « puissance » du *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*, dit aussi Grand Robert, Paris, Société du nouveau Littré—Le Robert, 1978, tome cinquième, pp. 543b-545a. Le mot grec a bien d'autres significations, notamment celle de "valeur" que l'on trouve aussi dans certains textes mathématiques anciens, par exemple dans la classification néo-pythagoricienne des nombres pairs en fonction de leurs parties, classification fondée sur l'opposition du "nom" (ὄνομα) et de la "puissance" (δύναμις) = "valeur". V. par exemple *Nic. Ar.*, Livre I, Ch. VIII. 7, IX. 2, X. 5.

⁴ Traduction Duminil-Jaulin, *op. cit.*, p. 73.

⁵ En *Métaphysique*, Θ, I, 1046 a6-9, Aristote dit qu'on parle de *δυνάμεις* par homonymie (ὁμωνύμως) ou selon quelque similitude (ὁμοιότητι τι), que c'est le cas en géométrie et que de telles acceptions peuvent être écartées de la discussion qu'il mène à ce moment-là.

⁶ Note 1 page 288. J'y distingue trois assertions.

⁷ Le texte d'Asclépius dit : « καὶ ἡ δυνάμενι αὐτῷ ἀλόγως, καλεῖσθαι δὲ ἀποτομή », ce qui est censé être une citation de la Prop. X. 73. Mais dans le texte grec de ladite Prop. tel qu'il nous a été transmis, le terme "δυνάμενι" n'y figure pas !

Les formules de la "puissance" (*δύναμις, δύνασθαι*) dans les mathématiques grecques et dans les dialogues de Platon*

Bernard Vitrac, CNRS UMR 8567, Centre Louis Gernet

Introduction

La 12^{ème} section du "dictionnaire" philosophique que constitue, pour nous, le Livre Δ de la *Métaphysique* d'Aristote est consacrée à la *δύναμις*, notion cardinale dans la doctrine du Stagirite en tant que « principe du mouvement et du changement qui est dans autre chose ou dans la même en tant qu'autre ... »¹. Incidemment, en 1019 b33-34, Aristote remarque « κατὰ μεταφορὰν δὲ ἢ ἐν γεωμετρίᾳ λέγεται δύναμις », soit quelque chose comme « par transposition (ou « par extension de sens »²), on parle de puissance³ en géométrie »⁴. A quoi le Stagirite fait-il allusion à propos de cet usage métaphorique ou homonymique⁵ de la "puissance" par les géomètres ? Le lecteur français qui a recours à la fort utile traduction de J. Tricot consultera sans doute la note explicative infrapaginale insérée à cet endroit⁶ :

« (i) Par exemple, les carrés et les cubes.

(ii) Cf. Alex., 394, 34-36 : τὰ γὰρ τετράγωνα δυνάμεις καλοῦσιν· ὁ γὰρ δύναται ἢ πλευρά, τοῦτο δύναμις, ἐκάστη δὲ δύναται τὸ ἀπ' αὐτῆς τετράγωνον, et

(iii) Ascl., 325, 22-25, qui cite Euclide (X, 73⁷) pour montrer que la ligne droite engendrant le rectangle est

* Ce travail a été présenté au cours de la séance du 25 Mai 2002 du Séminaire « Puissance, Mouvement, Acte », organisé par M. Crubellier, A. Jaulin, D. Lefebvre et P.-M. Morel. Je remercie les participants de cette stimulante réunion. Je remercie également F. Acerbi, M. Caveing, A. Herreman, E. Mazet et N. Vinel qui ont accepté de lire une version préliminaire de ce texte et dont les remarques m'ont été très utiles. Pour les éditions et traductions de textes anciens fréquemment citées, j'utilise une série d'abréviations dont la liste se trouve dans la bibliographie en fin d'article, ainsi que les références complètes des ouvrages cités.

¹ « ἡ μὲν ἀρχὴ κινήσεως ἢ μεταβολῆς ἢ ἐν ἐτέρῳ ἢ ἢ ἑτερον », 1019 a15-16. Aristote, *Métaphysiques*, Livre Delta. Texte, traduction et commentaire, M.-P. Duminil et A. Jaulin. Toulouse, Presses Universitaires du Mirail, 1991, p. 67.

² C'est le choix de J. Tricot, dans Aristote, *La Métaphysique*. Paris, Vrin, 1974, pp. 287-288 et de W. D. Ross, dans *The Complete Works of Aristotle*. The revised Oxford Translation. Ed. by J. Barnes. 2 Vol. Princeton, Bollingen Series LXXI. 2, 1995⁶, vol. II, p. 1610 (« extension of meaning »).

³ Traduction usuelle en français du terme "δύναμις". L'un et l'autre partagent un sens faible de "capacité", "potentialité", et un sens fort s'appliquant à celui qui possède beaucoup de pouvoir (qui culmine avec la Toute-puissance divine) ou à ce qui a beaucoup d'effets. De cette acception intensive dérive, dès l'Antiquité, la notion de force ou d'efficacité d'une machine (d'où « αἱ πέντε δυνάμεις », les cinq puissances, pour désigner les cinq machines simples), et, dans la physique actuelle, la notion de quantité de travail. Voir à ce sujet la notice « puissance » du *Dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française*, dit aussi Grand Robert, Paris, Société du nouveau Littre—Le Robert, 1978, tome cinquième, pp. 543b-545a. Le mot grec a bien d'autres significations, notamment celle de "valeur" que l'on trouve aussi dans certains textes mathématiques anciens, par exemple dans la classification néo-pythagoricienne des nombres pairs en fonction de leurs parties, classification fondée sur l'opposition du "nom" (ὄνομα) et de la "puissance" (δύναμις) = "valeur". V. par exemple *Nic. Ar.*, Livre I, Ch. VIII. 7, IX. 2, X. 5.

⁴ Traduction Duminil-Jaulin, *op. cit.*, p. 73.

⁵ En *Métaphysique*, Θ, 1, 1046 a6-9, Aristote dit qu'on parle de *δυνάμεις* par homonymie (ὁμωνύμως) ou selon quelque similitude (ὁμοιότητι τι), que c'est le cas en géométrie et que de telles acceptions peuvent être écartées de la discussion qu'il mène à ce moment-là.

⁶ Note 1 page 288. J'y distingue trois assertions.

⁷ Le texte d'Asclépios dit : « καὶ ἡ δυνάμενι αὐτῷ ἀλόγως, καλείσθω δὲ ἀποτομή », ce qui est censé être une citation de la Prop. X. 73. Mais dans le texte grec de ladite Prop. tel qu'il nous a été transmis, le terme "δυνάμενι" n'y figure pas !

δύναμις au sens de ποιητικὸν αἴτιον ... »,

qui ne dissipera probablement pas sa perplexité.

(i) En quoi les carrés et les cubes constituent-ils des exemples de "puissance" ? N'y a-t-il pas là confusion avec la notion arithmétique ou algébrique de "puissance", en tant que « produit d'un nombre ou d'une autre quantité multipliée par elle-même un certain nombre de fois »⁸ ?

Ces "puissances" successives, avant qu'on ne dispose d'écritures symboliques (x^2 , x^3 , ..., x^n), recevaient différents noms, et il est vrai que les deuxième et troisième puissances étaient (et sont encore) appelées "carrée" et "cube". Mais Aristote parle de *géométrie*, pas d'arithmétique, ni, bien entendu, d'algèbre⁹.

(ii) D'ailleurs Alexandre dit seulement (juste avant la phrase citée par Tricot) que « les Anciens appelaient les carrés *δυνάμεις* », et il n'existe pas, à ma connaissance, de texte mathématique grec ancien qui applique le terme "δύναμις" au cube. Cela dit, l'explication que donne le Commentateur, littéralement quelque chose comme :

« car ce que peut [produire] un côté, cela est "puissance" or chacun peut [produire] le carré décrit sur lui »,

ne paraîtra probablement pas si claire au lecteur moderne.

(iii) Quant au Néoplatonicien Asclépius de Tralles (ou plutôt son maître Ammonius), il introduit certes une référence très importante — le Livre X des *Éléments* d'Euclide (ἐν τῷ δεκάτῳ λόγῳ τῶν Εὐκλείδου) —, mais son interprétation en termes de *δύναμις* ne correspond pas à la terminologie euclidienne.

Mon propos n'est pas d'accabler l'infatigable traducteur français d'Aristote. Les explications que donne W. D. Ross ne sont guère plus éclairantes¹⁰ : il cite également Alexandre et Euclide, mais pour sa définition X, n°4, laquelle introduit la notion de *δυναμένη* et non pas celle de *δύναμις* (*a priori* ce n'est pas la même chose). Il ajoute quelques références platoniciennes qui ne font qu'embrouiller les choses.

La confusion des commentateurs d'Aristote tient à ce que les dictionnaires, généraux ou spécialisés, proposent des notices suggérant des usages mathématiques assez peu cohérents des termes *δύναμις* (et *δύνασθαι*)¹¹. Ce faisant, ils ne font eux-mêmes que refléter les

⁸ Je reprends cette définition à la notice « puissance » de *L'Encyclopédie Méthodique Mathématique*, vol. III, Paris, 1789, rédigée par M. Dargenville. L'auteur n'hésite pas à citer Diophante à propos des noms des puissances successives de l'inconnue en algèbre. Il mentionne également la locution « commensurable en puissance » pour désigner des quantités incommensurables telles que les carrés ou « une autre puissance » sont commensurables, ce qui, comme nous le verrons, ne correspond pas à l'usage grec de ladite locution.

⁹ Discipline développée par les mathématiciens médiévaux d'expression arabe (cf. [Vitrac, 2005]). Je désigne les travaux modernes par le nom de l'auteur suivi de la date de publication (originale en cas de réédition).

¹⁰ Voir *Met.*, Ross, vol. I, p. 322.

¹¹ Ainsi la rubrique « V. *Math.* » de l'entrée "δύναμις" du *LSJ* donne : ... b. *square number*, Pl.Ti. 32a ... 2. *square root* of a number which is not a perfect number, surd, opp. *μῆκος*, Pl.Tht 147d ». La notice consacrée à ce même terme dans [Mugler, 1958], vol. 1, pp. 148-150, commence en disant que ce nom exprime la mesure du carré construit sur un segment de droite par une aire choisie comme unité, donne quelques citations d'Euclide, d'Archimède, d'Apollonius, de Héron et de Pappus. Mais, dans sa rubrique « Avant Euclide », il traduit comme si dans le *Théétète*, 147d-148a (ainsi qu'en *Polit.*, 266b; *Timée*, 54b), le terme *δύναμις* désignait les « segments racines carrées » (*sic*), tout en affirmant que dans d'autres passages le sens est différent (*Timée* 32b : nombres carrés; *Resp.* 587d : élévation au carré).

flottements de la terminologie géométrique des anciens Grecs que les spécialistes croient percevoir chez Platon. Ainsi, dès 1876, Tannery écrivait¹² :

« ... Dans le *Théétète*, [δύναμις] a le sens de racine incommensurable. Dans la *République*, livre IX ..., il signifie au contraire carré; c'est la signification classique (Diophante)¹³. Voilà un exemple frappant de l'état flottant de la langue mathématique à l'époque de Platon ».

D'autres ont ajouté que c'est à l'intérieur même du passage du *Théétète* qu'on observe un tel flottement sémantique.

On peut donc craindre que notre hypothétique lecteur du Livre Δ de la *Métaphysique*, cherchant à comprendre en quoi consiste l'usage métaphorique de la "puissance" chez les géomètres, ait bien du mal à se tirer d'embarras : les historiens des mathématiques grecques lui disent que δύναμις, dans les classiques de la géométrie (post-aristotéliens), signifie tout simplement "carré" — et on ne voit pas bien où réside la métaphore — tandis qu'avant le Stagirite, chez Platon, les usages mathématiques de ce terme n'étaient pas encore complètement fixés.

Je propose donc de reprendre les deux aspects de la question, à savoir l'examen des usages mathématiques de δύναμις et δύνασθαι dans le corpus des œuvres géométriques conservées et l'analyse des occurrences platoniciennes, notamment celles du *Théétète* qui jouent un rôle crucial dans ce dossier. Auparavant, pour expliquer pourquoi une question apparemment aussi spécialisée a suscité une littérature aussi abondante, tant de la part des philosophes que des historiens des sciences, je ferai un bref excursus sur le contexte historiographique dans lequel ces débats ont eu lieu.

1. Le contexte historiographique de la discussion du *Théétète*

A la charnière des XIX^e et XX^e siècles, les éditions critiques des principaux textes mathématiques grecs conservés avaient été réalisées ou étaient en cours de réalisation. Les dernières grandes découvertes textuelles, du moins en grec, datent de la fin des années 1890 et concernent les *Métriques* de Héron et la célèbre *Méthode à Ératosthène* d'Archimède. L'époque était donc propice à des interprétations renouvelées, ambitieuses et synthétiques, d'un ensemble textuel à peu près stabilisé. Les travaux de P. Tannery, J. L. Heiberg, H. Zeuthen, puis T. L. Heath, pour ne citer que quelques noms bien connus, ont durablement déterminé l'orientation de l'historiographie des mathématiques grecques anciennes.

L'inventaire des sources primaires (textes mathématiques), conservés en grec ou en traductions (syriaque, arabe, latine, hébraïque, persane, arménienne ...), fait apparaître plusieurs problèmes :

¹² [Tannery, 1876], p. 33, note 2.

¹³ Comme nous le verrons *infra*, cette signification est tout sauf classique. L'importance accordée par Tannery à Diophante (III^e s. de notre ère ?) tient sans doute à ce qu'il en était l'éditeur (voir *Dioph.*) ! Observons également que le travail de Diophante relève de l'arithmétique, pas de la géométrie.

- Il n'existe aucun traité conservé antérieur à l'époque hellénistique. En ce qui concerne la géométrie grecque, les *Éléments* d'Euclide constituent l'ouvrage complet le plus ancien.
- Par la suite, on peut mettre en évidence une très forte corrélation entre le fait qu'un traité soit conservé et que son auteur ait été en relation avec Alexandrie, voire même qu'il soit, pour l'époque romaine, alexandrin.
- Les plus anciens textes conservés (ceux de l'époque hellénistique) font partie d'une tradition démonstrative assez homogène et enchaînent, d'une manière très austère et impersonnelle, principes (définitions, postulats ...) et Propositions. Aucune considération méta discursive, heuristique, historique ou sociologique, n'y trouve sa place. De telles considérations ne peuvent apparaître que dans les préfaces quand elles existent. Lesdites préfaces sont donc extrêmement précieuses mais, cela va de soi, ne suffisent pas à reconstituer ne serait-ce que l'élaboration du traité préfacé ou, *a fortiori*, l'histoire des problèmes et des notions qu'il met en œuvre.

Les historiens des mathématiques grecques se trouvent donc face à trois difficultés majeures (au moins) : l'*inexistence* de sources primaires pour les époques archaïque et classique, un doute quant à la représentativité de l'échantillon conservé pour les périodes suivantes, un déficit d'informations, en particulier en ce qui concerne les motivations des mathématiciens et les contextes dans lesquels ils travaillaient.

Comme il est assuré que d'importants travaux mathématiques avaient été entrepris avant l'époque hellénistique, comme la tradition grecque des commentateurs anciens présentent les *Éléments* d'Euclide à la fois comme un nouveau point de départ et une sélection synthétique des connaissances antérieures en géométrie élémentaire et en théorie des nombres, reconstruire l'histoire pré euclidienne des mathématiques grecques est devenu un enjeu historiographique décisif. Depuis les années 1870, les historiens, dans leur très grande majorité, ont pour ce faire adopté une démarche combinant trois éléments principaux :

- 1) L'utilisation, pour les périodes les plus anciennes, de sources littéraires, notamment celles d'inspiration philosophique tels que les écrits de Platon et d'Aristote, et, surtout, les fragments rapportés aux *Histoires* composées par le péripatéticien Eudème de Rhodes avec toutes les incertitudes que comporte la détermination des fragments d'un auteur antique¹⁴.
- 2) Le recours aux commentateurs de l'Antiquité tardive (Pappus, Proclus, Eutocius) chez lesquels on trouve d'ailleurs lesdits fragments d'Eudème.
- 3) L'adoption d'un mode de lecture particulier des textes conservés — en particulier pour les *Éléments* d'Euclide —, que j'ai appelé "archéologique", car il s'agit de retrouver, au-delà de l'écran que constitue l'exposé axiomatique déductif de l'Alexandrin et, grâce aux particularités et aux supposées anomalies du traité, les contributions originales utilisées dans sa composition, leurs auteurs et leurs motivations.

¹⁴ Cela vaut tout particulièrement pour le célèbre fragment d'Eudème [Wehrli, 1969], N°133, sur lequel reposent toutes les histoires des mathématiques pré euclidiennes depuis Bretschneider, fragment transmis par Proclus (*Pr.*, p. 64, l. 16—p. 68, l. 6) dans lequel, au demeurant, le nom d'Eudème n'apparaît même pas !

Ce modèle historiographique s'élabore dans les travaux des auteurs déjà cités auxquels on peut adjoindre C. A. Bretschneider (un pionnier) et G. J. Allman¹⁵. L'ouvrage de Tannery sur la géométrie grecque (1887) propose l'un des premiers, sinon le premier, schéma global d'interprétation archéologique des *Éléments*.

Or, l'une des singularités du plan suivi par Euclide — ce qui ne veut pas dire qu'il s'agisse d'une "anomalie" — concerne sa manière d'introduire la théorie des proportions (Livre V) et l'exposé concernant l'irrationalité dans le monumental Livre X, lequel représente, à lui seul, un quart du traité. Dans l'interprétation de Tannery — acceptée par la plupart des spécialistes et qui culminera avec les célèbres Eudoxos-Studien d'O. Becker¹⁶ —, la mise en évidence de l'existence de grandeurs incommensurables, puis le développement d'une théorie des irrationnelles, la généralisation de la théorie des proportions qui en était la conséquence obligée, tout cela constitue le noyau central de l'histoire des mathématiques grecques dans sa période la plus ancienne. Tannery avança l'idée d'un « scandale logique », Hasse et Scholz parlèrent d'une « crise des fondements » dans les mathématiques grecques à la suite de la découverte de l'incommensurabilité, crise quelque peu paradoxale car, compte tenu de la chronologie, il ne pouvait s'agir, au mieux, que d'une crise fondatrice. Manifestement, le contexte mathématique contemporain — les débats autour des fondements de la récente théorie des ensembles — favorisait une telle grille d'interprétation, aujourd'hui très sérieusement remise en question¹⁷.

Quoi qu'il en soit, le débat eut comme conséquence de mettre en avant un certain nombre de textes philosophiques puisqu'il se trouve qu'à plusieurs reprises, Platon et Aristote — même s'ils n'évoquent jamais le moindre "scandale" —, ont fait allusion à l'existence de grandeurs incommensurables. Dans ce registre, l'un des témoignages les plus importants est celui qui se trouve au début du *Théétète* (147 d4—148 b8). Ainsi Heinrich Vogt, dans son très important mémoire de 1910, n'a pas hésité à présenter ce passage comme le texte fondamental pour la reconstruction de l'histoire de la théorie des irrationnelles¹⁸. Ce point de vue a été largement accepté et intégré dans le schéma proposé par Oskar Becker pour décrire le développement des mathématiques pré euclidiennes¹⁹. D'où de nombreux travaux sur les géomètres-personnages de Platon, Théodore de Cyrène et Théétète d'Athènes, l'étendue de leurs contributions respectives et leur lien mutuel, la nature des preuves évoquées mais non explicitement décrites par Platon, l'influence de ces travaux sur les *Éléments*.

¹⁵ Voir [Bretschneider, 1870] et [Allman, 1889].

¹⁶ Voir [Becker, 1933a, 1933b, 1936a, 1936b].

¹⁷ Voir [Freudenthal, 1966] et [Fowler, 1994].

¹⁸ « Le passage mathématique du *Théétète* est l'acte de naissance de l'irrationnel dressé par un contemporain », [Vogt, 1909/1910], p. 131.

¹⁹ Voir [Becker, 1934], pp. 142-145.

Les irrationnelles interviennent en effet dans les Livres X et XIII du traité, ceux précisément que la tradition de l'Antiquité tardive²⁰ rattachait aux travaux de Théétète ! Dès lors, le rapprochement — ou plutôt la confrontation — entre le passage du dialogue platonicien et l'ouvrage d'Euclide était inévitable. Entreprise dès l'Antiquité²¹, elle retrouva une nouvelle vigueur dans le contexte historiographique que je viens de décrire. L'enjeu historique et épistémologique était important, mais le débat fut d'autant plus nourri et incertain que l'on avait cru percevoir, dans le témoignage de Platon, le problème terminologique que j'ai évoqué en Introduction. Ainsi, aux discussions sur l'origine de la théorie des irrationnelles se sont superposées d'autres interrogations, concernant la détermination du concept mathématique de *δύναμις*, l'histoire de la terminologie géométrique des Grecs, sa fixité relative à l'époque de Platon et donc la fiabilité (au moins sur ce plan) des témoignages que celui-ci nous transmettait. Mais d'abord, décrivons le corpus des textes géométriques conservés.

2. Le corpus mathématique : description de l'échantillon

J'ai entrepris un examen des formules comprenant les termes *δύναμις* et *δύνασθαι* (en particulier la forme nominale « *ἡ δυναμένη* » chère à Euclide) dans l'acception propre aux géomètres grecs²² en explorant systématiquement le corpus mathématique suivant : les *Eléments* et les *Data* d'Euclide, les corpus géométriques d'Archimède et de Héron, les Livres I à IV des *Coniques* d'Apollonius, le Livre d'Hypsiclès devenu Livre XIV des *Eléments*, les *Sphériques* de Théodose, l'*Expositio rerum mathematicarum* de Théon de Smyrne, la portion géométrique de l'*Almageste* de Ptolémée et son commentaire par Théon d'Alexandrie, les *Arithmétiques* de Diophante, les deux traités de Sérénus, la *Collection mathématique* de Pappus, les commentaires d'Eutocius aux *Coniques* d'Apollonius, à la *Sphère et cylindre* et à la *Mesure du cercle* d'Archimède, autrement dit la plupart des traités mathématiques — au sens technique du terme —, rédigés entre le III^e siècle avant notre ère et le VI^e siècle qui nous sont parvenus en grec. L'échantillon obtenu n'est pas bien grand, environ un millier d'occurrences dans les textes mathématiques, mais il n'est pas non plus minuscule (on repère une douzaine d'occurrences chez Platon).

Le fait d'avoir pris en considération à peu près la totalité du corpus mathématique conservé en grec ne doit pas faire illusion. Il y a de grandes inégalités entre traités. Les *Coniques* d'Apollonius ou le livre d'Hypsiclès sont des monographies qui ont assez peu d'occasions d'utiliser le concept de "puissance". La plupart des occurrences dans les *Coniques*

²⁰ Pour le L. XIII, voir scholie n°1 (*EHS*, V, 2, p. 291, l. 1-9). Pour le L. X, voir *Papp. in X.* et scholie N°X, 62, qui en dérive (*EHS*, V, 2, p. 113, l. 23-25).

²¹ Elle est explicite dans le premier Livre du Commentaire au Livre X des *Eléments* attribué à Pappus (*Papp. in X*, §§ 10-13; cf. à ce sujet Eucl., *Él.*, vol. 3, pp. 418-419).

²² J'exclus évidemment les occurrences du verbe dans lesquelles il a le sens simple de « il est possible ... » (*δύναται*) ou les autres usages mathématiques de *δύναμις*, comme ceux signalés *supra* à la note 3*.

se rattache à la notion de "paramètre" dans le libellé de laquelle le verbe "δύνασθαι" apparaît, [cf. Annexe²³, formule 1. (ii')]. Quant à l'écrit d'Hypsiclès, il nous est parvenu sous une forme altérée, en particulier à la fin du livre. On y trouve une double série de récapitulations²⁴ très probablement inauthentiques qui contiennent à elles seules 10 des 16 occurrences du terme "δυναμένη" que contient ce court traité. A l'inverse, on dit souvent que, dans les *Eléments*, les termes *δύναμις*, *δύνασθαι*, sont utilisés *seulement* dans les Livres X et XIII, avec l'idée que cela n'en représente que 2 sur 13²⁵. Mais il ne faut pas perdre de vue qu'à eux seuls lesdits Livres représentent près du tiers de l'ouvrage et, de fait, presque les deux tiers de notre échantillon proviennent des *Eléments*. La taille et la représentativité de celui-ci — et donc la pertinence de ce genre d'analyse "quantitative" — ne doivent donc pas être majorée.

Je décris des formules utilisant les termes *δύναμις* et *δύνασθαι* là où certains de mes prédécesseurs parlaient de « concept de puissance », parce que la langue géométrique des Grecs, ainsi que G. Aujac l'a bien montré²⁶, est — comme celle de l'épopée — formulaire. Nous ne savons pas vraiment comment les géomètres grecs concevaient les choses, nous savons seulement (en partie) comment ils s'exprimaient dans leurs publications. Les choses étaient peut-être (sans doute) différentes dans les brouillons, les discussions informelles ou les correspondances privées entre mathématiciens, mais nous n'en savons à peu près rien. Nous n'avons accès qu'à quelques textes qui, bien que rédigés dans la langue naturelle, ont une expression très formalisée.

Ce caractère formulaire permet des regroupements en fonction de différentes rubriques, étant entendu qu'il y a de nombreuses variantes grammaticales liées au genre et au nombre des objets dont il est question ou aux inversions syntaxiques, particulièrement fréquentes dans les textes mathématiques anciens. Plutôt que d'essayer d'en réduire le nombre à l'aide de notations symboliques modernes, j'ai préféré mettre l'accent sur la diversité des emplois en partant de distinctions mises en œuvre dans les textes mathématiques anciens et que certains auteurs, notamment les philosophes, explicitent en tant que telles : celle du nombre et de la grandeur, celle entre "objets" et "relations", entre ce qui est déterminé et ce qui ne l'est pas²⁷ ...

La description d'un échantillon présuppose la constitution de classes (ici de formules) à partir de critères. Il ne s'agit pas d'un "fait" mais d'une construction que l'on pourra toujours contester. Il n'est d'ailleurs pas rare d'observer des incertitudes quant à l'identification de la classe à laquelle appartient tel ou tel individu. J'ai procédé de manière assez empirique, en me

²³ Le lecteur trouvera l'inventaire des différentes formules comportant les termes (*δύναμις*, *δύνασθαι*) utilisées par les géomètres grecs dans l'Appendice, en fin d'article.

²⁴ *EHS*, V, 1, p. 20, l. 11 — p. 22, l. 7.

²⁵ [Mugler, 1958], dit même que *δύναμις* et *δύνασθαι*, sont utilisés seulement dans le L. X (p. 150); il croit pouvoir y déceler l'influence de Théétète sur la théorie euclidienne de l'irrationalité. Celle-ci ne fait aucun doute, mais l'argument est faux.

²⁶ Voir [Aujac, 1984].

²⁷ Comme les deux distinctions précédentes, la différence entre relations quantitatives déterminées et indéterminées (ὀρισμένα / ἀόριστα) est déjà soulignée par Aristote (*Met.*, Δ, 15, 1020 b26 — 1021 a7).

laissant guider par les caractéristiques grammaticales des formulations et par certains critères logico-mathématiques : niveau de discours, nombre ou nature des objets mis en cause, homogénéité ou non des termes qui interviennent, spécification totale ou partielle des relations ... Bien entendu certaines difficultés subsistent et il y avait certainement d'autres manières de faire.

D'autres problèmes proviennent du fait qu'il s'agit d'écrits anciens, écrits techniques dont la transmission ne s'est pas toujours faite dans le strict respect de la littéralité des textes. Nous en avons vu un exemple avec le livre d'Hypsiclès. Il est donc possible de s'interroger sur l'authenticité de certains passages qu'il serait tentant d'écarter, ou de corriger, pour renforcer la cohérence des usages. Mais on risque alors de succomber à un cercle vicieux s'il n'y a pas d'autres arguments que la cohérence supposée des usages mathématiques pour trancher ces questions. A cet égard, puisque nous sommes partis d'Aristote, un exemple particulièrement significatif est celui du témoignage sur la quadrature des lunules par Hippocrate de Chio (V^e s^a), transmis par Simplicius (VI^e s) d'après les *Histoires géométriques* du péripatéticien Eudème de Rhodes (IV^e s^a). Même si nous ignorons le degré de fidélité d'Eudème par rapport à l'expression d'Hippocrate, même si le texte est remanié par Simplicius — celui-ci le dit explicitement —, reste que cet important témoignage atteste probablement d'usages pré euclidiens des termes *δύναμις* et *δύνασθαι*. Il aurait peut-être fallu l'intégrer à notre échantillon, mais son utilisation, dans une enquête terminologique, s'avère suffisamment délicate pour que nous lui consacrons une étude séparée (voir *infra*, 8^{*}).

Dans le corpus considéré avant toute considération d'authenticité, les termes "δύναμις" et "δύνασθαι", apparaissent environ un millier de fois, très grossièrement sur un pied d'égalité (respectivement 461 et 535 occurrences). On peut résumer ces données numériques sous forme de tableau (*infra*). J'ai cru bon d'introduire deux distinctions :

- entre le nominatif "δύναμις" et le datif "δυνάμει". Constatons que les occurrences du premier, employé pour désigner un *objet* mathématique, sont rares chez les mathématiciens : 23 occurrences, toutes tardives, dont 18 dans les seules *Arithmétiques* de Diophante²⁸. Dans tous les autres cas (438), nos auteurs utilisent le datif "δυνάμει", d'une manière quasi adverbiale pour qualifier des *relations* (registre 2) : « être plus grand que ... », « être plus (moins) que le double de ... », « être dans un rapport numérique spécifié avec ... », « être commensurables (incommensurables) avec ... » ... ou des proportions [3a-b] et inégalités de rapports [un seul exemple, 3c. (i)].
- j'ai fait un sort particulier au participe substantivé de "δύνασθαι" (ἡ δυνάμενη, 196 occurrences), utilisé, pour l'essentiel, par trois auteurs : Euclide, Hypsiclès et Pappus.

²⁸ Qui plus est, l'usage diophantien de "δύναμις" est très particulier; v. *infra*, 7^{*}.

Corpus mathématique	<i>δύναμις</i>	<i>δυνάμει</i>	<i>δύνασθαι</i>	<i>δυναμένη</i>	Total	Nombre de formules
Eucl., <i>Éléments</i> , L. X	—	292	158	132	582	8
Eucl., <i>Él.</i> L. XIII	—	32	16	1	49	9
Eucl., <i>Éléments</i> , Total	—	324	174	133	631	13
Eucl., <i>Data</i>	—	—	4	—	4	2
Corpus archimédien	—	25	35	2	62	12
Apoll., <i>Coniques</i> I-IV	—	2	34	2	38	5
Hypsiclès, L. XIV	—	3	1	16	20	4
Héron, <i>Métriques</i>	—	12	1	—	13	3
Héron, <i>Définitiones</i>	—	6	—	—	6	3
Corpus "héronien" (<i>Geom.</i> , <i>Stereom.</i>)	1	2	2	—	5	2
TheonSm., <i>Expositio</i>	—	4	1	—	5	3
Ptolémée, <i>Almageste</i>	—	2	1	—	3	2
Diophante, <i>Arithmét.</i>	18	—	—	—	18	—
Sérénus, <i>Sect. Cyl.</i>	—	—	7	—	7	1
Pappus, <i>Collection</i>	1	47	54	42	144	18
TheoAlex, <i>In Almag.</i>	—	3	3	—	6	4
Eutocius, <i>In Apoll. C.</i> & <i>In Arch SC, DC</i>	3	8	22	1	34	8
Total	23	438	339	196		38
	461		535		996	

Dans la dernière colonne j'ai fait apparaître le nombre des formules-types inventoriées, utilisées par un auteur. Si on le rapporte à la taille des textes, on voit que les formules, bien que globalement moins nombreuses, sont plus variées chez Archimède — mais aussi, à l'autre extrémité chronologique de l'échantillon, chez Pappus et Eutocius — que chez Euclide. Ces nombres ne doivent pas dissimuler certaines disparités : 10 formules n'apparaissent qu'une fois (dont 5 chez Pappus) tandis que celles dont il y a plus de 50 occurrences — elles sont six [**1.** (i), **1.** (ii), **2c.** (v), **2d.** (ii-iii), **2e.** (i)] — représentent, au total, 792 occurrences, soit près de 80 % de l'échantillon. Certains des hapax, notamment chez Pappus, suggèrent que notre corpus ne représente qu'une partie des travaux mathématiques dans lesquels intervenait le langage de la puissance; d'autres relèvent sans doute de la problématique de l'(in)authenticité²⁹.

A l'inverse, les six formules "fréquentes" apparaissent dans les *Éléments*, traité dans lequel l'emploi des termes (*δύναμις*, *δύνασθαι*) est plutôt standardisé. Première constatation, toutes les occurrences y apparaissent en connexion avec la thématique de l'irrationalité, elle-

²⁹ Par exemple **2b.** (i'), **2c.** (ii).

même introduite dans les Définitions liminaires du Livre X. C'est par là qu'il nous faut commencer.

3. La théorie euclidienne de l'irrationalité

Reproduisons lesdites définitions³⁰. Deux des quatre formes distinguées dans le tableau ci-dessus s'y retrouvent :

- "δυνάμει" pour qualifier les relations binaires de commensurabilité et d'incommensurabilité entre droites (Df. 2-3). Euclide, dans l'ensemble de son traité, ne se sert jamais du substantif "ἡ δύναμις" pour désigner un objet mathématique, quel qu'il soit.
- le participe substantivé "ἡ δυναμένη", mobilisé ici (Df. 4) pour dénommer des droites, associées d'une manière très particulière à des aires rectilignes. D'autres formes conjuguées du verbe "δύνασθαι" apparaîtront dans les Propositions des Livres X et XIII³¹.

1. Sont dites *grandeurs commensurables* (σύμμετρα μεγέθη) celles qui sont mesurées par la même mesure, et *incommensurables* (ἀσύμμετρα), celles dont aucune commune mesure ne peut être produite.

2. Des droites sont *commensurables en puissance* (δυνάμει σύμμετροί εἰσιν) quand les carrés (τετράγωνα) [décrits] sur elles sont mesurés par la même aire, et *incommensurables [en puissance]* quand aucune aire, commune mesure aux carrés [décrits] sur elles, ne peut être produite.

3. Cela étant supposé il est démontré que par rapport à une droite proposée, il existe des droites, infinies en multitude, commensurables ou incommensurables avec elle, les unes en longueur seulement, les autres aussi en puissance (αἱ μὲν μήκει μόνον, αἱ δὲ καὶ δυνάμει).

D'une part donc que la droite proposée soit appelée (καλείσθω) *exprimable* (ῥητή), et celles [qui sont] commensurables avec elle, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement, *exprimables*; d'autre part que celles [qui sont] incommensurables avec elle soient appelées (καλείσθωσαν) *irrationnelles* (ἄλογοι).

4. Et que d'une part soit appelé (καλείσθω) *exprimable* le carré [décrit] sur la droite proposée et *exprimables* les [aires] commensurables avec celui-ci, *irrationnelles* d'autre part celles qui sont incommensurables avec celui-ci et *irrationnelles* les [droites] pouvant les produire (αἱ δυνάμεναι αὐτά) : s'il s'agit de carrés (τετράγωνα), les côtés (πλευραί) eux-mêmes, s'il s'agit de certaines autres [figures] rectilignes (εὐθύγραμμα), celles qui décrivent (ἀναγράφουσιν) des carrés [qui] leur [sont] égaux.

Clairement il faut distinguer deux registres, celui de la *comparabilité mutuelle quant à la mesure* (commensurabilité, incommensurabilité) — introduit dans les Définitions 1-2 et couronné par l'affirmation existentielle de la première partie de la Définition 3 —, et celui de l'*expression* par rapport à un élément de référence préalablement fixé (exprimabilité, irrationalité).

Ce second registre est fondé sur le premier, quand un des deux éléments comparés est considéré comme "étalon de mesure". Il ne constitue donc, à certains égards, qu'une série de conventions linguistiques (Cf. les occurrences de καλέω soulignées dans les Définitions 3-4). La comparabilité quant à la mesure est une question plus générale : elle concerne les grandeurs géométriques sans plus de précision (ce qui, chez les Grecs, veut dire : les lignes,

³⁰ Selon la numérotation de l'édition de Heiberg. Voir *EHS*, III, p. 1, l. 2 — p. 2, l. 4. Les termes définis (il y en a au moins six) sont mis en italiques. Sur certaines variantes dans les manuscrits et à propos des choix de traductions, voir Eucl. *Él.*, vol. 3, pp. 25-42.

³¹ Voir l'exemple de la Proposition X. 23 donné un peu plus bas ou l'Appendice, notamment les formules [1. (ii), 2a. (i), 2c. (v-v'), 2e. (ii-ii')].

les surfaces, les volumes et les angles), à condition, cela va de soi, que l'on compare des grandeurs de même espèce. Tandis que les problèmes d'exprimabilité ne seront envisagés, du moins chez Euclide, que pour des droites et des aires rectilignes (donc quarrables d'après la Proposition II. 14).

Le fondement de ces deux registres réside dans l'opération, abstraite et fondamentale, de "mesure". Les Définitions V. 1-2 et VII. 3, 5 montrent qu'il s'agit de « mesure exacte », *i.e.* quand l'une des deux grandeurs ou l'un des deux nombres — l'opération s'applique aux deux genres de la quantité mathématique — est une partie (aliquote) de l'autre (qui en est donc un multiple). Quand il existe une commune mesure à deux grandeurs, leur rapport (leur relation mutuelle quant à la taille, cf. Df. V. 3) s'exprime donc à l'aide de nombres entiers ou, pour le dire comme Euclide dans sa Proposition X. 5, leur rapport sera celui d'un nombre à un nombre. Pour donner un exemple archimédien célèbre, le volume du cylindre circonscrit à une sphère est, relativement au volume de ladite sphère, dans le rapport de 3 à 2. On voit que, là où les Anciens parlaient de rapports entre grandeurs géométriques commensurables, les Modernes privilégient une formulation numérique introduisant les nombres dits rationnels, dans l'exemple archimédien la fraction $3/2$. De même, un rapport entre grandeurs incommensurables comme le côté et la diagonale d'un carré, correspond, d'une certaine manière, à ce que les Modernes appellent un nombre irrationnel, en l'occurrence $\sqrt{2}$. Mais la théorie euclidienne de l'exprimabilité et de l'irrationalité ne correspond pas vraiment à ces distinctions puisque si l'on choisit le côté du carré comme élément de référence, la diagonale sera *exprimable* : en effet le carré décrit sur elle est double du carré décrit sur le côté et donc commensurable avec lui !

La Définition 4 présuppose l'idée qu'une droite « peut [produire] » une aire (αἰδυνάμεναι αὐτά) et même — cas particulier — qu'elle [puisse] décrire (ἀναγράφειν) un carré. Dans la suite du traité, on trouve deux formules mathématiquement équivalentes. Ainsi, à la fin de la Proposition X. 23, Euclide affirme successivement :

« Donc la [droite] pouvant [produire] le [rectangle contenu] par CD, DF (ἡ ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ δυνάμενη) est une médiale; et B peut [produire] le [rectangle contenu] par CD, DF (δύναται τὸ ὑπὸ τῶν ΓΔ, ΔΖ ἡ Β); donc B est une médiale »³².

On dira donc tout aussi bien que « la droite AB peut [produire] (δύναται) l'aire X » ou que « la droite pouvant [produire] (ἡ δυνάμενη) l'aire X est la [droite] AB ».

Pour bien comprendre de quoi il s'agit, il faut ici rappeler quelques évidences (parfois perdues de vue) concernant la géométrie grecque ancienne :

- La droite (εὐθεΐα) est une espèce de la ligne (γραμμή), laquelle est elle-même une espèce de la grandeur géométrique (μέγεθος), celle qui n'a qu'une extension, la longueur (μῆκος). Une droite spécifiée, ἡ AB, a donc une position et une grandeur, sa longueur.
- Le carré (τετράγωνον) décrit sur AB, τὸ ἀπὸ τῆς AB, est une figure (σχήμα), dotée d'une position — être ici ou là —, d'une forme (particulièrement éminente, puisqu'il s'agit

³² Voir *EHS*, III, p. 37, l. 17-19.

d'une figure régulière) et d'une grandeur : son aire (χωρίον, ἐμβαδός). En tant que grandeur, l'aire du carré possède deux extensions : la longueur (μῆκος) et la largeur (πλάτος), caractéristique de la surface (ἐπιφάνεια). Le carré appartient à l'espèce des surfaces planes (ἐπίπεδος). La droite AB, sur laquelle est décrit le carré, est appelée son "côté" (πλευρά).

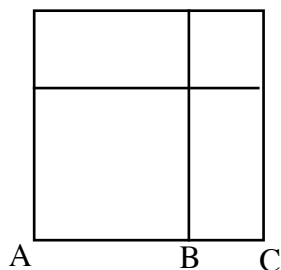
Dans les *Éléments* (et dans les autres écrits géométriques), les termes "δυνάμει" et "δύνασθαι", contrairement à "carré", se rattachent à la seule problématique de la "grandeur", à l'exclusion de la forme et de la position. Ainsi, dans la définition X. 2, des droites AB et CD seront dites commensurables en puissance s'il existe deux aires commensurables égales respectivement aux carrés décrits sur AB et CD, ce que l'on montre soit sur les carrés eux-mêmes, soit — et c'est le cas le plus fréquent — sur des aires qui leur sont égales, par exemple des rectangles équivalents en aire, appliqués sur une même droite (ce qui a l'avantage de ramener le rapport desdites aires au rapport de leurs largeurs). Sans ces présuppositions de substitution, la Définition perdrait tout caractère opératoire.

Aucun texte géométrique ne dit que le carré décrit sur AB est la puissance de la droite AB ou que la droite AB est le côté de sa puissance. En revanche l'aire du carré décrit sur (par) AB est l'aire que peut [produire] la droite AB. La droite a une capacité à produire une grandeur d'une espèce autre que la sienne, en l'occurrence une aire ou une somme d'aires³³. Elle est désignée grâce au terme "δυναμένη", utilisé et même explicité dans la Définition X. 4³⁴ quoique l'objet (au moins apparent) de cette dernière soit d'introduire des conventions linguistiques concernant les aires appelées "exprimables" et "irrationnelles". Mais il est bien précisé que la "δυναμένη" d'une aire irrationnelle sera dite elle aussi "irrationnelle".

Cette convention interviendra dans la désignation même de deux des treize espèces de droites irrationnelles classifiées par Euclide : « la [droite] pouvant [produire une aire composée] d'une exprimable et d'une médiale (ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη) » et « la [droite] pouvant [produire une aire composée de] deux médiales (δύο μέσα δυναμένη) », introduites respectivement dans les Propositions X. 40-41.

³³ Contrairement à ce qu'affirme Szabó, cette assertion n'a rien d'absurde ni d'incompréhensible. Il s'agit d'une "personnification" comparable à celle que l'on introduit quand, à propos d'une expression ou d'un mot, on se demande « qu'est-ce que cela veut dire ? ». Le français introduit la "volonté" ou l'"intention", là où le grec envisagera la δύναμις (!) du discours (voir par exemple Platon, *Cratyle*, 408 a2). Ce genre de "personnification" relève de la métaphore, ce que les mathématiciens (et Aristote ! Cf. *supra*, le témoignage de *Met. Δ*) connaissent bien.

³⁴ « ... s'il s'agit de carrés, les côtés eux-mêmes, s'il s'agit de certaines autres [figures] rectilignes, celles qui décrivent des carrés [qui] leur [sont] égaux ». L'explicitation implique peut-être qu'il s'agit d'un usage nouveau ou du moins encore peu connu.



L'auteur des *Éléments* considère deux segments de droites contigus AB, BC et le carré décrit sur leur "somme" AC.

D'après II. 4, celui se décompose en deux carrés, décrits sur AB, BC et deux rectangles dont on dit, par convention, qu'ils sont contenues par AB, BC³⁵.

Dans le Livre X, la somme des deux carrés est appelée « l'aire composée des carrés [décrits] sur elles », le rectangle, l'aire contenue par elles.

Dans X. 40, la première aire est exprimable, la seconde médiale; dans X. 41, elles sont toutes deux médiales (mais mutuellement incommensurables).

Leur somme constitue le carré décrit sur AC et est irrationnelle. La droite AC, qui est donc bien *la δυναμένη* de la somme de ces deux aires, est aussi irrationnelle d'après la Df. X. 4.

On peut dire que AC est une irrationnelle engendrée par composition ($AC = AB + BC$), mais dans les Propositions X. 77-78, Euclide procède par retranchement ($AB = AC - BC$). Il considère donc le carré sur AB comme la différence entre l'aire composée des carrés [décrits] sur AC, CB et deux fois l'aire contenue par elles (Cf. II. 7). Il fait les mêmes hypothèses concernant la nature desdites aires et en déduit deux nouvelles irrationnelles, engendrées par retranchement (telle AB), qu'il appelle selon les cas :

- la [droite] produisant, par adjonction d'une [aire] exprimable, un tout médial (X. 77),
- la [droite] produisant, par adjonction d'une [aire] médiale, un tout médial (X. 78).

Les noms choisis [*ἡ μετὰ ῥητοῦ* (resp. *μέσου*) *μέσον τὸ ὅλον ποιούσα*] montrent, eux aussi, qu'une droite a une certaine « capacité à produire » (*ποιεῖν*) une aire, et même une aire d'une certaine nature³⁶.

Étant données deux droites, AB et CD, un certain nombre de questions en termes de comparaison mutuelle s'impose : sont-elles égales ou non ? Peut-on préciser l'excès de la plus grande sur la plus petite ? Dire si elles sont commensurables ou non et, si oui, déterminer numériquement leur rapport mutuel ... Il s'agit de comparaisons immédiates des droites en tant que telles, c'est-à-dire en tant que longueurs déterminées. La prise en compte de leur "puissance" ou « capacité à produire une aire » permettra de résoudre le même genre de questions, mais cette fois d'une manière médiate, grâce aux aires qu'elles peuvent produire.

Que cela soit mathématiquement pertinent est justifié par le fait que si le rapport de deux droites $AB : CD$ est connu, par exemple celui de 4 à 3, celui de leurs carrés est également connu — dans l'exemple ce sera celui de 16 à 9 —, mais, inversement, si le rapport des carrés est numériquement déterminé, par exemple si l'un est le double de l'autre, celui des côtés ne l'est pas nécessairement de manière immédiate en tant que rapport de deux nombres entiers. C'est le phénomène de l'irrationalité quadratique, comme dans l'exemple évoqué du côté et de la diagonale d'un même carré. Cette impossibilité sera contournée par la médiation de la puissance : la diagonale d'un carré est dite double, en puissance, du côté de ce carré. On voit que la Définition X. 2 autorise à dire que des droites sont commensurables de deux manières, soit "immédiatement", c'est-à-dire quant à la longueur (*μήκει*), soit "médiatement", en puissance (*δυνάμει*). Et donc, une droite de référence étant fixée, seront dites *exprimables* des droites qui sont commensurables avec elle, d'une manière ou d'une autre, soit en longueur (et, *a fortiori*, en puissance), soit en puissance seulement (*δυνάμει μόνον*). Ce qui, d'un point de vue moderne rétrospectif (et anachronique), correspondrait à un nombre *irrationnel quadratique* ($\sqrt{n}$) est donc *exprimable* selon la terminologie euclidienne. Cette théorie très

³⁵ Cf. Eucl., *Él.*, Df. II. 1. En réalité lesdits rectangles sont contenus par des droites *égales* aux droites AB, BC.

³⁶ Bien entendu AB n'est pas appelée "*δυναμένη*" car elle ne peut produire aucune des deux aires qualifiées [$AC^2 + CB^2$, Rectangle (AC, CB)] de médiale ou d'exprimable.

particulière de l'exprimabilité semble propre à Euclide. Ni Platon, ni Aristote ne l'évoquent. Ses successeurs de l'Antiquité romaine et tardive, puis du Moyen-Âge la critiqueront et l'abandonneront. Elle se justifie par l'usage qu'Euclide en fait, dans son Livre XIII, pour la comparaison des arêtes des polyèdres réguliers où ses Définitions un peu paradoxales s'avèrent efficaces³⁷.

4. Les formules euclidiennes de la puissance

Remarquons, pour commencer, qu'aucune des treize formules utilisées dans les *Éléments* — la même chose pourrait être dite des 38 que l'on trouve dans l'ensemble du corpus géométrique — n'était inévitable. Chaque situation mathématique concernée pouvait en effet être décrite d'au moins deux manières différentes, avec la "même" signification mathématique, mais selon une formulation qui impliquait une nuance spécifique. Donnons quelques exemples.

1. Les *Éléments* énoncent le célèbre théorème de l'hypoténuse (I. 47) de la manière suivante :

I. 47 : Dans les triangles rectangles, le carré sur le côté sous-tendant l'angle droit est égal aux carrés sur les côtés contenant l'angle droit,

autrement dit en termes de carrés décrits sur des droites. La démonstration proposée implique la construction effective des figures en cause. Pourtant, la tradition³⁸ connaissait une formulation en termes de "puissance" pour cette même Proposition :

« ... dans les triangles rectangles, le côté sous-tendant l'angle droit peut [produire] autant que ceux qui contiennent l'angle droit, pris ensemble (ἴσον δύναται ταῖς τὴν ὀρθὴν περιεχούσαις ἀμφοτέραις) »³⁹.

On comprend donc que nombre de ces égalités et autres relations « en puissance » pouvaient bien être formulées autrement, à l'aide de carrés décrits sur les segments de droites. Par exemple, au lieu de dire :

XIII. 1 : Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le plus grand segment augmenté de la moitié de la [droite] entière peut [produire] (πενταπλασιον δύναται) le quintuple du carré sur sa moitié.

ou

XIII. 10 : Si un pentagone équilatéral est inscrit dans un cercle, le côté du pentagone est, en puissance, égal (δύναται) à celui de l'hexagone et à celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle.

Euclide aurait pu énoncer :

³⁷ Voir Eucl. *Él.*, Vol. 3, pp. 43-86.

³⁸ Et probablement Euclide lui-même. Il suffit de regarder comment il formule sa Prop. *Data*, 64 (*EHM*, VI, p. 116, l. 15-19) : « Si un triangle a un angle obtus donné, ce par quoi le côté sous-tendant l'angle aigu peut [produire] plus que les côtés contenant l'angle obtus, cette aire-là aura un rapport donné relativement au triangle ». L'aire en question est déterminée grâce à II. 12 (c'est deux fois le rectangle contenu par celui des côtés de l'angle obtus sur lequel tombe la perpendiculaire et par la droite découpée à l'extérieur par la perpendiculaire au-delà de l'angle obtus), elle-même libellée comme I. 47 en termes de carrés décrits sur des droites et de rectangles contenus par des droites. Cf. Annexe, formule [2c (v")].

³⁹ *Simpl. in Phys.*, p. 62, l. 1-4. Cf. Annexe, formule [2a (iii)]. Simplicius précise d'ailleurs sans sourciller : « ... comme cela a été démontré dans l'avant-dernier théorème du premier Livre des *Éléments* d'Euclide » ! Ou bien Simplicius ne s'attache guère à la littéralité des sources qu'il utilise, ou bien son exemplaire des *Éléments* différait sensiblement du texte édité par Heiberg.

XIII. 1 : Si une ligne droite est coupée en extrême et moyenne raison, le carré sur le plus grand segment augmenté de la moitié de la [droite] entière est quintuple du carré sur sa moitié⁴⁰.

XIII. 10 : Si un pentagone équilatéral est inscrit dans un cercle, le carré sur le côté du pentagone est égal à ceux sur le côté de l'hexagone et sur celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle.

2. De même dire que la droite AB peut [produire une aire] (ἴσον δύναται) égale au rectangle contenu par les droites (CD, EF) équivaut, comme ci-dessus, à l'égalité de deux aires : le carré décrit sur AB, le rectangle contenu par CD, EF, mais aussi, d'après la Proposition VI. 17, au fait que AB est une moyenne proportionnelle entre CD et EF. Telle est la terminologie choisie par Euclide dans ses Propositions VI. 13 (préparée par le Porisme = corollaire à VI. 8) et VI. 17, la formulation de cette dernière (cas d'une proportion continue en trois termes) étant calquée sur celle de VI. 16 (proportion discontinue en quatre termes)⁴¹. L'accent est mis, non pas sur l'équivalence d'aires, mais sur la *proportionnalité* qui dit la "même" chose et sur l'insertion ou l'adjonction de droites proportionnelles.

3. Dans ses Propositions VI. 19-20 Euclide établit que les figures semblables (et semblablement décrites) sont dites « dans le rapport doublé [du rapport] des côtés homologues »⁴². Deux corollaires font implicitement le lien avec la notion de droite troisième ou moyenne proportionnelle⁴³ que nous venons d'évoquer. Dans les Livres XI-XII des résultats analogues sont énoncés pour les figures solides semblables, cette fois en termes de « rapport triplé [du rapport] des côtés homologues » (XI. 33 : parallélépipèdes; XII. 8 :

⁴⁰ Dans une notice d'Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 390-400, j'avais comparé les traditions grecque et arabo-latine des Propositions XIII. 1-5 et conclu que leurs textes avaient été passablement remaniés, probablement à plusieurs reprises, en particulier à l'initiative de Héron. J'accepte toujours cette conclusion. J'avais aussi suggéré (p. 398) que les formules en termes de puissance — absentes des énoncés dans les traductions arabo-latines — pourraient être le résultat d'un perfectionnement postérieur, ce qui ne serait pas sans conséquence pour l'analyse quantitative menée ici. Cette hypothèse me paraît désormais risquée : la Prop. XIII. 1 est effectivement énoncée en termes de "carrés" dans les traductions arabo-latines, mais elle est citée en termes de "puissance" au cours de la preuve de XIII. 11 ! (voir par exemple Eucl., *GC*, XIII. 12, p. 401, l. 13-14 ou Eucl., *Ad. I*, p. 364, l. 276-277), ce dont je n'avais pas tenu compte. Cela confirme bien les remaniements du texte, mais il devient difficile de se prononcer sur l'authenticité des formules en termes de puissance. La citation de XIII. 2 par Pappus suggère que lesdites formules figuraient déjà dans sa version des *Éléments*. Depuis j'ai travaillé sur le Livre XIV, une monographie d'Hypsiclès d'Alexandrie (II^e s.) consacrée à la comparaison du dodécaèdre et de l'icosaèdre inscrits dans une même sphère, ajouté aux *Éléments*, probablement au cours de l'Antiquité tardive. Pour le Lemme XIV. 1/2 (*EHS*, V, 1, p. 4, l. 18-21) on observe le "même" phénomène : l'énoncé grec est formulé en termes de "puissance" (δυνάμει πενταπλασία) tandis que les versions arabo-latines le sont en termes de "carrés". Mais c'est aussi le cas de certains manuscrits grecs (notamment la famille *PBV*, voir l'apparat critique de Heiberg *in loco*), ce qui suggère qu'il a probablement existé deux familles textuelles grecques présentant la même divergence dans le Livre XIII.

⁴¹ VI. 8 Por. « A partir de ceci, il est évident que si dans un triangle rectangle, une perpendiculaire est menée à partir de l'angle droit sur la base, la [droite] menée est moyenne proportionnelle des segments de la base »; 13 : « De deux droites données, trouver [la] moyenne proportionnelle »; 16 : « Si quatre droites sont en proportion, le rectangle contenu par les extrêmes est égal au rectangle contenu par les moyennes; et si le rectangle contenu par les extrêmes est égal au rectangle contenu par les moyennes, les quatre droites seront en proportion »; 17 : « Si trois droites sont en proportion, le rectangle contenu par les extrêmes est égal au carré sur la moyenne; et si le rectangle contenu par les extrêmes est égal au carré sur la moyenne, les trois droites seront en proportion ».

⁴² Pour les triangles dans VI. 19, les polygones dans VI. 20. Un premier Porisme, inséré à la suite de VI. 20, souligne la validité générale du résultat.

⁴³ Selon que l'on se donne un rapport de droites et que l'on cherche celui des figures semblables décrites sur elles ou, à l'inverse, étant donné un rapport de figures semblables, qu'on cherche celui de leurs côtés homologues.

pyramides; XII. 12 : cônes et cylindres; XII. 18 : sphères⁴⁴). Très clairement, pour l'auteur des *Éléments*, il s'agissait de mettre l'accent sur l'analogie existant entre figures planes et solides à l'aide d'une terminologie plutôt "abstraite", en termes de *rapports*.

Il aurait pu s'exprimer autrement, en introduisant le rapport des carrés (resp. des cubes) décrits sur les côtés homologues, ce qui constituait une deuxième formulation, mettant l'accent sur des figures. C'est d'ailleurs ce qu'il fait dans XII. 1-2⁴⁵ :

Les polygones semblables [inscrits] dans des cercles sont l'un relativement à l'autre comme les carrés sur les diamètres.

Les cercles sont l'un relativement à l'autre comme les carrés sur leurs diamètres.

Mais, là aussi, la tradition connaissait une formulation en termes de "puissance" dans le cas des figures planes. Ainsi Archimède, dans la Proposition I. 13 de *la sphère et le cylindre* écrit :

« Et puisque les figures rectilignes inscrites dans les cercles A, B sont semblables, elles ont, l'une relativement à l'autre, le même rapport, en puissance ($\deltaυνάμει$), que celui de leurs rayons »⁴⁶.

Bref, il était possible de *ne pas* recourir au langage de la puissance et nous venons de constater qu'Euclide s'est dispensé d'y recourir dans un certain nombre de cas où il aurait pu le faire et pour lesquels il a préféré mettre l'accent sur autre chose : sur la description effective de figures (dans I. 47), sur l'insertion de moyennes proportionnelles ou sur le parallélisme des résultats que l'on peut établir au sujet des figures planes et solides, en utilisant, à chaque fois, une terminologie propre au contexte mis en jeu. D'où deux conséquences majeures :

- Les termes ($\deltaύναμις$, $\deltaύνασθαι$) sont introduits au début de son Livre X, parce qu'Euclide a décidé qu'ils apparaîtraient seulement dans des contextes liés à l'irrationalité quadratique et à l'exprimabilité (au sens euclidien du terme).
- Bien qu'elles transmettent près des deux tiers de notre échantillon, les treize formules utilisées dans les *Éléments* ne représentent qu'un tiers de l'ensemble (38) et, surtout, n'apparaissent pas dans certains registres pourtant très importants comme l'égalité en puissance entre droites et aires (**2b**) et la qualification de relations de relations (**3**).

Les quelques exemples repris à Archimède ou Simplicius que nous avons vus au passage montrent que cela n'avait évidemment rien d'inéluctable⁴⁷. Une fois introduites la qualification "en puissance" ou la capacité d'une droite à produire une aire, on peut les utiliser pour formuler, de manière concise — notamment sous forme d'égalités ou de proportions —, des conditions qu'un Moderne assimilera aisément à des formulations "fonctionnelles"

⁴⁴ Dans ce cas il s'agit du rapport triplé des diamètres respectifs.

⁴⁵ Cet exemple a frappé certains commentateurs modernes puisque le langage de la puissance, introduit au Livre X, était désormais disponible pour énoncer XII. 1-2. Voir l'explication que je propose dans Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 269-271.

⁴⁶ *Arch.*, I, p. 60, l. 10-13. Pour une énonciation de "XII. 2" en termes de puissance, voir *Spir.*, 25; *Arch.*, II, p. 94, l. 7-9 et Annexe, formules [3a. (i-ii)].

⁴⁷ Bien entendu on retrouve cette connexion « puissance - irrationalité » chez des auteurs qui citent Euclide (Hypsiclès, Héron, Ptolémée, Pappus, Théon d'Alexandrie), généralement un énoncé appartenant au Livre XIII, — par conséquent lesdits auteurs n'ont pas cru utile de le reformuler autrement —, ainsi que dans quelques passages archimédiens [*Sph.Cyl.* II, Prop. 9 (*Arch.*, I, p. 224, l. 5-6, l. 7); *Dim.Circ.* 3 (*Ibid.*, p. 238, l. 1-2)].

générales, certes valides quand les aires ou les rapports ne sont pas numériquement exprimables (comme dans les Livres X et XIII), mais également quand elles (ou ils) le sont !

Ainsi on peut envisager la *δυναμένη* d'une aire quarrable, par exemple le rectangle contenu par des droites AB, CD, sans nécessairement s'interroger sur l'exprimabilité de ladite aire. Cela constitue un substitut particulièrement concis à d'autres formulations, par exemple en termes de détermination de la droite moyenne proportionnelle. Que l'on compare : « soit AB une moyenne proportionnelle entre CD et EF; donc le carré sur AB est égal au [rectangle] contenu par CD, EF » avec « que AB produise (*δύναται*) le [rectangle] contenu par CD, EF ». Beaucoup des usages de *δύνασθαι* [formules **1.** (ii) et **2b.** (i)] du premier Livre de *La sphère et du cylindre*⁴⁸, ainsi que les deux attestations de *δυναμένη* dans les Propositions II. 8-9 des *Corps flottants*, sont autant de façons de prendre une moyenne proportionnelle entre deux droites⁴⁹ sans se soucier de la nature (exprimable ou non) du rectangle qu'elles contiennent.

Dans la même perspective, des formules du type : « Ont le même rapport, les aires A, A' et les droites d, d' en puissance » ou « ce rapport qu'a la droite AB relativement à la droite CD, c'est celui qu'a, en puissance, la droite EF relativement à la droite GH »⁵⁰ peuvent être satisfaites, que le rapport en question soit numériquement exprimable ou non. Elles correspondent à des écritures modernisées du type « $A / A' = d^2 / (d')^2$ », ou, si l'on préfère, $A = k.d^2$, d'où l'épithète "fonctionnel" que l'on peut leur accorder. Archimède utilise une bonne vingtaine de formules "générales" en termes de "puissance" pour qualifier des proportions (registre **3**), là où Euclide mentionnait les rapports doublés des côtés ou les rapports des carrés décrits sur certaines droites. Les formules [**3b.** (i-ii)] sont particulièrement bien adaptées à la formulation de la propriété caractéristique de la parabole.

La vertu essentielle des formules en termes de "puissance", même dans l'usage restreint qu'en fait Euclide au Livre X, est la concision qu'ils apportent à l'expression, ce qui constituait un souci constant des mathématiciens grecs. Il est incontestablement plus expédient de dire : « la droite pouvant produire X » (ή *X δυναμένη*) que « la droite décrivant un carré égal à X » (ή *εὐθεῖα ἴσον τῷ X τετράγωνον ἀναγράφει*) ou « soit AB et CD deux droites commensurables en puissance seulement (*σύμμετροι δυνάμει μόνον*) », plutôt que « soit AB et CD deux droites incommensurables telles que les carrés décrits sur elles soient commensurables ». Or cette relation de « commensurabilité en puissance seulement » est fondamentale pour toute une partie de la classification euclidienne des irrationnelles, notamment pour distinguer les médiales, binomiales et autres apotomés. On peut évidemment

⁴⁸ Resp. dans les Prop. I. 16, 24, 25, 29, 32, 35, 39Por. [**1.** (ii)]; I, 29, 35, 37, 40 pour [**2b.** (i)].

⁴⁹ Au demeurant, que l'on puisse utiliser la formule [**1.** (ii)] pour introduire une moyenne proportionnelle, c'était clair chez Euclide lui-même, par exemple dans X. 22 (*EHS*, III, p. 35, l. 19). La droite ainsi introduite est appelée "médiale". Mais le terme grec n'est autre que "μέση" (= "moyenne"). La traduction "médiale", traditionnelle, est destinée à souligner la différence entre l'usage spécifique qu'en fait Euclide ici (irrationalité) et l'usage général de la prise d'une moyenne proportionnelle (Cf. *Él.* VI. 13 qui utilise le même terme "μέση").

⁵⁰ Cf. Annexe, formules [**3a.** (i-ii); **3b.** (i-ii')].

dire la même chose des usages ne s'embarrassant pas de la distinction « exprimable / irrationnelle » que l'on retrouve d'ailleurs dans les *Data* d'Euclide.

Il me paraît extrêmement imprudent d'y voir la trace de formulations archaïques — entendez "pré euclidiennes" — comme certains l'ont défendu, en arguant du fait que l'on trouve une telle formulation (fonctionnelle et générale) dans le témoignage sur la quadrature des lunules par Hippocrate⁵¹. En effet, selon Eudème rapporté par Simplicius, le géomètre de Chio fondait son étude des lunules sur le principe suivant [formule **3a** (i)] :

« ... ont le même rapport, et les segments de cercle semblables, l'un par rapport à l'autre, et leurs bases, en puissance. Et ceci, il le démontrait à partir du fait qu'il avait démontré que les diamètres ont, en puissance, le même rapport que les cercles »⁵².

Reconnaitre, dans les différentes formulations du résultat pour nous contenu dans la Proposition XII. 2 des *Éléments*, l'opposition de deux terminologies, l'une "archaïque" (Hippocrate, Archimède) en termes de "puissance", l'autre "moderne" (Euclide), ne va pas de soi⁵³. Nous ne savons même pas s'il s'agit de la formulation qu'Hippocrate utilisait plutôt que d'une reformulation d'Eudème. Il ne faut pas non plus oublier que ces formulations générales ont eu un certain succès durant toute l'époque hellénistique et romaine. Les mêmes usages "généraux" que nous avons relevés à propos d'Archimède se retrouvent chez Apollonius et dans les Livres V et VII de la *Collection* de Pappus, probablement à cause de leur concision, peut-être en corrélation avec le développement de la théorie des coniques, ce qui n'a finalement rien de spécifiquement archaïque.

5. Une dualité *δυνάμει* versus *δύνασθαι* ?

Nous avons vu que les deux formules « la droite ... peut [produire] (*δύναται*) l'aire ... » et « la droite pouvant produire (*ἡ δυναμένη*) l'aire ... est la [droite] ... » sont mathématiquement équivalentes, chacune mettant l'accent sur l'un des objets, la première sur l'aire, la seconde sur la droite "productrice". Existe-t-il une équivalence du même genre avec des expressions utilisant le marqueur *δυνάμει* ? Et si tel le cas, cela vaut-il pour tous les registres d'utilisation ou non ?

Observons d'abord que l'auteur des *Éléments* exprime toujours la capacité d'une droite à produire une aire [registre (1)] avec le verbe *δύνασθαι*, jamais avec le marqueur *δυνάμει*.

⁵¹ V. [Knorr, 1978], p. 196. La même thèse est défendue dans [Høyrup, 1990], pp. 204-205 (où il se réfère d'ailleurs à Knorr), p. 216, p. 217.

⁵² *Simpl. in Phys.*, p. 61, l. 6-9.

⁵³ La manière de citer le contenu de la Prop. XII. 2 des *Éléments* est un des arguments de Knorr pour établir une chronologie relative des œuvres d'Archimède. Selon K., le Syracusain utilisait les formules en termes de "puissance" avec une fréquence décroissante dans ses œuvres de maturité (réf. *supra*, in note 51*). L'affirmation est discutable. La formulation "archaïque" de Eucl. XII. 2 se trouve dans la Proposition 25 (*Arch.*, II, p. 94, l. 7-9) du traité des *Spirales*, une œuvre de maturité selon Knorr lui-même. Dans le même ordre d'idées, un résultat voisin de Eucl. XII. 11 est appliqué dans une formule type [**3a**. (ii)] dans la Proposition 21 du traité des *Conoïdes et Sphéroïdes*, autre traité de maturité. Cela dit, dans la Proposition 27 des *Spirales*, la Proposition XII. 2 est appliquée avec une formulation euclidienne en termes de carrés (*Arch.*, II, p. 112, l. 11-15). Même phénomène, cette fois pour Eucl. XII. 11, dans *Con.Sph.*, Prop. 27 (*Arch.*, I, p. 398, l. 5-10) !

S'il consulte l'Annexe, le lecteur se convaincra que cela vaut aussi pour l'ensemble des auteurs du corpus, à de très rares exceptions près. La validité d'une telle assertion dépend de la manière dont nos classes de formules ont été constituées. Ainsi certaines formulations portant sur l'égalité en puissance entre droites et aires — de fait entre deux aires dont l'une seulement est rapportée à la droite qui peut la produire (registre **2b**) —, pourraient être placées dans le registre (**1**), en considérant qu'il n'y apparaît pas de comparaison explicite, mais seulement le lien entre une droite et l'aire qu'elle peut produire. Une incertitude du même genre vaut également pour la formule [**2e** (ii')] :

« τὸ ... πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ... »
(Le [segment] ... peut [produire] [le] quintuple du [carré] sur la [droite] ...) ».

J'aurai pu la considérer comme un cas particulier de [**1**. (ii)], en identifiant l'aire produite X au quintuple d'un carré. J'ai préféré la rattacher à [**2e**. (ii)] pour des raisons grammaticales et mathématiques. On les trouve dans le même contexte — la division en extrême et moyenne raison — et dans le même passage — le début du Livre XIII⁵⁴. Linguistiquement, ces formules sont proches de [**2b**. (i)] [avec « πενταπλάσιον δύναται » au lieu de « ἴσον δύναται »], le génitif (à cause du rapport) remplaçant le datif caractéristique de l'égalité⁵⁵. Dans la formule [**1**. (ii)], un trait essentiel est que le verbe "δύνασθαι" est transitif.

Précisément, les formules [**2b**. (i), (i'), (ii)] se distinguent de [**1**. (i-ii)] par la présence de ἴσον et par l'utilisation du datif dans la désignation de l'aire. Il s'agit donc d'une comparaison implicite entre l'aire qu'une droite peut produire et une *autre* aire (τῷ ...) qui lui est égale. C'est pourquoi je les ai rattachées au registre (**2**), qualification de relations, en l'occurrence de l'égalité. Même si ce genre de décision est probablement discutable⁵⁶, la catégorie (**1**) s'en trouve ainsi mieux définie : la capacité d'une droite à produire une aire se définit par une forme transitive du verbe δύνασθαι, sans usage du datif caractéristique (τῷ ...) pour désigner l'aire dans une égalité.

Pour en revenir à la question initiale de ce paragraphe, on voit qu'il y a une seule exception à l'emploi d'une forme verbale : il s'agit de la formule [**2b**. (ii')] :

« ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΔΓ δυνάμει ἐστὶν δ' τοῦ ὑπὸ ΕΔΗ
(Et donc chacune des [droites] AD, DC est [égale] en puissance au 1/4 du rectangle contenu par ED, DH) ».

On n'y trouve ni le datif pour l'aire, ni ἴσα. Mais c'est un hapax, attesté dans un lemme de Pappus pour le Livre V des *Coniques*. Qui plus est, on peut penser que le texte en a été altéré et qu'au lieu de « δυνάμει ἐστὶν δ' », on avait « δυνάμει ἴσα τῷ δ' ».

En résumé, l'usage du marqueur δυνάμει est réservé pour qualifier des relations ou des relations de relations, autrement dit des formules dans lesquelles plusieurs (au moins 2) droites ou aires sont impliquées dans une comparaison mutuelle. Comme je l'ai déjà dit en

⁵⁴ Il s'agit d'évoquer un rapport spécifié, exprimable en puissance seulement, en termes modernes, le nombre irrationnel $\sqrt{5}$.

⁵⁵ En grec, quand on veut dire que A est égale à B, on écrit A ἴσον τῷ B.

⁵⁶ Dans *Sph.Cyl.*, I, 29, 35, Archimède introduit certaines droites à l'aide de la formule [**1**. (ii)], puis, quand il en rappelle la propriété caractéristique, le fait grâce à [**2b**. (i)] (autrement dit en ajoutant "ἴσον" à "δύναται").

discutant la théorie euclidienne de l'exprimabilité, ceci constitue une différence avec l'utilisation du terme "carré" puisque la considération du carré décrit sur une droite n'implique pas que cette dernière soit engagée dans une comparaison avec une autre.

De fait, il semble bien que la prégnance des formes verbales s'exerce sur un ensemble plus large d'utilisations, non seulement celles du registre (1), mais aussi celles où la comparaison des termes impliqués met en jeu une relation complètement déterminée. On peut le faire apparaître sous forme d'un petit tableau à double entrée :

	<i>δυνάμει</i> (424)		<i>δυναμένη, δύνασθαι</i> (533)	
Usages déterminés ou partiellement déterminés	[2b. (ii-ii')]	3	[1]	
	[2c. (iii)]		[2a]	20
	[2c. (vi)]	3	[2b. (i-i')]	10
	[2e. (i-i'-i'')]	68	[2c. (iv)]	
	[2e. (iv-iv')]		[2c. (v-v'-v'')]	138
	[3a. (iii-iii')]		[2e. (ii-ii')]	9
	[3b. (iii)]			
	(90)		(533)	
Usages indéterminés	[2c. (i)]		—	
	[2d. (i-i'-i'', ii, iii)]			
	[2e. (iii)]			
	[3a. (i, ii, iv)]			
	[3b. (i, ii-ii')]			
	(334)			

Pour la qualification de l'égalité (registres **2a-b**) nous avons vu qu'il n'y a finalement que trois exceptions sur 33 [dont l'hapax **2b.** (ii')]. Le registre de l'« excès en puissance » s'exprime presque exclusivement avec *δύνασθαι* [138 occurrences de **2c.** (v-v'') contre 3 de **2c.** (vi)]. Or il faut remarquer que si les formulations linguistiques relèvent de l'inégalité, mathématiquement il s'agit d'exprimer des égalités⁵⁷.

A l'inverse, le marqueur *δυνάμει* est utilisé lorsque la relation reste indéterminée. C'est le cas dans les formules de commensurabilité ou d'incommensurabilité (registre **2d**) et dans les relations de proportionnalité (registre **3**). En revanche, dans l'expression de rapports *donnés* exprimables en puissance (registre **2e**), le recours au marqueur *δυνάμει* n'est pas inévitable. Mais il est également justifié quand ledit rapport, quoique donné, n'est pas numériquement spécifié [**2e.** (iii)], ou quand les formules font intervenir l'opposition « *μήκει / δυνάμει* » [**2e.** (iv-iv')]. Il est donc possible de percevoir des choix terminologiques cohérents et plutôt constants dans le temps, en particulier en qui concerne l'usage de la dualité « *δυνάμει* versus *δύνασθαι* ».

L'exception à la règle est donc d'autant plus frappante : pour l'expression de rapports exprimables en puissance seulement [**2e.** (i-ii')] —, on constate qu'il y a apparemment deux

⁵⁷ J'aurai donc pu les ranger dans les registres **2a.** ou **2b.** plutôt que dans **2c** (qualification de l'inégalité).

formulations possibles équivalentes, l'une avec le qualificatif "δυνάμει" portant sur la relation R en cause (R δυνάμει εἶναι), l'autre avec le verbe "δύνασθαι", où c'est la relation R , exprimée par un adjectif, qui, en quelque sorte, "qualifie" la puissance d'une droite (δύνασθαι- R). Ainsi, seraient synonymes⁵⁸ : « être, en puissance, plus grande que ... » et « pouvoir [produire] plus que ... » ; « être, en puissance, double (triple ...) de ... » et « pouvoir [produire] le double (triple ...) de ... » ... De fait, il faut être extrêmement circonspect car cette dualité s'accompagne d'une certaine singularité statistique : les formules avec "δυνάμει" du registre (2e) [(i, i', i'')] représentent 68 des 77 occurrences concernées et les 9 utilisations du verbe "δύνασθαι" (formules [2e. (ii, ii')]) sont toutes liées aux seules Propositions XIII. 1-3 (dont une citation de XIII. 2 par Pappus)⁵⁹.

L'analyse quantitative précédente a permis de dégager un certain nombre de traits relatifs aux usages des formules en termes de puissance :

- Dans les *Éléments*, les formes verbales (y compris le participe substantivé ἡ δυναμένη) servent à mettre l'accent sur la "capacité" d'une droite à produire une aire quand celle-ci est impliquée dans un contexte où se manifeste le phénomène de l'irrationalité quadratique. Les géomètres hellénistiques en feront un usage moins circonscrit, peut-être en relation avec la théorie des coniques.
- Le marqueur δυνάμει sert à qualifier des relations, avec la même limitation d'emploi chez Euclide, l'application à des relations de relations, en particulier des proportions, chez ses successeurs.
- Le choix entre l'une ou l'autre de ces formulations semble assez fortement corrélé avec la nature indéterminée ou non de la relation qualifiée.

Pour l'instant j'ai pris en considération des usages "purement" géométriques au sens où, dans les formules considérées, interviennent seulement des lignes et des figures⁶⁰. D'autres font intervenir simultanément des objets géométriques et arithmétiques, par exemple des figures ou des grandeurs et des nombres ou des rapports numériques⁶¹; on pourrait appeler "mixtes" de tels usages. Les distinguer est certainement important pour discuter des relations qui existent entre le vocabulaire de la puissance et l'irrationalité, et ce, y compris chez Platon. Nous verrons que le célèbre passage du *Théétète* institue un tel usage mixte puisqu'il associe étroitement nombres et droites. Mais tournons-nous d'abord vers les mathématiciens alexandrins de l'époque romaine, souvent considérés comme "hétérodoxes", y compris en ce qui concerne l'usage des formules en termes de puissance : Héron et Diophante.

⁵⁸ C'est à peu près ce que j'avais admis précédemment. V. Eucl., *Él.*, 3, pp. 32-33.

⁵⁹ Cf. *supra*, note 40*.

⁶⁰ Même si le phénomène d'irrationalité quadratique dans lequel elles interviennent chez Euclide a bien entendu un lien avec des conditions arithmétiques comme on le voit dans le Livre X.

⁶¹ Voir Annexe les formules [2b. (ii-ii'), 2c. (iii), 2e. (i-iv), 3a. (iii-iii'), 3b. (iii)].

6. Héron et les formules mixtes

L'identification des écrits authentiques du célèbre mécanicien d'Alexandrie est une question notoirement difficile⁶². C'est pourquoi, dans mon inventaire, j'ai distingué d'une part les *Métriques*, traité unanimement attribué à Héron, les *Definitiones* dont une partie seulement serait authentique si l'on suit les auteurs les plus optimistes⁶³, et d'autre part les recueils de problèmes transmis sous son nom (*Geometrica*, *Stereometrica*), qui se rattachent probablement à son enseignement sans que l'on sache très bien dans quelle mesure d'autant que, pour chacune de ces collections, nous disposons d'au moins deux recensions assez divergentes.

L'intérêt des *Métriques* pour la question des formulations en termes de puissance a été mis en évidence par J. Høyrup. Il a souligné trois points :

- selon lui on peut détecter une certaine ambiguïté dans l'usage du terme *δύναμις*, et ce, tant chez Platon que chez Héron⁶⁴.
- Mieux encore, un terme mathématique babylonien ("mithartum"), ainsi qu'un sumérogramme (*ibsi₈*) utilisé dans des tables numériques, présenteraient la même ambivalence que *δύναμις* : quand on essaie de les traduire, ils sont eux aussi rendus tantôt par "carré", tantôt par « côté du carré ». Pour Høyrup, la similitude des concepts babyloniens et grec s'explique par l'emprunt⁶⁵.
- Il faut distinguer deux concepts de *δύναμις*, liés mais distincts, celui des géomètres (pour Høyrup, le carré identifié par son côté) et celui des calculateurs (2^e puissance d'une quantité)⁶⁶.

La mobilisation de Héron dans cette discussion possède à peu près la même fonction argumentative que les hypothèses chronologiques : Høyrup veut montrer que la même ambiguïté existe chez Platon et chez Héron parce que cette ambivalence grecque de longue

⁶² Voir l'état de la question dressé par G. R. Giardina in *Erone di Alessandria. Le radici filosofico-matematiche della tecnologia applicata*. DEFINITONES. Catania, CUECM, *Symbolon* N°26, 2003, pp. 31-74.

⁶³ Selon Heiberg (dans l'introduction de son édition critique de ladite collection, *Hero*, vol. IV, p. 4), les Définitions N°1 à 132 seraient authentiques. La même opinion est défendue par Heath, Drachmann (dans l'article "Heron" du *DSB*) et Giardina. L'authenticité a été contestée par P. Tannery. Récemment [Knorr, 1993] a proposé d'attribuer ce recueil à Diophante ! Pour ma part je crois que les N°1 à 129 dérivent probablement d'un écrit authentiquement héronien. La Définition N°129 correspond assez bien aux Df. X. 2-4. Malheureusement, la portion intéressante pour le sujet dont nous traitons ici est la section 136. 34, *a priori* inauthentique, et qui coïncide partiellement avec une scholie aux *Éléments* (N° X. 9). Voir Eucl., *Él.*, vol. 3, p. 44, note 8.

⁶⁴ Voir [Høyrup, 1990], p. 206.

⁶⁵ *Ibid.*, pp. 208-209 et 217.

⁶⁶ *Ibid.*, pp. 206-207, 216, 217. Comme je l'ai signalé au passage, à l'instar de Knorr, il considère que les formulations en termes de puissance sont archaïques et "démodées" à l'époque hellénistique, sauf dans quelques formules figées. Dans son argumentation, cette considération chronologique sert très clairement à renforcer l'hypothèse de l'emprunt (*ibid.*, en particulier pp. 216-217), l'abandon progressif de ces formules par les géomètres grecs correspondant à leur perception du caractère exogène du concept de *δύναμις*. Ces thèses sont incontestablement suggestives, mais il me paraît difficile d'y adhérer sans réserves. L'idée de distinguer deux concepts de *δύναμις*, correspond en quelque sorte à la distinction que j'ai introduite entre usages "purement géométriques" et "mixtes". J'ai déjà dit pourquoi qualifier les expressions en termes de puissance de "figées" me paraissait assez peu pertinent.

durée est à rapporter à un phénomène similaire, bien plus ancien puisque babylonien, mais aussi à un même contexte d'origine, la pratique des calculateurs. Nous reviendrons bientôt sur le cas de Platon. Pour voir ce qu'il en est chez Héron, il nous faut examiner ses usages du vocabulaire de la puissance. Les formes verbales sont rares. Le participe substantivé "δυναμένη" n'apparaît pas dans le corpus héronien et il n'y a que trois (autres) emplois de "δύνασθαι".

Ils devraient être "orthodoxes" puisqu'il s'agit simplement de citer Euclide (XIII. 10) et Archimède. Cela dit, le texte de renvoi au traité des *Conoïdes* dans la Proposition 34 du Livre I des *Métriques* :

« ... dans les *Conoïdes*, Archimède démontre que le rectangle contenu par les axes peut [produire] un cercle égal à l'ellipse » (ἐν τοῖς κωνοειδέσιν Ἀρχιμήδους δεικνύται ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἀξόνων δύναται κύκλον ἴσον τῇ ἐλλείψει)⁶⁷,

est corrompu. Heiberg et Schöne (l'éditeur des *Métriques*) affirment qu'il s'agit d'une citation de la Proposition 5 des *Conoïdes et Sphéroïdes* ⁶⁸. Ce n'est pas tout à fait exact. Dans ladite proposition, Archimède démontre que le rapport entre une ellipse d'axes AB, CD et un cercle de diamètre EF est le même que celui du rectangle contenu par les droites AB, CD relativement au carré décrit sur EF. On en déduit donc très facilement ce que Héron utilise ici : l'ellipse est égale au cercle si et seulement si Rect (AB, CD) = Carré sur EF, autrement dit si EF peut [produire] l'aire Rect (AB, CD)⁶⁹. Il en va probablement de même dans les *Stereometrica* :

« ... dans les *Conoïdes*, Archimède démontre que le rectangle contenu par les axes peut [produire] le carré sur le diamètre du cercle égal à l'ellipse » (ἐν τοῖς κωνοειδέσιν Ἀρχιμήδους δεικνύσιν ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἀξόνων δύναται τὸ ἀπὸ κύκλου διαμέτρου ἴσου τῇ ἐλλείψει)⁷⁰.

*

L'unique occurrence de "δύναμις" au nominatif se trouve dans les *Geometrica* d'authenticité contestée. Expliquant qu'il existe trois genres de mesure : linéaires (εὐθυμετρικόν), surfaciques (ἐμβαδομετρικόν) et stéréométriques (στερεομετρικόν) dont il donne une sorte de définition — les mesures surfaciques sont celles de ce qui a longueur et largeur, à partir de quoi la surface est connue (τὸ ἔχον μῆκος καὶ πλάτος, ἐξ οὗ καὶ τὸ ἐμβαδὸν γιγνώσκεται) —, le texte affirme au passage que la surface est aussi appelée "δύναμις" (ὃ δὲ καὶ δύναμις καλεῖται)⁷¹. Ce qui précède et ce qui suit montrent qu'il s'agit

⁶⁷ *Metr.*, L. I, ch. 34 (*Hero*, III, p. 82, l. 26-29).

⁶⁸ Voir *Arch.*, I, p. 281, note 5 et *Hero*, III, p. 82, l. 27.

⁶⁹ On attend donc ici quelque chose comme : « ὅτι τὸ ὑπὸ τῶν ἀξόνων δύναται ἢ τοῦ κύκλου διάμετρος ἴσου τῇ ἐλλείψει (le diamètre du cercle égal à l'ellipse produit le rectangle contenu par les axes) » [formule 1. (ii)]. La correction proposée par Heiberg : < διάμετρον > κύκλου ἴσου me paraît inadéquate.

⁷⁰ *Stereom.* I, 92, l. 1 (*Hero*, V, p. 80, l. 19-22). On pourrait aussi maintenir le texte en admettant que "δύνασθαι" — ici — ne signifie pas « pouvoir [produire une aire] », mais simplement "équivaloir". Le sens mathématique serait préservé.

⁷¹ Ch. 3, sect. 20, l. 1-2 (*Hero*, IV, p. 180, l. 6-7).

de faire le lien entre la terminologie de la mesure (arpentage ?) et les espèces numériques les plus simples telles qu'elles sont exposées par Diophante (*ἀριθμός, δύναμις, κύβος*).

Cette tentative, vraisemblablement tardive, n'affaiblit donc pas notre premier constat. Sans doute est-elle liée à un usage arithmétique, lui aussi tardivement attesté⁷², qui donne à "δύναμις" le sens de « produit de deux nombres », et ce, sans doute à partir d'une description laconique de "δύναμις" (en réalité il s'agit d'une règle de multiplication des espèces) que certains ont cru pouvoir lire dans l'introduction de Diophante :

« Un nombre multiplié par un nombre produit une puissance »
(Αριθμὸς μὲν ἐπὶ ἀριθμὸν πολυπλασιασθεὶς ποιεῖ δύναμιν)⁷³.

*

Jens Høyrup croit pouvoir mentionner un autre exemple, dans un traité héronien authentique cette fois, en l'occurrence dans le problème 17 du Livre I des *Métriques* ⁷⁴. Il y serait question du carré sur une δύναμις. Le texte édité par Schöne est :

« ἡ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ δυνάμεως πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ ... »⁷⁵.

Mathématiquement il s'agit de désigner le rapport $B\Gamma^4 : (B\Gamma^2 \times A\Delta^2)$. Celui-ci est repris, après substitution pour le conséquent, par la formule : « ἡ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ δυναμοδύναμις πρὸς... »⁷⁶. Celle-ci, calquée sur celle de la désignation du carré, est la formule correcte. Pour qu'il soit question du carré sur une δύναμις, il faudrait « τὸ ἀπὸ τῆς (ἀπὸ τῆς) ΒΓ δυνάμεως », avec, en début de phrase, l'article neutre "τό", et non l'article féminin "ἡ". Pour la moins probable δύναμις d'un carré, il faudrait « ἡ τοῦ ἀπὸ τῆς ΒΓ δύναμις », avec le nominatif et non le génitif. Il faut donc corriger δυνάμεως en δυναμοδύναμις dans la première formule qui ne constitue donc pas un nouvel exemple d'usage du substantif δύναμις.

C'est bien fâcheux pour l'interprétation de Høyrup car cette occurrence était la seule des *Métriques* dans laquelle on pouvait lire « δύναμις = carré ». Elle permettait donc à notre collègue de retrouver, chez Héron, l'ambiguïté « carré — racine carrée » qu'il décelait, comme beaucoup d'autres, chez Platon. Après l'analyse qui précède, cette thèse me paraît dépourvue de support textuel.

*

⁷² V. par ex. *Jamb. in Nic.*, p. 108, l. 27. En 82, l. 6-8 Jamblique qualifie de "δυνάμεις", non seulement les nombres carrés, mais aussi les hétéromèques. Je remercie N. Vinet d'avoir attiré mon attention sur ce passage. On retrouve cet usage dans une scholie au Livre X, N°X, 25 : « Tout côté, multiplié par lui-même, ou par un autre, produit une puissance » (Πᾶσα πλευρὰ ἐφ' ἑαυτὴν πολλαπλασιαζομένη ἢ ἐφ' ἑτέραν δύναμιν ποιεῖ), *EHS*, V, 2, p. 101, l. 24-25.

⁷³ *Dioph.*, p. 8, l. 1-2. Mais à cet endroit "ἀριθμός" désigne le nombre indéterminé cherché — la règle équivaut donc à notre « $x \cdot x = x^2$ » —, et non pas un nombre entier quelconque.

⁷⁴ [Høyrup, 1990], p. 206.

⁷⁵ *Hero*, III, p. 48, l. 5-6.

⁷⁶ *Ibid.*, l. 10-12 ("τῆς" manque et le préfixe "δυναμο-" a été ajouté en marge par la première main) et l. 18-20 (avec une erreur de flexion, mais le terme "δυναμοδύναμις" est entier !).

Restent les autres emplois de *δύναμις* (autrement dit du datif *δυνάμει*) qui sont plutôt intéressants et idiosyncrasiques. Héron utilise trois formules :

(H. i) — « ἡ (τὸ) ... ἔστιν δυνάμει N » (la [droite] (l'[aire] ... est, en puissance, [le nombre] N)⁷⁷.

(H. ii) — « ... δυνάμει N » ([ce qui], en puissance [est] N).

(H. ii') — « ... δυνάμει N, μήκει n » ([ce qui], en puissance [est] N, en longueur [est] n).

Les formules (H ii-ii') sont des *quasi hapax*. Elles apparaissent seulement dans une séquence très particulière du problème 15⁷⁸ :

« ... Il est produit, en puissance⁷⁹, 4356 ... Et retranche de [ce qui est,] en puissance, 121, [ce qui est,] en puissance, 36, il reste [ce qui est,] en puissance, 25 et qui, en longueur, est 5 » (... γίγνεται δυνάμει δυνς ... καὶ ἀφ'ἐλε ἀπὸ δυνάμει ρκα δυνάμει λς ... λοιπὰ δυνάμει κε, ἃ ἔστι μήκει ε).

Une transcription moderne sera : « $\sqrt{121} - \sqrt{36} = \sqrt{25} = 5$ »⁸⁰. L'expression « δυνάμει N » équivaut à l'extraction de la racine carrée. Ces formules ont le mérite de montrer sans ambiguïtés que le marqueur "δυνάμει", porte sur le nombre qui suit. Elles permettent donc de lever l'apparente ambiguïté des formules de type (H i) où, dans « X δυνάμει N », on pourrait tout aussi bien lire, selon la signification qu'on veut donner à "δυνάμει" : « X, au carré, vaut N » ou « X vaut la racine carrée de N ».

Même en termes anciens la chose n'est pas tout à fait sans importance. Ainsi dans l'exemple héronien où il s'agit de l'aire d'un triangle (*Métriques*, I. 9), il ne revient pas au même de traduire « l'aire du triangle, au carré, vaut 1575 » ou bien « l'aire du triangle vaut $\sqrt{1575}$ », puisque dans le premier cas on fait apparaître une grandeur de "dimension 4". Cela dit, nous avons vu que c'est justement l'une des originalités des *Métriques* que la prise en considération de telles entités, et pas seulement dans le cas particulier des puissances quatrièmes (δυναμοδυνάμεις) d'une quantité, par analogie avec ce qui se passe dans les nombres⁸¹.

La caractéristique la plus intéressante des usages héroniens de *δυνάμει* est qu'ils portent aussi bien sur des lignes que sur des nombres. Les textes classiques distinguaient fermement entre grandeurs et nombres, les premières étant des quantités indéfiniment divisibles, tandis que la division des seconds s'arrête avec l'unité. Aussi les formules que j'ai

⁷⁷ Voir *Métriques*, L. I, Ch. 9 (*Hero*, III, p. 26, l. 26-27 : aire d'une triangle); Ch. 15 (*ibid.*, p. 42, l. 8-10, 19, 26 : droites). On trouve également une formule de ce genre dans les *Geometrica*, 16. 9 (*Hero*, IV, p. 305, l. 24-25), dans les *Stereometrica*, I, 33 (*Hero*, V, p. 34, l. 8-9), et dans un lemme du Livre V de la *Collection* de Pappus (*Papp.*, p. 432, l. 6-7).

⁷⁸ Voir *Métriques*, L. I, Ch. 15 (*Hero*, III, p. 42, l. 21-24).

⁷⁹ Il s'agit probablement d'une erreur. On a multiplié 180 par 24 1/2 et on dit qu'il est produit, δυνάμει, 4356. Ce que Schöne, dans sa trad., transcrit « $(180 \times 24 \frac{1}{2})^2 = 4356$ ». Manifestement il n'avait pas de calculatrice sous la main ! Le terme δυνάμει n'a rien à faire à cet endroit.

⁸⁰ C'est en tout cas celle de la traduction allemande de Schöne (*Hero*, III, p. 43).

⁸¹ Le point de départ de telles considérations pourrait résider dans la mise en œuvre calculatoire de la célèbre formule dite de Héron — mais que certaines sources arabes attribuent à Archimède — pour calculer l'aire d'un triangle à partir de la donnée de ses côtés. En termes modernes, si on note a, b, c les côtés et p le demi-périmètre du triangle, sa surface S est $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Cette formule est l'objet de la section I. 8 des *Métriques* (*Hero*, III, p. 18, l. 12—p. 24, l. 29); on y trouve des expressions comme « l'aire du triangle ..., multipliée par elle-même, sera égale au produit du carré sur ... par le carré sur ... ».

qualifiées de mixtes ([**2b.** (ii-ii')], [**2c.** (iii)], [**3a.** (iii-iii')], [**3b.** (iii)]) associaient-elles nombres et grandeurs par le seul biais des rapports. Car un rapport de grandeurs peut être le même qu'un rapport de nombres (si et seulement si elles sont commensurables. Cf. Eucl., *Él.*, X. 5-6). Ici, dans la perspective métrologique qui est la sienne, Héron identifie droites, aires et volumes avec leurs mesures, exprimées en nombres. Ne serait-ce qu'à cause de règles de calcul aussi simples que celle que l'on peut dériver du théorème de l'hypoténuse (I. 47), cette détermination calculatoire effective oblige Héron à poser la question de l'exprimabilité des irrationnelles quadratiques (et cubiques) dans des termes autres que ceux de l'approche théorique développée par Euclide dans les Livres X et XIII. Celui-ci pouvait se permettre d'affirmer que des quantités que nous, Modernes, écrivons $\sqrt{N}$ étaient exprimables (médiatement, c'est-à-dire commensurables en puissance seulement avec l'élément de référence). Héron doit dire combien ça fait (approximativement) !

C'est probablement pour cette raison qu'il utilise une autre conception de l'exprimabilité que celle d'Euclide. Est dit "exprimable" ce qui est exprimable en nombres. Cette conception alternative — "métrologique" — est également repérable chez Pappus⁸², Théon d'Alexandrie, Proclus, Marinus et dans certaines scholies aux *Éléments*⁸³. On la trouve aussi dans les sections 134.34-35 du recueil des *Definitiones* dont nous ne connaissons pas vraiment l'auteur, mais avec lesquelles nous clôturerons notre inventaire "héronien". Elles introduisent de nouvelles qualifications que l'on peut comparer aux formules euclidiennes du registre **2d**, l'« exprimabilité en puissance » et l'« exprimabilité en puissance seulement »⁸⁴. Elles représentent sans doute une tentative de compromis entre les deux conceptions de l'exprimabilité dont nous venons de parler⁸⁵.

⁸² Ou plutôt dans le commentaire au Livre X attribué à Pappus, notamment dans les §§ I. 4, 12, 17 et II. 11. Mais l'unicité d'auteur, tout particulièrement pour la partie I. 1-19, me paraît très peu probable. Voir Eucl., *Él.*, vol. 3, pp. 418-419. J'y vois une composition à plusieurs voix dont l'une, au moins, appartenait à l'école néoplatonicienne d'Athènes, peut-être Proclus lui-même ou son disciple Marinus. La conception "métrologique" s'imposait pour les Platoniciens dès qu'il s'agissait de commenter des passages comme celui du nombre nuptial dans le Livre VIII de la *République* puisque c'est cette même conception que le Maître utilisait. On ne s'étonnera donc pas de voir Proclus parler de l'inexprimabilité de la diagonale du carré quand il commente ce passage (Voir *Pr. in Remp.*, XIII^e Dissertation, § 23, II, p. 24, l. 16-18; § 27, II, p. 27, l. 1-2, 7-8; §35, II, p. 38, l. 13-16). Il n'est pas toujours facile de savoir si les auteurs de commentaires adhéraient à cette conception ou s'ils s'astreignaient simplement à adopter les modalités d'expression de leurs modèles. Le commentaire du premier Livre des *Éléments* par Proclus n'est guère explicite quoiqu'il évoque à plusieurs reprises, mais en termes plutôt vagues, la question des irrationnelles. La même incertitude prévaut dans l'*Expositio* de Théon de Smyrne.

⁸³ Eucl., *Él.*, vol. 3, pp. 45-48.

⁸⁴ Voir annexe, formules [**2d.** (i'-i'')].

⁸⁵ Voir Eucl., *Él.*, vol. 3, pp. 48-49. Bien entendu on retrouve de telles formules dans de nombreuses scholies aux *Éléments* (par exemple les N^oI. 155, X. 9, 166, 181, 182, 219) mais, il faut le noter, aucune d'entre elles n'appartient, de manière assurée, à une collection ancienne.

7. Le cas Diophante

Diophante adhère également à cette conception (non euclidienne) de l'irrationalité⁸⁶, mais ce n'est pas à ce titre que nous en parlerons ici. J'ai déjà souligné la singularité statistique qu'il représente : la plupart des occurrences du substantif "δύναμις" autres que le datif se trouve dans les *Arithmétiques*. Les treize⁸⁷ livres de problèmes étaient précédés d'une préface tout à fait décisive pour ce qui nous intéresse ici. Diophante rappelle à son dédicataire Dionysos que tout nombre est composé d'une certaine multitude d'unités (Cf. Eucl., *Él.*, Df. VII. 2), que leur constitution procède à l'infini. Il énumère alors une (première) liste d'espèces de nombres avec leurs définitions : les carrés (τετράγωνοι), les cubes (κύβοι), les δυναμοδυνάμεις, les δυναμοκύβοι et les κυβόκυβοι. A partir de ceux-ci, par leur composition ($\approx$ addition), excès ($\approx$ soustraction), multiplication et rapport mutuel ($\approx$ division), mais aussi relativement à leurs propres côtés, il adviendra que beaucoup de problèmes arithmétiques seront constitués. Diophante ajoute que :

« chacun de ces *nombres*, ayant acquis une désignation abrégée, a été approuvé comme étant un élément de la théorie arithmétique » (Ἐδοκιμάσθη οὖν ἕκαστος τούτων τῶν ἀριθμῶν συντομωτέραν ἐπωνυμίαν κτησάμενος στοιχείον τῆς ἀριθμητικῆς θεωρίας εἶναι)⁸⁸.

Suit alors la "même" liste de cinq espèces, accompagnées de leurs abréviations respectives, mais avec une importante variante pour la première entrée :

« Ainsi le carré est appelé "puissance", et sa marque distinctive est un Δ ayant comme indice Υ ; la puissance [est] : Δ^{Υ} » (καλεῖται οὖν ὁ μὲν τετράγωνος δύναμις καὶ ἔστιν αὐτῆς σημεῖον τὸ Δ ἐπίσημον ἔχον Υ , Δ^{Υ} δύναμις)⁸⁹.

C'est seulement après cette nouvelle énumération que Diophante introduit sa notion (très personnelle) d'"ἀριθμός"⁹⁰, de « nombre contenant une multitude indéterminée d'unités » et dont on ignore, par conséquent, s'il possède ou non l'une des structures multiplicatives qui viennent d'être décrites. Il précise ensuite le signe de l'unité (M°) qui servira à indiquer les nombres spécifiés dans les calculs, par exemple " $M^{\circ}\delta$ " pour "4", puisque Diophante a fait un sort particulier à "ἀριθμός". Puis vient une liste des (espèces de) parties homonymes aux (espèces) de *nombres* qui viennent d'être nommés (... καὶ τῶν νῦν ἐπονομασθέντων

⁸⁶ Voir Eucl., *Él.*, vol. 3, p. 48, note 29.

⁸⁷ Six sont conservés en grec (Cf. *Dioph.*) et quatre ont été retrouvés dans une traduction arabe. Voir Sésiano, J., *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica in the arabic translation attributed to Qusṭā ibn L'qā*. New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982 et Diophante, *Les Arithmétiques*, Tomes III-IV. Texte établi et traduit par R. Rashed. Paris, les Belles-Lettres, 1984.

⁸⁸ J'essaie de rendre le texte de manière assez littérale, l'élégance de l'expression dût-elle en souffrir. La paraphrase que donne [Høyrup, 1990], p. 207 : « *In agreement with general convention, however, the second and third power of the unknown number are spoken of as dynamis and cube* » (c'est lui qui souligne) me paraît un peu forcée, voulant suggérer qu'il y a là une (longue) tradition. D'ailleurs il affirme au même endroit que les conventions générales de Diophante (en ce qui concerne l'usage de *δύναμις*) étaient déjà familières aux calculateurs du temps de Platon.

⁸⁹ *Dioph.*, p. 4, l. 14-16.

⁹⁰ Ce point est souligné par Rashed, *op. cit.*, p. 113 qui en déduit que « le terme "δύναμις" a donc deux significations : le carré d'un nombre, et "le nombre provisoirement indéterminé" élevé au carré ». [Høyrup, 1990], p. 218, note 9, le suit sur ce point.

ἀριθμῶν τὰ ὁμώνυμα μόρια κληθήσεται παρομοίως τοῖς ἀριθμοῖς)⁹¹. Ainsi, à la *δύναμις*, correspond le *δυναμοστόν*. Diophante expose ensuite les règles de multiplication entre ces nombres (αὐτῶν)⁹².

Dans ces règles préliminaires, il s'exprime donc comme si le terme *δύναμις* désignait une espèce de nombres, en l'occurrence ceux que l'on appelle aussi "carrés" (τετράγωνοι). Cette espèce est donc singulière car, contrairement aux quatre autres, ses membres pourraient recevoir deux désignations interchangeables. Cette description se heurte à une difficulté : la synonymie que l'on peut déduire des règles préliminaires ne correspond pas à ce que l'on observe dans les problèmes. Soulignons d'abord que la plupart des problèmes de Diophante comporte une condition en termes d'espèce de nombres, par exemple : « Partager un carré proposé en deux carrés » ; « Trouver deux nombres tels que le cube du premier, accru du second nombre, forme un cube, et que le carré du second nombre, accru du premier nombre, forme un carré » ; « Trouver un triangle rectangle tel que le nombre de l'hypoténuse, diminué de chacun des nombres des perpendiculaires, forme un cube » ... Ces conditions d'espèces sont donc très importantes dans son exposé mais, pour les formuler dans les *énoncés*, Diophante utilise seulement les termes "carrés" (τετράγωνοι) et "cubes". Jamais n'y apparaissent les *δυνάμεις*, ni les *δυναμοδυνάμεις*, *δυναμοκύβοι* et autres *κυβόκυβοι*, non plus que les abréviations qui les désignent⁹³.

D'où un énoncé tel que : « Trouver deux nombres carrés tels que la somme de leurs carrés soit un cube » alors qu'il était expédient de dire « Trouver deux *δυναμοδυνάμεις* dont la somme soit un cube ». Autrement dit, les termes "δύναμις", "δυναμοδύναμις", "δυναμόκυβος", "κυβόκυβος" ne désignent jamais un nombre spécifié, mais seulement une des puissances du nombre inconnu — on devrait dire de la quantité inconnue —, quand elles interviennent dans les calculs⁹⁴.

On voit donc que la dualité « τετράγωνος — δύναμις » sert à en manifester d'autres : celle de l'indéterminé et du spécifié, celle de l'énoncé et de la procédure, sans oublier l'usage abrégatif manifeste. Il s'agit donc d'une problématique très particulière et dire, avec, ou à la suite de Tannery, qu'il s'agit là de l'usage *classique* du terme "δύναμις", n'est ni plus ni moins qu'une plaisanterie.

Après l'avoir évoqué pour Platon et Héron, faut-il admettre que le terme possède deux significations distinctes chez Diophante ? Ce n'est pas sûr. Si l'on suit Rashed⁹⁵ et qu'on s'attache à l'ordre d'exposition suivi dans l'introduction, on voit que Diophante veut d'emblée préciser les espèces (multiplicatives) de nombres à prendre en compte. Cela se conçoit bien

⁹¹ *Dioph.*, p. 6, l. 9-19.

⁹² *Dioph.*, p. 6, l. 22—p. 12, l. 18.

⁹³ Le mot "δύναμις" entier, en dehors de l'introduction que je viens de décrire, apparaît seulement dans le problème VI. 12 en deux occurrences (*Dioph.*, p. 418, l. 20, l. 21-22), le mot "δυναμοδύναμις" entier, une fois dans le premier Lemme qui suit VI. 11 (*Dioph.*, p. 414, l. 2).

⁹⁴ [Heath, 1921], vol. II, p. 458, en avait déjà fait la remarque.

⁹⁵ Référence *supra*, note 90*.

car dans les traditions arithmétiques euclidienne et néo-pythagoricienne, n'étaient mentionnés que les carrés et les cubes⁹⁶. Or la première liste mentionnée a quelque chose d'incongru : les noms des puissances supérieures à 3 sont formés par concaténation, mais à partir d'un seul des deux noms qui précèdent : *κύβος*. Ainsi la quatrième puissance d'un nombre ne s'appelle pas *τετραγωνοτετράγωνος*, mais *δύναμοδύναμις*, appellation que nous avons déjà rencontrée chez Héron⁹⁷. Pour justifier la cohérence de ces désignations, l'auteur des *Arithmétiques* introduit donc la remarque (simple déduction étymologique) précédemment citée : « le carré s'appelle aussi *δύναμις* ». Il le fait *avant* d'introduire la notion de nombre indéterminé car le mouvement de l'exposé va de l'énumération des cinq structures multiplicatives pertinentes à leur absence ("ἀριθμός"), pour finir avec une simple convention graphique : la position de l'abréviation de l'unité (M°) dont Diophante ne donne d'ailleurs aucune caractérisation. Même si l'ordre de l'exposé est quelque peu singulier, cela nous paraît assez peu significatif en comparaison des usages constamment observés dans les quelque 260 problèmes conservés.

Bien entendu, quand bien même on prétend ainsi décrire et relativiser l'utilisation diophantienne de *δύναμις*, reste que son sens est bien celui de l'élévation à la deuxième puissance et que l'on a opté, à une certaine époque, pour *δύναμοδύναμις* en lieu et place d'un possible *τετραγωνοτετράγωνος*. Diophante n'a probablement pas inventé l'équivalence « *τετράγωνος* = *δύναμις* » qui, chez lui, ne n'oublions pas, concerne les nombres. Nous la trouvons en effet dès la fin du I^{er} siècle avant notre ère dans la tradition exégétique du *Théétète*.

Avant d'en arriver à Platon et à ses commentateurs, il nous faire un excursus au sujet du fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules par Hippocrate (vers 430^a). J'aurai pu (dû ?) l'inclure dans mon corpus géométrique, mais dans la mesure où l'étude dudit corpus a mis en évidence certaines inflexions historiques dans l'usage des formules en termes de puissance, ainsi que dans les théories de l'exprimabilité et de l'irrationalité (euclidienne ou "métrologique"), il m'a paru plus prudent de différer l'examen d'un texte *a priori* composé à 3 voix : Hippocrate, Eudème et Simplicius. Les inflexions que je viens d'évoquer impliquent qu'il faudrait au moins pouvoir distinguer ce qui est imputable à Eudème et ce que l'on doit au Commentateur de l'Antiquité tardive.

⁹⁶ Euclide définit aussi les nombres plans et solides et particularise ceux qui sont semblables. Nicomaque s'intéresse également aux espèces définies de manière additive, nombres polygones auquel Diophante consacra d'ailleurs un traité partiellement conservé.

⁹⁷ On pourrait donc affirmer qu'elle est antérieure à Diophante en admettant la chronologie habituellement retenue pour l'Auteur des *Arithmétiques* : le III^e s. de notre ère. Mais celle-ci repose sur des bases bien incertaines. Je remercie Fabio Acerbi d'avoir attiré mon attention sur ce point.

8. Le cas particulier du fragment d'Eudème

Ce fragment est transmis dans les pages 60-68 du *Commentaire* de Simplicius à la *Physique* d'Aristote. Le Commentateur affirme qu'il suivra Eudème « mot à mot »⁹⁸, mais en utilisant les *Éléments* d'Euclide pour pallier le style selon lui particulièrement concis des Anciens. Et l'on trouve en effet plusieurs citations d'Euclide, accompagnées d'explications très élémentaires pour montrer comment les résultats établis dans lesdites Propositions⁹⁹ interviennent dans le contexte des lunules. Ces portions de textes sont donc à exclure, si l'on cherche à circonscrire le compte-rendu d'Eudème, ce à quoi se sont employés Diels, l'éditeur de Simplicius (aidé par Usener et Tannery), mais aussi plusieurs historiens des mathématiques anciennes, avant et après lui : Bretschneider, Allmann¹⁰⁰, Tannery¹⁰¹, Rudio¹⁰², Becker¹⁰³, Thomas¹⁰⁴ ... L'étude de ce fragment est inévitable dans la mesure où lesdites pages du *Commentaire* de Simplicius contiennent 32 ou 33¹⁰⁵ formules en termes de puissance ! Deux d'entre elles¹⁰⁶, au moins, sont incontestablement à rapporter au Commentateur et l'on comprend bien que le problème de l'extraction du fragment d'Eudème à partir de ces pages est essentiel pour pouvoir parler des usages de la puissance avant Euclide. Or, force est de constater que les différents auteurs que je viens de citer ne sont pas d'accord entre eux. Par

⁹⁸ Peut-être Eudème, mais apparemment pas Euclide ! Nous avons vu comment Simplicius formule le théorème Eucl., I. 47 (voir *supra*, note 39*). Simplicius injecterait-il parfois la terminologie d'Eudème dans ses citations d'Euclide ? Ce n'est pas toujours le cas comme on le voit dans la citation, cette fois littérale, qu'il fait d'Eucl. XII. 2 (*ibid.*, p. 61, l. 11), après en avoir rapporté (l. 8-9) une formulation en termes de "puissance" [3a (i)].

⁹⁹ Successivement : Eucl. *Él.*, XII. 2, III. 33, Df. III. 11, I. 47, I. 9, II. 14, I. 13, I. 32, NC 3, III. 1Por., I. 29, III. 3, IV. 5, I. 5, III. 31, IV. 15Por.

¹⁰⁰ Le travail original de Allman a été publié en 1881 sous forme d'articles. Ses différents travaux sur la géométrie pré-euclidienne ont ensuite été réunis dans [Allman, 1889]. Pour le fragment d'Eudème, voir en particulier les pages 69-75.

¹⁰¹ [Tannery, 1883] retrace l'histoire des différentes tentatives d'attribution antérieures à la sienne et sa collaboration avec Diels, en particulier pp. 339-344.

¹⁰² Rudio, F., *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates*. Leipzig, B. G. Teubner, 1907 (Réimp. Vaduz, Sändig, 1968), a légèrement modifié les identifications établies par Diels. Il a aussi proposé une reconstruction pour un passage corrompu (*Simpl. in Phys.*, p. 66, l. 15-24), *op. cit.*, p. 66. Dans son édition des fragments d'Eudème, [Wehrli, 1969], N°140, s'est contenté de reproduire la version de Diels.

¹⁰³ La tentative de [Becker, 1936c] m'a été signalée par F. Acerbi à la lecture d'une première version de ce texte et je l'en remercie. Il m'aurait été difficile d'en tenir compte dans l'étude que je fais ici car il introduit *a priori* un critère en termes de puissance pour distinguer entre Simplicius et Eudème : ce dernier utilisait seulement les formules en *δυνάμει* tandis que Simplicius recourait, en outre, aux formes verbales (*op. cit.*, Kriterium 2, p. 412). Ce critère conduit Becker à rejeter d'emblée la formule contenue dans Diels, p. 63, l. 11-13 (voir *infra*). Cela dit, constater après coup que je propose les mêmes exclusions que Becker est rassérénant.

¹⁰⁴ Thomas, I., *Greek Mathematical Works*. 2 vol. Cambridge Massachusetts, Harvard University Press & London, W. Heinemann, Loeb Classical Library, 1939, pp. 234-252. Bien qu'il critique le travail de Rudio (*ibid.*, p. 237, note b), il en reproduit pourtant le choix (y compris la reconstruction du passage corrompu), à l'exception de deux petites phrases (*Simpl. in Phys.*, p. 63, l. 10-11; l. 14-15), soit un peu plus de deux lignes de texte sur un total de 263 ! Mais ces deux petites phrases (Rudio les attribuait à Simplicius, Thomas croit qu'elles proviennent d'Eudème) contiennent chacune une formule avec "δύνασθαι".

¹⁰⁵ A condition de rétablir, comme cela est (mathématiquement) nécessaire, le marqueur "δυνάμει" p. 66, l. 1-2 (ήμιολία γὰρ <δυνάμει> ὑπόκειται ἢ EZ τῆς ...), l. 4-5 (ὡς δὲ εὐθεῖαι πρὸς τὰς εὐθείας <δυνάμει>, τμήματα πρὸς τὰ τμήματα) et l. 25 (ήμιολία δὲ <δυνάμει> ἢ ZE τῆς ...). On peut aussi le faire p. 67, l. 36-37 (ἢ δὲ ΘΗ ἑξαπλασία <δυνάμει> τῆς ἐφ' ἧ AB ...), mais ce n'est pas obligatoire, d'où l'incertitude.

¹⁰⁶ *Simpl. in Phys.*, p. 62, l. 1-4 (citée *infra*) et p. 63, l. 25-26.

conséquent, sur le nombre des formules en termes de puissance que l'on pourrait rapporter à Eudème, il n'y a pas unanimité : Diels en retient 29, tandis qu'Allmann en attribue seulement 14 à l'Auteur des *Histoires géométriques*, Tannery 17, Rudio 22, Becker 13, Thomas, 24 !

Il faut rappeler brièvement les critères d'attribution que ces différents érudits ont utilisés. Pour l'essentiel, il y en a deux : le premier est herméneutique et stylistique — on écarte les citations d'Euclide ajoutées par Simplicius et les explications très élémentaires qui s'y rattachent —, le second est formel, il touche au lettrage des schémas géométriques. Le texte de Simplicius contient en effet deux types de désignations des objets géométriques, les unes que l'on peut qualifier de "complexes" [« le [point] auprès duquel (ou sur lequel) [est] A » ($\tau\omicron \epsilon\phi' \hat{\omega} A$), « la [droite] auprès de laquelle (ou sur laquelle) [est] B Γ » ($\eta \epsilon\phi' \hat{\eta} B\Gamma$)], les autres, simples [« le [point] A » ($\tau\omicron A$), « la [droite] B Γ » ($\eta B\Gamma$)], que l'on trouve dans les textes des géomètres de l'époque hellénistique, du moins tels qu'ils nous sont parvenus.

Selon Allman et Tannery, les notations "complexes" sont à rapporter à Eudème¹⁰⁷ et constituent un bon critère de discrimination, du moins pour les portions de textes dans lesquelles intervient le lettrage des diagrammes. Il faut d'ailleurs remarquer que l'on ne trouve aucune notation complexe dans les explications sur les quadratures d'Hippocrate que Simplicius a précédemment reprises à Alexandre d'Aphrodise¹⁰⁸. Les notations simples n'appartiennent pas nécessairement à Simplicius mais, quand elles apparaissent dans des explications très élémentaires, on peut, en combinant les deux critères, attribuer celles-ci à Simplicius. C'est ce qui a permis à Allmann, Tannery et Becker de rejeter des portions englobant douze formules qui font la différence entre les décomptes que j'ai menés sur leurs découpages, quand ils sont d'accord, et celui de Diels.

Pour ma part, j'ajouterai une autre indication stylistique. Dans mon travail sur l'histoire du texte des *Éléments*, j'ai établi une typologie détaillée des séquences textuelles que les commentateurs et autres scholiastes ont portées dans les marges des manuscrits d'Euclide et qui, trop souvent, se sont trouvées incorporées dans le texte au cours de la transmission ultérieure¹⁰⁹. Mon hypothèse est que Simplicius, en explicitant le laconique compte-rendu d'Eudème, a probablement utilisé le même type de formulations. Or, si on reprend les douze formules en termes de puissance écartées par Allmann, Tannery et Becker, on constate que huit d'entre elles¹¹⁰ — au moins¹¹¹ — interviennent dans ce que j'ai appelé des *explications*

¹⁰⁷ Voir [Allman, 1889], p. 72, note 45 et [Tannery, 1883], pp. 339-344. [Bretschneider, 1870], p. 114, note 2, les attribuait à Hippocrate lui-même. Allman et Tannery ont fait valoir que le recours à des formules complexes de désignation se trouve encore chez Aristote. J'ai repris la question en détail, à propos du célèbre passage des *Météorologiques* consacré à l'arc-en-ciel, et souligné que cette pratique des notations complexes s'est poursuivie plus tardivement que ne le croyaient Allman et Tannery, probablement jusqu'à l'époque d'Apollonius et Hypsiclès. Voir [Vitrac, 2002], pp. 245-254.

¹⁰⁸ *Simpl. in Phys.*, p. 55, l. 25—p. 60, l. 21.

¹⁰⁹ Voir Eucl., *Él.*, vol. 4, pp. 45-69.

¹¹⁰ V. *Simpl. in Phys.*, p. 63, l. 14-15; p. 66, l. 1-2; p. 66, l. 24-25 et l. 26-27; p. 68, l. 6-7 et l. 9.

¹¹¹ En fait c'est toute la séquence 66, l. 24—p. 67, l. 2 (qui contient cinq formules de puissance) qui peut être considérée comme une grande explication postposée "en cascade", avec plusieurs indicateurs caractéristiques ($\gamma\acute{\alpha\rho}$, 2 occurrences de $\epsilon\pi\epsilon\iota\delta\eta$). Il y a donc tout lieu de l'exclure comme l'ont fait Allmann, Tannery, Becker

postposées et des *rappels d'hypothèse*, voire une combinaison de ces deux items caractéristiques de l'annotation des textes mathématiques dans l'Antiquité tardive¹¹².

En admettant qu'il y a là un bon critère, nous pouvons donc, avec Allmann et Becker, exclure également la séquence 67, l. 32-36 — une double explication postposée — qu'avait maintenue Tannery, sans doute parce qu'il privilégiait le second critère, en termes de notations du lettrage. Or il n'y en a pas dans cette séquence. De fait, il s'agit bien d'une explication plutôt élémentaire qu'il est donc logique d'exclure déjà d'après le premier critère (c'était déjà le point de vue de Allmann¹¹³). En outre, remarquons que sur les trois formules en termes de puissance qu'elle contient, deux sont immédiatement "suspectes" :

- l'une, que j'aurais pu numéroté [2a. (iii') : « δύναται ἡ ... ἴσον τῇ ... »], dont l'unique autre occurrence appartient à une séquence déjà rejetée¹¹⁴;
- la clause « à cause du fait que les doubles en longueur sont quadruples en puissance » (διὰ τὸ τὰ μήκει διπλάσια εἶναι δυνάμει τετραπλάσια), remarque évidente si le langage de la puissance était commun à l'époque d'Eudème, mais passablement fréquente dans les scholies aux *Éléments*¹¹⁵, où il s'agit, à plusieurs reprises, de faire le lien entre cette formule et la notion euclidienne de « rapport doublé d'un rapport »¹¹⁶.

En consultant l'Appendice le lecteur observera que le fragment d'Eudème contient (p. 63, l. 11-13) une formule ([2c. (ii)]) qui est un hapax en deux sens :

- c'est le seul usage indéterminé de *δύνασθαι* que nous observerions dans notre corpus si l'on y incluait le fragment d'Eudème;
- c'est la seule forme verbale des formules de la puissance dans le fragment d'Eudème tel qu'il a été circonscrit par Allman et Tannery.

Pour cette raison, Becker n'hésitait pas à la rejeter d'emblée comme un ajout de Simplicius. En analysant l'ensemble de la séquence (p. 62, l. 30—p. 63, l. 18), nous pourrions confirmer l'hypothèse de Becker.

mais aussi Rudio et Thomas. Même chose pour la séquence p. 68, l. 6-9 qui contient quatre formules de puissance qu'acceptent Diels, Rudio et Thomas, mais que rejettent Allmann, Tannery et Becker, à juste titre.

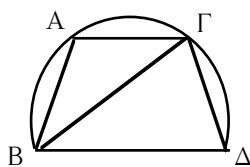
¹¹² On peut remarquer que cela vaut aussi pour deux des quatre formules unanimement attribuées à Simplicius (p. 62, l. 1-4, citée *supra*, une explication postposée sous forme de renvoi livresque explicite, et p. 63, l. 25-26, une explication postposée combinée avec un rappel d'hypothèse).

¹¹³ V. [Allmann, 1889], pp. 74-75, note 50.

¹¹⁴ *Simpl. in Phys.*, p. 68, l. 6-7.

¹¹⁵ Voir scholies N°II. 29 (*EHS*, V, 1, p. 172, l. 3-4), V. 1 (*ibid.*, p. 212, l. 3), V. 29 (*ibid.*, p. 220, l. 16-18); VI. 36 (*EHS*, V, 2, p. 23, l. 7-8), X. 80 (*ibid.*, p. 119, l. 21-22), X. 105 (*ibid.*, p. 130, l. 22, p. 131, l. 8-9), X. 107 (*ibid.*, p. 132, l. 19), X. 115 (*ibid.*, p. 136, l. 20), X. 116 (*ibid.*, p. 136, l. 21-22, p. 137, l. 3-4), X. 117 (*ibid.*, p. 137, l. 56, l. 8), X. 406 (*ibid.*, p. 212, l. 13), XIII. 7 (*ibid.*, p. 292, l. 9-10), XIII. 10 (*ibid.*, p. 292, l. 15-16), XIII. 17 (*ibid.*, p. 293, l. 7-8), Appendix Scholiorum III, n°10 (*ibid.*, p. 350, l. 11).

¹¹⁶ Ce que font explicitement les scholies aux Livres V et VI citées dans la note précédente. La N° V. 29 dit même que cette assertion sera démontrée dans la suite et c'est effectivement le cas dans la scholie N°X. 105, présentée comme le premier des quatre Lemmes à la Proposition X. 17. Or les scholies N°V. 1, 29, X. 105 appartiennent à la collection — dite Vaticane — des scholies les plus anciennes dans les manuscrits des *Éléments* (cf. à ce sujet, [Vitrac, 2003], pp. 283-288). Il se pourrait donc que Simplicius les ait connues par sa version d'Euclide.



Eudème décrit la construction de la 2^e lunule d'Hippocrate — son arc extérieur doit être plus grand qu'un demi-cercle — de la manière suivante :

on décrit un trapèze ayant les trois côtés BA, AΓ, ΓΔ égaux entre eux et le quatrième, BΔ, triple en puissance de chacun d'eux ($B\Delta = 3BA^2$). On le circonscrit par un cercle, ce qui déterminera 3 segments de cercle égaux sur BA, AΓ, ΓΔ et on construit un segment de cercle semblable sur BΔ, d'où une lunule.

La première étape consiste à démontrer que le trapèze est inscriptible dans un cercle et que le segment de cercle ainsi décrit, BAΓΔ, est plus grand qu'un demi-cercle (et ce, parce que l'angle qu'il contient, BΓΔ, est aigu).

Eudème commence par affirmer (p. 62, l. 30—p. 63, l. 1) :

« (i) ... que ledit segment soit plus grand qu'un demi-cercle, c'est évident (δῆλον), une diagonale ayant été jointe dans le trapèze. Car nécessairement (ἀνάγκη) celle-ci, sous-tendue par deux côtés du trapèze est, en puissance, plus grande que le double (μείζονα ἢ διπλασίαν εἶναι δυνάμει) de celui qui reste »

(i.e. $B\Gamma^2 > 2\Gamma\Delta^2$).

Suit une explication embrouillée de Simplicius, avec les citations de deux théorèmes d'Euclide (I. 13, I. 32), sans doute pour justifier que l'angle sous la petite base du trapèze isocèle (en Γ) est obtus, ce qui, par II. 12 apparemment non identifiée par Simplicius¹¹⁷, permet de justifier *a posteriori* (i) et d'affirmer (ii) :

« (ii) donc BΓ (la diagonale) peut [produire] plus que le double de chacun des BA, AΓ, et donc aussi de ΓΔ.

(iii) Et donc le plus grand des côtés du trapèze, BΔ, nécessairement (ἀναγκαῖον) peut [produire] moins (ἐλαττω δυνασθαι) que la diagonale et celui des autres côtés, par lequel, et avec la diagonale, le côté susdit est sous-tendu (i.e. $B\Delta^2 < B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2$).

(iv) Car BΓ, ΓΔ peuvent [produire] plus du triple de ce que peut produire ΓΔ, la droite BΔ, le triple.

(v) Donc l'angle appuyé sur le plus grand côté du trapèze est aigu ... ».

Diels attribuait toute la séquence à Eudème. Allmann, Tannery et Rudio ne conservaient que (i), (iii) et (v), et les deux premiers, fidèles à leur principe, excluent le lettrage simple "BΔ", au demeurant inutile dans (iii), que Rudio laisse subsister. Leur idée est que (iii) est la suite logique de (i) à laquelle elle est connectée par "καί" — de plus "ἀναγκαῖον" dans (iii) répond à "ἀνάγκη" dans (i) — et que, grâce à (la converse de) II. 13 qui n'est pas non plus citée, (iii) permet de conclure (v). Le raisonnement mathématique est impeccable. En outre, il est clair que (i) et (iii) présupposent l'un et l'autre que l'on n'utilise pas de lettrage (simple) du diagramme, sinon pourquoi utiliser une telle périphrase (« ... celui des autres côtés, par lequel, et avec la diagonale, le côté susdit est sous-tendu ») là où il suffirait de dire "ΓΔ".

Mais, si l'on admet que (ii) et (iv) sont des ajouts de Simplicius formulés avec une formule en δύνασθαι, alors que (i) l'était avec le datif "δυνάμει", il est raisonnable de penser que la forme verbale dans (iii) est le fruit d'une altération, voire d'une adjonction, de la part de Simplicius quand il a inséré (ii) et (iv). Avant son intervention, les deux séquences (i) et (iii), dans notre hypothèse, étaient conjointes et le datif "δυνάμει" qui se trouve dans la première pouvait être "en facteur" pour qualifier les deux inégalités¹¹⁸ — c'est finalement la solution que retient Becker — ou être répété :

¹¹⁷ Mais le texte semble avoir souffert à cet endroit.

¹¹⁸ On peut d'ailleurs tenir le même raisonnement pour la formule p. 67, l. 36-37 (pour laquelle j'ai restitué un "δυνάμει" mais qui, avant l'insertion par Simplicius des lignes 32-36 discutée *supra*, était directement coordonnée avec la formule [2e. (i)] de la ligne 31.

« ... Car nécessairement (ἀνάγκη) celle-ci, sous-tendue par deux côtés du trapèze est, en puissance, plus grande que le double de celui qui reste, et donc le plus grand des côtés du trapèze [est] nécessairement moindre, [en puissance] (δυνάμει), que la diagonale et celui des autres côtés, par lequel, et avec la diagonale, le côté susdit est sous-tendu. Donc l'angle appuyé sur le plus grand côté du trapèze est aigu ».

Il y aurait alors entre 12 et 14 formules selon que restitue ou non un ou deux marqueurs "δυνάμει" possiblement sous-entendus.

En résumé, les 4 formules en termes de puissance dans le témoignage d'Eudème sur Hippocrate font partie de celles que nous avons distinguées à partir du corpus géométrique conservé : [2c. (i)], [2c. (iii)], [2e. (i)], [3a. (i)]. Elles servent à qualifier l'inégalité, des rapports numériques spécifiés (dans lesquels, comme chez Euclide, l'irrationalité quadratique intervient : hémiole, triple, sextuple en puissance) et des proportions. Toutes sont libellées avec le datif δυνάμει et les formes verbales n'apparaissent pas. Huit de ces formules ont recours au lettrage complexe et aucune d'entre ces huit n'apparaît suspecte au regard des trois critères retenus. Parmi les formules sans lettrage, la seule exception à cette règle est la seconde :

« Et ceci, il le démontrait à partir du fait qu'il avait démontré que les diamètres ont, en puissance, le même rapport que les cercles »¹¹⁹,

une explication postposée que tous les exégètes, y compris Allmann et Becker, ont maintenue dans le fragment d'Eudème, mais qui pourrait bien être le résultat d'une inférence de la part de Simplicius. Ne torturons pas ce texte davantage. Bien entendu, dans la perspective qui nous intéresse ici — l'examen des formules en termes de puissance dans le corpus géométrique *et chez Platon* —, il serait extrêmement intéressant, pour l'histoire de la terminologie, de pouvoir distinguer entre Eudème, disciple d'Aristote, et Hippocrate lui-même, géomètre antérieur au fondateur de l'Académie. A cette étape de mon travail, je ne vois pas comment faire. Le corpus aristotélicien n'est pas non plus d'un grand secours : on y trouve bien une ou deux formules (verbales) en termes de puissance, et même l'évocation d'une classification des lignes irrationnelles dans l'inauthentique traité *Des lignes insécables*¹²⁰, mais ces usages sont évidemment postérieurs aux travaux de Théétète. Il est temps d'en venir à Platon.

9. Les formules de la puissance dans les dialogues

Les occurrences platoniciennes sont-elles (toutes) conformes aux usages des géomètres, en particulier à ce que l'on observe dans les Livres des *Éléments* censés dépendre des travaux de Théétète ? Ou bien cela ne vaut-il que pour certaines d'entre elles ? Ces usages renvoient-ils à un concept unifié ou non ? Pour ma part je ne le crois pas. Je distinguerai et analyserai donc successivement : (i) l'usage de δυνάμειν en *Resp.* VIII, 546 b5; (ii) l'utilisation de l'expression « κατὰ δύναμιν » en *Tim.*, 54 b5-6, *Resp.*, IX, 587 d7-11, *Polit.*,

¹¹⁹ *Simpl. in Phys.*, p. 61, l. 8-9.

¹²⁰ Formules [2a. (ii)] dans *Marche des animaux*, 709 a1, [2a. (i)] dans *Lin. ins.*, 970 a13-14. Classification distinguant "exprimables" et "irrationnelles" et citant en exemple l'apotomé et la binomiale, *ibid.*, 968 b15-21.

266 b5-6; (iii) les cinq occurrences du terme "δύναμις" dans le *Théétète*, 147d-148b et celle de *Polit.*, 266 b3¹²¹.

La mention de *δυναμένη* dans le célèbre passage du Livre VIII de la *République* portant sur le nombre nuptial (*Resp.* VIII, 546 b5-c7), malgré le caractère cryptique du morceau, paraît conforme à un usage, dit pythagoricien, pour désigner l'hypoténuse (et les côtés de l'angle droit ?) dans les triangles rectangles grâce à l'expression quelque peu énigmatique : « ... δυνάμεναι τε καὶ δυναστεύμεναι ... » (546 b6). C'est ce qu'affirme Alexandre d'Aphrodise : les Pythagoriciens appelaient l'hypoténuse "δυναμένη" parce qu'elle était, en puissance, égale, aux côtés de l'angle droit, appelés quant à eux "δυναστεύμεναι"¹²². C'est aussi en relation avec le triangle rectangle que Plutarque comprend le passage de la *République*, la doctrine étant, selon lui, connue des Egyptiens¹²³. L'exégèse très détaillée qu'en fournit Proclus confirme bien qu'il s'agit d'un système numérique associé à un triangle rectangle dont les côtés (7500, 10000, 12500) sont proportionnels au triplet (3, 4, 5)¹²⁴. Lui aussi affirme que l'hypoténuse est appelée *δυναμένη*¹²⁵ et rattache ce mystérieux savoir à l'Égypte¹²⁶.

Le terme "δυναστεύμεναι" n'a pas été maintenu dans la langue géométrique grecque et on peut se demander si l'identification proposée par Alexandre est fondée sur une véritable connaissance de la terminologie archaïque ou sur une simple déduction personnelle. Ainsi, dans l'étude détaillée qu'il a consacrée à ce locus platonicien¹²⁷, M. Caveing propose une autre traduction pour "δυναστεύμεναι" : le terme, calqué sur le modèle de "δυναμένη", désignerait à cet endroit l'élévation à la troisième puissance¹²⁸. Cette interprétation avait d'ailleurs déjà été suggérée dans le Dictionnaire Grec-français de Bailly, à la fin de l'entrée "δυναστεύω"¹²⁹. Platon réserverait "cube" au cas du nombre entier (il mentionne immédiatement à la suite le cube de 3 = 27), tandis que cette terminologie de la puissance constituerait une expression générale. Je ne suis pas vraiment convaincu. Grammatically "δύνασθαι" est un verbe déponent; ce n'est pas le cas de "δυναστεύω"; le participe du premier

¹²¹ Les inventaires traditionnels des occurrences platoniciennes de "δύναμις" au sens mathématique y incluent généralement celle de *Timée*, 31 c5. Je suis complètement convaincu par [Vinel, 2003], qui réfute cette interprétation. Je n'inclus donc pas ce *locus* dans mon étude.

¹²² *Alex. in Met.*, p. 75, l. 30-32 (ἐστι τῶν περιεχουσῶν ὀρθὴν γωνίαν πλευρῶν ἢ μὲν τριῶν ἢ δὲ τεττάρων, ἢ δὲ ὑποτείνουσα πέντε. ἐπεὶ τοίνυν ἢ ὑποτείνουσα ἴσον δύναται ἀμφοτέραις ἅμα, διὰ τοῦτο ἢ μὲν δυναμένη καλεῖται, αἱ δὲ δυναστεύμεναι, καὶ ἔστι πέντε).

¹²³ *Isis et Osiris*, 56, 373F-374A. Le fait que le langage de Platon soit plus arithmétique que géométrique ne saurait constituer une difficulté : il s'agit, comme dans certains problèmes de Héron ou de Diophante, des *nombre*s que l'on peut associer à des droites (voir par ex. *Arithmétiques*, VI, 16 dans lequel Diophante considère le « nombre de la bissectrice d'un angle d'un triangle rectangle » (ὁ τῆς τεμνοῦσης τὴν γωνίαν ἀριθμός, *Dioph.*, p. 430, l. 25), en l'occurrence les côtés de triangles rectangles exprimables en nombres. Diophante appelle "exprimables" (ῥητός) de tels triangles. V. *op. cit.*, Problème VI. 6, p. 402, l. 22.

¹²⁴ Voir *Pr. in Remp.*, XIII^e Dissertation, §§ 24 et 35.

¹²⁵ *Ibid.*, § 24, II, p. 25, l. 17.

¹²⁶ *Ibid.*, § 35, II, p. 45, l. 24.

¹²⁷ Voir [Caveing, 1982], pp. 1201-1205 ou [Caveing, 1998], pp. 65-69.

¹²⁸ [Caveing, 1982], p. 1204 et p. 1360 ou [Caveing, 1998], p. 68.

¹²⁹ Le *LSJ*, plus prudent, dit que le terme signifie « to be concerned with powers of numbers » !

désigne donc « ce qui a puissance », tandis que le participe *passif* du second renvoie à ce qui « subit la domination »¹³⁰. En outre, dans ce passage, Platon utilise l'expression « τρις αὐξηθεῖς » pour signifier l'élévation à la troisième puissance et c'est également ce que fait Proclus dans son Commentaire¹³¹ (et Platon, au Livre IX du même dialogue, v. *infra*). Platon n'avait donc aucune raison d'utiliser deux formules aussi différentes. Quant au contexte, il n'est pas si général que cela (*pace* Caveing) puisqu'il s'agit de triangles rectangles exprimables en nombres.

Quoi qu'il en soit des incertitudes concernant "δυναστεύμεναι", l'usage du terme "δυναμένη", pour désigner l'hypoténuse d'un triangle rectangle, est au demeurant avéré chez Aristote¹³². Cette utilisation pré euclidienne, "pythagoricienne" si l'on suit Alexandre, dans laquelle une droite peut produire autant que des droites¹³³, ne correspond pas à la notion introduite dans la Définition X. 4 des *Éléments* : la *δυναμένη* d'une aire irrationnelle.

Le syntagme « κατὰ δύναμιν » est fort intéressante. Dans la définition des triangles élémentaires du *Timée*¹³⁴, l'expression « τριπλῆν κατὰ δύναμιν ἔχειν » remplit le même rôle mathématique que la formule « τριπλασία δυνάμει εἶναι » d'Hippocrate-Eudème et d'Euclide. Mais le point le plus important est que l'expression, chez Platon, s'applique aussi bien aux droites (*Tim.*, 54 b5-6)¹³⁵ qu'aux nombres. Ainsi, au Livre IX de la *République*, elle est utilisée dans un contexte numérique, par opposition à deux autres formules : « κατὰ τὸν τοῦ μήκους ἀριθμόν » (selon le nombre de la longueur) et à « [κατὰ] τρίτην αὐξήν » (selon

¹³⁰ Aussi, pour traduire le couple (δυνάμεναι, δυναστεύμεναι), Festugière (dans Proclus, *Commentaire sur la République*, 3 volumes. Paris, Vrin-CNRS, 1970, t. II, page 144) utilise l'expression « les nombres pouvant exercer un pouvoir et les nombres dominés ».

¹³¹ A plusieurs reprises le Diadoque paraphrase le Maître et reprend l'expression « δυνάμεναι τε καὶ δυναστεύμεναι » (*Pr. in Remp.*, II, p. 36, l. 9-12, l. 24-25; p. 37, l. 1; p. 51, l. 12). Mais il ne dit jamais rien de très défini à propos des *δυναστεύμεναι*. Pire encore, p. 51, l. 4-5, la remarque « ... δύνανται μὲν γὰρ οἱ πλευρικοί, δυναστεύονται δὲ οἱ ἐκ τούτων ... » pourrait suggérer que les "dominants" (δυνάμεναι) sont les côtés du triangle rectangle, les "dominés" (δυναστεύμεναι), les aires des carrés décrits sur ceux-ci. Même dans cette interprétation il n'est pas question d'élévation à la troisième puissance.

¹³² Arstt, *Marche des animaux*, 709 a1. Même chose dans l'explication de Plutarque, *op. cit.*, 373 F 6.

¹³³ On retrouve cet usage dans la tradition textuelle des *Éléments* et du Livre XIV. Voir Annexe, note 186*.

¹³⁴ *Tim.*, 54 b5-6 : « ... τὸ δὲ τριπλῆν κατὰ δύναμιν ἔχον τῆς ἐλάττονος τὴν μείζω πλευράν ... » (l'autre [triangle] ayant le plus grand côté triple, en puissance, du plus petit ...).

¹³⁵ Et *Polit.*, 266 b5-6, encore qu'il ne soit pas tout à fait évident de savoir sur quoi porte la formule. Il s'agit en effet d'une séquence humoristique (266 a9—b7) dans laquelle l'Étranger d'Élée et Socrate le Jeune divisent l'ensemble du genre animal en deux catégories selon la modalité de leurs marches. Le critère plaira aux géomètres précise l'Étranger car on divisera « selon la diagonale et la diagonale de la diagonale (τῇ διαμέτρῳ καὶ πάλιν τῇ τῆς διαμέτρου διαμέτρῳ, a 9-10) ». Évidemment il y a un premier raccourci pour « la diagonale et la diagonale du carré décrit sur la diagonale ». La marche des humains (bipèdes) est alors associée à la diagonale, la [droite], en puissance, de deux pieds (ἡ δυνάμει δίπους). Celle des autres animaux (quadrupèdes) procède donc, par l'élévation à la deuxième puissance (κατὰ δύναμιν), selon la diagonale de notre puissance (ἡ ἡμετέρας δυνάμεως διάμετρος) car elle est de deux fois deux pieds (δυσὶν ποδοῖν δῖς) ! La métaphore est plutôt géométrique (c'est pourquoi j'ai sous-entendu "droite") ou, si l'on préfère, mixte (la diagonale est celle du carré d'un pied de côté), mais il y a d'évidents jeux de mots sur "δύναμις", à la fois "capacité naturelle" et "puissance" géométrique : "δυνάμεως" et « κατὰ δύναμιν » jouent donc sur les deux registres. [Høyrup, 1990], p. 204 y voit la confirmation de l'ambiguïté du terme "δύναμις" chez Platon, à la fois "ligne" et "carré", puisqu'elle possède une diagonale.

la troisième augmentation)¹³⁶. « Κατὰ δύναμιν » correspond donc à notre élévation à la deuxième puissance, mais plutôt envisagée en tant qu'extension spatiale.

Le passage — une parodie des associations numériques pythagoriciennes ? — distingue clairement entre ces extensions successives et leurs résultats, des nombres d'espèce spécifiée, car la représentation du plaisir du tyran, considéré selon la longueur (κατὰ τὸν τοῦ μήκους ἀριθμόν) sera d'emblée un nombre plan (ἐπίπεδον). Dans ces occurrences il s'agit certes de nombres, mais envisagés selon une représentation géométrique, puisque selon trois extensions dimensionnelles et trois seulement¹³⁷. L'accent est mis sur le processus multiplicatif de formation du nombre. Se multiplier soi-même implique, pour un nombre, une capacité d'engendrer d'autres nombres — ses puissances successives — ce qui distingue le nombre de l'unité¹³⁸.

Dans l'usage géométrique, la même expression est appliquée à la ligne droite qui pourra produire une certaine aire si l'on décrit le carré dont elle est le côté, manifestant par là une capacité d'extension spatiale sur une largeur qui ne saurait être ni plus petite ni plus grande qu'elle-même, analogue à celle du nombre quand il se multiplie lui-même. Cette analogie a l'avantage d'être compatible avec les opérations de mesure quand celles-ci sont possibles, c'est-à-dire quand la droite est numériquement exprimable en fonction de l'unité de mesure linéaire.

Un moderne, raisonnant algébriquement, s'étonnera peut-être du lien privilégié entre droite et carré décrit sur elle et se demandera pourquoi la procédure n'a apparemment pas été poursuivie, au moins pour les cubes¹³⁹. Si les indications concernant les définitions des Anciens Pythagoriciens contiennent un noyau de vérité, on répondra que la surface est le flux d'une ligne — et donc le carré peut être considéré comme engendré par son côté (c'est encore ce que dit la fin de la Df. X. 4 d'Euclide) — mais que le volume est, non pas le résultat de la multiplication par une troisième coordonnée, mais le flux d'une surface : c'est le carré qui engendrerait le cube selon une troisième extension (κατὰ τρίτην αὐξήν), pas le côté.

¹³⁶ *Resp.*, IX, 587 d7-11. V. aussi [*Epin.*], 991 a 2-5 et ce que nous venons de voir sur le nombre nuptial.

¹³⁷ Mais dès l'époque de Héron (peut-être avant), on a envisagé l'élévation à des puissances supérieures à 3.

¹³⁸ C'est l'une des étymologies que Théon de Smyrne donne du nom “monade”. V. *Eucl.*, *El.*, vol. 2, p. 269.

¹³⁹ Cela dit, la fin du passage du *Théétète* (148 b1; assertion **vii** dans le découpage que je propose *infra*) affirme explicitement le contraire. L'auteur d'un Commentaire anonyme à ce dialogue (*Anon. in Theaet.*, voir *infra*, note 162*) consacrera tout un développement (col. XLII-XLIII) à ce sujet. Il semble qu'il s'agisse d'une reconstruction entièrement conditionnée par l'exégèse du dialogue qui n'implique pas une référence à une pratique mathématique avérée par ailleurs. Cela dit, Nicolas Vinet a attiré mon attention sur un passage des *Théologoumènes arithmétiques* du Pseudo Jamblique (*Theol. ar.*, p. 2, l. 6-12) dans laquelle on trouve une formule à “trois places” que l'on peut transcrire « ὡς τὰ μήκει N-uple, δυνάμει μὲν N²-uple, στερεῶ δὲ N³-uple », énoncée à l'aide de deux exemples (N = 2, 3) et applicable selon l'auteur à tous les nombres et même aux parties aliquotes (τὰ μέρη). Le contexte est arithmétique et je n'ai trouvé aucune occurrence de ce genre de formules pour exprimer des rapports triplés entre éléments ou figures géométriques (elle généraliserait les formules [2e. (iv-iv')]). Mais ceci pourrait n'être que la conséquence du caractère lacunaire de nos sources.

10. Le passage du *Théétète*

Il n'est peut-être pas inutile de reproduire une fois encore le texte de ce célébrisime témoignage. Pour la commodité de la discussion qui suit, j'introduis une division en séquences qui n'existe évidemment pas dans l'original grec. J'ajoute les expressions placées entre crochets droits pour faciliter la compréhension, mais je maintiens provisoirement trois des termes en discussion (μήκος, δύναμις, δύνασθαι) sans les traduire.

(i)	« ΘΕΑΙ. : Περὶ δυνάμεων τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος ἀποφαίνων ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἐκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαίδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο .	« Théét. : Théodore, devant nous, avait exposé à l'aide de diagrammes quelque chose à propos des <i>δυνάμεων</i> , montrant, de celle de trois pieds et de celle de cinq pieds, qu'elles ne sont pas commensurables en longueur avec celle d'un pied, les considérant ainsi séparément, une à une, jusqu'à celle de dix-sept pieds. Et, pour une raison ou pour une autre, il s'arrêta à celle-ci.
(ii)	ἡμῖν οὖν εἰσηλθὲ τι τοιοῦτον ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἓν, ὅτῃ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις.	Dès lors nous vint à l'esprit quelque chose comme ceci : puisque les <i>δυνάμεις</i> sont clairement infinies en multitude, [il faut] essayer de les rassembler en un terme unique par lequel nous désignerions toutes ces <i>δυνάμεις</i> .
(iii)	ΣΩ. : Ἡ καὶ ἡῤετέ τι τοιοῦτον; ΘΕΑΙ. : Ἐμοιγε δοκοῦμέν ...	Socr. : Et avez-vous trouvé un tel terme ? Théét. : Oui, je crois ...
(iv)	ΘΕΑΙ. Τὸν ἀριθμὸν πάντα δίχα διελάβομεν· τὸν μὲν δυνάμενον ἴσον ἰσάκεις γίνεσθαι τῷ τετραγώνῳ τὸ σχῆμα ἀπεικάσαντες τετράγωνόν τε καὶ ἰσόπλευρον προσείπομεν ...	Théét. : Tout ce qui est nombre, nous l'avons partagé en deux : d'une part celui qui peut être produit d'un égal, un nombre égal de fois — assimilant sa figure au carré — nous l'avons appelé nombre "quadrangulaire et équilatéral" ...
(v)	ΘΕΑΙ. Τὸν τοίνυν μεταξὺ τούτου, ὦν καὶ τὰ τρία καὶ τὰ πέντε καὶ πᾶς ὃς ἀδύνατος ἴσος ἰσάκεις γενέσθαι, ἀλλ' ἢ πλείων ἐλαττονάκεις ἢ ἐλάττων πλεονάκεις γίνεσθαι, μείζων δὲ καὶ ἐλάττων ἀεὶ πλευρὰ αὐτὸν περιλαμβάνει, τῷ προμήκει αὐτὸ σχήματι ἀπεικάσαντες προμήκη ἀριθμὸν ἐκαλέσαμεν ...	Théét. : Maintenant, celui qui est intercalé, comme trois et cinq, et tout [autre] qui, incapable d'être produit d'un égal, un nombre égal de fois, mais soit d'un plus grand, un plus petit nombre de fois, soit d'un plus petit, un plus grand nombre de fois, celui-ci, toujours un côté plus grand et un plus petit le contiennent — l'assimilant, quant à la figure, au rectangle — nous l'avons appelé "nombre rectangulaire" ...
(vi)	Ὅσαι μὲν γραμμαὶ τὸν ἰσόπλευρον καὶ ἐπίπεδον ἀριθμὸν τετραγωνίζουσι, μήκος ὠρισάμεθα, ὅσαι δὲ τὸν ἑτερομήκη, δυνάμεις, ὡς μήκει μὲν οὐ συμέτρους ἐκείναις, τοῖς δ' ἐπιπέδοις ἃ δύνανται.	D'une part toutes ces lignes qui réalisent la quadrature du nombre équilatéral et plan, nous les avons définies <i>μήκος</i> , d'autre part, toutes celles qui réalisent celle du nombre oblong, [nous les avons appelées] <i>δυνάμεις</i> , en tant qu'elles ne sont pas commensurables, en longueur, avec les premières, mais que [les aires] qu'elles <i>δύνανται</i> [le sont] avec les aires planes [que <i>δύνανται</i> les premières].
(vii)	καὶ περὶ τὰ στερεὰ ἄλλο τοιοῦτον.	Et à propos des solides [nous disons] quelque chose d'autre du même genre ».

Si l'on suit Tannery¹⁴⁰, le problème de traduction se pose d'abord et essentiellement pour "δύναμις" et il y a trois raisons à cela :

- les sens différents que le terme est censé avoir chez Platon;
- les indications à première vue contradictoires que donne le passage lui-même;
- le fait qu'on ait voulu rapprocher, autant que faire se peut, le contenu mathématique du fragment des distinctions introduites par Euclide au début de son Livre X puisque Théétète,

¹⁴⁰ Voir *supra*, note 12*.

dont il est question ici, est censé avoir été l'initiateur des travaux sur les irrationnelles qu'a repris et développés l'Auteur des *Éléments*.

Constatons tout de suite une différence entre le témoignage platonicien et le corpus géométrique que nous avons précédemment exploré : "δύναμις", employé successivement au génitif pluriel et trois fois au nominatif pluriel¹⁴¹, désigne apparemment un objet mathématique. Le terme n'est pas employé adverbiallement, comme il l'est chez Euclide et ses successeurs (mais aussi Hippocrate-Eudème), pour qualifier des relations ou des proportions. Le parallélisme « "Théétète" // Euclide » ne pourra donc être maintenu qu'en prenant de la distance vis à vis des formulations platoniciennes. Ainsi, pour suivre les développements successifs de l'historiographie :

(a) Tannery remet en cause l'authenticité du texte et proposait de remplacer "δύναμις" dans ses cinq occurrences du *Théétète* par "δυναμένη"¹⁴².

(b) Allmann, signalant la correction de Tannery sans se prononcer, doutait que Platon ait parfaitement saisi la distinction entre "δύναμις" et "δυναμένη"¹⁴³.

(c) Vogt estimait que "Théétète", dans (vi), s'exprime de manière relâchée, μήκος et δυνάμεις n'étant que des expressions abrégées pour « μήκει ῥητὸν εἶναι » (être exprimable en longueur) et « δυνάμει ῥηταὶ εἶναι » (être exprimables en puissance)¹⁴⁴.

(d) Szabó va dans le même sens, mais affirme qu'il s'agit d'abréviations des formules euclidiennes « μήκει σύμμετροι » et « δυνάμει σύμμετροι »¹⁴⁵.

Puisque nous avons examiné en détails les usages euclidiens, nous voyons bien ce que les deux dernières propositions ont d'inadéquates : la formule « μήκει ῥητὸν εἶναι » n'est pas euclidienne (*pace* Vogt). Celles que retient Szabó le sont, mais il n'a pas compris que la problématique de Théétète — telle que Platon l'expose — est celle de l'exprimabilité (ῥητόν) et non pas celle de la commensurabilité mutuelle (σύμμετροί). Nous avons vu que ce n'est pas la même chose, et sur ce point, mais sur ce point seulement, Vogt avait raison. Leurs difficultés tiennent clairement au fait qu'ils ont décidé de plaquer l'opposition classificatoire (« μήκος / δυνάμεις ») [occurrence dans (vi)] sur une polarité euclidienne.

Si l'on estime que cette quatrième occurrence, de par son statut définitionnel, est la plus importante — c'est ce qu'ont cru, chacun à leur manière Tannery et Heath¹⁴⁶ —, si l'on admet que "δύναμις" désigne bien un *objet* mathématique, alors il n'y a aucun doute possible : il s'agit de droites, d'un certain type de droites, celles qui sont capables de faire la quadrature

¹⁴¹ Le terme revient une cinquième fois au génitif singulier en 148 b7-8, un simple rappel de ce que Théétète vient d'exposer en 148 a7-b2.

¹⁴² Voir [Tannery, 1884], p. 92 et [Tannery, 1889], p. 402.

¹⁴³ [Allmann, 1889], p. 208, note 5.

¹⁴⁴ [Vogt, 1909/1910], p. 114.

¹⁴⁵ [Szabó, 1972], pp. 70-71 et 91. [Burnyeat, 1978] cite et suit Szabó sur ce point (p. 500).

¹⁴⁶ Heath considère donc que, dans l'ensemble de ce passage, "δύναμις" signifie « racine carrée ». Voir [Heath, 1921], I, pp. 203-204. C'est aussi (par conséquent ?) le choix retenu par F. Cornford (*The Collected Dialogues of Plato*. Edited by E. Hamilton and H. Cairns. Bollingen Series LXXI. Princeton University Press, 1961, pp. 852-853). Cette traduction a le désavantage d'induire une interprétation très arithmétique de l'irrationalité, anachronique mais courante à l'époque, alors que, dans l'état actuel du texte, il s'agit d'un objet géométrique.

d'une aire rectangulaire dont la mesure — par rapport à une unité surfacique — s'exprime par un nombre promèque (*i.e.* non carré). Ce choix induit cependant une difficulté dans l'occurrence (i) car Théétète y parle de la *δύναμις* de 3 pieds et de celle de 5 pieds. Il est clair que les mesures indiquées ne peuvent pas être des mesures linéaires, mais qu'il s'agit d'aires. Dans cette interprétation, il faut supposer une ellipse dans l'expression et comprendre « τῆς τε τρίποδος » = « celle de trois pieds » comme « la ligne (ou la droite ou le côté) pouvant produire une aire de 3 pieds (carrés) », autrement dit, restituer, non pas « τῆς τε τρίποδος δυνάμεως », mais « τῆς τε τρίποδος δυνάμει [γραμμῆς] »¹⁴⁷.

Si l'on s'astreint à choisir dans la galerie des objets géométriques euclidiens, le choix « *δυνάμεις* = carrés »¹⁴⁸ introduira une difficulté symétrique dans l'occurrence (vi), sans doute la plus importante, et aura deux autres inconvénients :

- elle affaiblira le parallélisme recherché car ces *δυνάμεις* = carrés sont dites « non commensurables en longueur », expression qui, chez Euclide, est réservée à des droites. Il faudra donc, là aussi, admettre une ellipse de la part de Platon : ce seraient des carrés [*dont les côtés*] sont non commensurables en longueur.
- Si l'on n'ajoute pas d'autres précisions (par exemple que l'on se limite à des cas d'incommensurabilité), l'équivalence posée transforme les occurrences dans (ii) en trivialités affligeantes car la multitude des carrés est évidemment infinie.

L'expression elliptique du témoignage platonicien rend donc délicate l'entreprise de traduction. Les choix tranchés et uniformes (sur l'ensemble des cinq occurrences) tels que "racine incommensurable" (ou "square root") — c'était la première proposition de Tannery, reprise par Heath — ou "carré" sont difficilement praticables. C'est pourquoi traducteurs et historiens ont adopté d'autres solutions :

- Rendre différemment les quatre occurrences¹⁴⁹, mais c'est admettre qu'il y a un problème

¹⁴⁷ Je m'inspire ici de la formule du *Sophiste* (cf. *supra*, note 135*) : « ἡ δυνάμει δίπους » (sous-entendu γραμμή ou πλευρά ou εὐθεΐα). Théodore avait produit des constructions ou des preuves relatives περὶ τῶν δυνάμει τρίποδος, πεντεπόδος, ..., ἑπτακαίδεκάποδος », ce que Théétète subsume en « περὶ δυνάμεων ».

¹⁴⁸ L'équivalence « *δύναμις* = carré » ou « valeur en carré » (?), aussi bien pour le texte du *Théétète* que pour le corpus géométrique conservé, a été soutenue par A. Szabó. Pour lui, "δύνασθαι" signifierait donc « équivaloir » en carré »; voir [Szabó, 1972], pp. 36-39. [Knorr, 1975], pp. 65-69 et Burnyeat ont accepté l'équivalence « *δύναμις* = carré », y compris pour le texte du *Théétète*. Le second (voir [Burnyeat, 1978], pp. 497-498) croit renforcer cette thèse en s'appuyant sur le témoignage des commentateurs tardifs. A l'inverse, M. Caveing a refusé cette équivalence, tant pour le texte de Platon que pour les mathématiques classiques, et considère qu'elle ne s'est imposée que tardivement (voir [Caveing, 1982], Vol. 3, p. 1368).

¹⁴⁹ Nombreux sont les interprètes qui ont adopté ce parti. Voir par exemple [Allman, 1889], pp. 207-210 (pour les occurrences dans (i-ii) : "squares"; pour l'occurrence dans (vi), il garde "δυνάμεις"); choix semblable chez [Vogt, 1909/1910], pp. 99-100 ("Quadrates" / "Potenz"). Dans son édition du commentaire de Pappus (*Papp. in X*), Thomson traduit "power" mais ajoute "square" après ce qui correspond à une citation par Pappus de (i) et "surd" (irrationnel) après ce qui correspond à une citation de (vi). Curieusement A. Szabó, bien qu'il soutienne que le sens de "δύναμις" soit "carré" (note précédente), adopte la même solution qu'Allman (v. [Szabó, 1972], pp. 40-43 : aux pp. 40-41 "δυνάμεις" est traduit "carrés", repris par les démonstratifs "ceux", "celui"; à la p. 43 pour l'occurrence dans (vi), Szabó maintient "δυνάμεις" en le translittérant, repris par le démonstratif "celles". L'antécédent est évidemment "lignes". Étrange retournement !).

terminologique dans le passage platonicien ou, pour le dire autrement, c'est affirmer que le terme en cause est ambigu¹⁵⁰. C'est quelque peu fâcheux si, comme la plupart des interprètes, on admet que la compréhension du terme "δύναμις" est essentielle pour reconstruire l'histoire de l'irrationalité et donc celle des mathématiques pré euclidiennes¹⁵¹.

- Conserver "puissance", comme je l'ai fait moi-même pour les différentes occurrences de "δύναμις" que nous avons rencontrées jusqu'ici. Ce choix a aussi la faveur des traductions françaises de Platon¹⁵². Il correspond à l'un des sens usuels et généraux du terme grec "δύναμις". Il a été utilisé depuis longtemps en français, mais aussi en latin (*potentia*) par les traducteurs médiévaux pour rendre les formulations euclidiennes¹⁵³. Contrairement à "racine incommensurable" ou "carré", il a l'avantage de pouvoir être utilisé dans les quatre occurrences du *Théétète* sans paraître induire d'antinomie entre le début et la fin du texte. Il a l'inconvénient mineur d'introduire une possible confusion¹⁵⁴ avec la notion mathématique moderne de puissance ($a \rightarrow a^k$), ce que nous avons cru percevoir, en commençant, dans la note de Tricot. Surtout il exige que l'on précise en quel sens on doit entendre cette "puissance".

- Reste la correction proposée par Tannery. Elle aussi visait à renforcer le parallélisme « "Théétète" // Euclide » en homogénéisant leurs lexiques. Elle avait un mérite : rattacher la distinction « μήκος / δύναμις » à celle d'« exprimable / irrationnelle » (*Él.* Df. X. 3-4) et non pas à l'opposition « commensurables en longueur / commensurables en puissance » (Df. X. 1-2), puisqu'une droite de référence est posée, dite "pied". "Théétète" ne décrit donc pas les propriétés de commensurabilité mutuelle d'un couple quelconque de droites (*contra* Szabó).

Mais cette homogénéisation entre "Théétète" et Euclide ne serait que partielle, voire illusoire, car le champ d'application du terme "δύναμις" ("δυναμένη" si on accepte la correction) chez le premier est, *a priori*, beaucoup plus circonscrit que celui de "δυναμένη" chez le second. Dans la présentation de Platon [occurrence dans (vi)], "δύναμις" désigne une droite qui peut [produire] (δυναμένη) une aire exprimable par un nombre (entier) non carré. Du point de vue moderne, il s'agit d'un nombre irrationnel quadratique. Dans la terminologie d'Euclide une telle droite n'est pas une irrationnelle; elle est exprimable (ῥητή) car commensurable en puissance (seulement) avec la droite de référence (celle d'un pied). Les *δυνάμεναι* des *Éléments* correspondent à des irrationnelles plus complexes.

¹⁵⁰ Cf. *supra* la citation de [Tannery, 1876], p. 33, note 2. Voir aussi [Gow, 1884], p. 78, note 1; [Allmann, 1889], p. 208, note 5; [Heath, 1921], I, p. 209, note 2; [von Fritz, 1934], col 1354; [Høyrup, 1990].

¹⁵¹ Voir [Szabó, 1972], introduction, en particulier pp. 10-19 et toute la première partie, pp. 31-108.

¹⁵² C'est celui de A. Diès (dans Platon, *Œuvres complètes*. Collection des Universités de France. Paris, Les Belles Lettres. Tome VIII — 2^e partie : Théétète, 1926, pp. 164-165), de L. Robin (dans Platon, *Œuvres complètes*. Bibliothèque de la Pléiade. 2 volumes. Paris Gallimard, 1950, p. 91) et de M. Narcy (dans Platon, *Théétète*. Paris, GF-Flammarion, 1994, pp. 143-144).

¹⁵³ Voir Eucl., *Él.*, vol. 3, pp. 32-33, en particulier note 46.

¹⁵⁴ C'est la raison pour laquelle Heath (Euclid, *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Cambridge University Press, 1908; 2^e ed. 1926. Reimpr. New York, Dover Publications, 1956, vol. 3, p. 11) et [Szabó, 1972], pp. 36-37 la rejettent. Heath, à la différence de Szabó, récuse par conséquent le parallélisme « "Théétète" // Euclide » : pour le premier il traduit "δύναμις" par "square root"; chez le second il rend « δυνάμει σύμμετροι » par « commensurables in square ».

Reprenons notre passage et essayons d'en proposer une interprétation, si possible sans recourir à l'hypothèse *ad hoc* que Platon s'exprime de manière relâchée (Vogt, Szabó), pour dire mal ce qu'Euclide dit fort bien. Comme le supposaient déjà Tannery et Heath, l'indication la plus forte réside très certainement dans la définition des *δυνάμεις* [séquence (vi)] proposée par "Théétète". Là il n'y a, dans l'état actuel du texte, aucun doute possible : il s'agit de droites. Dans ce cas, comme dans celui de l'expression « κατὰ δύναμιν », la désignation renvoie au processus de "production" de l'objet (par le biais de la quadrature d'une aire dont la mesure s'exprime par un nombre promèque). Ceci justifie peut-être le choix lexical de l'ami de Platon.

Dans cette interprétation, ce que Platon attribue à son héros, ce n'est pas un critère d'incommensurabilité linéaire (il en était peut-être question dans la leçon de Théodore), mais l'étape initiale — la plus simple (car le dialogue n'est pas un traité de géométrie) — d'une tentative de classification des droites irrationnelles. Or, qu'une telle tentative ait été faite par Théétète (en utilisant la théorie des médiétés), nous le savons par d'autres sources que le dialogue platonicien grâce au témoignage transmis par Pappus sous l'autorité d'Eudème de Rhodes¹⁵⁵.

Cette interprétation ne dissipe pas toutes les difficultés. Ainsi, on peut se demander si, lors des trois premières occurrences des *δυνάμεις*, Platon autorise son personnage à anticiper sur la Définition d'un terme qu'il va donner ensuite ou bien s'il veut suggérer que le terme était déjà utilisé en mathématiques, par exemple par Théodore, et que Théétète en a introduit ensuite une acception plus précise ou plus particulière. Au début du passage nous lisons que la leçon de Théodore était « au sujet des *δυνάμεων* », et qu'elle portait sur l'incommensurabilité linéaire de certaines d'entre elles. Ceci suggère évidemment qu'il s'agit plutôt de droites que de carrés ou d'autres choses. De même, la troisième occurrence (indiquant la nécessité de rechercher un terme commun) me paraît aller en faveur de la première hypothèse : Théétète anticipe.

Un autre scénario possible est d'envisager la correction proposée par Tannery, du moins, une variante de sa suggestion. Caveing l'a refusée parce que le terme "*δύναμις*" apparaît cinq fois, selon trois flexions différentes et il faudrait donc supposer une même quintuple confusion, de la part d'un copiste¹⁵⁶. Tannery proposait en effet de corriger les cinq occurrences. Mais on pourrait imaginer une version plus faible : le terme "*δυναμένη*" figurait seulement en 148 b1 pour introduire une innovation terminologique de Théétète. Avant, et après, quand il s'agissait d'évoquer la leçon de Théodore, Platon utilisait "*δύναμις*" (avec le sens de « ἡ Ν-ποδος δύναμι [γραμμή] » où N est un entier non carré). Cet hypothétique

¹⁵⁵ Papp. in X, Livre I, § 1, p. 63 = fragment d'Eudème, [Wehrli, 1969], N°141 I, II.

¹⁵⁶ Voir [Caveing, 1982], p. 1334 ou [Caveing, 1998], p. 165.

scénario a quelques avantages :

- La corruption textuelle — en fait une uniformisation lexicale s'il y avait quatre occurrences de "δύναμις" et une de "δυναμένη" — est beaucoup plus facile à admettre.
- l'introduction de "δυναμένη" par Théétète — éventuellement empruntée à la thématique pythagoricienne très particulière des triangles rectangles en nombres — se serait faite, conformément à ce qu'on lit dans le dialogue, en corrélation avec celle du verbe "δύνασθαι" pour désigner la capacité d'une droite à produire une aire, comme dans la Définition X. 4 d'Euclide. Comme chez ce dernier, l'utilisation des formules verbales (registre 1) serait à rattacher à l'entreprise de classification des irrationnelles. Il s'agirait bien d'une nouveauté car, dans l'usage pythagoricien de "δυναμένη" pour désigner l'hypoténuse des triangles rectangles, il n'est pas nécessairement question d'irrationalité. L'exemple platonicien de la *République*, fondé sur le triangle (3, 4, 5), le montre bien¹⁵⁷.
- Certaines des formules en termes de puissance du fragment d'Eudème (intervenant dans un contexte d'irrationalité quadratique et concernant seulement la qualification de relations ou de proportions), libellées avec le marqueur "δυνάμει", pourraient remonter à Hippocrate.

Quand bien même on refuserait de corriger le texte, si l'on accepte les grandes lignes de cette interprétation (nous avons vu qu'il suffit d'admettre que Platon autorise son personnage à "anticiper"), on aboutit à la conclusion que l'Auteur du *Théétète* se fait le témoin somme toute assez scrupuleux du travail de son ami auquel il voulait rendre hommage dans ce dialogue, travail que nous ne retrouvons certes pas à l'identique dans les *Éléments*, ni dans les autres textes mathématiques, mais qui y a laissé des traces parfaitement identifiables : les premières divisions de la classification euclidienne des lignes irrationnelles (médiales, irrationnelles par composition; irrationnelles par retranchement) sont introduites d'une autre manière, mais il est tout à fait clair qu'elles correspondent aux trois médiétés fondamentales qu'avait utilisées Théétète¹⁵⁸. Cela dit, entre temps, l'étude des irrationnelles s'est approfondie et si les projets de Théétète et d'Euclide sont apparentés, voire historiquement liés, il faut constater que les choix terminologiques des deux géomètres ne sont pas tout à fait les mêmes.

Vouloir rabattre le lexique de l'un sur celui de l'autre ou invoquer l'ambiguïté du langage mathématique de Platon, c'est créer, me semble-t-il, des difficultés plutôt imaginaires. Les Modernes ont cherché à tout prix un ultime et commun noyau de signification. La tentative la plus ambitieuse est certainement celle de M. Caveing qui tente même de faire le lien avec la notion aristotélicienne de "puissance". Pour lui, la *δύναμις* ne désignerait, dans

¹⁵⁷ Cet exemple montre aussi que l'emploi d'un vocabulaire rattaché à la notion de "puissance" (*δυνάμειναι*, *δυναστεύμεναι*) tient probablement à des associations symboliques dont les Pythagoriciens étaient coutumiers et non pas à un emprunt, de la part des mathématiciens, d'un usage propre au lexique de la finance, comme le proclame Szabó, en se fondant sur un autre sens général de "δύναμις", "δύνασθαι" = "valeur", "valoir". Cette acception implique alors une certaine "plasticité", une dépendance vis-à-vis du contexte — comme dans les usages linguistiques de "δύναμις" (= sens d'un mot, valeur sémantique) —, ce qui s'observe dans l'usage mathématique néo-pythagoricien que j'ai signalé *supra* (note 3*), mais pas dans la thématique qui nous intéresse ici.

¹⁵⁸ Voir Eucl., *El.*, vol. 3, pp. 68-70.

l'ensemble du corpus platonicien, ni une droite, ni une aire, mais une capacité de transformation liant une droite et l'aire du carré décrit sur elle. Je ne crois pas que les occurrences du *Théétète* se réfèrent à un objet aussi abstrait. Pour que la notion de puissance comme transformation soit pleinement conceptualisée, on devrait en parler au singulier.

Une conception de genre vaut pour l'expression « κατὰ δύναμιν » chez Platon, peut-être aussi pour la forme adverbiale "δυνάμει" dans les textes géométriques, mais cela ne s'applique pas à "δύναμις" dans ce dialogue (si, comme Caveing, on ne corrige pas le texte). Il me paraît plus économique d'accepter l'idée que Platon utilise trois ou quatre formulations *distinctes* (« κατὰ δύναμιν », "δυναμένη" ou le couple « δυναμένη, δυναστεύομεναι », « ἡ ... δυνάμει », "δύναμις") pour l'expression de la "puissance" mathématique, sans aucune ambiguïté dans les usages qu'il fait de chacune d'elles. Négliger ces différences, c'est probablement chercher à trop unifier des usages au bout du compte irréductibles dans une période où la terminologie mathématique n'était pas (*pace Tannery*) totalement fixée. Finalement les géomètres ne maintiendront ni l'usage de "δύναμις" introduit par "Théétète" (si l'on ne corrige pas le texte), ni celui de "δυναστεύομεναι", ni la formule « κατὰ δύναμιν ».

Conclusions

L'intérêt de la notion mathématique de *δύναμις* telle que nous l'avons vue à l'œuvre déjà chez Platon, Euclide et Hippocrate-Eudème, paraît être, sinon, comme le dit Caveing, d'indiquer des potentialités de transformation, du moins de "transgresser" certaines séparations, notamment celle qu'instaure la distinction des espèces de la grandeur géométrique comme les longueurs, les aires et les volumes (Cf. *Lois*, VII, 819 d—820 c) quand on ne les confond plus avec les nombres exprimant leurs mesures, ce qui n'est plus permis dès lors que l'on connaît l'existence de grandeurs incommensurables. Elle a permis de dépasser certains obstacles concernant les problèmes d'expression numérique nés de l'étude de l'irrationalité quadratique.

Si l'utilité de la puissance était principalement d'assurer une forme de corrélation transspécifique (« droites ↔ aires »), on peut décrire autrement les difficultés ou l'ambiguïté que les Modernes ont cru y percevoir¹⁵⁹. Selon le contexte il est utile de mettre l'accent sur l'un des deux "versants" de la corrélation : l'expression « κατὰ δύναμιν » le met de gauche à droite, "δύναμις" dans le *Théétète* et "δυνάμει" chez Euclide mettent l'accent sur les droites. Bien entendu, dans les deux cas, les Définitions sont libellées en termes d'aires mais,

¹⁵⁹ Voir en particulier [Høyrup, 1990]. L'ambiguïté qu'il croit percevoir chez Platon, à la suite de beaucoup d'autres, est essentielle pour sa reconstruction : elle permet de placer à haute époque l'emprunt auprès des Babyloniens qu'il postule. Un certain syncrétisme entre mathématiques grecques et babyloniennes dans les premiers siècles de notre ère n'étonnerait personne. L'hypothèse d'un tel emprunt, vers la fin du V^e siècle avant notre ère, est certainement envisageable, mais elle n'a certainement ni la nécessité, ni la vertu explicative que lui prête Høyrup. Cela dit, notre collègue a d'autres arguments, en particulier concernant les connotations communes des termes "mithartum" et "δύναμις", que je ne suis pas capable de juger.

précisément, il faut distinguer entre *definiens* et *défini* : il s'agit de droites et, même si c'est en un sens différent, leur définition permet d'évoquer leur irrationalité¹⁶⁰. Mais si tel est le cas, alors il faut admettre qu'il y a une inversion de sens ou, du moins, une spécification unilatérale dans la corrélation signalée un peu plus haut, pour aboutir à cette conclusion, inévitable si l'on s'appuie sur Diophante, que « "δύναμις" = "carré" ».

Il me semble qu'on peut en trouver une explication, au moins partielle, dans la confrontation des deux textes essentiels pour cette histoire — le *Théétète* et les *Éléments* d'Euclide — telle qu'on l'a entreprise dès l'Antiquité. J'ai déjà indiqué que Diophante n'a probablement pas inventé l'équivalence susmentionnée. En tout cas, il n'en a pas l'exclusivité : l'explication qu'Alexandre a donnée¹⁶¹ du passage de *Métaphysique* Δ par lequel nous avons commencé adoptait la même identification. Avant lui¹⁶², un commentaire anonyme consacré au *Théétète* affirmait :

« les Anciens appelaient les carrés *δυνάμεις* ; car la puissance est puissance de quelque chose ; or ce qui peut [produire] la surface carrée, c'est une ligne, celle sur laquelle elle est produite (οἱ παλαιοὶ τὰ τετράγωνα δυνάμεις ὠνόμαζον· ἡ γὰρ δύναμις τινός ἐστιν δύναμις· δύναται δὲ τὸ ἐπίπεδον τετράγωνον γραμμῇ, ἀφ' ἧς ἐγένετο) »¹⁶³.

Je crois que l'explication avancée — la relation de "puissance" qu'il y a entre le côté d'un carré et ce dernier — est inspirée par la confrontation avec la tradition euclidienne. L'auteur de ce commentaire connaissait très certainement les *Éléments*. Même s'il ne les cite pas explicitement, il en reproduit certaines argumentations (notamment la preuve de II. 14 à l'aide de II. 5)¹⁶⁴. Convaincu qu'en la première occurrence (« *δυνάμεις* de 3, de 5 pieds ») il ne peut s'agir que de surfaces, il maintiendra obstinément l'équivalence « *δύναμις* = carré » dans l'ensemble de son texte, y compris dans le commentaire surréaliste de la quatrième occurrence, affirmant à plusieurs reprises que l'opposition classificatoire instituée par Théétète entre *μῆκος* et *δυνάμεις* portent sur des figures ou des surfaces¹⁶⁵ avec ce paradoxe (au moins terminologique) que certains carrés seront donc appelés "longueurs"¹⁶⁶. La cohérence de l'exégèse n'est pas évidente : un peu plus loin¹⁶⁷, les *δυνάμεις*, conformément au texte de Platon, sont des lignes. Mais notre commentateur persiste avec une belle obstination lorsqu'il veut détailler la généralisation pour les solides simplement évoquée à la

¹⁶⁰ Par conséquent, même si elle est historiquement inadéquate, la traduction par "irrationnelles" ou "racines", proposée par Tannery et Heath, me paraît mathématiquement moins fausse que celle par "carrés".

¹⁶¹ *Alex. in Met.*, p. 394, l. 34-36.

¹⁶² Partiellement conservé dans un papyrus de la première moitié du II^e siècle (Papyrus Berol inv. 9782), mais dont le texte avait probablement été composé dès la fin du I^{er} siècle avant notre ère. Voir *Anon. in Theaet.*, pp. 254-256. Sur les 75 colonnes (partiellement) conservées, 20 sont consacrées au passage mathématique sur les irrationnelles.

¹⁶³ Voir *Anon. in Theaet.*, p. 334, col. 27, l. 31-38.

¹⁶⁴ Voir *Anon. in Theaet.*, pp. 340-344, col. 29, l. 42—col. 31, l. 21.

¹⁶⁵ *Ibid.*, p. 332, col. 26, l. 33-35 et l. 47-48; p. 350, col. 33, l. 8-16; p. 384, col. 45, l. 9-14.

¹⁶⁶ *Ibid.*, p. 372, col. 40, l. 39-41.

¹⁶⁷ Il s'agit de commenter la séquence (vi) de notre témoignage. Voir *ibid.*, p. 372, col. 41, l. 8-16.

fin de l'exposé de "Théétète" : certains cubes seront à leur tour appelés des "longueurs"¹⁶⁸ !

L'identification « δύναμις = carré » est faite dans de nombreuses scholies aux *Éléments*, sans que l'on puisse dire, dans la plupart des cas, si elles proviennent ou non de l'Antiquité¹⁶⁹. Mais l'une d'elles, la N°X. 135¹⁷⁰, appartient à la collection dite vaticane, ce qui est un garant d'ancienneté. On en connaît même la source : elle dérive du commentaire au Livre X attribué à Pappus¹⁷¹. Elle oppose les δυνάμεις aux δυναμένην comme les carrés à leurs côtés¹⁷². Elle explique l'identification reconnue par tous nos auteurs tardifs : ceux-ci ont voulu prendre en compte la terminologie euclidienne, notamment la notion de δυναμένη pour désigner le côté du carré égal à une aire. Dès lors, comme on le voit dans notre scholie, si l'on tient compte de ce terme, le couplage : « δύναμις ≈ carré; δυναμένη ≈ racine ou "côté du carré" » devient quasi obligatoire.

Dans le même ordre d'idées, on pourrait rappeler une autre identification que nous avons rencontrée dans le *Commentaire à la République* par Proclus : celui-ci interprétait la paire (δυναμείναι, δυναστευόμεναι) comme celle des côtés du triangle rectangle et des carrés décrits sur eux¹⁷³. Dans les deux cas, comme plus tard chez les interprètes modernes, il s'agit d'appliquer les notions euclidiennes faisant couple aux dualités dont les termes (δύναμις, δυναστευόμεναι) ne sont pas définis dans les *Éléments* et ne sont plus très bien compris.

*

Dernier point à souligner : certaines formules en termes de puissance n'avaient peut-être pas seulement une fonction transspécifique, mais aussi un usage transgénérique. Les mathématiciens grecs ont eu recours à différentes formules qui coordonnaient — quand cela était possible — les domaines *a priori* séparés de l'arithmétique et de la géométrie. On le voit avec la notion de médiété, de rapport et de proportion.

Ce pourrait être aussi le cas avec la formule « κατὰ δύναμιν ». On objectera peut-être que "δυνάμει" ne semble pas avoir hérité du caractère "transversal" de ladite formule. Mais ceci n'est peut-être qu'une illusion due à la pauvreté de nos sources, au fait que, pour l'époque hellénistique, nous disposons seulement de textes géométriques cantonnant les usages

¹⁶⁸ *Ibid.*, p. 378, col. 42, l. 46-51.

¹⁶⁹ Voir par exemple les scholies N°I. 153, V. 22, VI. 52 et 55, X. 25, X. 181, 293, 340.

¹⁷⁰ Voir *EHS*, V, 2, p. 142, l. 24—p. 143, l. 29.

¹⁷¹ Comparer respectivement : *EHS*, V, 2, p. 142, l. 24—p. 143, l. 4 et *Papp. in X*, L. I, § 9, p. 71, l. 26—72, l. 7; *EHS*, V, 2, p. 143, l. 5-12 et *Papp. in X*, L. I, § 19, p. 83; *EHS*, V, 2, p. 143, l. 13-29 et *Papp. in X*, L. I, § 20, pp. 83-84.

¹⁷² Nous privilégions la scholie par rapport au texte de Pappus parce qu'elle nous donne accès au vocabulaire grec. Dans la version anglaise de Thomson (p. 83, l. 25-28) : « ... in every case he derives the names of the powers (i. e. the square-areas) from the lines upon which they are the squares, he names the area on a rational line rational and that on a medial line medial ». Dans la scholie : « καὶ ὅτι τὰς δυνάμεις πανταχοῦ παρωνύμως ἀπὸ τῶν δυναμένων καλεῖ· ῥητόν μὲν γὰρ τὸ ἀπὸ ῥητῆς, μέσον δὲ τὸ ἀπὸ μέσης » (*EHS*, V, 2, p. 143, l. 10-12).

¹⁷³ Voir *supra*, note 131*.

"mixtes" à l'expression de rapports. Cela dit, au premier siècle de notre ère, dans les *Métriques* de Héron, nous avons vu que "δυνάμει" pouvait s'utiliser aussi bien pour des grandeurs géométriques que pour des nombres. Je ne suis pas sûr qu'il faille distinguer deux concepts de "δύναμις", celle des calculateurs et celle des géomètres, comme le veut Jens Høyrup¹⁷⁴. C'est pourquoi j'ai préféré parler d'usages "mixtes".

¹⁷⁴ Dans sa perspective, cette distinction, comme l'"ambiguïté", sert à renforcer l'idée de continuité historique de Platon à Diophante, en passant par Héron, et à circonscrire un contexte commun avec les Babyloniens, de type calculatoire, qui pourrait être un contexte originel. Ses arguments ne sont pas toujours très convaincants. Ainsi, notre collègue fait grand cas de ce que Glaucon, en corrélation avec l'une des occurrences de la formule « κατὰ δύναμιν » mentionne le "logisticien" (587 d 11). Il suggère même qu'il faut y voir une différence entre calcul et arithmétique théorique. Voir [Høyrup, 1990], p. 206. Le terme "logistique" désignera effectivement le calcul appliqué dans l'Antiquité romaine puis tardive. Mais, à l'époque de Platon, et tout particulièrement dans la *République*, "λογιστική" et "ἀριθμητική" sont interchangeable.

1. Droite pouvant [produire] une aire; aire que peut [produire] une droite

- (i) — « ἡ X δυναμένη » (la [droite] pouvant [produire] X), X étant un carré, un rectangle ou plus généralement une aire quarrable;
- (ii) — « ἡ ... δύναται τὸν X » (la [droite] ... peut [produire] X, un rectangle ou plus généralement une aire).

Ces deux formules sont particulièrement fréquentes dans les *Eléments*, respectivement 133 et 30 occurrences¹⁷⁶. De 1. (ii) dérive une expression figée, utilisée dans la théorie des coniques pour désigner une droite appelée “paramètre”. La formule complète (toutefois non attestée) est :

« ἡ εὐθεῖα παρ’ ἣν παράκειται τὰ χωρία ἃ δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον » (la droite sur laquelle sont appliquées les aires que peuvent [produire] les droites menées de manière ordonnée jusqu'au diamètre).

Elle apparaît, plus ou moins abrégée ou aménagée, dans les variantes suivantes¹⁷⁷ :

- (ii') — « ἡ παρ’ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον » (*Coniques*, I. 11);
- « ἡ παρ’ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως » (*Coniques*, I. 12); « ἡ παρ’ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι » (*Coniques*, I. 12, 13, resp. 14); « ἡ παρ’ ἣν δύνανται » (*Coniques*, I. 13).

2. Qualification de relations

a. Égalité en puissance entre droites (i.e. égalité d'aires toutes rapportées aux droites qui peuvent les produire) :

- (i) — « ἡ ... δύναται τὴν ... καὶ τὴν ... ». Exemple (Eucl., *Él.*, Prop. XIII. 10) :
- « Si un pentagone équilatéral est inscrit dans un cercle, le côté du pentagone peut produire celui de l'hexagone avec celui du décagone, ceux inscrits dans le même cercle ».

¹⁷⁵ Dans cette Annexe le lecteur trouvera les différentes formules utilisées dans le corpus géométrique décrit *supra*, en 3, auquel j'ai ajouté le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules par Hippocrate et quelques références à des auteurs divers qui citent un résultat mathématique à l'aide d'une formule en termes de puissance. En revanche, les occurrences arithmétiques diophantiennes ne sont pas prises en compte ici car elles n'interviennent pas dans des formules-types (voir *supra*, note 93*). Je n'ai pas non plus répété celles qui sont propres à Héron et qui sont discutées dans 6.

¹⁷⁶ Respectivement : [1. (i)] dans Df. X. 4, Prop. X. 21, 23, 38, 40, 41, 54-59, 64, 69, 71, 72, 72 Por., 75, 78, 91-96, 108-110, 111 Por., XIII. 11; [1. (ii)] dans les Prop. X. 22, 23, 38, 41, 54, 55, 57-59, 75, 78, 81, 84, 91-96, 114; XIII. 11. On trouve en outre 8 occurrences de [1. (i)] dans le Livre d'Hypsiclès [*EHS*, V, 1, p. 14, l. 17-19; p. 17, l. 2-4 (avec de grosses divergences textuelles entre mss et corrections); p. 20, l. 12-14; p. 21, l. 10-12], une seule chez Apollonius [*Coniques*, II, 1 (*Apoll.*, p. 192, l. 15)], mais 42 dans la *Collection* de Pappus. Elles apparaissent en particulier au Livre VII, dans les Prop. 17 à 21 qui sont des Lemmes pour *La section de rapport et la section d'aire* d'Apollonius et dans les Prop. 60, 62, 64, qui se rattachent au second Livre de *la section déterminée* du même auteur. Il y a seulement 2 occurrences de [1. (i)] chez Archimède [*Fluit.* II, Prop. 8 (*Arch.*, II, 370, l. 3) et Prop. 9 (*ibid.*, 380, l. 11)] mais une bonne vingtaine d'occurrences de [1. (ii)] existent dans le premier Livre du traité de la *Sphère et du cylindre* [Prop. 16 (*Arch.*, I, p. 70, l. 18, 19, 25, 26; p. 72, l. 1), 24 (*Arch.*, I, p. 94, l. 6-7, 18, 23, 25, 27; p. 96, l. 1, 3, 5, 15, 19, 21, 23), 25 (*Arch.*, I, p. 98, l. 16), 29 (*Arch.*, I, p. 110, l. 12), 32 (*Arch.*, I, p. 116, l. 25), 35 (*Arch.*, I, p. 132, l. 23; p. 134, l. 4,12), 39 Por. (*Arch.*, I, p. 146, l. 8)], une quinzaine dans les *Coniques* d'Apollonius, 7 dans *La section du cylindre* de Sérénus (*Sereni*, p. 16, l. 2-4; p. 22, l. 10-12; p. 42, l. 15-16; p. 46, l. 21-23; p. 48, l. 2-3; p. 50, l. 27-29, p. 54, l. 4-7), 47 dans la *Collection* de Pappus (L. IV. : 3; L. V. : 41; L. VII. : 3); 13 dans le *Commentaire* d'Eutocius à la *Sphère et du cylindre*, plus une dans le *Commentaire* aux *Coniques*. On pourrait y adjoindre 2 occurrences du corpus héronien [*Met.*, I, 34 (*Hero*, III, p. 82, l. 28-29); *Stereom.*, I, 92 (*Hero*, V, p. 80, l. 20-22)], pour deux citations d'un résultat d'Archimède, à condition d'accepter de corriger le texte. Voir *supra*, 6, note 69*.

¹⁷⁷ Une petite vingtaine de formules dans Apollonius, une dans Pappus [L. IV, Prop. 33 (*Papp.*, p. 278, l. 20—p. 280, l. 3)], huit dans le commentaire d'Eutocius.

La formule de la conclusion est citée, sous la même forme, par Hypsiclès¹⁷⁸, Ptolémée¹⁷⁹, Pappus¹⁸⁰, Théon d'Alexandrie¹⁸¹ et dans le corpus héronien¹⁸². C'est aussi de cette manière que l'on applique le théorème de l'hypoténuse dans le traité pseudo-aristotélicien des *Lignes insécables*¹⁸³.

(i') — « ἡ ... δύναται τὰς ... »¹⁸⁴.

(ii) — « ἡ δυναμένη τὴν (ou τὸ) ... καὶ τὸ (ou τὴν) ... » (la [droite] ayant la puissance de la [droite] (ou du [segment]) ... et du [segment] (ou de la [droite]) ...).

La formule est proche de [2a. (i)]. Plusieurs auteurs mentionnent le fait que les Pythagoriciens appelaient “δυναμένη” l'hypoténuse du triangle rectangle¹⁸⁵. La formule (ii) se retrouve aussi dans la tradition manuscrite des *Éléments* et dans le Livre d'Hypsiclès¹⁸⁶.

(iii) « ἡ ... ἴσον δύναται ταῖς ... » (la [droite] ... peut [produire] autant que les [droites] ...);

On l'utilise pour citer, de manière concise, le théorème de l'hypoténuse. La formulation d'Euclide (I. 47) ne l'éclipsera pas¹⁸⁷.

b. Égalité en puissance entre droites et aires

(i.e. égalité d'aires dont l'une seulement est rapportée à la droite qui peut la produire) :

(i) — « ἡ ... ἴσον δύναται τῷ ὑπὸ τῶν ... περιεχομένῳ » (la [droite] ... peut [produire] [une aire] égale au [rectangle] contenu par les [droites] ...) ¹⁸⁸.

(i') — « αἱ ἴσον δυνάμει τῷ ὑπὸ τῶν ... » (les [droites] ... pouvant produire [une aire] égale au [rectangle contenu] par ...) ¹⁸⁹;

(ii) — « ἡ ... δυνάμει ἴσα τῷ ὑπὸ τῶν ... περιεχομένῳ καὶ τῷ τρίτῳ μέρει τοῦ ἀπο τῆς ... » (la [droite] ... [est], en puissance, égale au [rectangle] contenu par les [droites] ... et à la troisième partie du carré sur ...) ¹⁹⁰.

¹⁷⁸ Voir *EHS*, V, 1, p. 16, l. 10-12.

¹⁷⁹ Voir *Ptol.*, I, p. 33, l. 18sq.

¹⁸⁰ Voir *Papp.*, L. III, Prop. 57, p. 152, l. 22—p. 154, l. 1 (formulation abrégée : δύναται ἀμφοτέρας ἡ ...) et L. V, Prop. 48, *Ibid.*, p. 440, l. 13-16.

¹⁸¹ *Theo in Alm.*, p. 466, l. 11-13.

¹⁸² Voir *Stereometrica*, II, 63. 5, *Hero*, V, p. 152, l. 3-5.

¹⁸³ Voir *Lin. ins.*, 970 a13-14.

¹⁸⁴ *Theo in Alm.*, p. 466, l. 13.

¹⁸⁵ Voir *supra*, 9*.

¹⁸⁶ Voir l'ajout au lemme lui-même inauthentique {X. 13/14} qui décrit l'hypoténuse comme la “δυναμένη” des cotés de l'angle droit (voir *EHS*, III, p. 22, l. 13-14; l. 16; 18 et *Eucl.*, *El.*, vol. 3, p. 136), la fin altérée de la Prop. XIV. 4 (*EHS*, V, 1, p. 17, l. 7-8) et les secondes récapitulations finales (*Ibid.*, p. 21, l. 17—p. 22, l. 7), respectivement 2 et 6 occurrences.

¹⁸⁷ Voir Plutarque, *Non posse suaviter vivi secundum Epicurum*, 11, 1094 B6-7 (<ἡ ὑποτείνουσα> ἴσον δύναται ταῖς περιεχουσῶν τὴν ὀρθήν); *Alex. in Met.*, p. 75, l. 30-31 (cité *supra*, note 122*), Athénée de Naucratis, *Banquet des Sophistes*, X, 418 F (« ἡ ... δύναται ἴσον ταῖς ... »); *Theo in Alm.*, p. 467, l. 19. Voir aussi *Simpl. in Phys.*, p. 62, l. 1-4 (cité plus haut à l'appel de la note 39*) et *ibid.*, p. 63, l. 25-26.

¹⁸⁸ *Arch.*, *Sph.Cyl.* I, Prop. 29 (*Arch.*, I, p. 110, l. 4), Prop. 35 (*Arch.*, I, p. 132, l. 6-7, 17-18, 27-28; p. 134, l. 10-11), Prop. 37 (*Arch.*, I, p. 136, l. 25-26), Prop. 40 (*Arch.*, I, p. 146, l. 25-26; p. 148, l. 3-4), *Con.Sph.*, Prop. 3 (*Arch.*, I, p. 274, l. 1).

¹⁸⁹ *Coniques*, I. 5 (*Apoll.*, I, p. 20, l. 4-6). La formule est un hapax. A noter qu'Eutocius, lorsqu'il cite cette assertion dans son commentaire (*Eut. in Apoll.*, p. 208, l. 8-9), utilise « ἴσον δύνανται » conformément à (i).

¹⁹⁰ *Arch.*, *Spir.*, Prop. 25 (*Arch.*, II, p. 94, l. 4) et Prop. 26 (*ibid.*, p. 102, l. 25).

(ii') — « ἑκάτερα ἄρα τῶν ... δυνάμει ἐστὶν δ' τοῦ ὑπὸ ... » (Et donc chacune des [droites] ... est [égale] en puissance au 1/4 du rectangle contenu par ...) ¹⁹¹.

c. Inégalité en puissance

• non spécifiée

(i) — « ἡ ... μείζων ἐστὶ δυνάμει τῶν ... » (La droite ... est, en puissance, plus grande que les [droites] ...) ¹⁹²;

(ii) — « τὴν ... ἔλαττον δύνασθαι τῆς ... καὶ τῆς ... » (La [droite] ... produit une [aire] plus petite que la [droite] ... et la [droite] ...) ¹⁹³;

• partiellement spécifiée

(iii) — « ἡ ... τῆς ... μείζων (ἐλάττων) ἢ διπλασίων ἐστὶ δυνάμει τῆς ... » (La [droite] ... est, en puissance, plus grande (petite) que le double de la [droite] ...) ¹⁹⁴;

Une droite d est, en puissance, plus que le double d'une autre droite, d' , signifie que le carré décrit sur d est plus grand que 2 fois le carré décrit sur d' , et non pas qu'il est plus grand que le carré décrit sur $2d'$ [= 4 fois le carré décrit sur d'], auquel cas on aurait $d > 2d'$ en longueur (μήκει).

(iv) — « δύναται ἡ ... τῆς ... δοθέντι μείζον ἢ ἐν λόγῳ » (La [droite] ... peut [produire] plus en rapport que la [droite] ... par une [droite] donnée) ¹⁹⁵.

Cette formule réclame quelques explications. La relation « être plus grande en rapport que ... par une [grandeur] donnée » est introduite dans la définition 11 des *Data* : « Une grandeur est plus grande en rapport qu'une grandeur par une [grandeur] donnée, quand en retranchant la donnée, le reste a relativement à la même [grandeur] un rapport donné ».

Il est facile de comprendre ce que veut dire, pour une grandeur A , d'être plus grande qu'une autre grandeur B par une donnée D (δοθέντι μείζον εἶναι); cela signifie que $A - D = B$ ou si l'on préfère que $A - B$ est une donnée en grandeur ¹⁹⁶. Mais, comme on le voit dans la proposition *Data* 10, la clause supplémentaire « ἢ ἐν λόγῳ » spécifie que c'est le rapport $A - D : B$ (où D est donnée) qui est donné ! Ici la présence du verbe « δύνασθαι » signifie que la relation est appliquée aux carrés sur des droites d, d' : alors, Δ désignant une aire donnée et $T(d)$ le carré décrit sur d , le rapport $T(d) - \Delta : T(d')$ est donné.

• totalement spécifiée (Excès en puissance d'une droite sur une droite plus petite)

(v) — « ἡ ... μείζων δύναται τῆς ... τῷ ἀπὸ τῆς ... » (La [droite] ... peut [produire] plus que la [droite]... par le [carré] sur la [droite]...);

(v') — « ἡ ... μείζων δύναται τῆς ... τῇ ... » (La [droite] ... peut [produire] plus que la [droite]... par la [droite]...);

¹⁹¹ Papp., L. VII, Prop. 204 (p. 956, l. 7-8).

¹⁹² Dans Hipp./Eud./Simpl., *Simpl. in Phys.*, p. 66, l. 23-24.

¹⁹³ *Ibid.* p. 63, l. 11-13.

¹⁹⁴ *Ibid.*, p. 62, l. 33—p. 63, l. 1; p. 66, l. 19-20, l. 21-22. Arch., *Sph.Cyl.* II, Prop. 9 (Arch., I, p. 224, l. 5-6). Eut. in Arch SCII. 9 (Arch., III, p. 216, l. 14-15, cite le précédent); *Simpl. in Phys.*, p. 66, l. 26-27.

¹⁹⁵ Eucl., *Data*, Prop. 86 (EHM, VI, p. 168, l. 14).

¹⁹⁶ Cf. *Data*, Df. 9.

La formule (v) est l'énoncé canonique de l'excès en puissance dans les *Eléments* ¹⁹⁷: 126 occurrences ¹⁹⁸ contre 5 seulement pour (v') dont 3 dans un lemme vraisemblablement interpolé ¹⁹⁹.

(v'') — « ὧ μείζον (ἐλασσον) δύναται ἢ ... τῆς ... » (Ce par quoi la [droite] ... peut [produire] plus (moins) que la [droite] ...) ²⁰⁰.

(v'') permet d'énoncer en termes de puissance toutes les égalités du type :

$$T(a) = T(b) + \text{Rect}(c, d),$$

par exemple II. 5-6. Ce que font les deux occurrences des *Data* pour II. 12-13 (généralisations du théorème de l'hypoténuse dans le cas des angles obtus et aigu).

(vi) — « αἱ διάμετροι τῶν πλευρῶν ... μονάδι μείζους (ἐλάττους) ἢ διπλάσιαι δυνάμει » (les diagonales sont plus grandes (petites) que les doubles des côtés par une unité) ²⁰¹.

d. Qualification des relations comm. et incomm. pour deux droites

(i) — « δυνάμει σύμμετροι εἶναι » (être commensurables en puissance);

(ii) — « δυνάμει ἀσύμμετροι εἶναι » (être incommensurables en puissance);

(iii) — « σύμμετροι δυνάμει μόνον εἶναι » (être commensurables en puissance seulement).

Ces formules sont très fréquentes dans les *Eléments* (près de 300 occurrences). (d. i) est la moins utilisée: 24 occurrences ²⁰² dont 20 appartiennent à des passages du texte certainement inauthentiques. Quant à (d. ii) et (d. iii) elles apparaissent au moins une fois dans chaque Proposition des n°27 à 113, en particulier dans toutes celles de la classification des irrationnelles (n°36 à 111) et dans XIII. 6, 11 ²⁰³.

*

Signalons quelques occurrences de formules qui ne correspondent pas à la théorie euclidienne de l'exprimabilité :

¹⁹⁷ Également trois occurrences dans les Prop. 2-3 du Livre IV de la *Collection* de Pappus qui se rattachent à la classification euclidienne des irrationnelles (*Papp.*, p. 180, l. 14-15; p. 182, l. 22-23; p. 184, l. 10-11).

¹⁹⁸ Prop. X. 14, 17, 18, 30-33, Df. X. ii 1, 4, 48, 50-66, 71, 72, Df. X. iii, 1-4, 85-103, 108-113; XIII. 11.

¹⁹⁹ Lemme X. 13/14 et une dans chacune des Prop. X. 29 [en non conformité avec la Prop. parallèle X. 30 qui utilise la formulation (v)] et XIII. 11.

²⁰⁰ Eucl., *Data*, Prop. 64 (*EHM*, VI, p. 116, l.15-18); Prop. 65, (*ibid.*, p. 118, l. 21—p. 120, l. 2); Prop. 67, (*ibid.*, p. 122, l. 16-18). Arch., *Con.Sph.*, Prop. 9 (*Arch.*, I, p. 300, l. 21).

²⁰¹ Trois occurrences dans la célèbre description des nombres dits latéraux et diagonaux par Théon de Smyrne; *Expositio*, p. 44, l. 18—p. 45, l. 2; p. 45, l. 2-6; l. 7-8. La "même" formule est reprise dans *Pr. in Remp.*, p. 24, l. 16-18 (avec renvoi aux Pythagoriciens), mais il manque "δυνάμει".

²⁰² Df. X. 2, X. 9 Por. et son ajout (« être commensurable en puissance » y est appliquée aux carrés), X. 18/19, l'ajout à X. 23 Por., X. 55 [*EHS*, III, p. 95, l. 15; une occurrence supplémentaire (*ibid.*, p. 95, l. 8) qui n'existe pas dans le ms *P*].

²⁰³ Une occurrence de [2d. (iii)] chez Théon de Smyrne (*Expositio*, p. 117, l. 10-11) et dans les *Definitiones* attribuées à Héron (*Hero*, IV, p. 84, l. 24); trois dans les Prop. 2-3 du Livre IV de la *Collection* de Pappus (*Papp.*, p. 180, l. 13-14; p. 182, l. 21-22; p. 184, l. 10). Les textes de Héron et Pappus se rattachent à la classification euclidienne des irrationnelles.

(i') — « ῥητῇ δυνάμει εἶναι » (être exprimables en puissance)²⁰⁴,
dans X. 22 et XIII. 11²⁰⁵, dont il y a toutes les raisons de penser qu'il s'agit de gloses interpolées.

(i'') — « ῥητῇ δυνάμει μόνον εἶναι » (être exprimables en puissance seulement)²⁰⁶.

e. Expression de rapports spécifiés, exprimables en puissance seulement

(i) — « ἡ ... τῆς ... ἐπίτριτος (ἡμιολία, διπλασία, τριπλασία ... , ἑξαπλασία) δυνάμει εἶναι » (La [droite] ... est, en puissance, épitrète, hémiole, double, triple ... sextuple de la [droite] ...);

(i') — « τὸ τῆς ... δυνάμει δωδεκαπλάσιον μεῖζόν ἐστιν τοῦ δυνάμει πενταπλάσιου τῆς ... » (Le dodécuple en puissance de la [droite]... est plus grand que le quintuple en puissance de la [droite]...) ²⁰⁷.

(i'') — « (ἡ, αἱ) ... τρίτον μέρος δυνάμει (τῆς, τῶν) ... εἶναι »²⁰⁸;

(ii) — « ἡ ... πενταπλάσιον (τριπλάσιον, τετραπλάσιον, ... , ἑξαπλάσιον) δύναται τῆς (τοῦ) ... » (La [droite] ... peut [produire] [le] quintuple, ([le] triple, [le] quadruple ... [le] sextuple) de la [droite] (du [segment]) ...) ²⁰⁹;

(ii') — « τὸ ... πενταπλάσιον δύναται τοῦ ἀπὸ τῆς ... » (Le [segment] ... peut [produire] [le] quintuple du [carré] sur la [droite] ...) ²¹⁰.

Cette rubrique est importante dans le fragment d'Hippocrate²¹¹ et dans les *Eléments*. La formule (e i) revient 28 fois, entre autres dans les énoncés des importantes Propositions XIII. 12-15 et du Porisme à XIII. 16²¹². On en trouve une chez Archimède²¹³, 3 dans le Livre d'Hypsiclès²¹⁴, 2 dans l'*Almageste* ²¹⁵, 24 dans la *Collection* de Pappus (dont plusieurs références à des résultats du Livre XIII), 2 dans le commentaire de Théon à *Almageste* ²¹⁶, une dans le commentaire d'Eutocius à la Proposition II. 9 de *La sphère et le cylindre* d'Archimède²¹⁷.

²⁰⁴ Quatre occurrences dans la section 136. 34 des *Definitiones* (auteur inconnu) [*Hero*, IV, p. 138, l. 4 (opposition avec « μήκει ἄλογος »), l. 6-7, l. 24 (couplée avec « μήκει ῥηταί »), l. 24-25]. On les retrouve dans la scholie N°X. 9 aux *Éléments* (*EHS*, V, 2, p. 96, l. 25-26, l. 26-27; p. 97, l. 12, l. 12-13).

²⁰⁵ *EHS*, III, p. 36, l. 13 et IV, p. 157, l. 3 respectivement. Cf. Eucl., *El.*, vol. 3, p. 155, note 179 qui parle d'une unique occurrence car curieusement Heiberg maintient la première dans son texte mais rejette la seconde.

²⁰⁶ Voir *Definitiones*, 136. 34 (*Hero*, IV, p. 140, l. 5-6); *Theo in Alm.*, p. 471, l. 7.

²⁰⁷ *Papp.*, L. V, Prop. 43 (p. 422, l. 29-33).

²⁰⁸ *Papp.*, L. III, Prop. 57 (p. 154, l. 8-15; l. 23-25); 58 (p. 162, l. 1-3; l. 13-14); L. V, Prop. 39 (p. 412, l. 26-29).

²⁰⁹ Eucl., *El.*, Prop. XIII. 2 (3 occurrences); *Papp.*, L. V, Prop. 45 (citation instanciée de Eucl., *El.*, Prop. XIII. 2, p. 430, l. 26).

²¹⁰ Eucl., *El.*, Prop. XIII. 1, 3, 11 (citation instanciée de XIII. 1), 16 (même chose pour XIII. 3). Nous avons traduit comme si on avait : « τὸ ... δύναται τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀπὸ τῆς ... ». Voir *supra*, 5, notre commentaire.

²¹¹ Sept occurrences de e (i) : *Simpl. in Phys.*, p. 62, l. 16-18; p. 64, l. 18-19; p. 66, l. 16-17, 22-23; p. 67, l. 16-18, l. 31, l. 36-37 (restitution).

²¹² V. Eucl., *El.*, vol. 3, not. « Sur le L. X », C, 9, notes 88-92.

²¹³ Arch., SC II, 9 (*Arch.*, I, p. 224, l. 7).

²¹⁴ L'énoncé de la Prop. XIV. 2 (*EHS*, V, 1, p. 4, l. 18-21), une citation de XIII. 16 Por. dans XIV. 3 (*Ibid.*, p. 6, l. 8-10), une référence à XIII. 12 dans XIV. 9 (*Ibid.*, p. 15, l. 20-23).

²¹⁵ *Ptol.*, I, p. 35, l. 8, 10; la seconde est également une référence à XIII. 12.

²¹⁶ *Theo in Alm.*, p. 467, l. 18-19; p. 467, l. 20—p. 468, l. 2 (évidemment une référence à XIII. 12 !).

²¹⁷ *Arch.*, III, p. 220, l. 14-16.

(iii) — « ἡ ... εὐθεῖα εἰς τὸν δοθέντα λόγον δυνάμει τέμνειν »²¹⁸ (Couper la droite ... dans le rapport donné en puissance).

(iv) — « ἡ ... τῆς ... τριπλῆ μήκει, δυνάμει ἐνναπλῆ » (La [droite] ... est triple de la [droite] ... en longueur, nonuple en puissance)²¹⁹;

(iv') — « τὰ τριπλασία (ἐπίτριτα) μήκει, δυνάμει ἐνναπλάσια (ἐννατα) »²²⁰ (Ce qui est triple (épitrite) en longueur [est] nonuple (épinone) en puissance).

3. Qualification de relations de relations (proportions, inégalités de rapports)

a. Proportions où l'un des rapports est qualifié "en puissance"

(i) — « τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν τὰ X καὶ αἱ d δυνάμει » (Ont le même rapport, les X, et les d, en puissance)²²¹;

(ii) — « X πρὸς X' τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν ὃν ἡ d πρὸς τὴν d' δυνάμει » (X, relativement à X', a le même rapport que d relativement à d', en puissance).

En règle générale (X, X') sont des figures ou des aires et (d, d') des droites. Ces formules sont bien attestées chez Archimède (14 occurrences²²²), même si, à plusieurs reprises, il s'agit simplement de rappeler un résultat, entre autres, le porisme à *Conoïdes et sphéroïdes*, Prop. 6.

(iii) — « λόγος ἐστὶν τῆς ... πρὸς τὴν ... δυνάμει ὃν M πρὸς N »²²³ (Le rapport de la [droite] ... relativement à la [droite] ... est, en puissance, celui de M relativement à N);

(iii') — « ἡ ... πρὸς ... δυνάμει λόγον ἔχει ὃν M πρὸς N »²²⁴;

On peut considérer que les formules (3a. iii-iii') représentent un élément de (3b. iv) ou une étape dans l'énonciation d'une telle formule²²⁵.

Version plus sophistiquée dans les *Coniques* d'Apollonius²²⁶. Le rapport "en puissance" intervient dans un rapport composé de rapports :

(iv) — « τὸ ὑπὸ τῶν ... πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ... λόγον ἔχειν τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τῆς ... πρὸς τὴν (τὸ) ... δυνάμει, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ... πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς ... »

²¹⁸ Papp., L. VIII, Prop. 6 (p. 1044, l. 27).

²¹⁹ Papp., L. V, Prop. 45 (p. 430, l. 19-21).

²²⁰ Papp., L. V, Prop. 53 (p. 456, l. 21-22). Formule analogue (avec διπλασία / τετραπλασία) dans *Simpl. in Phys.*, p. 67, l. 36, mais qui appartient très probablement aux explications de Simplicius.

²²¹ Dans Hipp./Eud./Simpl., *Simpl. in Phys.*, p. 61, l. 6-7, 8-9; trois occurrences dans le commentaire d'Eutocius à la Prop. I. 13 de *La sphère et le cylindre* d'Archimède (*Arch.*, III, p. 28, l. 29—p. 30, l. 4; p. 30, l. 7-10; l. 23-26).

²²² [3a. (i)] : *Sph.Cyl.*, I. 13 (*Arch.*, I, p. 56, l. 6, p. 60, l. 13, l. 15); *Sph.Cyl.*, I. 14 (*Ibid.*, p. 64, l. 1-2, p. 66, l. 10); [3a. (ii)] : *Con.Sph.* 6 Por. (*Arch.*, I, p. 284, l. 6-7); *Con.Sph.* 21 (*Ibid.*, p. 348, l. 19—p. 350, l. 1, p. 352, l. 21-22); *Con.Sph.* 22 (*Ibid.*, p. 360, l. 8-9, 10-11); *Con.Sph.* 25 (*Ibid.*, p. 376, l. 19-20); *Con.Sph.* 26 (*Ibid.*, p. 388, l. 18-19); *Spir.*, 25 (*Arch.*, II, p. 94, l. 7-9); *Spir.*, 26 (*Ibid.*, p. 102, l. 31).

²²³ Papp., L. V, Prop. 45 (p. 430, l. 16-22; p. 432, l. 7-8; 8-9); L. VI, Prop. 35 (p. 546, l. 21-27).

²²⁴ Eut., *In Arch. Dim.Circ.* 3 (*Arch.*, III, p. 236, l. 8-9).

²²⁵ L'occurrence de (iii') est une citation partielle de la formule (3b. iii) de la *Mesure du cercle* citée *infra* note 230*, reprise, entière par Eutocius un peu plus loin (réf. in note 230*).

²²⁶ Prop. III. 54 (p. 440, l. 9-16); III. 56 (p. 446, l. 23—p. 448, l. 3).

(Le rectangle [contenu] par les [droites] ..., relativement au carré sur la [droite] ... a, comme rapport, le composé de celui qu'a la [droite] ..., en puissance, relativement à la [droite] ..., et de celui qu'a le rectangle [contenu] par les [droites] ..., relativement à la quatrième partie du [carré] sur la [droite] ...).

b. Proportions où intervient l'opposition « μήκει / δυνάμει »

(i) — « ὥς ἡ ... πρὸς τὴν ... μήκει, οὕτως ἡ ... πρὸς τὴν ... δυνάμει » (comme la [droite] ... est relativement à la [droite] ... en longueur, ainsi est la [droite] ... relativement à la [droite] ... en puissance)²²⁷;

(ii) — « τὸν αὐτὸν λόγον ἔχειν, ἡ ... πρὸς τὴν ... μήκει, ὃν ἡ ... πρὸς τὴν ... δυνάμει » (Ont le même rapport, la [droite] ... relativement à la [droite] ... en longueur, celui de la [droite] ... relativement à la [droite] ... en puissance)²²⁸;

(ii') — « ὃν ἔχει λόγον ἡ ... πρὸς τὴν ..., τοῦτον ἔχει τὸν λόγον δυνάμει ἡ ... πρὸς τὴν ... » (ce rapport qu'a la [droite] ... relativement à la [droite] ..., c'est ce rapport-ci qu'a, en puissance, la [droite] ... relativement à la [droite] ...)²²⁹;

(iii) — « ἡ ... πρὸς τὴν ... δυνάμει λόγον ἔχειν ὃν M πρὸς N, μήκει ἄρα ὃν m πρὸς n » (La [droite] ... , relativement à la [droite] ..., a, en puissance, comme rapport, celui du [nombre] M à N, et donc, en longueur, celui de m à n)²³⁰.

La formule (iii) intervient dans la problématique de l'approximation de racines carrées; on doit donc avoir $M : N \approx m^2 : n^2$. On trouve le même genre de formule chez Héron²³¹.

c. Inégalité de rapports où intervient l'opposition « μήκει / δυνάμει »²³²

(i) — « ἡ ΒΓ πρὸς τὴν ΓΑ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΖΔ, καὶ δυνάμει καὶ διελόντι καὶ μήκει ἡ ἄρα ΒΑ πρὸς τὴν ΑΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ περ ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΔΖ » (BC, relativement à CA, a un rapport plus grand que celui de EZ relativement à FD, et en puissance, et, par séparation, BA, relativement à AC, a un rapport plus grand que celui de ED relativement à DF en longueur).

²²⁷ Arch., *Quadr.* 3 (Arch., II, p. 268, l. 2). Papp., L. IV, Prop. 17 (p. 230, l. 9-12); Eut., *In Arch. Sph. cyl.* I. 13 (Arch., III, p. 30, l. 25).

²²⁸ Arch., *Sph.Cyl.*, I. 13 (Arch., I, p. 56, l. 9); *Sph.Cyl.*, I. 14 (*Ibid.*, p. 64, l. 3); *Quadr.* 4 (Arch., II, p. 268, l. 14, 16); *Quadr.* 19 (*ibid.*, p. 302, l. 23-25).

²²⁹ Papp., L. IV, Prop. 16 (p. 230, l. 2-4).

²³⁰ Arch., *Dim.Circ.* 3 (Arch., I, p. 238, l. 1-2); Eut., *In Arch. Dim.Circ.* 3 (Arch., III, p. 236, l. 16-18).

²³¹ « τριπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΔΒ. λόγος ἄρα τῆς ΑΔ πρὸς τῆς ΔΒ δυνάμει ὥς ἔγγιστα ὅ[ν] τοῦ μθ πρὸς ις· καὶ μήκει λόγος τῆς ΑΔ πρὸς τῆς ΔΒ, ὃν ζ πρὸς δ » (le carré sur AD est donc triple de celui sur DB. Donc le rapport de AD, relativement à DB, est, en puissance, voisin de celui de 49 à 16; et en longueur, le rapport de AD relativement à DB est [voisin ?] de celui de 7 à 4). *Metr.*, L. I, Lemme 19/20 (*Hero*, III, p. 54, l. 15-19).

²³² Papp., L. VI, Prop. 41 (p. 568, l. 22-25).

Bibliographie

1. Editions et traductions : abréviations et références complètes

Pour les textes anciens les plus fréquemment cités, nous nous référons aux éditions classiques à l'aide d'abréviations dont on trouvera la liste ci-dessous ainsi que les références complètes desdites éditions.

Alex. in Met. = *Alexandri Aphrodisiensis in Aristotelis Metaphysica commentaria* =
Ed. M. Hayduck (*Comm. in Arstt. Græca* I), Berlin, 1891

Anon. in Theaet. = *Commentarium in Platonis « Theaetetus »* Édition par G. Bastianini dans le
Corpus dei Papiri Filosofici Greci e latini. Parte III : Commentari. Firenze, Leo S. Olschki, 1995, pp. 261-479.

Apoll. = *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis* (Eutocius), I-II. Ed. I. L. Heiberg.
Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1891-1893. Réimpr. Stuttgart, 1974.

Arch. = *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, I-III. Iterum ed. I. L. Heiberg. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1910-1915. Réimpr. Stuttgart, 1972:

I. *De Sphaera et Cyliandro libri I-II* (*Sph. Cyl.*), *Dimensio Circuli* (*Circ.*), *De Conoidibus et Sphaeroidibus* (*Con. Sph.*); II. *De Lineis Spiralibus* (*Spir.*), *De Planorum Aequilibriis libri I-II* (*Aequil.*), *Arenarius* (*Aren.*), *Quadratura Parabolae* (*Quadr.*), *De Corporibus Fluitantibus libri I-II* (*Fluit.*), *Stomachion* (*Stom.*), *Ad Eratosthenem Methodus* (*Eratosth.*), *Liber Assumptorum*, *Problema Bovinum* (*Bov.*), *Fragmenta* ; III. *Prolegomena*, *Eutocii commentarii in libros De sphaera et cylindro*, *Eutocii commentarius in Dimensionem Circuli*, *Eutocii commentarius in libros De Planorum Aequilibriis*, *Scholia*, *Indices*.

Dioph. = *Diophantus Alexandrinus, Opera omnia*. Ed. P. Tannery, Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1893.
Réimpr. Stuttgart, 1974.

EHM = *Euclidis opera omnia*. Ed. I. L. Heiberg & H. Menge. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner :
I. *Elementa* i-iv (1883); II. *El.* v-ix (1884); III. *El.* x (1886); IV. *El.* xi-xiii (1885);
V. *El.* xiv-xv, *Scholia*, *Prolegomena critica* (1888); VI. *Data*, *Marini Commentarius in Eucl. Data* (1896);
VII. *Optica*, *Opticorum recensio Theonis*, *Catoptrica* (1895);
VIII. *Phaenomena*, *Scripta musica*, *Fragmenta* (1916); IX. *Supplementum*.

EHS = *Euclidis Elementa*. Post Heiberg ed. E. S. Stamatis, Leipzig, in aed. B. G. Teubner :
I. *El.* i-iv (1969); II. *El.* v-ix (1970); III. *El.* x (1972); IV. *El.* xi-xiii (1973); V, 1. *El.* xiv-xv, *Scholia in lib.* i-v (1977); V, 2. *Scholia in lib.* vi-xiii (1977).

Eucl., Ad. I = *The first Latin Translation of Euclid's Elements commonly ascribed to Adelard of Bath*.
Ed. H. L. L. Busard. Toronto, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, 1983.

Eucl., Él. = *Euclide d'Alexandrie, Les Eléments*. Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences. Introduction générale par Maurice Caveing (Vol. 1). Traduction et commentaires par Bernard Vitrac. Volume 1, 1990 : Livres I à IV; Volume 2, 1994 : Livres V à IX; Volume 3, 1998 : Livre X; Volume 4, 2001 : Livres XI à XIII.

Eucl., GC = *The Latin translation of the Arabic version of Euclid's Elements commonly ascribed to Gerard of Cremona*. Ed. H. L. L. Busard. Leiden, E. J. Brill, 1984.

Hero = *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*. Ed. W. Schmidt, Lipsiae, in aed. B. G. Teubner.
III. *Metrica*, *Dioptra* (1903, H. Schöne); IV. : *Definitiones*, *Geometrica* (1912, I.L. Heiberg); V. : *Stereometrica* (1914, I.L. Heiberg).

Jamb. in Nic. = *Iamblichus in Nicomachi Arithmeticam Introductionem Liber*.
Ed. H. Pistelli. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1894. Réimpr. Stuttgart, 1975.

Theol. ar. = [*Iamblichus*], *Theologumena Arithmeticae*.
Ed. V. de Falco. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1922. Réimpr. Stuttgart, 1975.

Nic. Ar. = *Nicomachi Gerasini Introductionis Arithmeticae Libri II*.
Ed. R. Hoche. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1866.

Papp. = *Pappi alexandrini collectionis quae supersunt.*

Ed. F. Hultsch, Berlin, Weidmann, 1876-78 : I. Libr. ii, iii, iv, v, rel. ; II. Libr. vi, vii, rel. ; III. 1. Libr. viii, rel., schol., suppl.; III. 2. indices. Réimpr. Amsterdam, A. M. Hakkert, 1965.

Papp. in X. = *The Commentary on Book X of Euclid's Elements.* Ed. et trad. anglaise W. Thomson; Introduction, notes, et glossaire par G. Junge et W. Thomson, Cambridge, Harvard Univ. Press, 1930

Pr. = *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii.* Ed. G. Friedlein.

Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1873. Réimpr. Hildesheim, 1967.

Pr. in Remp. = *Procli Diadochi in Platonis Rempublicam Commentarii.*

Ed. W. Kroll. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, vol. 1, 1899; vol. 2, 1901.

Ptol. = *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia.* Ed. I. L. Heiberg. Lipsiae, in aed. B. G. Teubner.

Volumen I, Pars I. : *Syntaxis Mathematica*, Lib. I-VI, 1898; Pars II. : *Syntaxis Mathematica*, Lib. VII-XIII, 1903. Volumen II. *Opera Astronomica Minora*, 1907.

Sereni. = *Sereni Antinoensis opuscula.* Ed. I. L. Heiberg, Lipsiae, in aed. B. G. Teubner, 1896.

Simpl. in Phys. = *Simplicii in Aristotelis Physica lib. I-IV commentaria.*

Ed. H. Diels (*Comm. in Arstt. Graeca* IX), Berlin, 1882.

Theo in Alm. = Théon d'Alexandrie, *Commentaires sur l' Almageste.* Ed. A. Rome. L. I-II, Studi e Testi n° 72. Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936; L. III-IV, Studi e Testi n° 106. Cité du Vatican, Biblioteca Apostolica Vaticana, 1943.

[Wehrli, 1969] = Fragments d'Eudème dans Wehrli, F., *Die Schule des Aristoteles, Texte und Kommentar.* Schwabe & Co. Basel/Stuttgart. Vol. VIII. : Eudemos von Rhodos, 1969.

2. Littérature moderne

Allman, G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid.* Dublin, Hodges, Figgis, 1889.

Réimp. New York, Arno 1976.

Aujac, G., « Le langage formulaire dans la géométrie grecque ».

Revue d'Histoire des Sciences, 37, 2, 1984, pp. 97-109.

Becker, O., « Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euclid ». *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik.* Abteilung B, 2, 1933, pp. 311-333.

Becker, O., « Eudoxos-Studien II. Warum haben die Griechen die Existenz der vierten Proportionale angenommen ? ». *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik.* Abteilung B, 2, 1933, pp. 369-387.

Becker, O., « Die Lehre vom Geraden und Ungeraden im Neunten Buch der Euklidischen Elemente ». *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik.* Abteilung B, B. 3, 1934, pp. 533-553. Repris In [Becker, O. (ed.), *Zur Geschichte der griechischen Mathematik.* Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1965, pp. 125-145.

Becker, O., « Eudoxos-Studien III. Spuren eines Stetigkeitaxioms in der Art des Dedekindschen zur Zeit des Eudoxos ». *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik.* Abteilung B, 3, 1936, pp. 236-244.

Becker, O., « Eudoxos-Studien IV. Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten in der griechischen Mathematik ». *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik.* Abteilung B, 3, 1936, pp. 370-88.

Becker, O., « Zur Textgestaltung des eudemischen Berichts über die Quadratur der Mönchen durch Hippokrates von Chios ». *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie, und Physik.* Abteilung B, 3, 1936, pp. 411-418.

Bowen, A. C., Compte- Rendu de [Szabo, 1969]. *Historia mathematica*, 11, 1982, pp. 335-344.

Bretschneider, C. A., *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*. Leipzig, B. G. Teubner 1870. Réimp. Wiesbaden, Sandig, 1968.

Burnyeat, M. F., « The Philosophical sense of Thaletus' Mathematics ». *Isis* 69, 1978, pp. 489-513.

Caveing, M., « A propos des débuts des mathématiques grecques (Compte- Rendu de [Szabo, 1969]) ». *Revue d'Histoire des Sciences*, XXXII, 2, 1979, pp. 163-168.

Caveing, M., *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. Thèse soutenue le 29/10/77, (3 volumes). Atelier national de reproduction des thèses de Lille, 1982.

Caveing, M., *L'irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*. Lille, Presses Universitaires du Septentrion, 1998.

Fowler, D. H., The story of the Discovery of Incommensurability, Revisited, In Christianidis, J., Gavroglu, K., & Nicolaïdis, E., (eds), *Trends in the Historiography of Science*. Dordrecht / Boston / London. Kluwer Academic Publ. Boston Studies in the Philosophy of Science, Vol. 151, 1994, pp. 221-235.

Freudenthal, H., Y avait-il une crise des fondements des mathématiques dans l'Antiquité ? *Bulletin de la Société mathématique de Belgique*, 18, 1966, pp. 43-55.

von Fritz, K., art. «Theaitetos » de la *Paulys Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft*. G. Wissowa (ed.), 2 série, Band V, 1934, col 1354.

Gow, J., *A Short History of Greek Mathematics*. Cambridge, 1884. Rééd. révisée, New York, Chelsea Pub. Comp., 1968.

Hasse, H. et Scholz, H., « Die Grundlagen-Krisis der griechischen Mathematik ». *Kants-Studien* 33. Berlin, 1928, pp. 4-34.

Heath T. L., *A History of Greek Mathematics*, Oxford, Clarendon Press, 1921 : I. From Thales to Euclid; II. From Aristarchus to Diophantus. Réed. New York, Dover Pub., 1960.

Høyrup, J., « Dynamis, the Babylonians, and Theaetetus 147 c7 - 148 d7 ». *Historia Mathematica*, 17, 1990, pp. 201-222.

Knorr, W. R., *The Evolution of the Euclidean Elements*. Dordrecht, Boston. D. Reidel, 1975.

Knorr, W. R., « Archimedes and the pre-Euclidean Proportion Theory ». *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* N°28, 1978, pp. 182- 244.

Knorr, W. R., « "Arithmêtikê stoicheiôsis" : On Diophantus and Hero of Alexandria ». *Historia Mathematica*, 20, 1993, pp. 180-192.

Mugler, Ch., *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*, 2 vol. Paris, Klincksieck, 1958.

Rudio, F., *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates*. Leipzig, B. G. Teubner, 1907. Réimp. Vaduz, Sändig, 1968.

Szabó, A., *Anfänge der griechischen Mathematik*. Budapest, Akadémiai Kiado, 1969. Traduction : *Les débuts des mathématiques grecques*. M. Federspiel. Paris, Vrin, 1972.

Taisbak, C. M., *Coloured Quadrangles*. A guide to the Tenth Book of Euclid's *Elements*. Copenhagen, Museum Tusculanum Press, 1982.

Tannery, P., *Mémoires scientifiques*, 17 vol. J. L. Heiberg et H. G. Zeuthen (eds). Paris/Toulouse, Gauthier-Villars, 1912-1950. *Sciences exactes dans l'Antiquité*, I. (1876-1884), 1912. II. (1883-1898), 1912. III. (1889-1913), 1915. N° 2 (publication originale, 1876) : « Le nombre nuptial de Platon »;

N°25 (publication originale, 1883) : « Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules »;
N°34 (publication originale, 1884) : « Sur la langue mathématique de Platon »;
N°48 (publication originale, 1889) : « L'hypothèse géométrique du *Ménon* de Platon ».

Vinel, N., « Sur les ὄγκοι et les δυνάμεις du *Timée* 31 c5. Contre les interprétations modernes ». *Revue des Études classiques*, 2003, N°71, fasc. 1, pp. 51-70.

Vitrac, B., « Note Textuelle sur un (Problème de) Lieu Géométrique dans les *Météorologiques* d'Aristote (III. 5, 375 b 16—376 b 22) ». *Archive for History of Exact Sciences*, 56, N°3, May 2002, pp. 239-283.

Vitrac, B., « Les scholies grecques aux *Éléments* d'Euclide ». *Revue d'Histoire des Sciences*, 2003, vol. 56/2, pp. 275-292.

Vitrac, B., « Peut-on parler d'algèbre dans les mathématiques grecques anciennes ? ». *Mirror of Heritage (Ayene-ne Miras)*, Téhéran, New Series Vol. 3, N°1, (28), Spring 2005, pp. 1-44.

Vogt, H., « Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts ». *Bibliotheca Mathematica* 10 (3è série), 1909/1910, pp. 97-155.