

PYTHAGORE: COMMENT A-T-IL TROUVÉ SON THÉORÈME ?

7613 pdf
YOUNG, G.C.

Autor(en): Young, Gr. Ch.

1926

Objektyp: Article

p. 248-253

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band (Jahr): 25 (1926)

Heft 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

PDF erstellt am: 16.07.2014

Persistenter Link: <http://dx.doi.org/10.5169/seals-20689>

Nutzungsbedingungen

Mit dem Zugriff auf den vorliegenden Inhalt gelten die Nutzungsbedingungen als akzeptiert. Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die angebotenen Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungshinweisen und unter deren Einhaltung weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://retro.seals.ch>

PYTHAGORE: COMMENT A-T-IL TROUVÉ SON THÉORÈME ?

Autor(en): **Young, Gr. Ch.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **25 (1926)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **16.07.2014**

Persistenter Link: <http://dx.doi.org/10.5169/seals-20689>

Nutzungsbedingungen

Mit dem Zugriff auf den vorliegenden Inhalt gelten die Nutzungsbedingungen als akzeptiert. Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die angebotenen Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungshinweisen und unter deren Einhaltung weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

PYTHAGORE:
COMMENT A-T-IL TROUVÉ SON THÉORÈME ?

PAR

Mme Gr. Ch. YOUNG (Lausanne).

Il fut un temps..... Vingt-cinq siècles ont passé depuis.

Il y avait une grande ville... On commence maintenant à la déterrer en la dépouillant des amas de sable qui l'ont ensevelie: Babylone.

Un grand jeune homme tient dans ses mains un petit cône, arrondi au sommet. Il vient de déchiffrer, avec l'aide d'un vieux mage, l'inscription cunéiforme taillée dans la pierre verte qui forme la substance du cône:

« UNE MANEH, POIDS ÉTALON, PROPRIÉTÉ DE MEROACH – SAR – ILANI; COPIE DU POIDS QUE NABUCHADNEZZAR, ROI DE BABYLONE, FILS DE NABUPOLASSAR, ROI DE BABYLONE, A FAIT FAIRE, EN CONCORDANCE EXACTE AVEC LE POIDS DU DIVIN DUNGI, ROI D'AUTREFOIS ».

Et voici que, tenant dans ses mains le poids renversé, le jeune homme fixe la base elliptique. Le mage parle:

« Regarde cette courbe, Pythagore, elle est sacrée. C'est moi qui ai fourni le dessin d'après lequel on l'a taillée. Voici comment je l'ai fait. Je t'ai déjà enseigné comment on divise une corde de trois pieds de longueur en 12 segments égaux. Voici une corde: les deux bouts sont pourvus de nœuds et les divisions marquées en noir sur le fond blanc de la corde. Seulement cette corde est dix fois plus grande que celle que j'avais employée pour mon dessin. »

« Eh bien; je transperce les nœuds avec un clou; puis laissant deux des points noirs, je fixe le troisième, de façon à tendre ces trois segments de la corde. Enfin je passe au huitième point noir, et, tendant la corde, je la fixe. Voilà deux lignes contenant un angle droit, la plus petite a la longueur d'un pied, et la plus longue la dépasse d'un tiers. »

« Le triangle que voici est un symbole sacré. Les côtés comprennent respectivement 3, 4 et 5 des segments égaux. Ces nombres sont puissants. Leur puissance se montre dans leurs *ibdi*

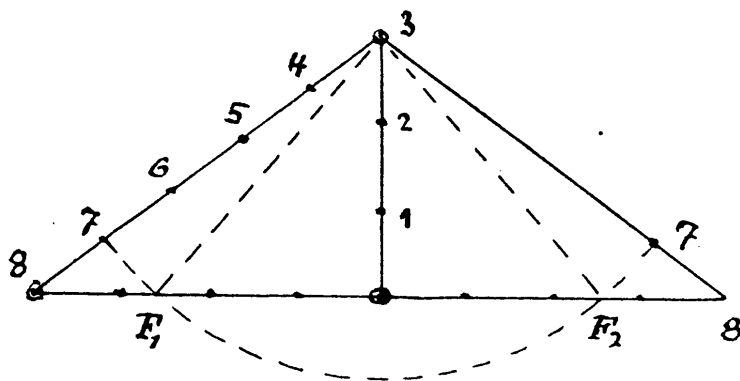
9 ibdi 3

16 ibdi 4

25 ibdi 5

et 25 se décompose en 16 plus 9. »

« C'est sur la base de ce triangle sacré que j'ai construit l'ovale. Les lignes je les trace avec un stylet fin. Enlevant notre troisième clou, je répète notre construction de l'autre côté.



Les deux triangles sacrés que voici ont en commun le côté mesurant un pied de long et leurs bases, plus longues d'un tiers, sont en ligne droite. Sur celle-ci je marque deux points, les foyers dont partiront les rayons qui traceront notre courbe. Pour les trouver, je déplace provisoirement le clou de la huitième à la septième place et je m'en sers pour transpercer les points en question. Remplaçant ce clou à la huitième place, je le fixe au second foyer. Alors j'enlève le premier clou, avec lui je transperce le second foyer, puis, tendant avec mon stylet la partie

la plus longue de la corde, entre les deux foyers, je trace la courbe. Mais regarde !

« Ce n'est pas moi qui ai fait cette découverte. La tradition en a été conservée dans notre temple pendant des siècles et des siècles. Je ne fais que te la transmettre : utilise-la ! »

C'est là la première scène. Je ne l'ai imaginée qu'en partie. Le petit cône existe encore, vous pouvez le prendre en main au British Museum à Londres. Il a souffert du temps et, d'autre part, il va sans dire qu'à cette époque reculée l'exactitude dans la construction de modèles laissait à désirer. J'ai examiné la base de ce cône, il y a à peine quinze jours. Lorsque j'ai mesuré le grand axe et le petit axe pour vérifier s'il s'agit vraiment d'une ellipse, j'ai reconnu, à mon grand étonnement, le *triangle cosmique* dont je vous ai déjà parlé à l'occasion de mon étude sur le nombre nuptial de Platon. Je me suis alors souvenu que Moritz Cantor, dans son Histoire des mathématiques, prétend qu'il serait difficile de rejeter complètement la tradition relatée par Strabon et Jamblique, que Pythagore aurait séjourné, non seulement en Egypte, le *Deutschland* de ces temps-là, mais aussi à Babylone.

La scène change. .

Dans la colonie doriennne de Crotone, qui occupait l'extrémité du golfe de Tarente dans l'Italie méridionale, Pythagore a fondé un institut, où il demeure avec ses disciples. Au début, c'était plutôt une institution religieuse et morale. Pythagore avait réussi dans son premier but, celui d'arracher la jeunesse à la volupté et à la débauche qui menaçait l'avenir de la race. Ici à Fribourg, on est tenté de comparer l'activité de la société pythagoricienne à celle de la remarquable société fondée mille ans plus tard par Ignace de Loyola. Un des moyens employés par toutes les deux pour combattre le vice, c'est l'étude de la science pure, et Pythagore se promène au bord de la Méditerranée, méditant sur les mystères fondamentaux des nombres. « Tout est nombre ! » C'était sa doctrine primitive.

En Egypte, Pythagore avait étudié les mathématiques, science encore fort embryonnaire, enseignée en secret par les prêtres. Ce n'étaient que des règles très élémentaires et quelque-

fois fausses, des relations arithmétiques et géométriques, employées tantôt dans le culte, comme symboles, tantôt dans la vie pratique. Une vue générale des nombres et des grandeurs n'existait pas. Un document fort ancien, conservé par Proclus, nous dit ceci :

« Pythagore fit, des recherches effectuées dans cette branche de la connaissance, une vraie science, en considérant d'un point de vue plus élevé ses fondements, et en approfondissant les théorèmes d'une façon plus abstraite et plus intellectuelle. »

C'est Pythagore qui formula clairement des distinctions générales, telles que

Unité — Pluralité,

Pair — Impair,

Nombre premier — Nombre composé,

et ceci non seulement sans papier, crayon et encre, mais encore sans un système méthodique de notation. En effet, les symboles numériques employés en Egypte, et que nous trouvons encore gravés sur la pierre ou peints sur le papyrus, permettent l'identification des nombres, mais ne se prêtent pas à l'élaboration d'une théorie. Quant au système précieux de notation sexagésimale pratiqué à Babylone, il n'a pas pénétré en Europe; il y aurait lieu, à ce propos, de parler de la rétrogression dans la civilisation.

On se figure que Pythagore employait une méthode qu'il avait lui-même inventée. Il se servait habituellement de sa canne pour faire des trous dans le sable pour représenter les nombres. Ou bien, à en juger par une phrase d'Aristote, il se servait à cet effet de cailloux. En tout cas cette dernière méthode a donné lieu à des expressions qu'on trouve, l'une, dans Plutarque,

« maladroit avec les cailloux »,

c'est-à-dire *incapable de faire un calcul*, et l'autre, dans Hérodote,

« raisonner avec les cailloux »,

c'est-à-dire *calculer*.

Une rangée de trous en ligne droite représentait un nombre. Un trou ou un caillou c'était l'unité, le principe du nombre, mais d'après ce point de vue, qui subsista en Grèce pendant des

siècles, l'unité elle-même n'était pas un nombre. Quelquefois cependant, elle semblait jouer le rôle d'un nombre, mais d'un nombre exceptionnel, anarchiste. Ce n'est qu'en se servant de cette méthode de représentation que je m'explique le mot énigmatique, beaucoup discuté, que *l'unité est à la fois paire et impaire*. Le trou unique peut être regardé comme une figure symétrique ou asymétrique. Les dessins symétriques correspondent aux nombres pairs, les asymétriques aux impairs.

Dans une de ces formes pythagoriciennes les trous étaient rangés de chaque côté sur deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre. Tout nombre impair comprenait le trou au point d'intersection des deux lignes. Une figure de ce genre rappelait à Pythagore un instrument de précision d'origine babylonienne employé en Egypte dans différents buts, le GNOMON, et le nombre ainsi représenté, il le nomme *nombre gnomon*. Pour nous, c'est le nombre impair général $2n + 1$, n correspondant au nombre de trous se trouvant de chaque côté du sommet.

Revenant sur ses pas, Pythagore retrouve une de ces figures. D'un coup d'œil, il y voit la moitié d'un contour du carré. Vite, il complète le tableau, enfonçant tour à tour, à droite et à gauche, sa canne, et apercevant toujours dans son imagination les trous encore à faire. C'est additionner des gnomons l'un après l'autre,

$$9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$$

pour en faire un carré.

La figure achevée, il la voit dans toute sa généralité. Il en tire la formule qui permet d'identifier la somme de n premiers nombres impairs, commençant par l'unité comme principe avec *le nombre carré* ou, comme s'exprimait Pythagore, *égal-fois-égal*:

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n.n$$

En même temps Pythagore reconnaît dans les mots d'Aristote « qu'un carré, quand on l'entoure d'un gnomon, est agrandi, mais ne change pas de forme ».

$$4.4 + 9 = 5.5$$

$$(n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2$$

Cette première relation — nous l'avons vu — Pythagore l'avait déjà rencontrée, soit à Babylone, soit en Egypte, où elle jouait un rôle important dans la doctrine ésotérique en symbolisant l'union mystique de l'éternel féminin avec l'éternel masculin. L'aire du triangle sacré, qui est 6, produit du premier nombre dit masculin avec le premier féminin, symbolise le mariage. ISIS et OSIRIS se cachent sous les symboles des côtés, tandis que l'hypoténuse représente leur enfant HORUS. Le triangle lui-même, par une synthèse, devient le symbole de l'ordre de l'univers. Pythagore introduisit le mot distinctif KOSMOS. Ce triangle, c'est le *triangle cosmique*, l'ellipse de Babylone, je l'appelle *l'ellipse cosmique*.

Les nombres carrés constituent un cas spécial de ce que Pythagore nommait *nombres plans*, produit de deux facteurs, qui, dans ce cas particulier, sont égaux. Les Pythagoriciens disaient, sans doute selon l'enseignement du maître, qu'en engendrant son carré, un nombre « devient plan », en engendrant son cube il « devient solide ». L'égalité

$$3.3 + 4.4 = 5.5$$

disait, qu'en devenant plans, les côtés équivalaient ensemble à l'hypoténuse, qu'ils lui étaient *égaux en puissance*. HORUS valait en puissance ses parents ensemble, ce qui disait pour les initiés que la nature humaine est la somme du divin et du naturel.

Mais ce n'est pas de ces interprétations mystiques que Pythagore s'occupe au moment où nous le considérons. En mathématicien, il ne pense qu'à généraliser les faits qu'il vient de découvrir. Ce qui le passionne, c'est qu'il voit un cas spécial dans sa relation

$$n.n = (n-1).(n-1) + (2n-1),$$

le nombre 9 étant à la fois *égal-fois-égal* et *gnomon*. Et il prévoit que chaque fois qu'un nombre a simultanément ces deux formes, on aura une relation semblable entre trois nombres *devenus plans*.

Or, le nombre gnomon, c'est le nombre impair quelconque. Il fallait donc prendre un nombre carré impair quelconque, le représenter, comme ici le nombre 9, par un gnomon, et compléter

le carré. Le nombre de trous à faire pour le côté du petit carré saute aux yeux, c'est la moitié des trous dans le gnomon moins un.

Heron dans le premier siècle de notre ère et Proclus au cinquième nous racontent que cette règle générale est une des découvertes de Pythagore. Nous la représentons par la relation

$$m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2,$$

où m est un nombre impair quelconque.

Pythagore se met à étudier les cas particuliers de sa découverte. Le premier après celui dont il était parti serait $m = 5$, et il a

$$5 \cdot 5 + 12 \cdot 12 = 13 \cdot 13$$

$$25 + 144 = 169$$

Mais cette égalité *en puissance* de 13 avec 5 et 12 ensemble, est-ce que cela résulte, comme dans le cas cosmique, du fait qu'un triangle rectangle, de côtés 5 et 12 aurait l'hypoténuse 13 ? Pythagore pose sa canne et l'enfonce dans le sable pour tracer une rigole en ligne droite. Puis, la reprenant à la main, il enfonce la pointe dans le sable pour marquer dans la rigole treize trous équidistants. Il désigne les trous extrêmes A et B, et, partant de B, il trace une seconde rigole, perpendiculaire à la première, et il y fait cinq trous aux mêmes distances qu'auparavant. Le dernier trou, il le désigne par Γ. Enfin il trace une troisième rigole entre A et Γ. Celle-ci contiendra-t-elle précisément 13 trous ? Il le semble; il y fait en effet 13 trous. Mais est-il sûr de l'exactitude de ce qu'il voit ?

Il est plus facile de reconnaître à vue d'œil l'égalité que le rapport, et, en guise de contrôle, Pythagore fait un trou supplémentaire Δ au delà de B dans la première rigole. Le triangle AΓΔ est-il isocèle ? Vraiment il en a l'air, au moins. Mais si cela est vrai, on devrait pouvoir le démontrer.

Il regarde le petit triangle rectangle BΓΔ de côtés 1 et 5 : et se souvenant de la proportion

$$1 : 5 = 5 : 25,$$

il continue sa rangée de trous dans l'autre direction au-delà de A, en ajoutant 13 trous, pour faire une rangée de 26 trous, avec

A au milieu, un à droite et 25 à gauche de B; le dernier trou il le désigne par E. Le grand triangle rectangle EBF ne diffère donc du petit triangle rectangle BΔΓ que dans ses dimensions, celles-là étant 5 fois plus grandes que celles-ci. Les angles sont donc les mêmes dans les deux cas,

$$\text{EFB et } \Gamma\Delta\text{B, BEF et B}\Gamma\Delta.$$

Par conséquent l'angle EΓΔ est la moitié de la somme des angles de la figure entière EΓΔ; il est donc un angle droit, car Pythagore n'ignore pas que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits, théorème énoncé cent ans auparavant par le sage Thales, celui qui disait « Connais toi-même »!

A ce point Pythagore voit que sa démonstration est complète; car ce même Thales avait aussi démontré que le cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse d'un triangle rectangle, passe par le sommet de l'angle droit. Par suite $A\Delta = AE = A\Gamma$. Eureka! AΓ contient en effet 13 trous! Voilà la démonstration qu'il cherchait, et comme elle est simple! Pythagore convaincu de la généralité de son théorème applique en un clin d'œil le même raisonnement au triple 7, 24, 25 et à 9, 40, 41.

Au lieu de la proportion $1 : 5 = 5 : 25$, il n'a qu'une proportion de la même forme. Pour nous cette proportion est

$$1 : n = n : n^2,$$

car dans la série de triples découverte par Pythagore

$$n, (n^2 - 1)/2, (n^2 + 1)/2$$

les deux derniers nombres diffèrent toujours d'une unité.

Quel beau résultat! Avec l'impétuosité du génie, Pythagore l'énonce dans toute sa généralité:

« Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés sur les deux côtés ».

Je vous ai raconté comment il me semble que Pythagore doit avoir trouvé son théorème. Il ne tarda pas à s'apercevoir que sa démonstration primitive n'était pas applicable sans autre au cas le plus général. L'évolution d'une démonstration générale et même d'une centaine de démonstrations, appartient, comme dirait Rudyard Kipling « to another story ».